

4 Anwendungen des Impulssatzes

4.1

Rohrbogen

Im Rohrleitungsbau sind 90°-Rohrbögen in Gusskonstruktion mit Normflansch sehr häufig anzutreffen. Hierbei wird neben der Strömungsumlenkung oft auch eine Flächenvariation von A_1 nach A_2 durchgeführt, wenn es sich z.B. darum handelt, einen Rohrabschnitt mit einem Normdurchmesser mit einem Rohrabschnitt eines anderen Normdurchmessers rechtwinklig zu verbinden (s. **Bild 4.1**). Es sind auch Fälle bekannt, in denen z.B. ein Betonkanal mit nahezu rechteckigem Strömungsquerschnitt A_1 rechtwinklig an eine Stahlrohrleitung mit kreisrundem Strömungsquerschnitt A_2 anschließt, wobei $A_1 \neq A_2$ sein kann. In der folgenden Aufgabe wird das Flächenverhältnis A_1 / A_2 mit k bezeichnet, wobei $k > 1$ einen Beschleunigungskrümmen und $k < 1$ einen Verzögerungskrümmen charakterisiert, s. **Bild 4.1**.

Gegeben:

- $k = A_1 / A_2$ Flächenverhältnis des 90°-Rohrbogens mit $0,6 \leq k \leq 3,0$.

Vorausgesetzt:

- Verlustfreie, stationäre Strömung von (1) nach (2),
- Kein Überdruck im Austrittsquerschnitt: $p_{0,2} = p_2 - p_a = 0 \text{ bar}$,
- Stromfadengewichtskraft vernachlässigbar: $F_G \ll R_W$ und
- Horizontale Lage des Rohrbogens.

Gesucht:

Richtungswinkel α der Reaktionswandkraft \underline{R}_W in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis $k = A_1 / A_2$, s. **Bild 4.1**.

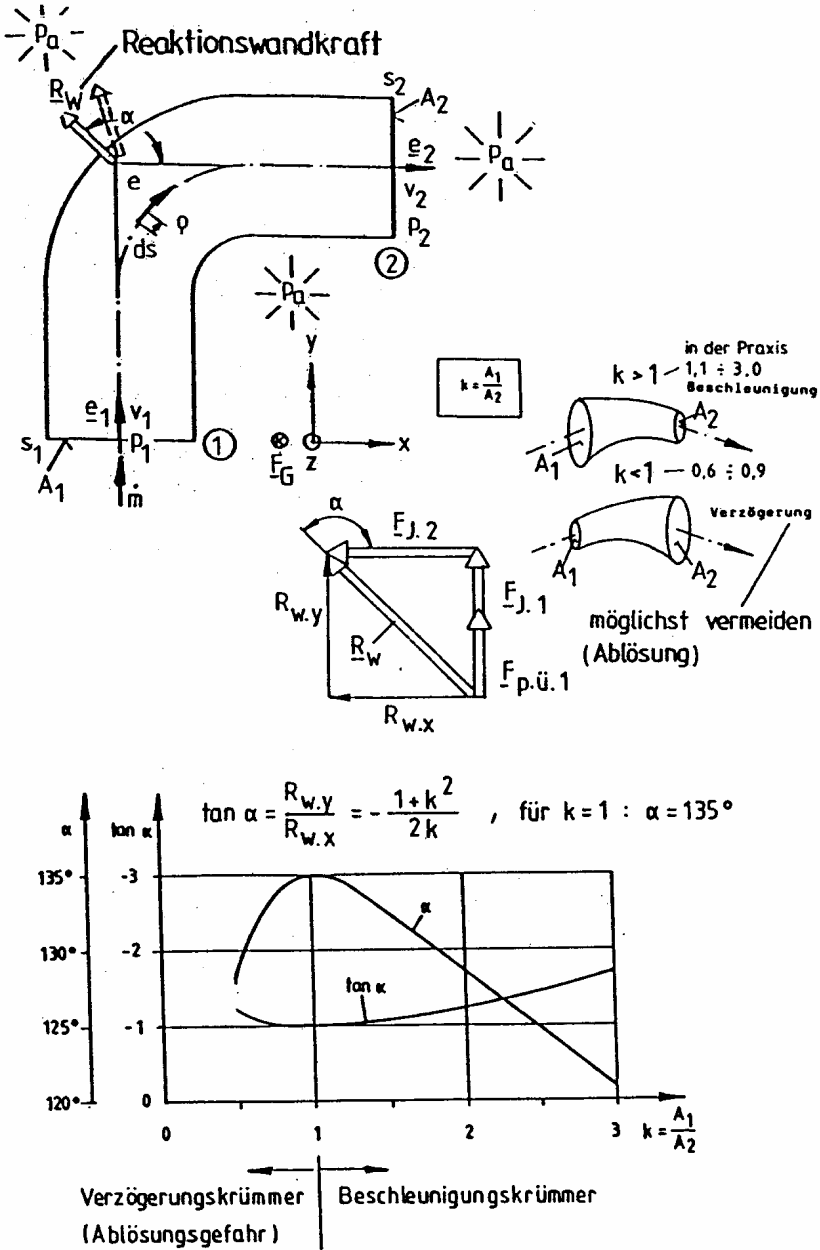


Bild 4.1 Rohrbogen mit unterschiedlichen Richtungen der Reaktionswandkraft

Lösung:

Mit Anwendung der Gl.(I-4.24) für die **Reaktionswandkraft** ergibt sich, bezogen auf dieses Problem:

$$\underline{R}_W = [\dot{m}v_1 + (p_1 - p_a)A_1]\underline{e}_1 - [\dot{m}v_2]\underline{e}_2, \quad (4.1)$$

$$\underline{e}_1 = \underline{e}_y = (0, 1, 0), \quad \underline{e}_2 = \underline{e}_x = (1, 0, 0),$$

$$\dot{m}v_1 = \rho A_1 v_1^2 \text{ und } \dot{m}v_2 = \rho A_2 v_2^2.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (I-3.10) folgt v_2 zu:

$$v_2 = k v_1. \quad (4.2)$$

Mit der BERNOULLI-Gl. (I-3.3) ergibt sich für stationäre horizontale Strömung mit $p_2 = p_a$:

$$p_1 - p_a = \frac{\rho}{2} (k^2 v_1^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} v_1^2 (k^2 - 1). \quad (4.3)$$

Diese Gleichung wird in (4.1) eingesetzt und liefert:

$$\underline{R}_W = \left[\rho A_1 v_1^2 + \frac{\rho}{2} v_1^2 (k^2 - 1) A_1 \right] \underline{e}_y - [\rho k A_1 v_1^2] \underline{e}_x. \quad (4.4)$$

Hieraus folgt:

$$R_{W,x} = -\rho k A_1 v_1^2 \quad (4.5)$$

und

$$R_{W,y} = +\rho A_1 v_1^2 \left(1 + \frac{k^2 - 1}{2} \right) = \rho A_1 v_1^2 \frac{1 + k^2}{2}. \quad (4.6)$$

Schließlich findet man den **Richtungswinkel** α aus:

$$\tan \alpha = \frac{R_{W,y}}{R_{W,x}} = -\frac{\rho A_1 v_1^2 (1 + k^2)}{2 \rho k A_1 v_1^2} = -\frac{1 + k^2}{2k}.$$

Dieser funktionale Zusammenhang ist in **Bild 4.1** dargestellt. Anschaulicher ist der in demselben Bild gezeigte Verlauf als Funktion:

$$\alpha = \arctan \left(-\frac{1 + k^2}{2k} \right).$$

Tabelle 4.1 gibt die k , α und $R_{W,y}/R_{W,x}$ -Werte wieder:

Tabelle 4.1 Richtungswinkel α in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis k

$k = A_1 / A_2$	$R_{W,y} / R_{W,x}$	α in Grad
0,3	-1,82	118,8
0,4	-1,45	124,6
0,5	-1,25	128,7
0,7	-1,06	133,2
1,0	-1,00	135,0
1,5	-1,08	132,7
2,0	-1,25	128,7
2,5	-1,45	124,6
3,0	-1,67	121,0

Auffallend ist die Tatsache, dass der Richtungswinkel α für alle Flächenverhältnisse k den Wert 135° nicht überschreitet. Für alle $k \neq 1$ zeigt die Reaktionswandkraft mehr oder weniger in die Zuströmrichtung.

