

Kapitel 2

Grundsätzliches zur Allgemeinen Relativitätstheorie

2.1 Einführung

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) hat Einstein ab ca. 1907 bis 1915⁵⁴, also nach der SRT, ausgearbeitet. Während er bei letzterer zum Teil auf einige vorher von anderen Wissenschaftlern geschaffene Bausteine aufbauen konnte, betrat er bei der Allgemeinen Relativitätstheorie weitgehend Neuland (von mathematischen Vorarbeiten abgesehen). Die Genialität Einsteins wird in diesem Werk noch deutlicher als bei der SRT.

Triebfeder für die Erarbeitung der ART war die Beschränkung der SRT auf Inertialbeobachter, ein Störfaktor für den Ästheten Einstein. Insbesondere beabsichtigte er, durch eine neue Theorie den in der SRT vorhandenen absoluten Charakter der Beschleunigung zu beseitigen.

Während sich die oben dargestellte Spezielle Relativitätstheorie vor allem mit den Effekten hoher Geschwindigkeiten befaßt, geht es bei der Allgemeinen Relativitätstheorie überwiegend um die Wechselbeziehungen von Gravitation, Raum, Zeit, Licht und Materie.

Leider sind die Feldgleichungen der ART sehr viel schwerer herzuleiten und zu verstehen als das Formelwerk der SRT (siehe Abschnitte 1.3 bis 1.14), weshalb die Allgemeine Theorie hier nur im Überblick dargestellt wird. Einige Einzelaspekte werden aber auch rechnerisch bearbeitet.

Die ART beruht vor allem auf dem *Postulat*, daß schwere Masse (die also in einem Schwerfeld eine Gewichtskraft auf die Unterlage ausübt) und träge Masse (zu deren Beschleunigung eine Kraft erforderlich ist) äquivalent sind. Diese Annahme galt schon seit Stevins und Galileis Fallversuchen als naheliegend, bei denen sich herausstellte, daß alle Körper, unabhängig von ihrer Masse, Form, Größe und Zusammensetzung, am selben Ort die gleiche Fall-

⁵⁴ Erstmalige Veröffentlichung der endgültigen Version: Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1915, S. 844ff.

beschleunigung im Schwerfeld der Erde erhalten (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes natürlich). Aus diesem gleichen Fallverhalten kann man schon schließen, daß Schwere und Trägheit aller Körper stets Hand in Hand gehen. Denn: Das Gewicht (= Ausdruck der schweren Masse) ist beim freien Fall die antreibende Kraft; die träge Masse bestimmt den Widerstand. Ein schwerer Körper wird nun zwar stärker angetrieben als ein leichter, dafür wehrt er sich aber mit seiner größeren Trägheit auch stärker gegen den Antrieb. Nur wenn beide Effekte (und damit auch beide „Massetypen“) exakt gleich groß sind, erhalten alle Körper am selben Ort die gleiche Fallbeschleunigung. Auch spätere Präzisionsexperimente haben die Äquivalenz von schwerer und träger Masse mit extremer Genauigkeit⁵⁵ bestätigt. Die bis dahin nur empirisch gewonnene Beziehung hat Einstein in der ART zum *Prinzip* erhoben. Dabei dehnte er die Äquivalenz von Schwere und Trägheit auch auf die jeweiligen „Auslöser“ aus: Gravitation (genauer: das Ruhen in einem Gravitationsfeld) und Beschleunigung sind dann auch äquivalent.

Dazu ein praktisches Beispiel: Ein Astronaut kann ohne Blickkontakt nach außen nicht unterscheiden, ob seine Rakete mit laufendem Triebwerk auf der Erdoberfläche steht oder mit konstanter Beschleunigung von $9,81 \text{ m/s}^2$ (entspricht 1 g = „Erdbeschleunigung“) durch den leeren Raum fliegt! In beiden Fällen wird er mit der gleich großen Kraft (= seinem Gewicht) auf den Boden seiner Kabine gedrückt. Der Triebwerkslauf auf der Erde dient natürlich nur als Geräuschkulisse! Ebenso kann ein Raumflieger ohne Sichtverbindung nach außen nicht unterscheiden, ob er im materiefreien und damit gravitationslosen Raum frei schwebt oder ob er im freien Fall auf ein großes Schwarzes Loch ist, sich also nach herkömmlichen Normen stark beschleunigt bewegt. In beiden Fällen wird er sich völlig schwerelos fühlen.

Die Äquivalenz von Beschleunigung und Gravitation kann jeder Leser in einem Flug- oder Fahrsimulator am eigenen Leib erleben: Die Beschleunigung beim Start wird dabei oft nur durch das Zurückkippen der Kabine simuliert. Der Insasse hält die ihn nun auf die Rückenlehne pressende Schwerkraft für eine Beschleunigung!

Bis hierher hätte auch Newton der Äquivalenz von Gravitations- und Beschleunigungsfeldern (Trägheitsfeldern) ohne weiteres zustimmen können. Albert Einsteins genialer Schritt war aber nun, die Äquivalenz von Gravitation und Beschleunigung nicht nur in solchen rein mechanischen Fällen anzunehmen, sondern sie auf *alle* Bereiche der Physik auszudehnen. Experimente aller Art verlaufen demnach in Gravitationsfeldern und „Beschleunigungsfeldern“ lokal stets nach denselben Gesetzmäßigkeiten.

⁵⁵ auf etwa $1/10^{13}$ genau

Kein Experiment im Inneren eines (kleinen) geschlossenen Systems erlaubt es dem Experimentator, zwischen diesen beiden Feldarten zu differenzieren. So wie in der SRT davon ausgegangen wird, daß alle Inertialsysteme völlig gleichwertig sind, baut die ART auf die lokale Gleichwertigkeit von Gravitations- und Beschleunigungsfeld. Letztere gelten in der ART sogar als lediglich verschiedene Erscheinungsformen ein und derselben Feldart!

Dieses „starke Äquivalenzprinzip“ (wie es im Gegensatz zum „schwachen Äquivalenzprinzip“ – träge Masse = schwere Masse – bezeichnet wird) hat aber auch noch einen weiteren wichtigen Aspekt: Am obigen Beispiel des Raumfliegers war schon die Ähnlichkeit von kräftefreier Bewegung im schwerkraftfreien Raum und einem freien Fall im Gravitationsfeld angesprochen worden. Auch bezüglich dieser beiden Zustände postuliert das starke Äquivalenzprinzip, daß lokal durch kein Experiment (ob mit Lichtstrahlen, elektrischen oder magnetischen Feldern o.ä.) eine Unterscheidbarkeit besteht. Das starke Äquivalenzprinzip besagt damit auch, daß im freien Fall die Wirkung der Gravitation lokal in jeglicher Beziehung aufgehoben wird („wegtransformiert“ wird, wie der Fachmann sagt), also nicht nur in den offensichtlichen mechanischen Fällen („Schwerelosigkeit“). Und deshalb können in einem Freifallsystem die Gesetze der SRT lokal angewandt werden, wie in Inertialsystemen. Damit hatte es Einstein ermöglicht, die gesamte Physik, die mit der SRT verknüpfbar ist, über dieses Prinzip an die ART anzuschließen. Ansonsten hätte er dafür „Extraregeln“ aufstellen müssen.

Diese „Gleichbehandlung“ von Gravitationsfeldern und Beschleunigungs„feldern“ ist im ersten Moment zugegebenermaßen höchst gewöhnungsbedürftig, die auf diesem Äquivalenzprinzip beruhende ART hat aber alle Tests (ob astronomische Beobachtungen oder experimentelle Untersuchungen) glänzend bestanden. Der Leser kann sich daher ohne weiteres darauf einlassen: Die in diesem Kapitel 2 eingesetzten Gedankenexperimente verlaufen in Gravitationsfeldern und beschleunigten Systemen (ja sogar in einer „Mischung“ aus beiden!) lokal⁵⁶ nach denselben Gesetzmäßigkeiten.

Diese Äquivalenz von Gravitations- und Beschleunigungsfeldern hat recht spektakuläre Auswirkungen, von denen die schönsten in den nun folgenden Abschnitten 2.2 bis 2.5 behandelt werden.

Vor dem Einstieg in die verschiedenen Phänomene der ART aber noch folgende Hinweise:

⁵⁶ Die Notwendigkeit der hier öfter verwendeten Einschränkung „lokal“ wird in Abschnitt 2.3 erläutert.

1. Im folgenden ist öfter von einem entfernten oder weit entfernten Beobachter die Rede. Die damit verbundenen Aussagen gelten in aller Strenge nur für einen Beobachter in unendlicher Entfernung von dem betrachteten Himmelskörper (mit dort gedachter Gravitation = null). Mit befriedigender Genauigkeit treffen diese Aussagen aber auch für Beobachter in viel geringerer Entfernung zu, z.B. in einem Abstand, der etwa dem 200fachen des Durchmessers⁵⁷ des Himmelskörpers entspricht. Der „ferne“ Beobachter soll außerdem an seinem Platz *ruhen*.
2. Die meisten der in den folgenden Abschnitten genannten Formeln gelten genaugenommen nur für nicht-rotierende kugelförmige Himmelskörper. Mit hinreichender Exaktheit treffen sie aber auch auf langsam rotierende und nicht exakt kugelförmige Objekte zu, also für die meisten realen Himmelskörper (nicht jedoch für schnell rotierende Neutronensterne und Schwarze Löcher).
3. Wenn von Testmassen oder Testkörpern die Rede ist, dann sind damit Objekte gemeint, deren Masse im Vergleich zu dem Himmelskörper, in dessen Schwerefeld sie sich bewegen, vernachlässigbar klein ist. *Freie* Testkörper sind solche, die sich selbst überlassen sind und die auch keinen eigenen Antrieb besitzen.

Die ART hat als derzeit gültige Theorie der Gravitation Newtons Gravitationsgesetz abgelöst. Letzteres ist aber als Näherung für schwache Gravitationsfelder in der ART enthalten und wird deshalb weiterhin in der Schule gelehrt.

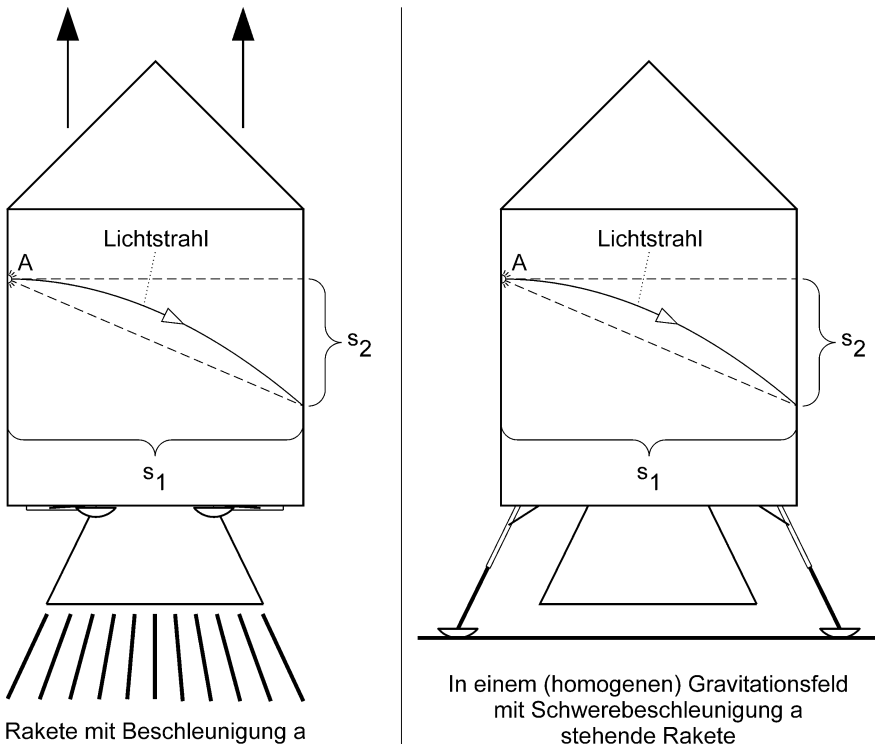
2.2 Die Ablenkung von Licht durch Gravitation – Linsen ohne Glas

Wichtiger Hinweis: Die exakte Berechnung der Lichtablenkung in Gravitationsfeldern ist sehr aufwendig und erfordert exzellente Kenntnisse des mathematischen und physikalischen Apparates der ART. Die nun folgende Darstellung ist lediglich eine qualitative quasi-newtonsche Abschätzung auf der Basis eines homogenen⁵⁸ Gravitationsfeldes; sie ist also nicht ohne weiteres übertragbar auf die meist kugelsymmetrischen Gravitationsfelder

⁵⁷ Abweichung dort (auch bei den kompaktesten Himmelskörpern): unter 1,3 Promille!

⁵⁸ Feld von überall gleicher Stärke und Richtung; Beispiel aus dem Elektromagnetismus: Homogen ist z.B. das elektrische Feld zwischen den parallelen Platten eines Plattenkondensators; symbolisiert durch gerade verlaufende parallele Feldlinien überall gleicher Dichte.

realer Himmelskörper. Es handelt sich nur um eine einfache Demonstration der Anwendbarkeit des Äquivalenzprinzips.



Gedankenexperiment: In einer beschleunigten Rakete wird ein Lichtstrahl vom Punkt A der Seitenwand zur gegenüberliegenden Seitenwand gesandt (linkes Bild); dabei wird der Lichtstrahl nach „hinten“ abgelenkt, weil das Raumschiff während der Lichtlaufzeit weiter beschleunigt wird. (Begründung: Jede in einem Inertialsystem geradlinige gleichförmige Bewegung verläuft in einem quer zu dieser Bewegung beschleunigten System gekrümmt.) Wegen der Äquivalenz von Gravitationsfeldern und Beschleunigungsfeldern muß derselbe Effekt in einer Rakete auftreten, die in einem (homogenen) Gravitationsfeld mit derselben (Schwere-)Beschleunigung ruht (Bild rechts).

Die obere gestrichelte waagerechte Linie zeigt den Verlauf des Lichtstrahls, wenn weder eine Beschleunigung noch eine Schwerkraft einwirken würde.

