

Vorwort

Das vorliegende Buch versucht einen Einblick in die Analysis jenseits der Vorlesungen der ersten beiden Semester zu geben. Es umfasst fünf weitgehend voneinander unabhängige Kapitel über topologische Räume, Funktionentheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie sowie Funktionalanalysis. In ihnen werden die grundlegenden Begriffe und Resultate dieser Gebiete behandelt, die für potenziell alle Studierenden relevant sind. Ich habe allerdings nicht angestrebt, jeweils den Inhalt einer vierstündigen Vorlesung zu vermitteln, sondern mich auf die Grundkenntnisse konzentriert, die hier also in kompakter Form präsentiert werden.

Im einzelnen enthält Kapitel I, ausgehend von der als bekannt vorausgesetzten elementaren Theorie metrischer Räume, eine Einführung in die Sprache der mengentheoretischen Topologie. Hier steht in der Tat das Vokabular im Vordergrund, denn tiefliegende Resultate sind in den Anfangsgründen der Topologie eher die Ausnahme als die Regel.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Funktionentheorie und bringt die Grundtatsachen über analytische und meromorphe Funktionen bis zum Residuensatz und seinen Anwendungen; der Cauchysche Integralsatz wird in seiner Homotopieversion bewiesen.

Kapitel III über gewöhnliche Differentialgleichungen konzentriert sich nach der Diskussion des Existenz- und Eindeigkeitssatzes von Picard-Lindelöf auf Systeme linearer Differentialgleichungen; aber es gibt auch einen Abschnitt über die Stabilitätstheorie von Gleichgewichtspunkten nichtlinearer Systeme.

Im vierten Kapitel wird die Lebesguesche Integrationstheorie auf maßtheoretischer Grundlage dargestellt. Selbst wenn man hauptsächlich an der Integration von Funktionen auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$ und ergo am Lebesguemaß interessiert ist, ist der hier gewählte Zugang über abstrakte σ -additive Maße und die zugehörigen Integrale vom technischen Aufwand her kaum komplizierter, aber für die Bedürfnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie unumgänglich.

Das letzte Kapitel führt in die Funktionalanalysis ein; dort findet man die wichtigsten Aussagen über Banach- und Hilberträume sowie die auf ihnen operierenden beschränkten linearen (insbesondere kompakten) Operatoren. Manche Resultate werden separat bzw. ausschließlich im Hilbertraumkontext bewiesen, z.B. die Fredholmsche Alternative, um die Beweise übersichtlicher zu halten.

Außer dem Grundkanon, wie er oben skizziert wurde, enthält jedes Kapitel noch (mindestens) einen apokryphen Abschnitt, etwa über Anwendungen des Baireschen Kategoriensatzes in der Analysis, den Primzahlsatz, Sturm-Liouvillesche Rand- und Eigenwertprobleme, den Brouwerschen Fixpunktsatz oder den Satz von Hahn-Banach und reflexive Räume. Diese eleganten Ergebnisse aufzunehmen konnte ich mir bei aller Konzentration aufs Wesentliche nicht entsagen!

Zu jedem Kapitel gibt es am Schluss ein kurzes Literaturverzeichnis; im Text wird dabei z.B. auf das 1978 erschienene Buch von Birkhoff und Rota als Birkhoff/Rota [1978] verwiesen.

Das Manuskript basiert auf Vorlesungen, die ich an der FU Berlin und an der National University of Ireland, Galway, gehalten habe. Zahlreiche Studierende und Kollegen haben mit ihrer Kritik geholfen, den Text zu verbessern. Herzlichen Dank dafür! Insbesondere möchte ich an dieser Stelle Ehrhard Behrends erwähnen, auf den im übrigen die Idee zurückgeht, dieses Buch zu schreiben.

Auch Ihre Kommentare, liebe Leserinnen und Leser, sind sehr willkommen; bitte lassen Sie mich alle Unstimmigkeiten, die Ihnen auffallen, wissen (gern per email an werner@math.fu-berlin.de). Ich habe vor, notwendige Korrekturen auf meiner Internetseite

www.math.fu-berlin.de/~werner

zu dokumentieren.

Berlin, im Mai 2006

Dirk Werner

In der neuen Auflage habe ich die mir bekannt gewordenen Tipp- und sonstigen Fehler korrigiert; der gravierendste war gewiss der unzulängliche Beweis der Jordan-Zerlegung eines signierten Maßes. Zukünftige Leserinnen und Leser werden besonders von den Bemerkungen von Hans Crauel, Felix Poloczek, Tarik Kilian Scheltat, Mario Ullrich, Jürgen Voigt und Jochen Wengenroth profitieren!

Berlin, im November 2008

Dirk Werner

Einführung in die höhere Analysis

Topologische Räume, Funktionentheorie, Gewöhnliche
Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie,
Funktionalanalysis Index.- Literaturverzeichnis.

Werner, D.

2009, X, 388 S. 13 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-79599-5