4.2

Schub eines Flüssigkeitsstrahls

Bei diesem Anwendungsbeispiel soll die Schubwirkung eines freien Flüssigkeitsstrahls studiert werden. **Bild 4.2** zeigt einen Schienen-Schubwagen, der aufgrund der Schubwirkung eines horizontal austretenden Flüssigkeitsstrahls mit den Puffern unter Zwischenschaltung einer Schubkraftmessdose gegen ein Widerlager gedrückt wird. Dieses Beispiel hat prinzipiellen Charakter, kann aber als Hintergrund für das Studium der Strahlantriebe dienen. Bekannt sind auch Schubantriebe von Schnellbooten mit einem Freistrahл **über** Wasser.

Gegeben:

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$	Dichte der Flüssigkeit (Wasser),
$A_2 = 0,050 \text{ m}^2$	Strahlaustrittsfläche, entspricht $d_2 = 0,250 \text{ m}$,
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$	Fallbeschleunigung und
$h = 2,500 \text{ m}$	Geodätische Höhe des Flüssigkeitsspiegels A_1 über der Flüssigkeitsstrahlachse.

Vorausgesetzt:

- Konstante Spiegelhöhe: $h = \text{const}$,
- Verlustfreie, stationäre Strömung von (1) nach (2),
- Kein Überdruck im Ein- und Austrittsquerschnitt: $p_1 = p_2 = p_a$,
- Horizontale Lage des Flüssigkeitsstrahls,

- Strahlgeschwindigkeit v_2 in positiver x-Richtung:
 $\underline{v}_2 = v_2 \underline{e}_x$ mit $\underline{e}_2 = \underline{e}_x$ und
- Strömungsgeschwindigkeit v_1 im Flüssigkeitsspiegel A_1 vernachlässigbar klein.

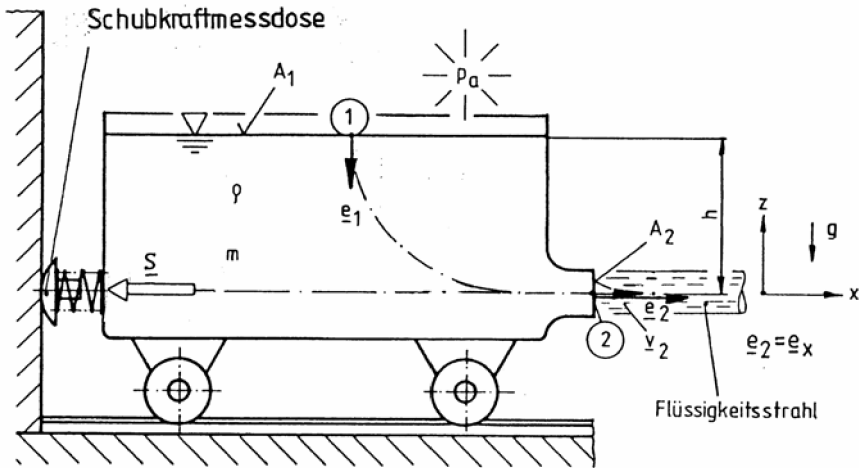


Bild 4.2. Schienen-Schubwagen mit freiem Flüssigkeitsstrahl (Strahlschub)

Gesucht:

Schub S des Flüssigkeitsstrahls.

Lösung:

Anwendung von Gl.(I-4.24) für die Reaktionswandkraft, zugeschnitten auf dieses Problem, ergibt:

$$\underline{S} = -[\dot{m} v_2] \underline{e}_x. \quad (4.7)$$

Mit $\dot{m} = \rho A_2 v_2$ und $v_2 = \sqrt{2gh}$, Gl. (I-3.13), TORRICELLI-Gl., folgt:

$$S = -\rho A_2 v_2^2 = -2\rho gh A_2 \quad (4.8)$$

und zahlenmäßig:

$$S = -2\,453 \text{ N}.$$

Es ergibt sich, gemessen am technischen Aufwand, ein relativ geringer Schub. Auch die Austrittsgeschwindigkeit $v_2 = 7,0 \text{ m/s}$ ist verhältnismäßig klein. Der Schub S ist im vorliegenden Beispiel von der Fahrzeuggeschwindigkeit unabhängig. Das Fahrzeug wird, falls das Widerlager nicht existiert, durch den

Schub S solange beschleunigt, bis die sog. **Schubleistung** = **Schub** \times **Fahrzeuggeschwindigkeit** der Verlustleistung durch Luftwiderstand und Radverluste bei der erreichten Fahrzeuggeschwindigkeit entspricht. Hier aber bleibt das Fahrzeug vor dem Widerlager. Man nennt derartige Versuche auch „Standschub-Versuche“ oder „Pfahlzugprobe“. Letztgenannter Ausdruck stammt aus der Schiffstechnik.

4.3

Schubvorrichtung bei ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung im Austritt

Bild 4.3 zeigt den Vergleich von drei Schubvorrichtungen, von denen die obere (a) eine konstante Geschwindigkeitsverteilung $v_2(r)$, die mittlere (b) eine ungleichmäßige und die untere (c) wieder eine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung $v_2(r)$ aufweist, allerdings bei doppeltem Öffnungsquerschnitt A_2 . Charakteristisch ist, dass bei allen Schubvorrichtungen (a)...(c) der gleiche Massenstrom \dot{m} auftritt.

Gegeben:

- Geometrie von drei Schubvorrichtungsvarianten (a)...(c) nach **Bild 4.3**.

Vorausgesetzt:

- Schubvorrichtungen in Ruhe (Standschübe),
- Stationäre Strömung,
- Inkompressibles Fluid,
- $p_2 = p_a$,
- Horizontale Strömung,
- $\dot{m} = \text{const}$ für (a), (b), (c),
- $A_{2(a)} = A_{2(b)}$,
- $A_{2(c)} = 2A_{2(b)} = 2A_{2(a)}$ und
- $v_{2(b)}(r)$ ungleichmäßig verteilt.

Gesucht:

1. Schübe $R_{W(a)}$, $R_{W(b)}$, $R_{W(c)}$ und
2. Größenvergleich der Standschübe.

Lösung:

Zu 1.:

Gleichung (I-4.24) für die Reaktionswandkraft liefert, angewendet auf dieses Problem:

$$(a) \underline{R}_{W(a)} = -(\dot{m} v_{2(a)}) \underline{e}_2,$$

$$\boxed{R_{W(a)} = -\dot{m} v_{2(a)} = -\rho A_{2(a)} v_{2(a)}^2} \quad (4.9)$$

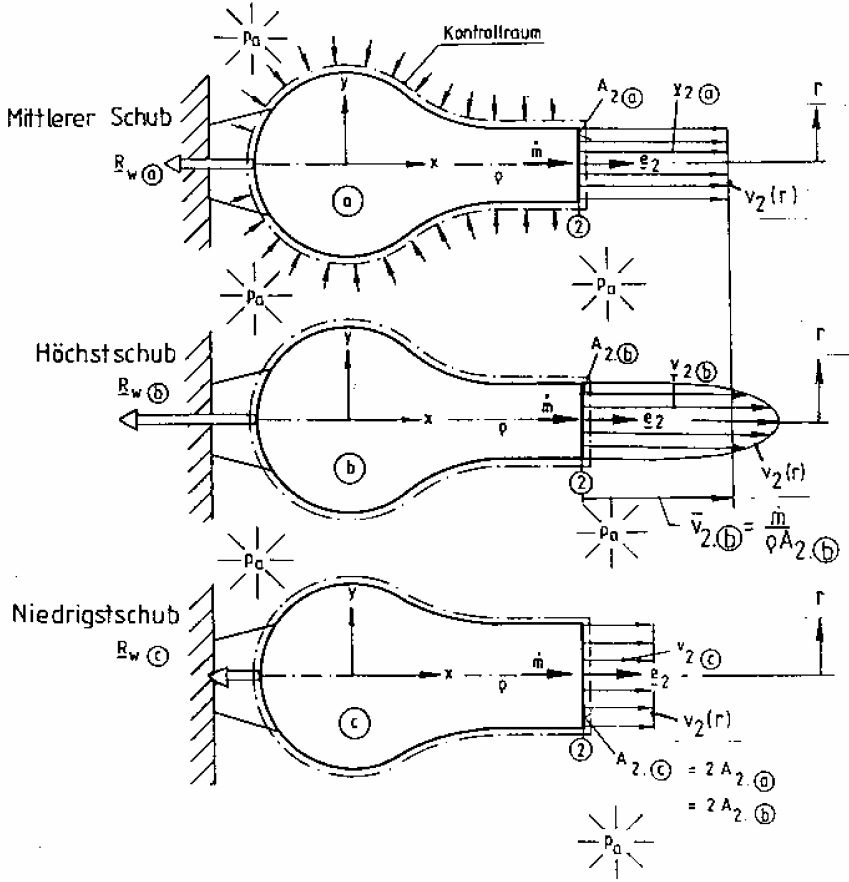


Bild 4.3 Schubvorrichtungen bei unterschiedlicher Geschwindigkeitsverteilung $v_2(r)$ und gleichem Massenstrom \dot{m}