Zur *quantitativen Berechnung* werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

- t Laufzeit des Lichtstrahls quer durch die Rakete
- a Beschleunigung der Rakete bzw. Schwerebeschleunigung
- s_1 Breite der Rakete
- s_2 Strecke, um die das Licht vertikal abgelenkt wird

Es gelten im Fall der beschleunigten Rakete folgende Beziehungen:

$$\bullet \quad t = s_1 / c \quad (2.1)$$

$$\bullet \quad \text{Raketenendgeschwindigkeit } v_E = a \cdot t \quad (2.2)$$

(wenn Anfangsgeschwindigkeit = 0)

$$\Rightarrow \text{Mittlere Raketengeschwindigkeit } v_m = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \quad (2.3)$$

$$\bullet \quad s_2 = v_m \cdot t \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \text{ (durch Einsetzen von (2.3))} \quad (2.5)$$

$$\text{Einsetzen von (2.1) ergibt: } s_2 = \frac{a \cdot s_1^2}{2 \cdot c^2} \quad (2.6)$$

Um diese Strecke s_2 wird also der Lichtstrahl auf dem Weg quer durch die s_1 breite beschleunigte Rakete abgelenkt. Wegen des Äquivalenzprinzips muß aber auch gelten: In einem homogenen Gravitationsfeld mit Schwerebeschleunigung a wird ein horizontal startender Lichtstrahl entlang der Meßstrecke s_1 ebenfalls nach unten um s_2 abgelenkt! Der Effekt ist natürlich extrem klein (c^2 im Nenner!) und spielt im irdischen Alltagsleben keine Rolle.⁵⁹ Anders ist dies aber in der Astronomie, wo man es mit viel stärkeren Gravitationsfeldern auf anderen Himmelskörpern (und damit größerem a) zu tun hat; auch die Meßstrecke s_1 kann hierbei die sprichwörtlichen astronomischen Ausmaße annehmen.

Wie aber oben bereits angedeutet, ist Formel (2.6) nur eine Näherung für homogene Felder (überall gleiche Richtung und Stärke der Gravitation); damit ist sie im astronomischen Maßstab nicht anwendbar⁶⁰. Für die eher kugelsymmetrischen Gravitationsfelder realer Himmelskörper verwendet man daher eine andere Näherungsformel (siehe unten).

Aufgrund der Gravitationswirkung sind auch die aus Abschnitt 1.17 bekannten Lichtkegel verändert: Verengt und zur Weltlinie des Gravitationszentrums hin geneigt. Wie in der SRT können Weltlinien materieller Teilchen nur innerhalb des betreffenden Lichtkegels verlaufen.

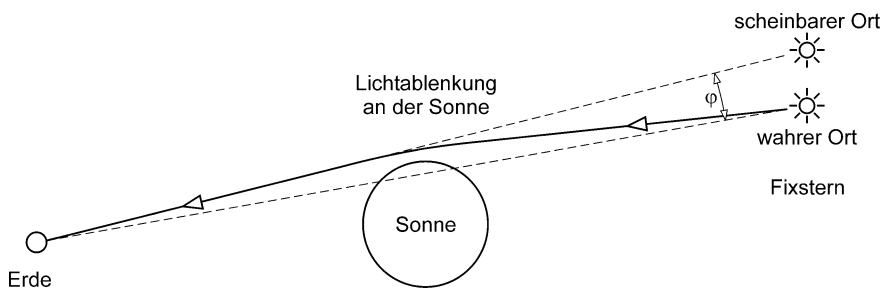
⁵⁹ Selbst auf einer Meßstrecke $s_1 = 1000$ km ergäbe sich in einem homogenen Gravitationsfeld der Stärke $a = 9,81 \text{ m/s}^2$ (= Erdbeschleunigung) nur eine Ablenkung um $s_2 = 0,05 \text{ mm}$!

⁶⁰ Die tatsächlich beobachtete Lichtablenkung an Himmelskörpern ist größer.

Manche Autoren bezeichnen die Lichtablenkung als (gravitative) Lichtaberration. Wegen der Verwechslungsgefahr mit der durch Relativbewegung verursachten Aberration (Abschnitt 1.10) verzichten wir auf diese Nomenklatur.

Beobachtung der Lichtablenkung: In welcher Form kann man die Lichtablenkung durch gravitierende (= Schwerkraft erzeugende) Himmelskörper tatsächlich beobachten? Hier gibt es vor allem die folgenden drei Phänomene, die aber alle eine Gemeinsamkeit aufweisen: Lichtstrahlen von einem weiter entfernten Objekt laufen auf ihrem Weg zu uns an einem massereichen Vordergrundobjekt vorbei und werden bei der Passage zu diesem hin „verbogen“. Diese Richtungsänderung der Lichtstrahlen erinnert an die Wirkung einer Linse; das massereiche Vordergrundobjekt nennt man daher auch *Gravitationslinse*.

a) Ein Lichtstrahl eines Fixsterns, der von der Erde aus gesehen den Sonnenrand passiert, verläuft (übertrieben gezeichnet) etwa so:



Da ein Beobachter ein Objekt in der Regel in jener Richtung lokalisiert, aus der sein Auge von den Lichtstrahlen des Objekts getroffen wird, ist für den Beobachter auf der Erde der Stern wegen der Gravitationswirkung der Sonne um den Winkel φ von ihr *wegversetzt*!

Dieser Ablenkungswinkel errechnet sich in diesem Fall nach folgender Näherungsformel:

$$\varphi = \frac{4 \cdot G \cdot M_S}{R_S \cdot c^2} \quad (\text{in Radian}) \quad (2.7)$$

G Gravitationskonstante $\left(6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}\right)$

M_S Masse der Sonne $(1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg})$

R_S Radius der Sonne $(695\,500 \text{ km} = 6,955 \cdot 10^8 \text{ m})$

Dieser Bruch wurde schon im Abschnitt 1.4 berechnet. Tip: Multipliziere das Ergebnis mit 206265, um Bogensekunden zu erhalten.

Für die Sonne ergibt sich direkt am Sonnenrand nach (2.7) eine Lichtablenkung von ca. 1,75 Bogensekunden. Erstmals konnte diese gravitative Lichtablenkung (wie von Einstein empfohlen) bei einer totalen Sonnenfinsternis, am 29. Mai 1919, beobachtet werden.

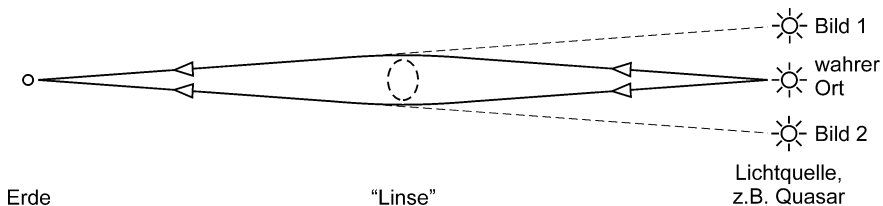
Die damalige Bestätigung, daß das Licht von Sternen⁶¹ nahe am Sonnenrand durch das Schwerefeld der Sonne tatsächlich so abgelenkt wird, daß die Sterne für den Erdbeobachter minimal von der Sonne wegversetzt sind (siehe obige Abbildung), brachte den Durchbruch für die Anerkennung der ART in der wissenschaftlichen Welt und auch in weiten Teilen der naturwissenschaftlich interessierten Öffentlichkeit. Nach dem Bekanntwerden der positiven Beobachtungsergebnisse prägte Einstein den bekannten Ausspruch: „Da könnt’ mir halt der liebe Gott leid tun“ (wenn die Messungen seine Theorie nicht bestätigt hätten).

Der Nachweis der Lichtablenkung von 1919 war allerdings eher qualitativer Natur. Heute kann man aber mit radioastronomischen Verfahren sehr präzise Messungen durchführen, diese bestätigen die ART auch quantitativ.

Wie obige Abbildung zeigt, erlaubt es die Lichtablenkung sogar, Objekte wahrzunehmen, die ohne die lichtablenkende Wirkung des Vordergrund-Himmelskörpers von diesem abgedeckt wären. Mit anderen Worten: Man kann um die Ecke sehen! Deshalb könnte auch ein entfernter Beobachter mehr als eine Hemisphäre kompakter Himmelskörper gleichzeitig überblicken, denn auch Lichtstrahlen von einem Streifen jenseits des geometrischen Horizonts werden in Richtung des Beobachters gebogen: Beispielsweise würde der Anblick eines Neutronensterns ca. 3/4 seiner Oberfläche auf einmal offenbaren!

Die beiden folgenden Fälle b) und c) spielen sich auf viel größeren Entfernungsskalen ab, zum Teil über Milliarden von Lichtjahren.

b) Bei sehr großen Entfernungen zwischen Lichtquelle, „linsendem“ Körper und Erde kommt es durchaus vor, daß von ein und derselben Lichtquelle ausgehende Strahlen auf dem Weg zur Erde die Gravitationslinse an gegenüberliegenden Seiten passieren:



⁶¹ Die Sonne stand damals bei den Hyaden (= Sternhaufen im Sternbild Stier).

Der Beobachter auf der Erde sieht nun zwei oder mehr Bilder desselben Objekts! Einstein hatte sich schon 1936 theoretisch mit dieser Möglichkeit befaßt (aber die Beobachtbarkeit von Doppelbildern für sehr unwahrscheinlich gehalten); das erste Doppelbild eines Quasars wurde erst 1979 entdeckt. Auch ein Vierfachbild eines Quasars in Form eines Kleeblatts („Einstein-Kreuz“) ist bekannt. Bei idealen geometrischen Bedingungen (Lichtquelle, „Linse“ und Erde exakt auf einer Linie; Zentralsymmetrie des Gravitationsfeldes der „Linse“) entstünde ein ringförmiges Bild der Lichtquelle („Einstein-Ring“). Einige solcher (allerdings unregelmäßigen) Ringe wurden schon beobachtet; die Unregelmäßigkeiten der Ringstruktur rühren von Abweichungen von den genannten Idealbedingungen her.

In denjenigen Fällen, bei denen aufgrund der Beobachtungsbedingungen der Ring nicht als solcher aufgelöst (abgebildet) werden kann, führt die Linsenwirkung aber dennoch zu einem meßbaren Effekt: nämlich zur Helligkeitssteigerung des Lichts der Lichtquelle. Auch dieses Phänomen wird in der Praxis genutzt, z.B. bei der Suche nach Objekten, welche die sogenannte Dunkle Materie in den Außenbereichen der Milchstraße verkörpern sollen. Bewegen sich solche dunklen Körper vor dem Hintergrund von Sternen (z.B. der Milchstraßen-Begleitgalaxie „Große Magellansche Wolke“), dann müßte es gelegentlich zu einer vorübergehenden Helligkeitszunahme einzelner Hintergrundsterne kommen („Microlensing“). Hierfür charakteristische (symmetrisch verlaufende) Helligkeitsvariationen wurden schon beobachtet; nach jetzigen Hochrechnungen tragen die linsenden dunklen Körper aber nur wenig zur Dunklen Materie bei. Diesen dunklen Gesellen am Rande der Milchstraßengesellschaft hat man den wenig schmeichelhaften Namen MACHOs gegeben (Massive Astrophysical Compact Halo Objects)!

c) Die Lichtablenkung durch Gravitation betrifft natürlich nicht nur die bisher betrachteten Objekte wie Sterne und Quasare, die wegen ihrer Entfernung uns mehr oder weniger punktförmig erscheinen, sondern auch *alle* Punkte eines flächenhaften Objekts (z.B. einer Galaxie). Als Ergebnis erscheint uns eine weit entfernte Galaxie vergrößert, da ihr Lichtbündel bei der Passage eines massiven Vordergrundobjekts fokussiert wird. Beispielsweise erreichen uns Lichtstrahlen von entgegengesetzten Rändern der Galaxie unter einem größeren Winkel als ohne Anwesenheit der „Linse“. Hier wird der Name Gravitationslinse besonders einsichtig: Die weit entfernte Hintergrundgalaxie wird wie durch eine Fernrohrobjektivlinse vergrößert abgebildet. Bei diesem „Macrolensing“ haben die „Linsen“ aber in der Regel Gravitationsfelder mit sehr unregelmäßiger Struktur (oft sind es kompakte Galaxienhaufen), weshalb meist recht verzerrte und vervielfachte Bilder entstehen. So kann eine einzige Hintergrundgalaxie durch einen im Licht-

weg befindlichen Galaxienhaufen in Form von Dutzenden Bildchen abgebildet werden! Viele der Bilder sind mondsichelförmig und mit der Konkavseite zum Gravitationszentrum orientiert („Einstein-Bögen“). Galaxienhaufen sind also „schlecht geschliffene“ Linsen mit vielen Buckeln und Tälern! Trotz dieser Komplexität der erzeugten Bilder versucht man, aus einem solchen Zerrbilder-Puzzle Erkenntnisse zu gewinnen, sowohl über die gelinste Galaxie (z.B. aus ihrem Spektrum) als auch über die „Linse“ (Struktur und Stärke des Gravitationsfeldes). Auch bei letzterem zeigt sich indirekt die Dunkle Materie, da die Gravitationsfelder der Linse nach diesem Meßverfahren viel stärker sind als die Gesamtzahl der sichtbaren Sterne erwarten ließe!

Die Lichtablenkung kann aber auch noch zu einem anderen bizarren Effekt führen: In Abhängigkeit von der Gesamtdichte des Universums führen dessen Masse und Energie als Ganzes auch zu einer Lichtablenkung. Extrem weit entfernte Objekte sollten also durch den Linseneffekt des zwischen ihnen und uns liegenden Teils des Universums heller erscheinen. Zwar bleibt dabei die Flächenhelligkeit (Helligkeit pro Flächeneinheit) gleich, durch Zunahme der „abgebildeten“ Fläche steigt aber die Gesamthelligkeit⁶².

Schließlich bleibt noch zu erwähnen, daß die Lichtablenkung umso stärker ist,

- je „kompakter“ der ablenkende Himmelskörper ist (siehe Rangfolge der „Kompaktheit“ in Abschnitt 2.3) und
- je näher die Lichtstrahlen dem Gravitationszentrum kommen.

Die extremste Lichtablenkung betreiben die Schwarzen Löcher: Sie zwingen das Licht sogar auf eine kreisförmige Umlaufbahn, und direkt am „Rand“ eines Schwarzen Lochs tangential abgestrahltes Licht „fällt“ stets in dessen Zentrum (siehe Abschnitt 3.2).

Das Ausmaß der Lichtablenkung ist aber von der Farbe, Frequenz und Energie des Lichts *unabhängig*.

2.3 Raumzeitkrümmung, Gravitationswellen

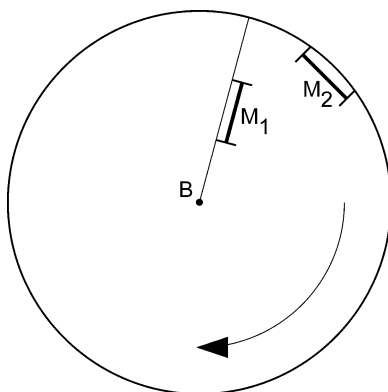
Die oben besprochene Lichtablenkung in Gravitationsfeldern hat ihren Grund in einem viel berühmteren, aber auch schwieriger zu verstehenden Phänomen der ART: der Raumzeitkrümmung. Auch diese ist nur von Fach-

⁶² Bei Objekten mit einer Rotverschiebung $z > \text{ca. } 1,6$ liefert aber die geringere Emissionsentfernung (siehe Kapitel 4) den Hauptbeitrag für die Vergrößerung des Winkeldurchmessers der Objekte am irdischen Himmel.

leuten exakt zu berechnen, es handelt sich wie auch bei anderen Phänomenen der ART um sehr komplexe mathematische Ausdrücke. Deshalb soll hier nur in allgemeiner Form darauf eingegangen werden.