$$(b) \underline{R}_{W(b)} = - \left(\int_{\dot{m}} v_{2(b)} d\dot{m} \right) e_2,$$

$$\boxed{R_{W(b)} = - \int_{\dot{m}} v_{2(b)} d\dot{m} = - \rho \int_{A_{2(b)}} v_{2(b)}^2 dA_{2(b)}} \quad (4.10)$$

(c) $\underline{R}_{W(c)} = -(\dot{m}v_{2(c)})\underline{e}_2$ und

$$\boxed{R_{W(c)} = -\dot{m}v_{2(c)} = -\rho A_{2(c)} v_{2(c)}^2}. \quad (4.11)$$

Zu 2.:

Größenvergleich der Standschübe:

Wird Gl.(4.11) ins Verhältnis zu Gl.(4.9) gesetzt, so gilt mit $v_{2(c)} = \frac{v_{2(a)} A_{2(a)}}{A_{2(c)}}$,

Gl.(I-3.10):

$$\frac{R_{W(c)}}{R_{W(a)}} = \frac{\dot{m}v_{2(c)}}{\dot{m}v_{2(a)}} = \frac{A_{2(a)} v_{2(a)}}{A_{2(c)} v_{2(a)}} = 0,5.$$

Es ist also $R_{W(a)} > R_{W(c)}$, $R_{W(a)} = 2R_{W(c)}$.

Die gleiche Prozedur mit Gln. (4.10) und (4.9) liefert:

$$\frac{R_{W(b)}}{R_{W(a)}} = \frac{\rho A_{2(b)} \overline{v_{2(b)}}^2}{\rho A_{2(a)} \overline{v_{2(a)}}^2} = \frac{\overline{v_{2(b)}}^2}{\overline{v_{2(a)}}^2} = \frac{\overline{v_2}^2}{\overline{v_2}^2} > 1.$$

Dies ist im letzten Teil der Gleichung die sog. SCHWARZ⁶-Ungleichung. Somit ist

$$\boxed{R_{W(b)} > R_{W(a)} > R_{W(c)}}.$$

Es zeigt sich also der Höchstschub in der Schubvorrichtung (b). Dies ist damit zu erklären, dass der Impuls in der Strahlmitte wesentlich mehr zum Schub beiträgt als der Mittelwert der Geschwindigkeit $\overline{v_{2(b)}}$ dieser Schubvorrichtung. Bei konstantem Massenstrom \dot{m} kommt es also bei Maximierung des Schubes darauf an, den **Austrittsquerschnitt A_2 möglichst klein** bei einer Geschwindigkeitsspitze in Strahlmitte zu gestalten.

⁶ SCHWARZ, Hermann Amadeus, geb. 1843 in Waldenburg (Schlesien), gest. 1921 in Berlin, Professor für Mathematik (Zürich, Göttingen, Berlin), Begründer der zweidimensionalen Variationsrechnung, Beiträge zur statistischen Mathematik.

4.4

Schräger Freistrah auf vertikale Platte

Bild 4.4 zeigt einen horizontal angeordneten schrägen Flachstrahl („eckiger Freistrah“), der in der Technik häufig zur Oberflächenbehandlung von Platten, z.B. Sandstrahlen, Trocknen, Lackieren, eingesetzt wird. Bei diesem Strömungsvorgang tritt der unerwünschte Effekt des „Backflow“ ein, der den Bearbeitungsprozess empfindlich stören kann. Hierbei wird ein sog. Massenrückstromkoeffizient

$$\varepsilon = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \quad (4.12)$$

definiert, wobei \dot{m}_2 den „Backflow“ und \dot{m}_1 den Zustrom aus der Flachstrahldüse darstellt. Im Folgenden soll dieser Massenrückstromkoeffizient in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α ermittelt werden.

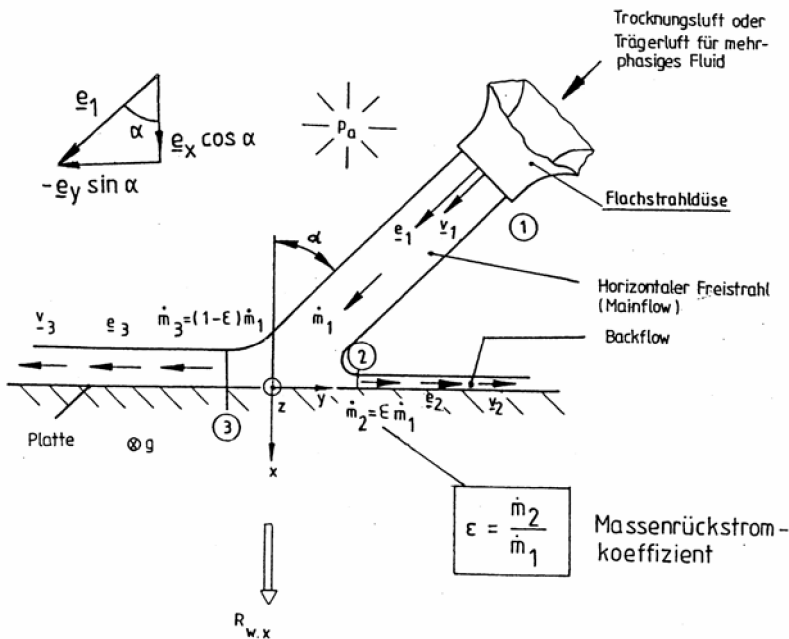


Bild 4.4 Horizontaler schräger Freistrah z.B. zum Trocknen oder Entrosten (Sandstrahlen) einer Platte

Gegeben:

- v_1 Volumetrischer Mittelwert der Geschwindigkeit in der Austrittsebene (1) der Flachstrahldüse,
 \dot{m}_1 Massenstrom aus der Flachstrahldüse und
 α Neigungswinkel der Flachstrahldüse gegen die Flächennormale der Platte.

Vorausgesetzt:

- Reibungsfreies Fluid,
- Vernachlässigbar kleine Schubspannungen an der Platte, d.h. $R_{W,y} \rightarrow 0$,
- Stationäre Strömung,
- Ebene Strömung in der x- y-Ebene,
- Horizontale Strömung $z_1 = z_2 = z_3$ und
- Freistrahlsströmung, d.h. $p_1 = p_2 = p_3 = p_a$.

Gesucht:

1. $R_{W,x}$ Reaktionswandkraft in x-Richtung und
2. ε Massenrückstromkoeffizient.

Lösung:

Zu 1.:

Die Reaktionswandkraft \underline{R}_W , angepasst an dieses Problem (s. **Bild 4.4**), lautet nach Gl. (I-4.25):

$$\underline{R}_W = \dot{m}_1 v_1 \underline{e}_1 - \dot{m}_2 v_2 \underline{e}_2 - \dot{m}_3 v_3 \underline{e}_3.$$

Mit der BERNOULLI-Gl. (I-3.3) ergibt sich für die Strömung zwischen den Stellen (1) und (2):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

und mit $p_1 = p_2 = p_a$ und $z_1 = z_2$ folgt zwischen den Stellen (1) und (2) $v_1 = v_2$. Dieselbe Prozedur kann auch für die Stelle (3) vollzogen werden, so dass sich insgesamt ergibt: $v_1 = v_2 = v_3 = v$.

Die Erhaltung der Masse fordert:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

mit $\dot{m}_2 = \varepsilon \dot{m}_1$ und $\dot{m}_3 = (1 - \varepsilon) \dot{m}_1$.

Die Reaktionswandkraft \underline{R}_W ergibt sich nach Gl.(I-4.25):

$$\boxed{\underline{R}_W = \dot{m}_1 v \underline{e}_1 - \varepsilon \dot{m}_1 v \underline{e}_2 - (1 - \varepsilon) \dot{m}_1 v \underline{e}_3}. \quad (4.13)$$

Die Lage der Einheitsvektoren ist:

$$\underline{e}_1 = \cos \alpha \underline{e}_x - \sin \alpha \underline{e}_y, \underline{e}_2 = \underline{e}_y \text{ und } \underline{e}_3 = -\underline{e}_y.$$

So folgt aus Gl. (4.13):

$$\begin{aligned} \underline{R}_W &= \dot{m}_1 v \cos \alpha \underline{e}_x - \dot{m}_1 v \sin \alpha \underline{e}_y - \varepsilon \dot{m}_1 v \underline{e}_y + (1 - \varepsilon) \dot{m}_1 v \underline{e}_y \\ &= \dot{m}_1 v \cos \alpha \underline{e}_x + [(1 - \varepsilon) \dot{m}_1 v - \dot{m}_1 v \sin \alpha - \varepsilon \dot{m}_1 v] \underline{e}_y \text{ und} \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{W,x} = \dot{m}_1 v \cos \alpha}.$$

Da es sich voraussetzungsgemäß um ein reibungsfreies Fluid handelt, also keine Wandschubspannungen auftreten können, so können sich nur die Normalspannungen auswirken, die zur Druckkraft $R_{W,x}$ führen. Durch das alleinige Auftreten des Druckes und nicht der Wandschubspannungen ist also

$$\boxed{R_{W,y} = 0}.$$

Hiermit ergibt sich ε aus:

$$(1 - \varepsilon) \dot{m}_1 v - \dot{m}_1 v \sin \alpha - \varepsilon \dot{m}_1 v = 0, \text{ u. zw.:}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1 - \sin \alpha}{2}}. \quad (4.14)$$

4.5

Reaktionswandkraft eines Duschkopfes

In **Bild 4.5** ist ein Duschkopf (Vielstrahldüse) abgebildet. Es handelt sich hierbei um eine vielfach verzweigte Strömung mit $i = 1$ Eintrittsquerschnitt und k Austrittsquerschnitten. Das Problem kann entsprechend Gl.(I-4.25) nur für stationäre Strömungen behandelt werden.

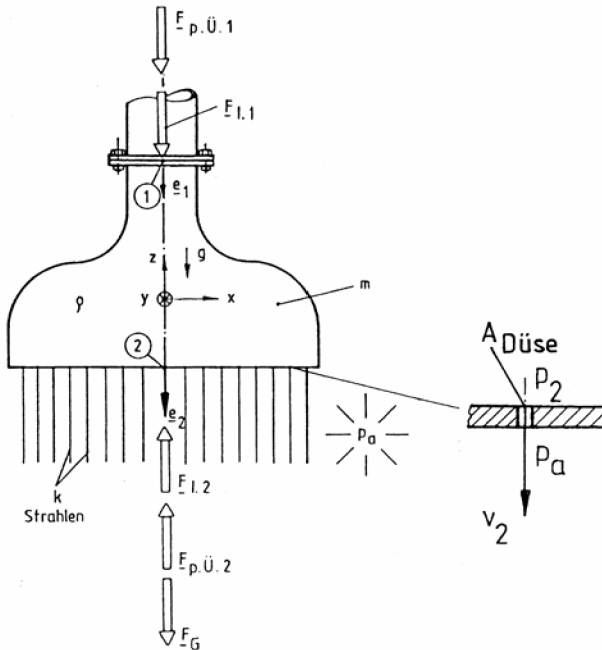


Bild 4.5 Zur Anwendung des Impulssatzes auf einen Duschkopf

Gegeben:

ρ	$= 1000 \text{ kg/m}^3$	Dichte der Flüssigkeit,
A_1	$= 284 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$	Eintrittsfläche, entspricht $d_1 = 19 \text{ mm}$,
A_2	$= 10 \cdot A_1$	Fläche des Duschkopfbodens,
$A_{\text{Düse}}$	$= 0,785 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$	Einzelne Austrittsfläche, entspricht $d_2 = 1,0 \text{ mm}$,
k	$= 120$	Anzahl der Austrittsflächen,
$p_{\text{Ü.1}}$	$= 0,4 \text{ bar}$	Überdruck $p_1 - p_a$ im Eintritt,
$p_{\text{Ü.2}}$	$= 0,4 \text{ bar}$	Überdruck $p_2 - p_a$ im Austritt,
\dot{m}	$= 0,4 \text{ kg/s}$	Massenstrom durch Duschkopf,
m	$= 0,25 \text{ kg}$	Fluidmasse im Duschkopf und
g	$= 9,81 \text{ m/s}^2$	Fallbeschleunigung.

Vorausgesetzt:

- Stationäre Verzweigungsströmung,
- Reibungsfreies Fluid,
- Inkompressibles Fluid,
- Dünnwandige Konstruktion,
- Höhenunterschied vernachlässigbar und
- Kräfte nur in z -Richtung.

Gesucht:

Reaktionswandkraft $R_{W,z}$ in Abhängigkeit von k .

Lösung:

Es wird Gl.(I-4.25) für die Reaktionswandkraft verzweigter Rohrleitungen mit stationärer Strömung angewendet. Diese Gleichung lautet, zugeschnitten auf dieses Problem:

$$\underline{R}_W = \underline{F}_G + (\dot{m}_1 \underline{v}_1 + p_{\ddot{U},1} A_1) \underline{e}_1 - \sum_k [(\dot{m}_2 \underline{v}_2 + p_{\ddot{U},2} A_2) \underline{e}_2]_k.$$

Mit $\underline{F}_G = -mg \underline{e}_z$, $\underline{e}_1 = -\underline{e}_z$, $\underline{e}_2 = -\underline{e}_z$, $\dot{m} = \dot{m}_1 = k \dot{m}_2$ folgt:

$$R_{W,z} = -m g - (\dot{m}_1 v_1 + p_{\ddot{U},1} A_1) + (k \dot{m}_2 v_2 + p_{\ddot{U},2} A_2). \quad (4.15)$$

Hier erkennt man wieder die wichtige Aussage zum speziellen Impulssatz der Strömungstechnik:

Die Impuls- und Druckkräfte sind auf das im Kontrollraum (Innenraum des Duschkopfes) eingeschlossene Fluid gerichtet.

Hier sind die Impulskräfte $-\dot{m}_1 v_1$ sowie $+k \dot{m}_2 v_2$ und
 Druckkräfte $-p_{\ddot{U},1} A_1$ sowie $+p_{\ddot{U},2} A_2$.