Daß mit dem Raum in einem Gravitationsfeld „irgendetwas nicht stimmen kann“, zeigt unter anderem ein Gedankenexperiment in Anlehnung an die SRT, das in ähnlicher Weise schon Einstein benutzt hat.

Gedankenexperiment: Man denke sich eine große ebene Kreisscheibe, die in einem gravitationslosen Raum zunächst ruht (bezogen auf die Fixsterne der Umgebung). Ein dort wohnendes Scheibenvolk will nun seine „Welt“ vermessen. Hierzu stehen viele gleich lange Meßstäbe zur Verfügung, von denen jeder sehr viel kleiner ist als die Ausmaße der Scheibe. Zur Messung des Scheibenradius wird eine gerade Stäbchenreihe vom Mittelpunkt zum Scheibenrand ausgelegt; zur Umfangsmessung wird der Scheibenrand lückenlos mit Stäbchen belegt. Durch Zählung der Meßstäbchen ergibt sich das Verhältnis von Umfang zu Radius, das erwartungsgemäß 2π beträgt.



Nach dieser Vermessung im Ruhezustand wird die Kreisscheibe mitsamt den ausgelegten Stäbchen (bezogen auf die Fixsternumgebung) in eine gleichförmige Rotation um ihren Mittelpunkt versetzt. Ein Beobachter auf der Scheibe außerhalb des Scheibenmittelpunkts verspürt nun eine radiale Kraft nach außen. In Newtons Sprache würden wir sie Fliehkraft nennen, also eine auf der Drehbeschleunigung beruhende Scheinkraft. Unter Anwendung des Äquivalenzprinzips können wir aber ebensogut von einer nach außen wirkenden Gravitationskraft sprechen. Dieses „Gravitationsfeld“ hat sicherlich eine recht ungewöhnliche Struktur: Im Zentrum beträgt die Schwerkraft null, radial nach außen nimmt sie kontinuierlich zu. Dies soll uns aber nicht weiter stören.

Für einen Beobachter B , der über dem Scheibenmittelpunkt schwebt und (bezogen auf die Fixsternumgebung) *nicht* rotiert, tritt nun aber wegen der Scheibenrotation eine Komplikation auf: Er sieht jeden für die Umfangsmessung an den Scheibenrand gelegten Meßstab (z.B. M_2 in der Abbildung) um den Kehrwert des Gamma-Faktors kontrahiert. Denn: Jeder dort tangential liegende Stab bewegt sich für B in Richtung seiner Länge (in hinreichend kurzen Zeitintervallen und bei hinreichender Scheibengröße annähernd geradeaus!). Deshalb können die Regeln der SRT angewandt werden: Es kommt zur Lorentz-Kontraktion eines jeden einzelnen Meßstabes. Bei den Meßstäben, die für die Radiusmessung vom Mittelpunkt zum Scheibenrand aneinandergereiht sind, tritt dieser Störeffekt nicht auf, denn diese Meßstäbe (z.B. M_1 in der Abbildung) bewegen sich für B stets quer zu ihrer Länge.

Für den Beobachter B ist wegen dieses der SRT entlehnten Effektes das Verhältnis zwischen Umfang und Radius nun nicht mehr 2π (wie vor Beginn der Rotation), sondern *kleiner*, denn der Umfang hat sich für ihn verkleinert, während der Radius gleich groß geblieben ist. Ein Meßwert, der vom normalerweise (bei ruhender Scheibe) zu erwartenden Umfang abweicht, läßt sich aber am besten als Ausdruck einer Krümmung oder Wölbung der rotierenden Scheibe interpretieren (so wie auf der Erdoberfläche das „Mißverhältnis“ zwischen Umfang am Äquator und der Strecke Nordpol-Äquator gegen eine Scheibenform spricht)! Hier besteht also eine Abweichung von der euklidischen⁶³ Geometrie! Wenn in einem (hier Dreh-)Beschleunigungsfeld eine Krümmung des (hier zweidimensionalen) Raumes auftritt, dann muß dies wegen des Äquivalenzprinzips auch für ein Gravitationsfeld (mit hier gedachter Anziehungskraft nach außen) gelten.

Nun wird also klar, daß wir uns in Gravitationsfeldern vom ebenen Raum der SRT verabschieden müssen.

Je weiter man sich vom Mittelpunkt der Scheibe (dem „gravitationslosen“ Punkt) entfernt, desto höher ist die Geschwindigkeit relativ zu B (bei fixer Winkelgeschwindigkeit), desto stärker ist also die Lorentz-Kontraktion für B und umso stärker ist damit auch die Raumkrümmung.

Im realen Universum wird Gravitation natürlich nicht durch rotierende Scheiben erzeugt, sondern im Wesentlichen durch massereiche Himmelskörper. In deren Umgebung ist die Raumzeitkrümmung umso stärker,

⁶³ euklidische Geometrie: Die aus der Schulmathematik bekannte Geometrie mit in der Regel drei Raumrichtungen (x , y , z), bei der z.B. das Verhältnis Umfang eines Kreises zu Radius stets 2π beträgt, die Winkelsumme im Dreieck 180° ergibt und es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden genau eine Parallele zu der Geraden gibt (siehe auch Tabelle S. 220/221).

je näher man der Oberfläche des Objekts ist und je kompakter (dichter) und massereicher der Himmelskörper ist.

Bezüglich der Kompaktheit von Objekten läßt sich eine Rangordnung aufstellen (mit in dieser Reihenfolge zunehmender Dichte):

- Rote Riesen,
- „normale“ Sterne (sogenannte Hauptreihensterne),
- Weiße Zwerge,
- Neutronensterne,
- Schwarze Löcher (Raumzeitkrümmung unendlich!).

Materie spielt also in der Mechanik und der Gravitationsphysik nicht nur die passive Doppelrolle als schwere und träge Masse, sondern sie erzeugt auch Raumzeitkrümmung. Masse (und dazu äquivalente Energie) krümmen die Raumzeit; und diese Krümmung wiederum gibt Massen und dem Licht die Bahnen vor, auf denen sie sich zu bewegen haben. Dies sind die Kernaussagen der ART! Die Raumzeitkrümmung (besser ausgedrückt: die durch die Anwesenheit von Massen veränderte Geometrie der Raumzeit) ist nicht nur ein Symbol für die Gravitation, sondern sie *ist* die Gravitation!

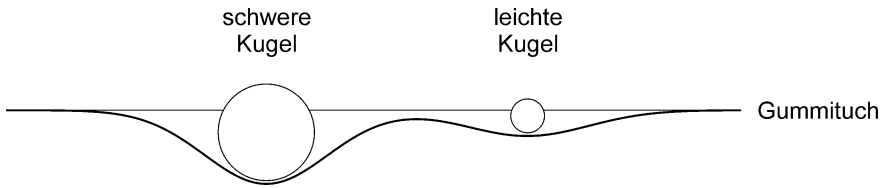
Eine Analogie

Kein Mensch kann sich eine Raumzeitkrümmung vorstellen, ja im Allgemeinen nicht einmal die Krümmung eines dreidimensionalen Raumes. Es muß daher auf eine vorstellbare Analogie zurückgegriffen werden. Üblicherweise reduziert man dazu zunächst die Zahl der Raumdimensionen von drei auf zwei, also auf eine Fläche. Die dadurch „frei gewordene“ dritte Dimension kann nun zur Darstellung der Krümmung verwendet werden. Praktischerweise stellt man sich als erwähnte Fläche ein Gummituch vor (z.B. eine Trampolinsprungsfläche). Ist keine Masse vorhanden, bleibt die Fläche eben, die Krümmung beträgt null. Dieser Zustand entspricht dem flachen Raum der SRT. Legt man eine schwere Metallkugel auf das Gummituch, so kommt es zu einer Einsenkung, gleichzeitig weist das Tuch in der Umgebung der Kugel, die natürlich einen massereichen Himmelskörper repräsentieren soll, eine Krümmung auf.

Die folgende Abbildung zeigt in dieser Analogie zwei benachbarte Himmelskörper unterschiedlicher Masse. Weit von der schweren Kugel entfernt wird die Krümmung vernachlässigbar klein, entsprechend einer immer geringeren Gravitation.

Zwei Hinweise zu diesen auch andernorts oft benutzten „Trampolinmulden“:

- Eine solche Mulde stellt nur die Raumkrümmung einer 2-dimensionalen Schnittfläche durch das Zentrum des Himmelskörpers dar. Die dritte



dort dargestellte Raumdimension, in die sich das Tuch hineinwölbt, ist hier nur eine Hilfsdimension zur Demonstration der Raumkrümmung des ausgewählten 2-dimensionalen (Schnittflächen-)Raums. Eine weitere Bedeutung hat diese Dimension nicht. Wollte man die Krümmung des 3-dimensionalen Raums darstellen, dann bräuchte man entsprechend mindestens eine hypothetische vierte Hilfs-Raumdimension (die *nichts* mit der Zeitdimension zu tun hat).

- Die Krümmung des „Zeitanteils“ der Raumzeitkrümmung wird nicht dargestellt. Man könnte von einem Momentbild der Raumzeitkrümmung der Schnittfläche durch das Zentrum des Himmelskörpers sprechen. Der „Zeitanteil“ der Raumzeitkrümmung wird später noch besonders behandelt.

Nun zurück zur wirklichen Raumzeitkrümmung: Nicht nur Lichtteilchen müssen auf ihren Wegen die Raumzeitkrümmung in Kauf nehmen (siehe Lichtablenkung), viel stärker noch müssen ihre materiellen Körper folgen, da diese sich ja langsamer als das Licht fortbewegen. In dieser Sichtweise fällt ein Butterbrot nicht wegen der Erdanziehungskraft zu Boden, sondern weil es der Raumzeitkrümmung folgen muß, die durch die Anwesenheit der Erdmasse entsteht!

Der natürliche Weg aller Körper auf der Erde wäre der freie Fall als „Nachgeben“ gegenüber der Raumzeitkrümmung, aber der Erdboden hält alles auf⁶⁴.

Die Raumzeitkrümmung existiert (schwächer) auch noch in der Ferne: Beispielsweise bekommt der Mondumlauf um die Erde durch sie eine völlig

⁶⁴ Unter Anwendung des Äquivalenzprinzips können wir auch sagen: Der Erdboden erzeugt durch Behinderung des freien Falls eine Beschleunigung aller auf ihm liegenden Körper nach oben! Aus diesem Blickwinkel wird auch sofort klar, warum an einem bestimmten Ort alle Gegenstände gleichschnell „fallen“: Beispielsweise zwei gleichzeitig und auf gleicher Höhe nebeneinander losgelassene Kugeln, eine aus Gold, die andere aus Aluminium, ruhen in ihrem System und werden von dem nach oben beschleunigten Erdboden natürlich gleichzeitig „getroffen“! Die Masse spielt bei dieser Betrachtungsweise überhaupt keine Rolle; und alles Philosophieren über die Gleichheit der trägen und schweren Masse wird überflüssig!

neue Grundlage: Der Mond wird nicht durch Anziehungs- und Fliehkraft auf seiner Bahn gehalten, er ist vielmehr ein Körper, der dem Weg „entlangfällt“, den ihm die durch die Anwesenheit der Erde vorhandene Raumzeitkrümmung vorschreibt. In der Gummituch-Analogie kreist er entlang der Außenwand der durch die Erde verursachten Einsenkung des Tuchs wie ein Rennfahrer an der außen erhöhten Bahn eines engen Rundkurses. Bei anderen gravitativ gebundenen Himmelskörpern verhält es sich ebenso; Doppelterne bilden z.B. eine gemeinsame „Mulde“ in der Raumzeit, in deren Zentrum der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Sterne liegt, den sie ständig umkreisen müssen.

Die Einsenkungen, die durch Schwarze Löcher hervorgerufen werden, sind nicht so seicht wie die normaler Himmelskörper, sondern verlaufen schlauchartig (in der Gummituch-Analogie) in unendliche Tiefe.

Radiale Raumkontraktion

Auf einem Neutronenstern⁶⁵ könnte wegen der extremen Gravitation kein Lebewesen existieren. Aber zur Verdeutlichung eines wichtigen Effekts in der ART soll uns eine solche „Sternleiche“ in Gedanken nun als Beobachtungsobjekt dienen.

Würden zwei Beobachter, einer vor Ort auf dem Neutronenstern und ein zweiter weit entfernt, die Sternoberfläche A vermessen, dann kämen beide zum selben Ergebnis. Über Kugeloberflächen besteht also Einigkeit unter beiden Beobachtern.

Anders ist es bei radialen Entfernungen (also senkrecht zur Sternoberfläche gemessenen): Für den Beobachter vor Ort sind radiale Abstände *größer* als für den entfernten Beobachter! Diese „radiale Raumkontraktion“ (aus der Sicht des entfernten Beobachters) ist ein ganz wesentlicher Aspekt der Raumzeitkrümmung, der hier allerdings nicht hergeleitet werden kann.

Diese Diskrepanz bei der Messung radialer Abstände betrifft insbesondere auch den Radius des Neutronensterns als Ganzes: Für den Neutronensternbewohner ist er deutlich größer als für einen weit entfernten Beobachter. Offensichtlich kann daher die aus der euklidischen Geometrie bekannte Formel

$$\text{Kugeloberfläche } A = 4\pi \cdot \text{Radius}^2 \text{ (gemessen)}$$

nicht für beide Beobachter gleichzeitig gelten; über die Oberfläche waren sich beide einig, nicht jedoch über den Radius.

⁶⁵ sehr kompakter Himmelskörper mit ca. 1,5-facher Sonnenmasse, aber nur etwa 20 km Durchmesser; entsteht bei Kollaps des Kerns eines massereichen Sterns; der Rest des Sterns explodiert (Supernova)

Um in dieses nun drohende Chaos bei radialen Entfernungsangaben ein wenig Ordnung zu bringen, können beide Beobachter *vereinbaren*, eine „Radius-Koordinate“ zu benutzen, die *beide* aus $\sqrt{A/4\pi}$ bestimmen. Radiale Abstände vom Gravitationszentrum sind damit nominell für die Beobachter eindeutig festgelegt, denn über die Oberfläche besteht ja Einigkeit unter allen Beobachtern.