Mit dem eintretenden Massenstrom \dot{m} ergibt sich die Eintrittsgeschwindigkeit v_1 zu:

$$v_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} \text{ und zahlenmäßig } v_1 = \frac{0,4}{1000 \cdot 284 \cdot 10^{-6}} = 1,41 \frac{m}{s}.$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (I-3.10) folgt die Austrittsgeschwindigkeit v_2 aus jeder der k Düsen zu:

$$v_2 = \frac{A_1}{k A_{Düse}} v_1 \text{ und zahlenmäßig } v_2 = \frac{284 \cdot 1,41}{120 \cdot 0,785} = 4,25 \frac{m}{s}.$$

Setzt man v_1 und v_2 in Gl.(4.15) ein, so erhält man:

$$R_{W,z} = -mg - \frac{\dot{m}^2}{\rho A_1} - p_{\ddot{U},1} A_1 + \frac{\dot{m}^2}{\rho k A_{Düse}} + p_{\ddot{U},2} A_2$$

und mit $p_{\ddot{U},1} = p_{\ddot{U},2}$:

$$\boxed{R_{W,z} = -mg - \frac{\dot{m}^2}{\rho A_1} \left(\frac{A_1}{k A_{Düse}} - 1 \right) + p_{\ddot{U},1} (A_2 - A_1)}. \quad (4.16)$$

Die Reaktionswandkraft $R_{W,z}$ (Rückstoßkraft) setzt sich aus drei Anteilen zusammen, s. **Bild 4.5**:

1. Schwerkraft

$$F_G = -mg = 0,25 \cdot 9,81 \text{ N} = -2,5 \text{ N},$$

2. Impulskraft

$$F_I = -F_{I,2} - F_{I,1} = \frac{\dot{m}^2}{\rho A_1} \left(\frac{A_1}{k A_{Düse}} - 1 \right) = + \frac{0,4^2}{10^3 \cdot 284 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{284}{1200,785} - 1 \right) \text{ N} = +1,1 \text{ N}$$

und

3. Druckkraft

$$F_{p,U} = F_{p,U,2} - F_{p,U,1} = p_{U,1} (A_2 - A_1) = 0,4 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 284 \cdot 10^{-6} \text{ N} = +1022 \text{ N}.$$

Somit ergibt sich: $R_{W,z} = +100,8 \text{ N}$.

Es fällt auf, dass die Druckkraft $F_{p,U}$ die Reaktionswandkraft $R_{W,z}$ dominierend beeinflusst. Das ändert sich auch nicht, wenn die Anzahl k der Austrittsflächen $A_{Düse}$ erheblich verringert wird:

$k = 120,$	$F_I = +1,1 \text{ N}$	$F_{p,U} = +102,2 \text{ N}$	$R_{W,z} = +100,8 \text{ N}$
60	+2,8 N	+102,2 N	+102,5 N
12	+16,4 N	+102,2 N	+116,1 N

Im Falle $k=60$ würde sich eine Austrittsgeschwindigkeit $v_2=8,5 \text{ m/s}$ einstellen und bei $k=12$ sogar $42,5 \text{ m/s}$ (ein wahrscheinlich schmerzhaftes Duschvergnügen).

4.6

Schiffspropeller

Bild 4.6 zeigt die Prinzipskizze zur Anwendung des Impulssatzes auf einen Schiffspropeller. Es ist zu beachten, dass beim Durchgang der Strömung durch den Schiffspropeller eine Strahlkontraktion und die repräsentative Energiezufuhr in dieser Modellvorstellung im sog. „Propeller Disk“ stattfinden, einer Scheibe, die von den beiden Ebenen D_1 und D_2 , die man sich unendlich nah zusammengerückt denken muss, eingerahmt wird. Vor dem Propeller, d.h. in der Ebene D_1 , ergibt sich ein Unterdruck, hinter dem Propeller in der Ebene D_2 ein Überdruck. In der Scheibe „Propeller Disk“ nimmt die Geschwindigkeit den arithmetischen Mittelwert aus An- und Abströmgeschwindigkeit an, wie im nachfolgenden Beispiel u.a. bewiesen.

Gegeben:

- Schiffsgeschwindigkeit v_1 ,
- Axialkomponente $v_{2,x}$ der Austrittsgeschwindigkeit,

- Propellerdurchmesser D und
- Fluidichte ρ .

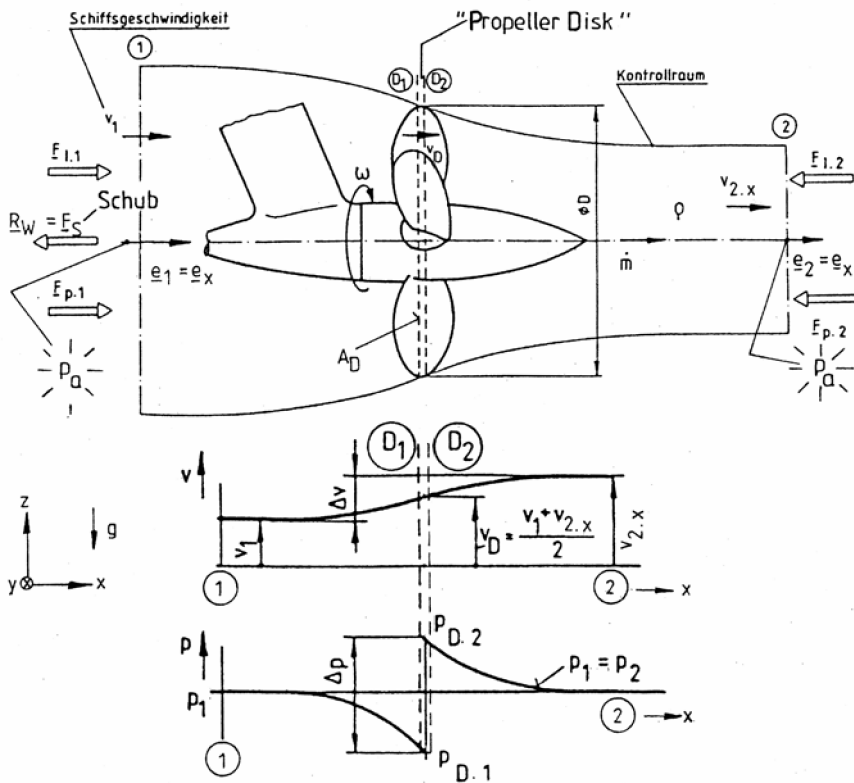


Bild 4.6 Anwendung des Impulssatzes auf einen Schiffspropeller

Vorausgesetzt:

- Stationäre Strömung,
- Achsparallele, gleichmäßige An- und Abströmung,
- Inkompressibles Fluid,
- Reibungsfreies Fluid,
- Vernachlässigbarer Einfluss des Schiffskörpers auf die Propellerdurchströmung und
- Eintrittsdruck $p_1 =$ Austrittsdruck p_2 .

Gesucht:

1. $F_s = R_{W,x}$ Schub,

2. v_D Geschwindigkeit in der Ebene „Propeller Disk“ und

3. $\zeta_s = \frac{F_s}{\frac{\rho}{2} v_1^2 A_D}$ Schubbelastungsgrad mit $A_D = \pi D^2 / 4$.

Lösung:

Zu 1.:

Mit Gleichung (I-4.24) und mit $\underline{e}_x = \underline{e}_1$, $\underline{e}_x = \underline{e}_2$ folgt der Schub zu:

$$\boxed{F_s = R_{W,x} = \dot{m}(v_1 - v_{2,x}) < 0} \quad (4.16)$$

In der Technik ist es üblich, das negative Vorzeichen von F_s unberücksichtigt zu lassen, so dass folgende in der Praxis übliche Formel für den Schub gilt:

$$\boxed{F_s = \dot{m} \Delta v = \rho v_D \frac{\pi D^2}{4} (v_{2,x} - v_1)} \quad (4.17)$$

Zu 2.:

Mit der BERNOULLI-Gl. (I-3.3) ergibt sich für stationäre Strömung zwischen den Stellen (1) bis (D_1) und (D_2) bis (2) (**Bild 4.6**):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_{D,1}}{\rho} + \frac{v_{D,1}^2}{2} \quad \text{und}$$

$$\frac{p_{D,2}}{\rho} + \frac{v_{D,2}^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_{2,x}^2}{2}.$$

Zieht man diese Gleichungen voneinander ab, so folgt mit $p_1 = p_2$ und $v_{D,1} = v_{D,2} = v_D$:

$$p_{D,2} - p_{D,1} = \frac{\rho}{2} (v_{2,x}^2 - v_1^2).$$

So ergibt sich für den Schub mit Gl. (4.18):

$$F_s = \frac{\pi D^2}{4} (p_{D,2} - p_{D,1}) = \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho}{2} (v_{2,x}^2 - v_1^2) = \rho v_D \frac{\pi D^2}{4} (v_{2,x} - v_1). \quad (4.18)$$

Aus Gl.(4.19) folgt mit $(v_{2,x}^2 - v_1^2) = (v_{2,x} + v_1)(v_{2,x} - v_1)$:

$$\boxed{v_D = \frac{v_1 + v_{2,x}}{2}} \quad (4.19)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit v_D in der Ebene „Propeller Disk“ ist also der arithmetische Mittelwert aus axialer An- und Abströmgeschwindigkeit.