Alle Radiusangaben, die in Formeln zur ART in den Kapiteln 2 und 3 vorkommen, unterliegen diesem Prinzip: Sie sind stets als $\sqrt{A/4\pi}$ zu verstehen! Dies gilt auch dann, wenn gar keine feste Oberfläche vorhanden ist, z.B. im Nahbereich eines Schwarzen Lochs. Bei *allen* radialen Entfernungsangaben denke man sich eine durch den betreffenden Ort verlaufende Kugelschale mit dem Gravitationszentrum als Mittelpunkt; *nur* daraus errechnet sich nach obiger Formel der von nun an verwendete „Abstand“ vom Gravitationszentrum.

In schwachen Gravitationsfeldern spielt diese Vorsichtsmaßnahme natürlich keine wesentliche Rolle: Bei der Erde z.B. ist es egal, ob man den Radius R_E durch eine Bohrung zum Erdmittelpunkt oder aus der Oberflächenvermessung ermittelt, beide Werte wären praktisch identisch. Nicht so beim Neutronenstern; hier wäre der durch eine (hypothetische!) Bohrung ermittelte Radius-Wert deutlich höher als der aus der Oberfläche berechnete!

Bei der Darstellung der Radius-Koordinate als $\sqrt{A/4\pi}$ tut man so, als sei der Raum im Bereich des betrachteten Himmelskörpers flach (ungekrümmt), denn tatsächlich gilt diese Formel ja nur in der euklidischen Geometrie. In Wirklichkeit ist der Raum um den Himmelskörper aber gekrümmt; die von den Beobachtern verwendete Radius-Koordinate ist also nur ein theoretischer Hilfwert mit dem Vorzug, daß ihn verschiedene Beobachter „verstehen“; jeder Beobachter kann ihn bei Bedarf in den für sein Bezugssystem gültigen Meßwert umrechnen. Ein in einem starken Gravitationsfeld ruhender Beobachter (wie unser Neutronensternbewohner) muß bei dieser Umrechnung eben die nun bekannte radiale Raumkontraktion berücksichtigen, die aus seiner Sicht radiale Entfernungen im Vergleich zur Radius-Koordinate *vergrößert*.

Welches Ausmaß nimmt die radiale Raumkontraktion an? Für einen Beobachter bei einem Abstand R (bestimmt aus $\sqrt{A/4\pi}$) von einem Gravitationszentrum ist eine kleine radiale Abstandsdifferenz, die für einen weit entfernten Beobachter r beträgt, größer als r , nämlich

$$\frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{R \cdot c^2}}}$$

G : Gravitationskonstante
 M : Masse des Himmelskörpers

Wirklich relevant wird die radiale Raumkontraktion nur bei kompakten Himmelskörpern, also solchen mit kleinem „Radius“ R bei gleichzeitig großer

Masse M (Neutronensterne, Schwarze Löcher). In Abschnitt 3.2 findet sich eine Beispielrechnung für einen Neutronenstern.

Bei „normalen“ Himmelskörpern hingegen ist umgekehrt R groß und somit der Wert des Bruchs in der Wurzel nahe bei null, damit der Wert der Wurzel nahe bei 1. Für beide, den Beobachter vor Ort bei R und den weit entfernten Beobachter, beträgt die kleine radiale Abstandsdifferenz praktisch r .

Ein anschauliches Beispiel für diese nach innen zunehmende radiale Raumkontraktion: Könnte man auf einem Neutronenstern eine hohe Stufenpyramide errichten, die *für den Baumeister vor Ort* jeweils gleiche Stufenhöhen aufweist, so wären für einen entfernten Beobachter die Stufenhöhen nicht gleich: Die unteren wären kleiner als die oberen.

Wenn man die Pyramide dagegen so baut, daß *aus Sicht eines in der Ferne ruhenden Architekten* die Stufenhöhen alle gleich sind, dann messen Beobachter vor Ort unten eine größere Stufenhöhe als an der Spitze.

Die radiale Raumkontraktion und die Raumkrümmung (symbolisiert durch die Gummituchmulden) sind zwei alternative Sichtweisen desselben Sachverhalts. Dies soll anhand der beiden folgenden Abbildungen gezeigt werden, die jeweils einen *Schnitt durch das Zentrum* eines massereichen Himmelskörpers darstellen sollen:

In *beiden* Fällen wäre für einen Kreis um den Mittelpunkt des Himmelskörpers in der Schnittebene das Verhältnis Umfang / Radius $< 2\pi$.

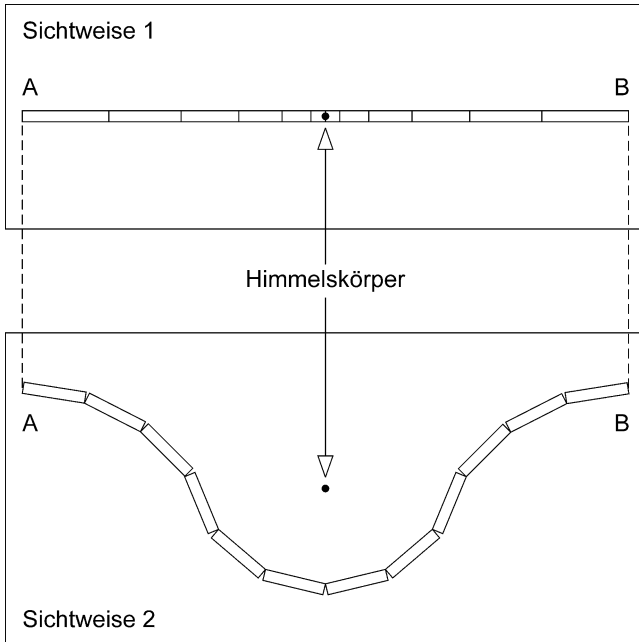
Läßt sich die Raumzeitkrümmung nachweisen?

Ja, zumindest indirekt: Die oben dargestellte Lichtabweichung an gravitierenden Körpern wird ja durch die Raumzeitkrümmung verursacht. Es gibt allerdings auch experimentelle Nachweise: Radar-Echos von Merkur, Venus und Mars erscheinen verzögert, wenn diese Planeten „jenseits“ der Sonne stehen⁶⁶. Diese Laufzeitverzögerung wird je zur Hälfte von der Raumkrümmung und der noch zu besprechenden gravitativen Zeitdilatation verursacht. Noch genauere Messungen der Laufzeitverzögerung erlauben Funksignale von Raumsonden, die jenseits der Sonne unterwegs sind. Alle Messungen konnten die Raumzeitkrümmung im Sinne der ART bestätigen. Nach dem Erstbeobachter dieser Laufzeitverzögerungen nennt man letztere auch Shapiro-Effekt.

In der Gummituch-Analogie könnte man diese Laufzeitverzögerungen (zum Teil) damit erklären, daß ein Signalweg zwischen zwei Orten A und B , der an einem gravitierenden Himmelskörper vorbeiführt, durch eine (von diesem verursachte) Mulde im Tuch verlaufen muß; dieser Signalweg ist somit *länger* als wenn der Raum zwischen A und B flach (ebenes Tuch ohne Mulde) wäre. Und ein längerer Weg erfordert mehr Zeit!

⁶⁶ (obere) Konjunktion

Gravitative radiale Raumkontraktion: Radial liegende Maßstäbe im Bereich eines massereichen Himmelskörpers sind verkürzt, um der Gravitation Rechnung zu tragen. Die Kontraktion nimmt nach „innen“ hin zu.



Geht man dagegen *formal* davon aus, daß auch in einem Gravitationsfeld Maßstäbe stets gleich lang sind, dann hat zwischen zwei Raumpunkten A und B dieselbe Anzahl von Maßstäben nur dann „Platz“, wenn man sie entlang einer Gummituchmulde auslegen kann; der (hier zweidimensionale) *Raum ist gekrümmt!*

Freifallsysteme, Gezeitenkräfte

In der Nähe von gravitierenden Himmelskörpern, also inmitten ihrer Schwerfelder, kann es aber auch Systeme mit „lokal flachem Raum“ geben. Damit sind Systeme im freien Fall gemeint.

Die Bezeichnung flach, also krümmungsfrei, ist absolut berechtigt, wenn man bedenkt, daß es innerhalb eines frei fallenden Systems wie in einem Inertialsystem der SRT zugeht: Ein einmal angestoßener Körper fliegt mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradeaus, nicht angestoßene Körper schweben an ihrem Platz, solange der freie Fall anhält. Ja sogar die Vakuumlichtgeschwindigkeit c gilt dort, was ansonsten bei Beschleunigungs- und Gravitationsfeldern nicht so eindeutig festgestellt werden kann (siehe dazu Abschnitt 2.4). Man ist also gezwungen, einem frei fallenden System dieselben Qua-

litäten wie einem Inertialsystem der SRT zuzugestehen. Und in der SRT gibt es bekanntlich keine Raumkrümmung, von Gravitation ist dort keine Rede. Also ist der Raum im Inneren des Freifallsystems tatsächlich flach. Man kann ein solches System daher auch als „Inertialsystem der ART“ bezeichnen. Ein wesentlicher Unterschied zu den Inertialsystemen der SRT besteht natürlich, aber nur nach außen hin: Es ist gegenüber diesen in beschleunigter Bewegung. Und es ist räumlich und zeitlich begrenzt (siehe unten).

Auch in der Newtonschen Mechanik hat der freie Fall eine Sonderstellung: Beschleunigung(sfeld) und Schwere(feld) heben sich genau auf; wie in einem Inertialsystem wirkt keine resultierende Kraft.

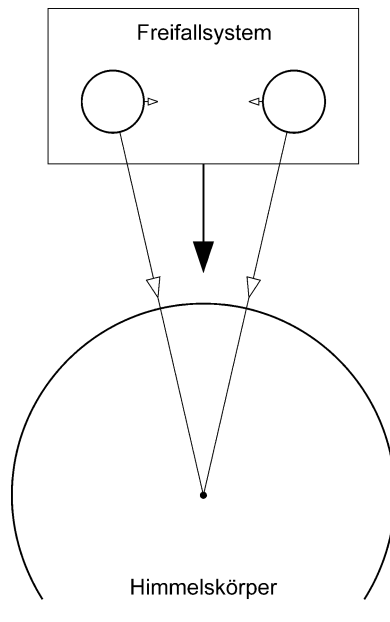
Genaugenommen darf man im Zusammenhang mit Freifallsystemen aber nur von *lokalen Inertialsystemen* sprechen. Denn die Regeln der SRT gelten dort (je nach erwünschter Meßgenauigkeit) nur in kleinen Raum- und Zeitbereichen. Werden diese Raum- und Zeitgrenzen überschritten, dann treten *Gezeitenkräfte* auf (siehe auch folgende Abbildungen: Gezeitenkräfte I und II):

- Zur *räumlichen* Begrenztheit der Gültigkeit der Regeln der SRT in Freifallsystemen:
 - *Nebeneinander* fallende Testmassen nähern sich einander, weil jede für sich in Richtung des Mittelpunkts des Himmelskörpers fällt. Die Fallbahnen konvergieren (= laufen zusammen); im Freifallsystem selbst nähern sich die Testmassen, kompakte Körper werden quer zur Fallrichtung komprimiert („Ebbe“). Unterschreitet das System eine gewisse Größe, werden diese Veränderungen unmeßbar klein, es besteht ein lokales Inertialsystem!
 - *Untereinander* fallende Testmassen entfernen sich voneinander, weil die untere Testmasse der Raumzeitkrümmung/Gravitation stärker ausgesetzt ist als die obere; kompakte Massen werden in Fallrichtung gedehnt („Flut“). Auch hierbei hängt die Meßbarkeit des Phänomens von der Größe des Systems ab, „Kleinheit“ bedeutet: SRT gilt lokal!
- Zur *zeitlichen* Begrenztheit der Anwendbarkeit der SRT-Regeln in Freifallsystemen: Bei einem längeren freien Fall zeigen sich die oben genannten Gezeitenkräfte auch in kleinräumigen Systemen: Die SRT-Regeln gelten (abhängig von der Meßgenauigkeit) nur kurzzeitig, sozusagen zeitlich „lokal“!

Diese Gezeitenkräfte erlauben somit die Bestimmung der Variabilität der Raumzeitkrümmung von Ort zu Ort (also der Struktur eines Gravitationsfeldes): Betrachtet man das Gravitationsfeld eines Himmelskörpers als zusammengesetzt aus vielen kleinen freifallenden Inertialsystemen, die mit je einer Testmasse versehen sind, dann zeigt sich die Variabilität der Raumzeitkrümmung am unterschiedlichen Verhalten benachbarter Systeme:

Gezeitenkräfte I

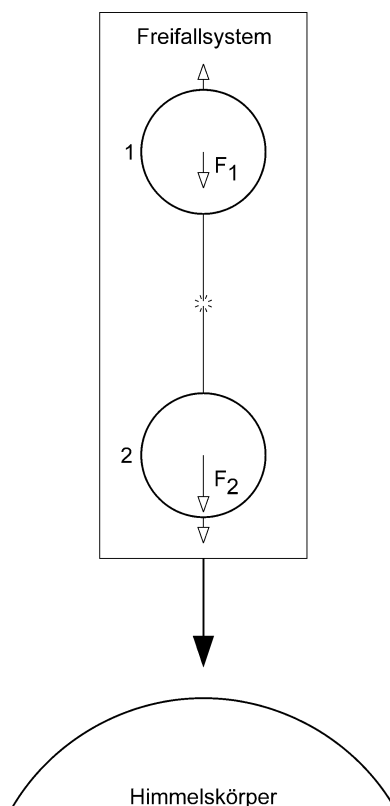
Massen in einem Freifallsystem nähern sich quer zur Fallrichtung einander, weil jede für sich in Richtung Mittelpunkt des Himmelskörpers fällt.



Man sieht hier sehr schön, daß die Gezeitenkräfte *allein* auf der Inhomogenität des Feldes beruhen. In einem homogenen Feld (überall gleiche Richtung und Stärke) gäbe es keine Gezeitenkräfte!

Gezeitenkräfte II

Teilmasse 2 ist dem Himmelskörper näher und wird deshalb stärker angezogen als Teilmasse 1. Die Kraft F_2 ist also größer als die Kraft F_1 . Die Differenz dieser Kräfte bringt den die Teilmassen verbindenden Faden zum Zerreißen.

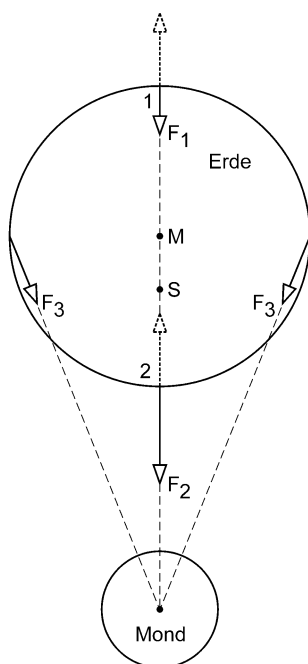


- an der Annäherung nebeneinander fallender Testmassen und
- an der Abstandszunahme untereinander fallender Testmassen.

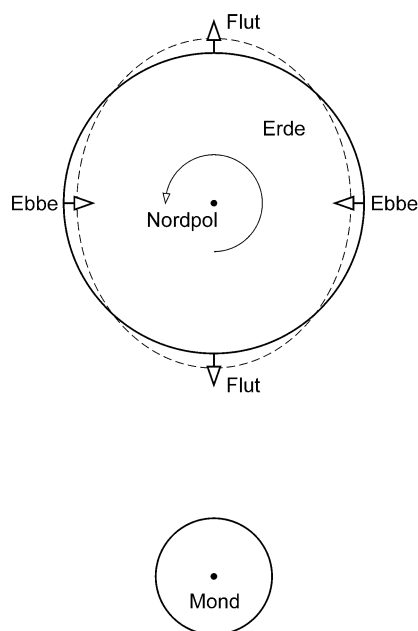
Bei dieser gezeitenbedingten Relativbewegung zwischen den benachbarten lokalen Inertialsystemen handelt es sich um „beschleunigte“ Bewegungen (in der Sprache der SRT). Daher können diese lokalen Inertialsysteme nicht einfach durch Lorentz-Transformationen miteinander verknüpft werden (wie in der SRT)!

Auch die Erdgezeiten lassen sich so vielleicht verstehen (verglichen mit umständlichen Kräftevergleichen auf Basis des gemeinsamen Schwerpunkts S der Körper):

Aus Sicht des Mondes (der bei den Gezeiten überwiegend als Gravitationszentrum wirksam ist):



Aus Sicht des „Freifallsystems Erde“:
Gravitationskraft = 0, Restkräfte = Gezeitenkräfte:



(\triangle) = Fliehkraft: Sie ist für jeden Punkt der Erde nach Betrag und Richtung gleich, da der Erdschwerpunkt (hier mit M bezeichnet) sich auf einer fast kreisförmigen Bahn in 27,32 Tagen⁶⁷ einmal um den Schwerpunkt S des Erde-Mond-Systems bewegt. Alle anderen Erdpunkte ziehen im selben Zeitraum Kreisbahnen mit demselben Radius, nur räumlich versetzt zur Bahn des Erdschwerpunkts M .)

⁶⁷ siderischer Monat

Erläuterungen:

- Kraft F_2 ist größer als Kraft F_1 (da Punkt 2 näher am Gravitationszentrum Mond ist als Punkt 1); die Differenz der Kräfte zerzt an der Erde einschließlich ihrer Wassermassen: Flut.
- Die Kräfte F_3 haben eine Komponente nach „innen“ (da sie ja auf den Mondmittelpunkt gerichtet sind). Im Freifallsystem wirken nur noch diese nach innen gerichteten Komponenten. Sie komprimieren die Erde senkrecht zu ihrer „Fallrichtung“ und beeinflussen entsprechend unter anderem die Ozeane: Ebbe.

Diese Gezeitenkräfte treten nicht nur in Freifallsystemen auf, sondern sind bezugssystemunabhängig (beobachterunabhängig). Sie fehlen aber in *reinen* Beschleunigungsfeldern (homogene Beschleunigung).

Damit offenbaren die Gezeitenkräfte in der Tat die Struktur eines Gravitationsfeldes ganz exakt. Die Messung der Gezeitenkräfte kann auch im Inneren eines Raumschiffs erfolgen, Astronauten könnten demnach ohne einen Blick nach draußen, ohne Radar oder andere externe Meßverfahren die Struktur des lokalen Gravitationsfeldes bestimmen (dessen von Ort zu Ort unterschiedliche Stärke und Richtung). Die Gezeitenkräfte lassen sich *nicht* (wie die Gravitationskraft selbst) wegtransformieren.

Der Leser wird nun auch verstehen, daß die im einführenden Abschnitt zur ART erwähnte Äquivalenz zwischen Gravitations- und Beschleunigungsfeld ebenfalls nur lokal gilt. Das gesamte Erdschwerefeld durch ein einziges Beschleunigungsfeld zu „simulieren“, könnte z.B. nicht gelingen. Bei infinitesimaler Kleinheit eines Freifallsystems gibt es aber keine Gezeitenkräfte: Das Äquivalenzprinzip und damit auch die Gesetze der SRT gelten exakt!

Wie groß ist die Gezeitenkraft genau?

Zwischen zwei Punkten eines Körpers (oder zwischen zwei Massen) im Abstand d voneinander beträgt die Gezeitenbeschleunigung

$$a = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R^3} \cdot d,$$

wobei R aus $\sqrt{A/4\pi}$ mit einer gedachten Kugelschalenoberfläche A mit dem Gravitationszentrum als Mittelpunkt ermittelt wird (siehe oben). Durch Multiplikation mit Teilmassen des Körpers erhält man dann die auseinanderzerrende Gezeitenkraft. Die quer dazu wirkende komprimierende Gezeitenkraft ist nur halb so groß.

Aus der dritten Potenz von R im Nenner erkennt man, daß bei abnehmender Entfernung vom Gravitationszentrum die Gezeitenkraft stark zunimmt. Deshalb verwundert es nicht, daß der winzige Erdmond einen stärkeren Gezeiteneinfluß auf die Erde ausübt als die sehr viel mächtigere Sonne!

Bezüglich der Gezeitenkräfte bietet sich folgende Gummituch-Analogie an: Wenn eine große Zahl kleiner Metallkugeln in zunächst kreisförmiger Formation auf eine im Verhältnis dazu sehr große Gummituchmulde zurollt, so wird aus dem Kreis eine Ellipse, denn

- der Abstand der Kugeln *quer* zur Laufrichtung verkleinert sich, weil jede einzelne Kugel auf das Muldenzentrum zuläuft;
- der Abstand der Kugeln *in* Laufrichtung vergrößert sich, weil die dem Muldenzentrum näheren Kugeln schon auf einem abschüssigeren Abschnitt der Mulde rollen (im Vergleich zu nachfolgenden Kugeln) und daher stärker beschleunigt werden.

Im Raum: Bahnen – In der Raumzeit: Geodäten

Die Bahnen freier Körper werden nach dem oben Gesagten nicht von Newtons Anziehungskraft bestimmt, die auf mysteriöse Art und Weise⁶⁸ auf die Ferne wirken sollte, sondern allein von der lokal vorhandenen Raumzeitkrümmung. Mit zunehmender Entfernung von einem Himmelskörper „verdünnt“ sich die Raumzeitkrümmung dabei im größer werdenden Volumen, wird dort also schwächer. In sehr großer Entfernung von Himmelskörpern ist die Raumzeit annähernd flach; dort gilt praktisch die SRT. Letztere ist somit als Grenzfall in der ART enthalten.

Newton hielt den Raum für euklidisch (flach), deshalb *mußte* er zur Erklärung z.B. der gekrümmten Planetenbahnen seine Anziehungskraft einführen. Die ART erklärt die (im Raum gekrümmten) Bahnen freier Körper dagegen viel natürlicher: Jeder freie Körper folgt in dem gerade durchflogenen lokalen Inertialsystem einer geraden Bahn (wie in der SRT). Da aber die nacheinander durchflogenen lokalen Inertialsysteme⁶⁹ in einem Gravitationsfeld in beschleunigter Bewegung zueinander sind, entsteht im Endeffekt im Raum eine gekrümmte Bahn, z.B. eine Ellipse (Ausnahme: gerade Fallbahn bei senkrechtem Fall in Richtung Gravitationszentrum).

⁶⁸ Newton hatte diesen Schwachpunkt seiner Theorie selbst erkannt und bedauert.

⁶⁹ Daß eine *beschleunigte* Bewegung durch viele lokale Inertialsysteme mit jeweils minimal voneinander verschiedener Geschwindigkeit beschrieben werden kann, wurde schon in Abschnitt 1.8 erwähnt. *Wegen der Äquivalenz zwischen Beschleunigungs- und Gravitationsfeldern* kann auch der Weg durch letztere mittels Aneinanderreihung vieler lokaler Inertialsysteme beschrieben werden.

Eine auf die Ferne wirkende Kraft ist entbehrlich! Um der Anschaulichkeit willen wird aber im Folgenden dennoch gelegentlich von der Gravitationskraft die Rede sein. Strenggenommen ist die Schwerkraft nach der ART nur eine Scheinkraft (sie tritt ja nur bei Behinderung des freien Falls auf), ganz ähnlich wie die Fliehkraft in der Newtonschen Mechanik eine Scheinkraft ist, die nur bei Auslenkung aus einer geradlinigen Inertialbewegung auftritt.

Daß im Raum gekrümmte Bahnen im *lokalen* Inertialsystem sehr wohl gerade sind, könnte man mit einem transparenten frei fallenden Aufzug schön demonstrieren: Ein im Aufzug in eine beliebige seitliche Richtung geworfener Ball bewegt sich für Beobachter auf der Erdoberfläche auf einer Parabelbahn (übliche Wurfparabel). Für die Beobachter im Aufzug (= lokales Inertialsystem für den Ball) ist die Bahn des Balles aber exakt geradlinig!

Bezüglich der lokalen Inertialsysteme besteht folgende Gummituch-Analogie: Jede (endlich) gekrümmte Fläche kann man so in winzige Teilflächen zerlegen, daß letztere im Rahmen der Meßgenauigkeit (lokal) eben sind! Die Neigungswinkel zwischen diesen einzelnen Facetten sind Ausdruck der Krümmung der Gesamtfläche.

Die Bezeichnung „freier Fall“ hat hier natürlich eine umfassendere Bedeutung als nur der senkrechte Fall, z.B. in Richtung Erdmittelpunkt. Jede Bahn eines antriebslosen Körpers im Schwerfeld eines gravitierenden Himmelskörpers gilt als freier Fall, z.B. auch das Herumschwingen eines Kometen um die Sonne, der dann wieder, eventuell auf Nimmerwiedersehen, verschwindet.

Von diesem letzten Gedankengang ist es dann nur noch ein kleiner Schritt zu der Erkenntnis, daß auch Planetenbahnen einen freien Fall darstellen. Die Krümmung der Raumzeit bewirkt in diesen Fällen, daß die „Fallbahn“ nicht gerade, sondern elliptisch oder im Spezialfall kreisförmig ist. Trotz der Krümmung dieser Bahnen im Raum stellen sie in der gekrümmten Raumzeit lokal immer die geradesten Verbindungslinien („geodätische Linien“) dar! Bei völlig flacher Raumzeit (SRT) wären geodätische Linien stets gerade. So sind z.B. alle geraden Weltlinien in den Raum-Zeit-Diagrammen des Abschnitts 1.17 geodätische Linien oder kurz „Geodäten“. In Schwerfeldern mit ihrer gekrümmten Raumzeit können Geodäten dagegen nur *lokal* als gerade angesehen werden. Am Beispiel der Erdbahn: Hier könnte man einen 30 Meter langen Abschnitt der insgesamt 940 Millionen Kilometer messenden Bahn der Erde um die Sonne sicherlich als geradlinig ansehen (dieser Bahnabschnitt wird in einer Millisekunde durchflogen). Eine Abweichung dieses Wegstückes von der Geradlinigkeit wäre mit den üblichen Meßmethoden nicht nachweisbar; Experimente im Erdschwerpunkt würden in die-

sen Raum- und Zeitgrenzen wie im flachen Raum der SRT verlaufen. Der Erdschwerpunkt ist in diesem Sinne ein lokales Inertialsystem im Schwerefeld der Sonne. In *großen* Raum- und Zeitabschnitten sind die Bahnen von Körpern, also der räumliche Anteil ihrer Geodäten, in Gravitationsfeldern aber immer krumm, so auch die Erdbahn.

Die Planeten oder auch der Mond haben bei ihrer Entstehung einen Bewegungsimpuls mitbekommen, der heute noch dazu ausreicht, sie auf ihren Bahnen entlangfallen zu lassen. Auch die Bahn eines jeden anderen Körpers, auf den keine nicht-gravitativen Kräfte wirken, ist in der Raumzeit eine zeitartige geodätische Linie.

An dieser Stelle besteht eine weitere interessante Querverbindung zur SRT, die bei Bahnberechnungen in starken Gravitationsfeldern auch tatsächlich angewandt wird: Die SRT und speziell der Zwillingeffekt haben uns folgendes gelehrt:

- Eine kräftefreie „Bewegung“ (siehe ruhender Zwilling mit gerader Weltlinie) zwischen zwei bestimmten Ereignissen ist mit dem Ablauf einer maximalen Eigenzeit (maximale Alterung) verbunden: „Wer rastet, der rostet maximal!“
- Eine nicht kräftefreie Bewegung zwischen denselben zwei Ereignissen (siehe reisender Zwilling: Krafteinwirkung bei der Umkehr) bringt eine im Vergleich dazu reduzierte Eigenzeit (geringere Alterung) mit sich.

Dieses Konzept des maximalen Eigenzeitablaufs bei kräftefreier Bewegung ist auch in der ART gültig. Man kann daher folgende Sachverhalte als synonym betrachten:

- kräftefreie Bewegung eines Körpers
- = freier Fall des Körpers
- = maximaler Eigenzeitablauf zwischen zwei Ereignissen auf der Weltlinie des Körpers
- = die Weltlinie des Körpers ist eine zeitartige Geodäte (geradeste Linie) in der Raumzeit.

Noch drastischer ausgedrückt: Ein freier Körper *muß* sich so bewegen, daß eine von ihm mitgeführte Uhr zwischen zwei Ereignissen auf seiner Weltlinie den maximalen Zeitablauf anzeigt. Dies ist die natürlichste aller Bewegungen.