Zu 3.:

Der Schubbelastungsgrad ζ_s ist wie folgt definiert:

$$\boxed{\zeta_s = \frac{F_s}{\frac{\rho}{2} v_1^2 \frac{\pi D^2}{4}}} \quad (4.20)$$

Wird F_s nach Gl.(4.19) ersetzt, so ergibt sich:

$$\boxed{\zeta_s = \frac{\frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho}{2} (v_{2,x}^2 - v_1^2)}{\frac{\rho}{2} v_1^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{v_{2,x}^2}{v_1^2} - 1} \quad (4.21)$$

Tabelle 4.2 gibt verschiedene Zahlenwerte für ζ_s und $v_{2,x}^2 / v_1^2$ aus der Praxis wieder:

Tabelle 4.2 Zahlenwerte ζ_s und $v_{2,x} / v_1$ für Propeller verschiedener Schiffsbauarten

Schiffsbauart	$v_{2,x} / v_1$	ζ_s
Seegängiges Handelsschiff	1,2...1,5	0,4...1,2
Binnenschiff	1,5...2,0	1,2...3,0
Schlepper	2,0...4,0	3,0...15,0

4.7 Windturbinen

Bild 4.7 zeigt die Prinzipskizze zur Anwendung des Impulssatzes auf eine Windturbine. Es handelt sich hier um einen sog. Horizontalachser, wobei der Rotor vor dem Turm angeordnet ist (Luvläufer). Der vertikale Turm kann aus Stahlbetonrohren, Stahlrohren mit und ohne Drahtabspannung oder aus Stahlgittern bestehen. Im Gegensatz zum Schiffspropeller findet beim Durchgang der Strömung durch die Windturbine eine Strahldilatation (Strahlaufweitung) statt. Hier findet die repräsentative Energieabfuhr in einer Scheibe zwischen den Ebenen D_1 und D_2 (s. **Bild 4.7**) statt, die dem „Propeller Disk“ entspricht. Vor dem Windturbinenlaufrad, d.h. in der Ebene D_1 ergibt sich ein Überdruck, hinter dem Windturbinenlaufrad in der Ebene D_2 ein Unterdruck.

In der Scheibe zwischen D_1 und D_2 nimmt wie bei dem Schiffspeller die Geschwindigkeit den arithmetischen Mittelwert aus An- und Abströmgeschwindigkeit an, d.h., $v_D = (v_1 + v_{2,x})/2$.

Gegeben:

- Windgeschwindigkeit v_1 ,
- Axialkomponente $v_{2,x}$ der Austrittsgeschwindigkeit,
- Windturbinendurchmesser D und
- Fluidichte ρ .

Vorausgesetzt:

- Stationäre Strömung,
- Achsparallele, gleichmäßige An- und Abströmung,
- Inkompressibles Fluid,
- Reibungsfreies Fluid,
- Vernachlässigbarer Einfluss des Turms auf die Windturbinendurchströmung und
- Eintrittsdruck $p_1 =$ Austrittsdruck p_2 ,

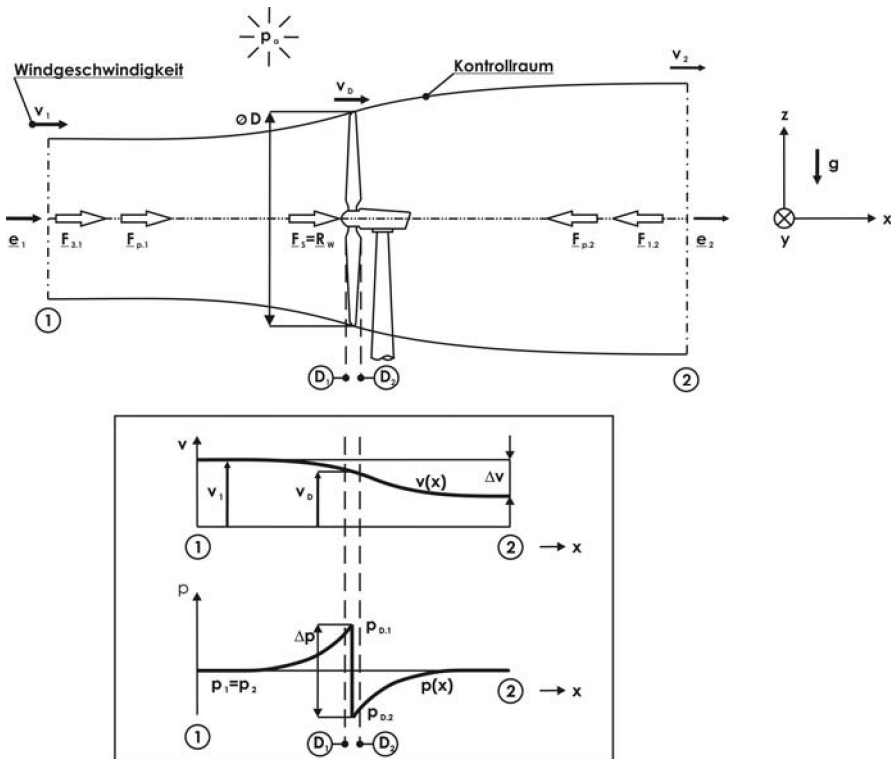


Bild 4.7 Anwendung des Impulssatzes auf eine Windturbinen

Gesucht:

1. Allgemeine Windturbinenleistung $P = P(\rho, D, v_1, v_{2,x})$ und
2. Maximale Windturbinenleistung $P_{\max} = P_{\max}(\rho, D, v_1)$.

Lösung:

Zu 1.:

Mit Gl.(I-4.24) und

$e_x = e_1 = e_2$ folgt der Schub zu:

$$F_s = R_{W,x} = \dot{m}(v_1 - v_{2,x}) > 0 \text{ (in } x\text{-Richtung, da } v_1 > v_{2,x} \text{)}.$$

Die allgemeine Windturbinenleistung ergibt sich hiermit zu:

$$P = F_s v_D = \dot{m}(v_1 - v_{2,x}) \left(\frac{v_1 + v_{2,x}}{2} \right).$$

Mit $\dot{m} = \rho v_D \frac{\pi D^2}{4}$ folgt:

$$P = \rho \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{v_1 + v_{2,x}}{2} \right)^2 (v_1 - v_{2,x}),$$

$$P = \rho \frac{\pi D^2}{4} \left(v_1 \frac{1 + \frac{v_{2,x}}{v_1}}{2} \right)^2 \left[v_1 \left(1 - \frac{v_{2,x}}{v_1} \right) \right] \text{ und schließlich}$$

$$P = \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{v_1^3}{4} \left(1 + \frac{v_{2,x}}{v_1} \right)^2 \left(1 - \frac{v_{2,x}}{v_1} \right) \quad (4.22)$$

In **Bild 4.8** ist diese Funktion für konstante Werte ρ, D und v_1 in Abhängigkeit von $v_{2,x}/v_1$ dargestellt. Es fällt auf, dass P bei $v_{2,x}/v_1 = 1/3$ ein Maximum aufweist und bei $v_{2,x}/v_1 = 1$, d.h. bei der zylindrischen Durchströmung ohne Strahlaufweitung, keine Leistung übertragen wird.