Einige wichtige Begriffe betreffend die Bewegung freier Körper werden nun noch tabellarisch zusammengefaßt. Für die Bewegung eines freien Körpers gilt nach der SRT bzw. nach der ART folgendes:

Theorie	SRT	ART
Raumzeittyp	pseudoeuklidisch ⁷⁰	gekrümmt, falls Materie oder Energie anwesend
Form der Weltlinie in der Raumzeit	Gerade (vergl. Abbildungen in Abschnitt 1.17); ist Spezialfall einer Geodäte. Gummituch-Analogie: Styroporkugel rollt auf flach gespanntem Gummituch geradeaus.	geradestmögliche Linie (lokal gerade) auch in der gekrümmten Raumzeit = Geodäte. Analogie: Der Fahrer eines Geländewagens, dessen Lenkrad in Geradeausstellung blockiert ist, wird auch beim Befahren einer unebenen (Gummituch-) Landschaft sagen: „Ich fahre zu jedem Zeitpunkt exakt geradeaus“ (lokales Inertialsystem!). Siehe jedoch Zeile „Bahnform im Raum“!
Raumtyp	euklidisch = flach = eben, da materiefrei	gekrümmt, falls Materie und/oder Energie anwesend (vgl. Gummituch-Analogie)
Bahnform im Raum	Gerade (Beispiel: In den Abbildungen von Abschnitt 1.17 verläuft die „Bahn“ des bewegten Beobachters stets entlang der x_A -Achse.)	in der Regel gekrümmt. Beispiel: Die von dem oben erwähnten Geländewagen hinterlassene Spur ist (z.B.) aus der Vogelperspektive krummlinig. Bewegt sich eine freie Testmasse im Einflußbereich nur <i>eines</i> Himmelskörpers, so entsteht als Bahn näherungsweise ein Kegelschnitt: Hyperbel, Parabel, Ellipse, Kreis oder Gerade (letzte bei radialem Fall auf das Gravitationszentrum).

⁷⁰ „pseudo“euklidisch deshalb, weil die vier Terme des Quadrats des Raum-Zeit-Abstandes (x^2, y^2, z^2, t^2) im Gegensatz zu den drei Termen des Quadrats des euklidischen Raumabstandes (x^2, y^2, z^2) nicht alle das gleiche Vorzeichen haben (siehe Abschnitt 1.11).

Auch die Erkenntnis aus der SRT, daß Licht nicht altert (besser ausgedrückt: Raum-Zeit-Abstand zwischen zwei Ereignissen auf einer Lichtweltlinie = 0) ist in der ART gültig. Lichtweltlinien werden daher auch als „Nullgeodäten“ bezeichnet. In der flachen Raumzeit der SRT sind diese Linien gerade, in Gravitationsfeldern sind Lichtstrahlen dagegen im Raum gebogen (siehe Abschnitt Lichtablenkung).

Die Geodäten, die die Bewegung materieller Teilchen im freien Fall repräsentieren, sind natürlich durch die Raumzeitkrümmung selbst eindeutig festgelegt (und nicht etwa von Eigenschaften der fallenden Testkörper beeinflusst). Analog zur Feststellung Galileis, daß alle Körper am selben Ort derselben Beschleunigung unterliegen, gilt auch in der Raumzeit: Ein mit bestimmter Anfangsgeschwindigkeit in eine bestimmte Richtung geworfener Körper kann nur eine ganz bestimmte Geodäte in der Raumzeit erzeugen, unabhängig von seiner Masse, Zusammensetzung, Dichte usw.

Beispiel: Ein Staubkorn erzeugt im Gravitationsfeld der Sonne bei gleichen Anfangsbedingungen genau dieselbe Geodäte wie ein Komet oder Asteroid. Die fallenden Körper könnten nur dann einen eigenen Einfluß ausüben, wenn sie sehr massereich sind und somit ihrerseits merklich an der Raumzeitkrümmung mitwirken können.

Auch Lichtweltlinien (Nullgeodäten) verlaufen an einem bestimmten Ort bei gleicher „Startrichtung“ stets identisch, also z.B. unabhängig von der Energie/Farbe des Lichts.

Auch das wußte Newton nicht

Übrigens ist die Raumzeitkrümmung selbst eine Energieform! Und diese Energie bewirkt wiederum eine Verstärkung der Raumzeitkrümmung, letztere verstärkt sich also selbst⁷¹. Dieser Selbstverstärkungsmechanismus ist der Newtonschen Gravitationstheorie völlig fremd; bei Newton bestimmt allein die Masse des gravitierenden Körpers die Stärke des Gravitationsfeldes, welche bei ihm streng dem quadratischen Abstandsgesetz⁷² folgt. Letzteres bedeutet:

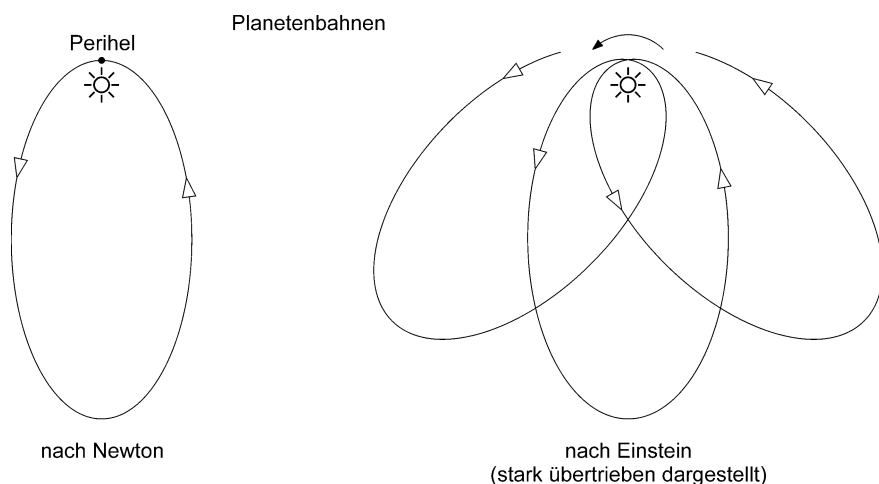
⁷¹ als Wortspiel: Gravitation gravitiert!

⁷² Newtonsche Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$; G = Gravitationskonstante; m_1, m_2 = Massen der beteiligten Körper; r = Abstand der Mittelpunkte der Körper

- Verdoppelung der Entfernung – nur noch $1/4$ der Gravitationskraft,
- Verdreifachung der Entfernung – nur noch $1/9$ der Gravitationskraft usw.

Der von Einstein gefundene Selbstverstärkungsmechanismus macht sich natürlich in unmittelbarer Nähe eines Himmelskörpers stärker bemerkbar als in größerer Entfernung, dementsprechend findet man auch Abweichungen von Newtons quadratischem Abstandsgesetz am ehesten ganz nahe an massereichen Körpern. In größeren Entfernungen dagegen gehen diese Abweichungen praktisch gegen null; dies erklärt den jahrhundertlangen Erfolg der Newtonschen „Himmelsmechanik“, mit der z.B. die Bahnen der äußeren Planeten auf Jahrtausende im voraus richtig berechnet werden können. Eine Abweichung davon ist allerdings bei den inneren Planeten zu bemerken, vor allem bei Merkur, nämlich eine (zusätzliche) *Periheldrehung*. Diese sei hier kurz erläutert:

Nach der Newtonschen Mechanik würde ein solitärer Planet stets auf einer stabilen Ellipsenbahn verbleiben (linkes Bild). Einstein sagte aber eine Periheldrehung (also eine stetige Änderung des sonnennächsten Bahnpunktes) voraus, was zu einer Rosettenform der Umlaufbahn führt (rechtes Bild):



Der Grund für diese Periheldrehung liegt darin, daß geschlossene Ellipsenbahnen nur bei strenger Gültigkeit des quadratischen Abstandsgesetzes möglich wären. Die ART sagt nun aber (in Sonnennähe sehr geringe) Abweichungen von diesem Gesetz voraus, diese Abweichungen verhindern geschlossene Planetenbahnen. Wegen der Nähe zur Sonne ist der Effekt

natürlich bei Merkur am deutlichsten, aber selbst bei ihm beträgt der Anteil der zusätzlichen Einsteinschen Periheldrehung nur etwa $7\frac{1}{2}\%$ der Gesamtperiheldrehung (der Einfluß der anderen Planeten überwiegt den ART-Effekt bei weitem). Der nach der ART errechnete Wert stimmt sehr gut mit den Beobachtungen überein.⁷³

Eine exakte Kreisbahn bleibt zwar räumlich stabil, mit einem Kreiselexperiment läßt sich aber auch auf einer solchen Bahn die Raumzeitkrümmung nachweisen⁷⁴.

Der Korrekturfaktor, mit dem nach der ART die Newtonsche Gravitationskraft $G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$ multipliziert werden muß, lautet:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{R \cdot c^2}}}} \quad (\text{mit } R \text{ ermittelt aus } \sqrt{A/4\pi}) \quad (2.8)$$

Gemeint ist die Kraft, die nötig ist, um einen Körper in einem festen Abstand zum Zentralkörper zu halten.

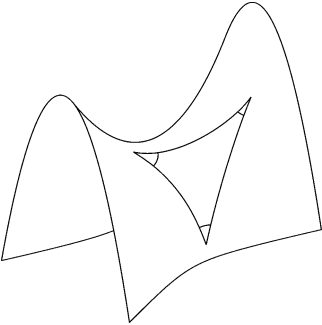
Auch die Newtonsche Gravitationsbeschleunigung $\frac{G \cdot M}{R^2}$ muß nach der ART mit diesem Faktor multipliziert werden.

- Bei großem R (in großer Entfernung von einem Himmelskörper) ist der Korrekturfaktor annähernd 1; dort gilt das alte Newtonsche Gravitationsgesetz mit extremer Genauigkeit.
- In geringer Entfernung von einem Himmelskörper (kleiner Wert für R) kann der Korrekturfaktor (bei ausreichender Masse und Kompaktheit des Himmelskörpers) deutlich größer als 1 werden; entsprechend ist auch die Gravitationskraft deutlich stärker als nach Newtons quadratischem Abstandsgesetz. Der Faktor drückt den beschriebenen Selbstverstärkungsmechanismus aus. Bei Schwarzen Löchern erreicht der Korrekturfaktor den Wert unendlich; damit wird dort auch die Gravitationskraft unendlich stark.

Die Raumkrümmung kann in zwei Varianten auftreten: als positive und negative Krümmung. Art und Ausmaß der Krümmung ergeben sich aus

⁷³ Einstein testete seine neu entdeckten Feldgleichungen in der ersten Novemberhälfte 1915 als erstes an diesem Problem und fand spontan das exakt zu den (bis dahin unerklärten) astronomischen Beobachtungen passende Resultat! Dies versetzte ihn nach eigenem Bekunden in große Aufregung.

⁷⁴ wegen der sogenannten geodätischen Präzession (siehe Abschnitt 3.4)

Raumkrümmung	negativ	
zweidimensionales Analogon	Sattelfläche mit hyperbolischer Metrik	
Winkelsumme im Dreieck ⁷⁵	unter 180°	
Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser	über 3,14 (π)	
Anzahl der Parallelen durch einen Punkt außerhalb einer Geraden	mehr als eine	
Verhalten zweier zueinander senkrechter Linien beim zweidimensionalen Analogon	krümmen sich in der Ferne in verschiedene Richtungen	

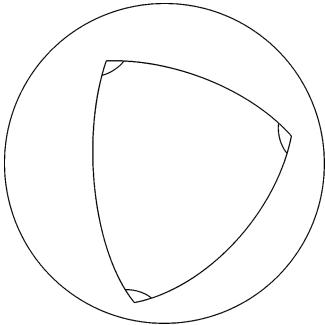
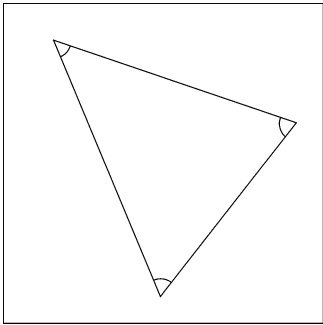
gewissen Maßzahlen; die obige doppelseitige Tabelle gibt einfache Beispiele hierzu.

Innerhalb von Planeten oder Sternen ist der Raum durchweg positiv gekrümmt; außerhalb davon sind die Verhältnisse sehr viel komplizierter.

Je mehr die Werte (z.B. Winkelsumme im Dreieck) von denen der euklidischen Geometrie abweichen, desto stärker ist die Krümmung.

Oben wurde schon erwähnt, daß man sich die Krümmung des dreidimensionalen Raums (oder gar der Raumzeit) im Allgemeinen nicht vorstellen kann. Nach dem Studium der obigen Tabelle erkennt man allerdings, daß dies gar nicht nötig ist! Denn so wie in einem zweidimensionalen Raum (Fläche) ein zweidimensionales Wesen z.B. durch Ausmessen der Winkel

⁷⁵ Gilt für Dreiecke, die aus „geradesten“ Linien (Geodäten) gebildet werden, z.B. aus Großkreisen im Falle einer Kugel; auf der Erdkugel sind alle Längengrade und der Äquator Großkreise, nicht jedoch die übrigen Breitenkreise.

	positiv	null
	<div>Kugeloberfläche mit sphärischer Metrik</div> 	<div>Ebene mit euklidischer Metrik</div> 
	über 180°	180°
	unter $3,14 (\pi)$	$3,14 (\pi)$
	keine: alle lokal parallelen Linien (z.B. Längengrade in Äquatornähe) schneiden sich im weiteren Verlauf	genau eine
	krümmen sich in der Ferne in dieselbe Richtung	keine Krümmung

eines Dreieckes und deren Aufsummierung eine Krümmung der Fläche feststellen könnte, so können auch wir als dreidimensionale Wesen durch ähnliche Messungen im dreidimensionalen Raum prinzipiell dessen Krümmung bestimmen. In Erdnähe sind jedoch die Abweichungen von der euklidischen Geometrie unmeßbar gering. Aber wir brauchen weder in Gedanken noch physisch den Sprung von der Drei- zur Vier-Dimensionalität zu unternehmen, um die Krümmung eines dreidimensionalen Raumes zu erkennen.

Gravitationswellen

Die Raumkrümmung ist natürlich kein statisches Phänomen: Beschleunigt⁷⁶ man Massen, so entstehen Wellen im Raum, die Gravitationswellen

⁷⁶ in der Sprache Newtons, also einschließlich Zentripetalbeschleunigung in Gravitationsfeldern

(Ausnahmen: Rotation drehachsensymmetrischer Massen, kugelsymmetrischer Kollaps oder kugelsymmetrische Explosion). Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen elektromagnetischen und Gravitationswellen zeigt die folgende Tabelle auf.

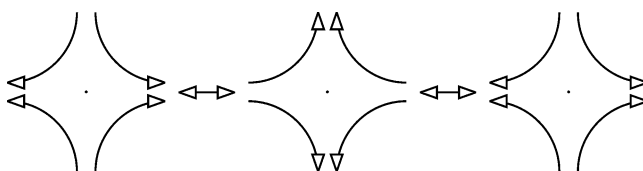
	Elektromagnetische Wellen	Gravitationswellen
Erzeugung	Beschleunigung elektrischer Ladungen, z.B. Elektronen in Sendeantenne	Beschleunigung von Massen
Rückstoß auf das die Wellen abstrahlende Objekt	ja	ja
Ausbreitungsgeschwindigkeit	c	c
Gültigkeit des quadratischen Abstandsgesetzes	ja	ja (angenähert)
Nachweis/Wirkung	Anstoß elektrischer Ladungen, z.B. Elektronen in Empfangsantenne	Verformung großer Körper, Anstoß kleiner Testmassen
Schwächung beim Auftreffen auf materielle Körper	stark, aber abhängig von der Frequenz der Welle und der Zusammensetzung des Körpers	vernachlässigbar (erschwert den Nachweis der Gravitationswellen!)
Wellenform (jeweils transversal) ⁷⁷	Dipolwellen	Quadrupolwellen (siehe Haupttext)
vermittelnde Teilchen (jeweils ohne Ruhemasse und elektrische Ladung)	Photonen	Gravitonen (noch nicht nachgewiesen) ⁷⁸
Beziehungen zur Raumzeit	bewegen sich durch den Raum und krümmen ihn merklich nur bei hohen Energien	sind Schwingungen des Raumes selbst

⁷⁷ transversale Welle: Schwingungsrichtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

⁷⁸ ergeben sich aus Bemühungen, die ART als Quantenfeldtheorie zu verstehen

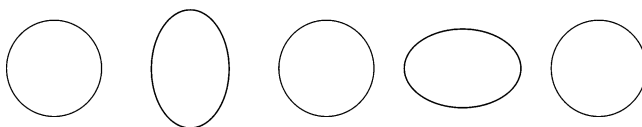
Erläuterung zum Begriff der dort erwähnten Quadrupolwellen:

Im Gegensatz zum Elektromagnetismus gibt es bei der Gravitation keine zwei Pole (wie plus/minus und magnetischer Nord-/Südpol). Gravitationswellen weisen daher kein Dipolmuster auf, sondern zeigen etwa folgendes Bild:



(im Abstand von jeweils einer Halbperiode)

Demzufolge wird eine kreisförmige Struktur durch Gravitationswellen z.B. wie folgt deformiert (die Ausbreitungsrichtung der Wellen steht senkrecht auf der Papierebene). Die Fläche der Struktur bleibt dabei konstant. Natürlich ist der Effekt stark übertrieben gezeichnet!



(im Abstand von jeweils einer Viertelperiode)

Bei den Gravitationswellen könnte man auch von einer Art „Erdbeben“ im Raum-Zeit-Gewebe sprechen. Gummituch-Analogie: Schwingungen des Tuches!

Anders ausgedrückt: Gravitationswellen sind Wellen sich ändernder Gravitation.

Von der Wirkung her entsprechen Gravitationswellen Gezeitenkräften, die in einer zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene auftreten und in dieser Ebene periodisch ihre Richtung ändern. Freie Testteilchen selbst „erspüren“ beim Durchlauf einer Gravitationswelle keine Kräfte (sie fallen ja frei, auch in der nun veränderten Raumzeit), ein entfernter Beobachter sieht die Testmassen aber in beschleunigter Bewegung.

Ausgedehnte Körper werden von den Gravitationswellen durchdrungen und dabei im Rhythmus von deren Frequenz in einer Richtung gestaucht und quer dazu gedehnt, dann umgekehrt usw.

Die Wellenlänge von Gravitationswellen lässt sich meist leicht ermitteln: Die vom Erdumlauf um die Sonne verursachten Gravitationswellen haben eine Wellenlänge von genau einem Lichtjahr, die von Jupiter (Umlaufzeit

ca. 12 Jahre) verursachten sind etwa 12 Lichtjahre lang etc. Die Frequenz der Gravitationswellen ergibt sich aus der Beziehung

$$\text{Frequenz} = c/\text{Wellenlänge}.$$

Derzeit (2008) laufen mehrere Großversuche zur Detektion der Schwerkraftwellen, einer auch in Niedersachsen („GEO 600“). Dabei werden jeweils zwei senkrecht zueinander verlaufende Meßstrecken interferometrisch⁷⁹ überwacht. Aber auch mehrere hundert Meter lange Meßstrecken werden durch die theoretisch zu erwartenden Gravitationswellen nur um Bruchteile eines Atomkerndurchmessers (!) gestaucht und gestreckt, ein Beobachtungserfolg kann daher durchaus auf sich warten lassen.

Gute Kandidaten für die Aussendung nachweisbarer Gravitationswellen sind asymmetrisch verlaufende Supernovae und aufeinander zu spirallende kompakte Körper wie Weiße Zwerge, Neutronensterne oder Schwarze Löcher. Vertrautere Quellen haben dagegen nur eine geringe Strahlungsleistung: Erde 200 W, Jupiter 5300 W.

Ein indirekter Nachweis von Gravitationswellen ist übrigens schon gelungen: Im Binärpulsar PSR 1913+16 (zwei sich eng umkreisende kompakte Körper) nähern sich beide Komponenten einander. Berechnet man die damit verbundene Energieabnahme dieses Systems, dann ergibt sich genau der Wert, der nach der ART in Form von Gravitationswellen abgestrahlt werden sollte. Auch normale Doppelsternsysteme verlieren durch Gravitationsstrahlung Energie, aber viel weniger als PSR 1913+16, dessen Komponenten meßbar immer weiter aufeinander zu spiralen und miteinander verschmelzen werden. Letztgenanntes System, von einem anderen Autor zurecht als „Lustobjekt der Relativisten“ tituiert, zeigt wegen der Kompaktheit sowohl der zwei Komponenten als auch des Gesamtsystems noch weitere ART-Phänomene in voller Ausprägung: Shapiro-Effekt, gravitative Rotverschiebung und Zeitdilatation (siehe unten) sowie Periheldrehung (vier Grad pro Jahr!).⁸⁰

Trotz aller meßtechnischer Schwierigkeiten haben sich Gravitationswellenastronomen einiges vorgenommen: Sie wollen sogar den Urknall selbst untersuchen! Zumindest theoretisch ist dies auch möglich:

Das nach dem Urknall vorhandene Plasma⁸¹ war für elektromagnetische Strahlung undurchlässig⁸² (das Weltall wurde erst transparent, als nach genügender Abkühlung die Bildung stabiler Atome möglich wurde; genau

⁷⁹ Interferometer: optisches Präzisionsmeßgerät für Längenänderungen

⁸⁰ Inzwischen wurden weitere Binärpulsare entdeckt.

⁸¹ heißes Gemisch geladener Teilchen

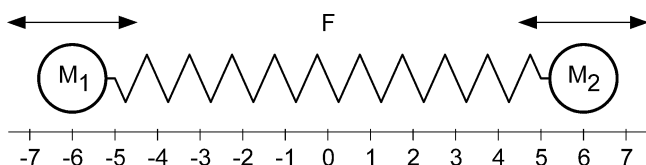
⁸² so wie auch der Sonnenkörper undurchsichtig ist

aus dieser Zeit stammt die in Kapitel 4 zu besprechende Mikrowellenhintergrundstrahlung), sehr wohl konnte es aber von Gravitationswellen durchlaufen werden. Während also die Astronomen diese ersten einige hunderttausend Jahre mit Licht, UV, Röntgenstrahlen etc. prinzipiell nicht untersuchen können, müßten die „Nachbeben“ des Urknalls auch heute noch das Universum in Form schwacher Gravitationswellen durchlaufen.

Die Energie für die Abstrahlung von Gravitationswellen kann übrigens sogar der Masse Schwarzer Löcher entstammen, wie in Abschnitt 3.2 erläutert wird.

Es gibt ein **Gedankenexperiment**, das recht anschaulich nahelegt, daß beschleunigte Massen Gravitationswellen aussenden müssen:

Man denke sich weitab von anderen Himmelskörpern zwei sich gegenseitig gravitativ anziehende Körper M_1 und M_2 mit sehr großer Masse, z.B. der des Mondes. Sie seien durch eine idealisierte (nach der Newtonschen Mechanik ungedämpfte Schwingungen zulassende) Schraubenfeder F verbunden. Stößt man die Körper längs der Federachse an, so wird das System in Schwingungen versetzt. Diese Schwingungen werden aber trotz idealisierter Feder aus folgendem Grund gedämpft werden: Wie schon aus der SRT bekannt ist, breiten sich Signale aller Art, so auch die Gravitation, nur mit maximal c , also einer endlichen Geschwindigkeit aus.



Betrachten wir nun zuerst die Verhältnisse *während der Annäherungsphase* der Körper: Wenn sich z.B. M_2 bei der Einwärtsschwingung gerade bei 6 (willkürliches Längenmaß) befindet, nimmt M_2 *nicht* die Anziehungskraft von M_1 am Punkt -6 wahr (das wäre der Fall bei Signalgeschwindigkeit = unendlich), sondern wegen der endlichen Signalgeschwindigkeit die schwächere Anziehungskraft, als M_1 z.B. noch am Punkt -7 war.

Während der Annäherungsphase registrieren die Körper also eine schwächere gegenseitige Anziehungskraft, als bei unendlicher Signalgeschwindigkeit zu erwarten wäre.

Nun zur *Phase der Abstandszunahme*: Ist M_2 gerade bei Stelle 6, so registriert M_2 *nicht* die Anziehungskraft von M_1 am Punkt -6 , sondern die stärkere Anziehungskraft, als M_1 noch bei z.B. -5 war!

Während der Abstandszunahme der Körper spüren diese also eine stärkere gegenseitige Anziehungskraft, als bei unendlich schneller Signalausbreitung zu erwarten wäre.

Fazit: Die Schwingung wird gedämpft. Nach dem Energieerhaltungssatz kann die Schwingungsenergie aber nicht spurlos verschwinden. Die idealisierte Feder kann sie nicht aufnehmen, ebenso wenig die Körper M_1 und M_2 , weil man sich diese idealisiert als Massenpunkte denken kann. Also wird die Schwingungsenergie nach und nach als Gravitationsstrahlung frei!

Wie Lichtstrahlen unterliegen auch Gravitationswellen einer

- Ablenkung, wenn sie an einem massereichen Himmelskörper vorbeilaufen;
- gravitativen „Rot“-verschiebung (Wellenlängenzunahme), wenn sie von einem massereichen Himmelskörper aufsteigen (siehe Abschnitt 2.5);
- kosmologischen „Rot“-verschiebung, wenn sie längere Zeit im expandierenden Weltall unterwegs waren (siehe Abschnitt 4.2).

Eine treffende Analogie zur Entstehung von Gravitationswellen stammt von Stephen Hawking: Wirft man einen Korken ins Wasser, dann zappelt er anfangs noch stark hin und her, aber nicht lange. Denn mit seinen Bewegungen erzeugt er Wasserwellen und überträgt damit Energie an das umgebende Wasser, das wiederum einen benachbarten Korken in Schwingungen versetzen kann. Analog übertragen die Gravitationswellen Energie (und damit – in geringem Umfang – auch Masse) von einem Körper zu anderen Körpern.

Die Gravitationswellen, die als „Botschafter“ von Gravitationsänderungen für den „Rest des Universums“ auftreten, offenbaren einen weiteren deutlichen Unterschied zur alten Newtonschen Gravitationstheorie: Nach dieser werden Gravitationswirkungen auf entfernte Massen ohne Zeitverzögerung übertragen, quasi als überlichtschnelle Sofortwirkung. Dagegen müssen nach Einstein entfernte Massen erst die Anreise der „Botschafter“ (Gravitationswellen), die mit c unterwegs sind, abwarten, bevor sie auf Gravitationsänderungen reagieren können. Wenn also ein kosmischer Zauberer die Sonne entfernen würde, dann müßte die Erde noch über acht Minuten lang auf ihrer Ellipsenbahn bleiben, erst dann könnte sie wegen nun fehlender Raumkrümmung geradeaus fliegen.

Zusammenfassend könnte man den Unterschied zwischen der Newtonschen Gravitationstheorie und der Einsteinschen ART so ausdrücken:

- Bei Newton ist die Gravitation eine aktive Kraft zwischen Körpern in einem passiven, starren euklidischen Raum und in einer passiven, überall konstant fließenden Zeit; Bahnen freier Körper sind in Gravitationsfeldern deshalb gekrümmt.
- Nach Einstein beeinflussen (unter anderem) Massen die Geometrie der Raumzeit; die Bahnen freier Körper und des Lichts werden wiederum durch die durchaus dynamische Geometrie der Raumzeit festgelegt; die

Geodäten sind in allen nacheinander durchflogenen lokalen Inertialsystemen gerade, die Bahnen im Raum aber im Allgemeinen gekrümmt.

Bildhaft hat es E.T. Whittaker (zitiert in Rindler 1977) so ausgedrückt: Alle bekannten Kräfte (elektromagnetische, elastische usw.) treten auch auf der „neuen Bühne“ ART auf. Nur die Gravitationskraft ist nicht *auf* der Bühne vertreten, sondern sie ist ein *Teil der Bühne selbst* geworden! Gravitation und Raumzeitkrümmung sind dasselbe!

Die Raumzeitkrümmung ist aber nicht bloß ein neues rhetorisches Gewand für die alte Newtonsche Schwerkraft. Nein, es bestehen fundamentale und auch grundsätzlich meßbare Unterschiede, wie z.B. bei der Lichtablenkung, der Periheldrehung und den Gravitationswellen zum Ausdruck kommt. *Nur* bei schwacher Gravitation gilt Newtons Gravitationsgesetz näherungsweise; in starken Feldern versagt es. So wie die SRT die Newtonsche Mechanik als Grenzfall enthält (bei geringen Relativgeschwindigkeiten), so ist also auch das alte Gravitationsgesetz in der ART als Grenzfall (bei schwacher Gravitation) enthalten.

2.4 Gravitative Zeitdilatation – Bei Dicken geht’s gemütlich zu

In Abschnitt 2.3 haben wir aus dem System der rotierenden Scheibe geschlossen, daß der Raum in Beschleunigungs-/Gravitationsfeldern verändert sein muß. Für die Zeit können wir ähnliches aus diesem System ableiten:

Denken wir uns zahlreiche Uhren auf der rotierenden Scheibe verteilt. Für einen außerhalb der Scheibe in Bezug zum Rotationszentrum ruhenden Beobachter haben die Uhren nun unterschiedliche Geschwindigkeiten: Die Uhr genau im Zentrum rührt sich nicht vom Fleck, sie hat die Relativgeschwindigkeit null. Eine Uhr am Scheibenrand hat dagegen eine sehr hohe Geschwindigkeit. Da sie sich bei hinreichender Scheibengröße und in hinreichend kleinen Zeitintervallen annähernd geradeaus bewegt, dürfen wir die Regeln der SRT anwenden, und nach denen muß diese Scheibenrand-Uhr langsamer laufen als die Uhr in der Mitte (Zeitdilatation). Nun können wir wieder das Äquivalenzprinzip anwenden und folgern, daß die gerade in einem (hier Dreh-)Beschleunigungsfeld beobachtete Zeitdilatation auch in einem Gravitationsfeld auftreten muß.