Zu 2.:

Die maximale Windturbinenleistung wird durch folgenden Ansatz gefunden:

$$\frac{\partial P}{\partial \frac{v_{2,x}}{v_1}} = 0 = 2 \left(1 + \frac{v_{2,x}}{v_1} \right) \left(1 - \frac{v_{2,x}}{v_1} \right) - \left(1 + \frac{v_{2,x}}{v_1} \right)^2.$$

Hieraus folgt:

$$2 \left(1 - \frac{v_{2,x}}{v_1} \right) = \left(1 + \frac{v_{2,x}}{v_1} \right) \text{ und damit:}$$

$$\boxed{\frac{v_{2,x}}{v_1} = \frac{1}{3}} \quad (4.23)$$

Wenn also die maximale Leistung dem Wind entnommen werden soll, so bremst die Windturbine die Nachstromgeschwindigkeit auf ein Drittel der Anströmgeschwindigkeit (Windgeschwindigkeit) ab. Hiermit ergibt sich:

$$\boxed{P_{\max} = \frac{\rho}{2} \frac{\pi D^2}{4} v_1^3 \frac{16}{27}} \quad (4.24)$$

Man erkennt, dass bei feststehendem ρ und D die maximale Windturbinenleistung mit der dritten Potenz der Windgeschwindigkeit einhergeht. Eine Verdoppelung der Windgeschwindigkeit zieht eine achtfach höhere Windturbinenleistung nach sich.

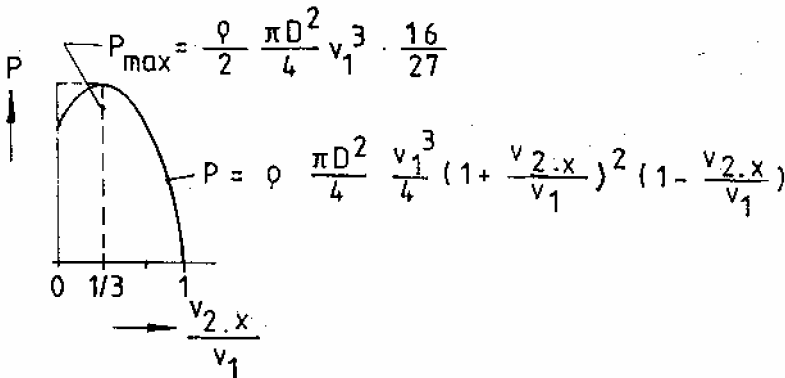


Bild 4.8 Windturbinenleistung P in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsverhältnis $v_{2,x} / v_1$

Die heute üblichen Werte für P_{\max} je Fläche $\pi D^2 / 4$ liegen bei 400...500 W/m² und mehr.

Dem Faktor $16/27$ in Gl.(4.25) kommt eine besondere Bedeutung zu, nämlich die des maximal erreichbaren Wirkungsgrads. Dies geht aus folgender Betrachtung hervor; der Wirkungsgrad ist in der Technik als Nutzleistung pro aufgewendeter Leistung definiert. Als Nutzleistung fungiert hier P_{\max} , als aufgewendete Leistung die Windleistung P_{Wind} mit:

$$\boxed{P_{\text{Wind}} = \frac{\dot{m}_{\text{Wind}}}{2} v_1^2 = \frac{\rho}{2} \frac{\pi D^2}{4} v_1^3} \quad (4.25)$$

Hiermit ergibt sich der maximale Wirkungsgrad zu:

$$\eta_{\max} = \frac{P_{\max}}{P_{\text{Wind}}} = \frac{16}{27} = 59,3\% \quad (4.26)$$

Während die meisten Maschinen im Idealfall den Wirkungsgrad $\eta_{\text{id}} = 100\%$ erreichen würden, so kann die Windturbine in diesem Fall maximal nur $\eta_{\text{id}} \approx 60\%$ erzielen. In praxi werden aber nur 50% und weniger erreicht. In der Windturbinenpraxis wird der Wirkungsgrad als Leistungsbeiwert c_p bezeichnet. Die Begrenzung auf 60% hängt damit zusammen, dass bei der Durchströmung energiebeladene Luft nutzlos abgeführt werden muss.

4.8

Strahlablenker einer PELTON-Wasserturbine

Der Strahlablenker einer PELTON-Wasserturbine wurde bereits in Kap. I-4.5.2 gezeigt. Der Strahlablenker tritt in Funktion, wenn der Wasserstrahl innerhalb einer relativ kurzen Zeit von der PELTON-Wasserturbine getrennt werden soll, ohne einen Druckstoß (s. Kap. 3.1) zu erzeugen. Dies tritt z.B. am Ende der Spitzenstromerzeugung auf. **Bild 4.9** zeigt eine PELTON-Turbinendüse mit Strahlablenker a) in Ablenkungsposition und b) in Normalposition bei Spitzenstromerzeugung.

Gegeben:

- Strahlgeschwindigkeit \underline{v}_1 ,
- Massenstrom \dot{m} ,
- Ablenkungswinkel α und
- Momentenhebellänge h .

Vorausgesetzt:

- Stationäre ebene Strömung,
- Inkompressibles Fluid,
- Reibungsfreies Fluid,
- Konstante Freistrahlggeschwindigkeit $v_1 = v_2$,
- Eintrittsdruck $p_1 =$ Austrittsdruck p_2 und
- Vernachlässigbarer Einfluss der Schwerkraft auf die Strömungsverhältnisse.

Gesucht:

Haltemoment $M = R_W \cdot h$.

Lösung:

Mit Gl.(I-4.24) und mit

$\underline{e}_1 = (1,0)$ und $\underline{e}_2 = (+\cos\alpha, -\sin\alpha)$ folgt:

$$\underline{R}_W = \dot{m}_1 v_1 \underline{e}_1 - \dot{m}_2 v_2 \underline{e}_2 = [\dot{m}_1(1,0) - \dot{m}_2(\cos \alpha, -\sin \alpha)] \cdot v_1,$$

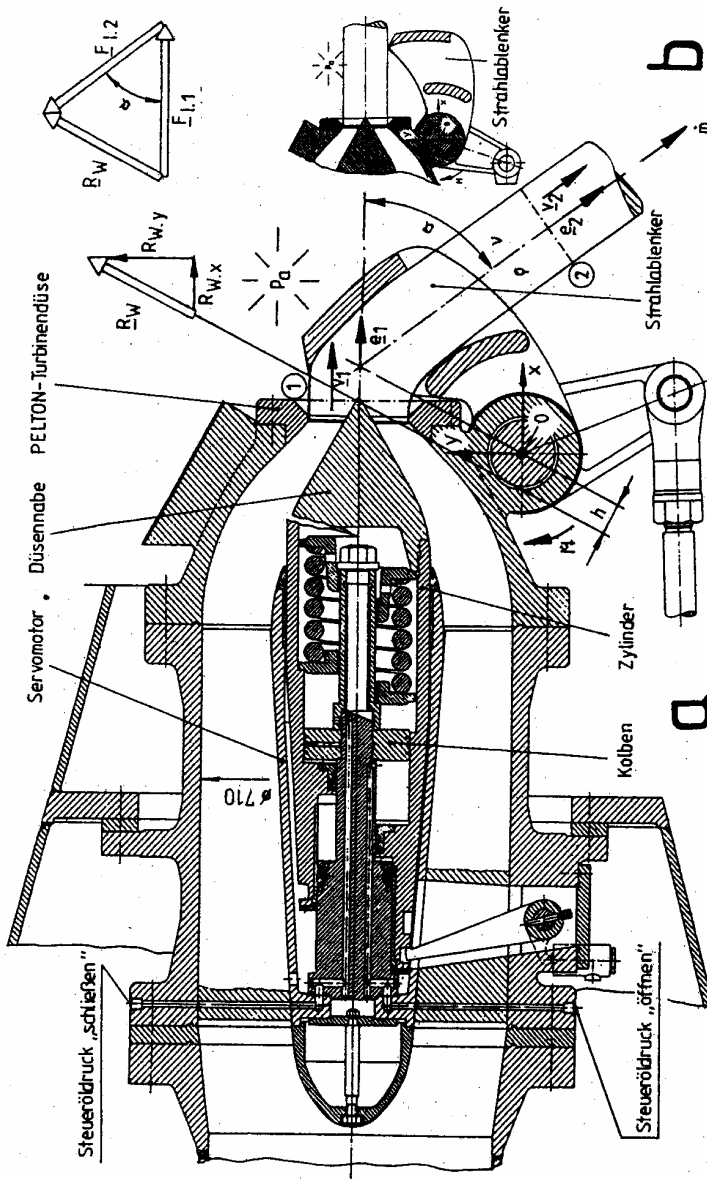


Bild 4.9 PELTON-Turbinendüse mit Servomotor (Kolben fest, Zylinder verschiebbar) und Strahlblenker. a) Strahlblenker im Eingriff, b) Strahlblenker in Normalposition (nach Werkbild VOITH)

mit $\underline{F}_{1,1} = \dot{m}v_1\underline{e}_1$ und $\underline{F}_{1,2} = -\dot{m}v_2\underline{e}_2$ (s. **Bild 4.9**). Nach Komponenten aufgeteilt ergibt sich:

$$R_{W,x} = \dot{m}v_1 - \dot{m}v_2\cos\alpha = \dot{m}v_1(1 - \cos\alpha) \text{ und}$$

$$R_{W,y} = \dot{m}v_2\sin\alpha = \dot{m}v_1\sin\alpha.$$

Die gesamte Reaktionswandkraft beträgt:

$$R_W = \sqrt{R_{W,x}^2 + R_{W,y}^2} = \dot{m}v_1\sqrt{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \dot{m}v_1\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}.$$

Schließlich erhält man das Haltemoment zu:

$$M = \dot{m}v_1h\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}. \quad (4.27)$$

Bild 4.10 zeigt die Abhängigkeit des Haltemoments M vom Strahlablenkungswinkel α für konstante Werte \dot{m} , v_1 und h . Auffällig ist der nahezu lineare Verlauf. In praxi ist eine relativ leichte Abhängigkeit der Momentenhebel­länge h vom Strahlablenkungswinkel α feststellbar, ohne den linearen Charakter des Kurvenverlaufs wesentlich zu stören.

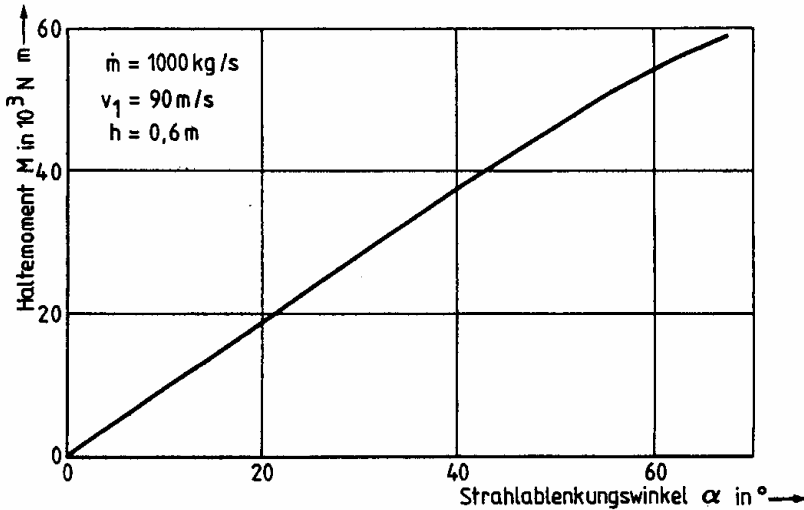


Bild 4.10 Haltemoment M in Abhängigkeit vom Strahlablenkungswinkel α bei konstanten Werten \dot{m} , v_1 und h .

4.9

Bypass-Luftstrahltriebwerk

Bild 4.11 zeigt die Anordnung eines Bypass-Luftstrahltriebwerks unter dem Tragflügel eines Flugzeugs. Der mit der Geschwindigkeit v_E eintretende Luftmassenstrom \dot{m}_E wird in zwei Teilströme: Düsentriebwerks-Massenstrom \dot{m}_D und Bypass-Massenstrom \dot{m}_B aufgeteilt. Im Austritt des Luftstrahltriebwerks sind zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten feststellbar: die Düsentriebwerks-Austrittsgeschwindigkeit v_D und die Bypass-Austrittsgeschwindigkeit v_B .

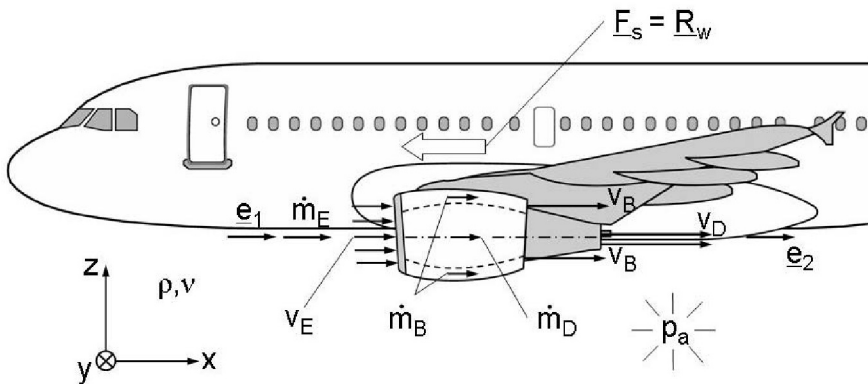


Bild 4.11. Bypass-Luftstrahltriebwerk an einem Flugzeug

Gegeben:

- Eintrittsmassenstrom $\dot{m}_E = 98,7 \text{ kg/s}$,
- Düsentriebwerks-Massenstrom $\dot{m}_D = 15,9 \text{ kg/s}$,
- Bypass-Massenstrom $\dot{m}_B = 82,7 \text{ kg/s}$,
- Kerosin-Massenstrom $\dot{m}_K = 0,1 \text{ kg/s}$,
- Eintrittsgeschwindigkeit (Reisegeschwindigkeit) $v_E = 203,0 \text{ m/s}$,
- Düsentriebwerks-Austrittsgeschwindigkeit $v_D = 490,5 \text{ m/s}$ und
- Bypass-Austrittsgeschwindigkeit v_B .

Vorausgesetzt:

- $\partial v / \partial t = 0$,
- $p_1 = p_2 = p_a$ und
- $\dot{m}_K \ll \dot{m}_E$.

Gesucht:

Schub $F_S = R_{W,x}$.

Lösung:

Mit Gl.(I-4.25) und

$e_x = e_1 = (1,0,0)$, $e_x = e_2 = (1,0,0)$ und $i = 1$, $k = 2$ folgt:

$$\underline{R}_W = F_S = (\dot{m}_E v_E) e_1 - (\dot{m}_B v_B + \dot{m}_D v_D) e_2.$$

So ergibt sich der Schub betragsmäßig zu:

$$\boxed{R_{W,x} = F_S = (\dot{m}_B v_B + \dot{m}_D v_D) - (\dot{m}_E v_E)}. \quad (4.28)$$

und zahlenmäßig zu:

$$F_S = (26\,091,9\,N + 7\,799,0\,N) - (20\,036,1\,N)$$

$$F_S = 13\,854,8\,N.$$

Die Richtung des Schubes F_S ist entgegen der x-Achse. Gl.(4.29) enthält ein den Schub vermindernsdes Glied, den sog. „Inlet Drag“ $\dot{m}_E v_E$, der hier mit 20036,1 N bremsend wirkt. Der sog. „Nutzschub“ beträgt hier:

$$\dot{m}_B v_B + \dot{m}_D v_D = 33\,890,9\,N, \text{ an dem der Bypass mit ca. 77\% beteiligt ist.}$$

Man mache sich klar, dass bei einem Bypass-Luftstrahltriebwerk der Großteil (hier rund 84%) der eintretenden Luftmasse \dot{m}_E im Bypass am Triebwerk vorbeigeführt wird. Entsprechend groß ist das sog. Bypassverhältnis \dot{m}_B / \dot{m}_D , hier 5,2, in praxi 4...10 und mehr. Die gegenüber der Eintrittsgeschwindigkeit v_E erhöhte Austrittsgeschwindigkeit v_B des Bypass-Massenstroms wird durch einen sog. „Eintritts-Fan“ bewerkstelligt, der wiederum wie der Kompressor des Luftstrahltriebwerks von der Gasturbine angetrieben wird.

Übungsaufgaben zu diesem Kapitel finden sich unter:
www.tu-berlin.de/~fsd



<http://www.springer.com/978-3-540-73989-0>

Strömungslehre für den Maschinenbau

Technik und Beispiele

Siekmann, H.E.; Thamsen, P.U.

2009, X, 273 S. 138 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-73989-0