Eine andere Überlegung, ebenfalls in Anlehnung an die SRT, erlaubt sogar, die quantitativ korrekte Formel dieser gravitativen Zeitdilatation für das zentralsymmetrische Gravitationsfeld eines Himmelskörpers zu ermitteln (Achtung: Dies ist jedoch keine Herleitung im Sinne der ART):

Dazu denken wir uns einen Beobachter, der mit zwei gleich konstruierten Uhren in praktisch unendlicher Entfernung von einem Himmelskörper ruht. Nachdem er sich dort vom exakt synchronen Lauf der Uhren überzeugt hat, läßt er eine der beiden Uhren in Richtung auf den Himmelskörper fallen. Wegen der zunächst unendlich gedachten Entfernung wird die Uhr anfangs extrem langsam fallen, bei zunehmender Annäherung wird ihre Geschwindigkeit aber fortlaufend zunehmen. Wenn wir wissen wollen, welche Zeitdilatation bei der fallenden Uhr im Abstand R vom Himmelskörper auftritt, müssen wir erst ihre dortige Geschwindigkeit ermitteln. Normiert man die potentielle Energie im Unendlichen auf null⁸³, dann sind beim freien Fall aus dem Unendlichen die Beträge von (Newtonscher) kinetischer und potentieller Energie stets gleich groß:

$$m \cdot v^2/2 = G \cdot M \cdot m/R$$

Dabei bedeuten:

m Masse des fallenden Objekts

v momentane Fallgeschwindigkeit

G Gravitationskonstante $\left(6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}\right)$

M Masse des gravitierenden Himmelskörpers

R momentaner Abstand zwischen fallendem Objekt und dem Mittelpunkt des Himmelskörpers

Auflösung der obigen Gleichung nach der Fallgeschwindigkeit v ergibt:

$$v = \sqrt{\frac{2 G \cdot M}{R}} \quad (2.9)$$

Setzt man diese Geschwindigkeit in die bekannte Formel der Zeitdilatation (1.10) ein, dann ergibt sich im Abstand R vom Himmelskörper eine Zeitdilatation von

$$t' = t \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2 G \cdot M}{R \cdot c^2}}} \quad (2.10)$$

im Vergleich zur zweiten Uhr. Um diesen Faktor ist also der Zeitfluß im Abstand R vom Zentrum des Himmelskörpers für den entfernten Beobachter verlangsamt. (Der entfernte Beobachter würde oben genannte Uhr wegen des Doppler-Effektes noch weiter verlangsamt laufen *sehen*, siehe dazu Kapitel 4.)

⁸³ Beim Fallen eines Körpers wird ihr Wert dann *negativ*.

Außer in extrem starken Schwerkraftfeldern ist der Wert der Wurzel wegen des riesigen Betrags von c^2 praktisch gleich 1, deshalb spielt im Alltagsleben diese gravitative Zeitdilatation keine Rolle. Deutlich spürbar wird sie allerdings bei Objekten mit kleinem „Radius“ R (wobei R aber immer aus $\sqrt{A/4\pi}$ bestimmt werden muß!) und gleichzeitig großer Masse M , also bei kompakten Himmelskörpern wie Weißen Zwergen, Neutronensternen und Schwarzen Löchern, zu letzteren siehe Kapitel 3.

Ein Beobachter in der Nähe eines solchen Himmelskörpers würde umgekehrt eine weit entfernte Uhr schneller laufen sehen. Dieses Erkenntnis darf natürlich nicht zu dem Mißverständnis führen, daß man sich nur weit genug von jedem Himmelskörper entfernen müsse, um dort dann eine „absolute Zeit“ zu finden. Daß es keine absolute Zeit geben kann, hat uns nämlich die SRT gelehrt: Jedes Inertialsystem hat seine individuelle Zeit, und jedes System ist mit allen anderen gleichberechtigt.

Je näher eine Uhr also an die Oberfläche eines Himmelskörpers heranrückt, desto langsamer läuft sie für einen entfernten Beobachter. Für einen kugelförmigen Himmelskörper kann man sich demnach hohlkugelförmige, fließend ineinander übergehende Zeitzonen mit jeweils einer Verlangsamung der Zeit nach innen hin vorstellen; dafür wurde der Begriff „Zeitschalen“ geprägt. Uhren in unterschiedlichen Entfernungen vom Gravitationszentrum lassen sich also prinzipiell nicht (bleibend) synchronisieren.

Wenn für einen entfernten Beobachter ein Jahr abläuft, dann vergehen nach dessen Beobachtung auf der Erde 0,02 s, auf der Sonne 67 s, auf einem Weißen Zwerg ca. 80 Minuten und auf einem Neutronenstern ca. 90 Tage *weniger*!

Extremfall der gravitativen Zeitdilatation: Am Rand eines Schwarzen Lochs kommt der Lauf der oben beschriebenen Uhr aus Sicht des in der Ferne ruhenden Beobachters völlig zum Erliegen, weil ihre Geschwindigkeit an c heranrückt. Für einen entfernten Beobachter bleibt die Zeit demnach am Rande eines Schwarzen Lochs stehen! Bei nicht-rotierenden Schwarzen Löchern liegt dieser „Rand“ kugelsymmetrisch um das Zentrum des Lochs; der „Abstand“ zwischen Zentrum und „Rand“ heißt Schwarzschild-Radius.

Die Zeitdilatation in Gravitationsfeldern ist experimentell schon mehrmals bestätigt worden, z.B. durch den schnelleren Lauf hochpräziser Uhren, die mit Flugzeugen oder Raketen in große Höhen gebracht wurden, im Vergleich zu Uhren gleicher Bauart, die auf der Erdoberfläche zurückgelassen wurden. Die Präzision heutiger Atomuhren reicht aus, um den Effekt auf der Zugspitze innerhalb weniger Tage nachzuweisen!

Auch die oben erwähnte Laufzeitverzögerung von Radar-Echos bzw. Funksignalen von „hinter“ der Sonne stehenden Planeten bzw. Raumsonden ist mit auf die gravitative Zeitdilatation zurückzuführen.

Hinweis: Die Formel (2.10) gilt nur für den Spezialfall, daß sich der Beobachter im „Unendlichen“ befindet.

Allgemein gilt dagegen: Ein Beobachter in einer Entfernung R_B von einem Gravitationszentrum sieht eine Uhr in der geringeren Entfernung R_U von diesem Zentrum verlangsamt laufen mit dieser Zeitdilatation:

$$t' = t \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{2G \cdot M}{c^2 \cdot R_B}}{1 - \frac{2G \cdot M}{c^2 \cdot R_U}}}$$

Für sehr große Beobachterentfernungen R_B nähert sich der Wert dieser Formel demjenigen von (2.10) an. Und für Werte $R_B < R_U$ ergibt sich die oben angesprochene Umkehrung der Zeitdilatation.

Wie bei der Zeitdilatation in der SRT bemerkt der „Betroffene“ keine Verlangsamung des Zeitablaufes: Für einen Beobachter in der Nähe eines Gravitationszentrums läuft die eigene Zeit mit der üblichen „Geschwindigkeit“ ab (als kleine Wortspielerei: „Eine Sekunde pro Sekunde“).

In Verbindung mit dem Fermatschen Prinzip („Prinzip der schnellsten Ankunft“: Das Licht „sucht“ sich zwischen zwei Punkten A und B stets denjenigen Weg, auf dem es am schnellsten ankommt) liefert die gravitative Zeitdilatation eine zusätzliche Deutung der Lichtablenkung: So wie das Fermatsche Prinzip in der Optik die Lichtbrechung an der Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex erklärt, so führt es in der ART zur Lichtablenkung, denn das Licht „sucht“ sich auch in der gekrümmten Raumzeit stets den schnellsten Weg zwischen zwei Punkten. Der geradlinige Weg, z.B. tangential an der Sonnenoberfläche vorbei, ist *nicht* der schnellste Lichtweg, da in Sonnennähe wegen der gravitativen Zeitdilatation auch die tangentielle Geschwindigkeit des Lichts reduziert ist! Der Lichtweg mit der minimalen Lichtlaufzeit umgeht vielmehr die innersten Bereiche der „verlangsamenden Zone“ um den Himmelskörper, verläuft also gekrümmt! Bei einem zu großen „Umweg“ würde die Lichtlaufzeit allerdings wieder zunehmen. Das Optimum (kürzeste Lichtlaufzeit) stellt der Weg mit der tatsächlich beobachteten Lichtablenkung dar.

Hinweis: Um die gravitative Zeitdilatation auch in schwachen Gravitationsfeldern (Planeten, normale Sterne) bequem berechnen zu können, benutzt man zu (2.10) auch folgende Näherungsformel:

$$t' = t \cdot \left(1 + \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2} \right)$$

Wegen der Äquivalenz von Gravitationsfeldern und Beschleunigungsfeldern muß die Zeitdilatation auch bei letzteren auftreten. So würde z.B. ein Astronaut in einer stark beschleunigten Rakete eine am Heck angebrachte Uhr langsamer laufen sehen als eine Buguhr.

Oft wird die Zeitdilatation in Beschleunigungsfeldern zur Deutung des Zwillingseffektes der SRT (siehe Abschnitt 1.8) herangezogen. Daß die Beschleunigung für das Ausmaß des Altersunterschieds aber keine entscheidende Rolle spielt, läßt sich mit folgendem Drillingsexperiment zeigen:

Drilling 1 wird auf eine interstellare Reise mit konstanter Beschleunigung a geschickt. Nach halber Wegstrecke bremst er mit derselben (nun negativen) Beschleunigung; der Rückweg soll analog verlaufen. Bei ausreichender Beschleunigung und Flugzeit wird Drilling 1 Geschwindigkeiten nahe c erreichen und viel weniger gealtert zurückkehren als sein Bruder Drilling 2, der ein biederer Alltagsleben auf der Erde geführt hat. Drilling 3 hat während der gesamten Abwesenheit von Drilling 1 in einer Zentrifuge auf der Erde verbracht, in der er einer genau gleich großen Beschleunigung a ausgesetzt war wie Drilling 1 (Drehbeschleunigung). Seine Alterung konnte Drilling 3 damit aber praktisch nicht bremsen, denn beim (im Vergleich zum Raumschiff von 1) Schneckentempo der Zentrifuge konnte er sich im Gegensatz zu 1 so gut wie keine Zeitdilatation erwirtschaften.

Damit ist nun klar ersichtlich: Beschleunigung spielt beim Zustandekommen des Zwillingseffekts bei Hochgeschwindigkeitsreisen keine wesentliche Rolle. Es sind vielmehr die hohe Relativgeschwindigkeit und der Wechsel des Inertialsystems (bei gleichbleibender Reisegeschwindigkeit) bzw. die Wechsel zwischen vielen Inertialsystemen mit jeweils infinitesimal kleinen Geschwindigkeitsunterschieden (bei beschleunigter Reise). Auch die ART wird hier *nicht* benötigt: Die SRT kann *auch* beschleunigte Bewegungen meistern!

Daß Beschleunigungseffekte im Zwillingbeispiel von Abschnitt 1.8 und vergleichbaren Flügen keine entscheidende Rolle spielen, zeigt auch folgende Überlegung:

Wird der Flug mit konstanter Geschwindigkeit durchgeführt und verdoppelt man (bei gleicher Geschwindigkeit) die Flugstrecke, dann ergibt sich auch der doppelte Altersunterschied, verdreifacht man die Strecke, ist auch der Altersunterschied dreimal so groß usw. In allen diesen Fällen sind aber die Beschleunigungseffekte bei der Umkehr gleich groß, da das Raumschiff jeweils von Geschwindigkeit v auf $-v$ gebracht werden muß. Da jedoch der Altersunterschied nur von der Flugstrecke/-zeit abhängt, können Beschleunigungseffekte nicht für das Ausmaß des Altersunterschieds bei solchen Flügen verantwortlich sein!

Natürlich könnte man sich als Alterungsbremse *alternativ* zu einer Hochgeschwindigkeitsrundreise auch eine Zeitlang *sehr* starken Beschleunigun-

gen (oder Gravitationsfeldern) aussetzen; letzteres wäre aber wohl nicht sehr komfortabel.

Diese beiden Möglichkeiten (Hochgeschwindigkeitsrundreise und starke Beschleunigung) der Bremsung der Alterung sind aber zwei Paar Stiefel, wie diese Darstellung sicher gezeigt hat.

Ein Wort zur Einordnung der Zeitdilatation in die ART: Die gravitative Zeitdilatation enthält gewissermaßen den „Zeitanteil“ der Raumzeitkrümmung!

Und noch ein kleines, aber interessantes **Zahlenbeispiel** zur gravitativen Zeitdilatation:

Neutronensterne haben eine meist sehr konstante Umdrehungsgeschwindigkeit, sie stellen damit hochgenaue Uhren dar. Man könnte nämlich einen Nullmeridian (analog zu dem von Greenwich) als „Zeiger“ auf den Stern malen. Zum Beispiel der Neutronenstern im Zentrum des (im Sternbild Stier gut beobachtbaren) Krebsnebels M1 dreht sich aus unserer Sicht 30 mal in der Sekunde (!); für uns als entfernte Beobachter ist die Periode dieser „Uhr“ damit 0,033 s.

Wie schnell dreht sich der Neutronenstern für einen (hypothetischen) Beobachter, der knapp oberhalb der Neutronensternkruste ruht?

Fiktive Daten für den Neutronenstern:

- „Radius“ $R = 10 \text{ km}$,
- Masse $M = 1,5 \text{ Sonnenmassen}$.

$$\text{Nach (2.10): } 0,033 \text{ s} = T \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2G \cdot M}{R \cdot c^2}}}$$

$$\Rightarrow T = 0,033 \text{ s} \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,5 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{10^4 \text{ m} \cdot \left(2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow T = 0,033 \text{ s} \cdot \sqrt{1 - 0,44}$$

$$\Rightarrow T = 0,025 \text{ s}$$

Der Krebsnebel-Neutronenstern dreht sich für einen Beobachter vor Ort pro Sekunde $\frac{1}{0,025}$ mal, also 40 mal! Dies ist deutlich schneller als nach den Messungen der irdischen Radioastronomen!

Hinweis: Dieses Ergebnis beruht auf der Annahme, daß die zur Rotationsfrequenzmessung benutzten Radiopulse unmittelbar an der Neutronensternoberfläche starten. Ist der Ausgangspunkt dieser Radiopulse in größerer Entfernung, dann ist die vor Ort gemessene Rotationsfrequenz niedriger als

40 Hertz. Auch der Lense-Thirring-Effekt (siehe Abschnitt 3.4) ist bei dieser Beispielrechnung unberücksichtigt geblieben.

Würden GPS & Co. ohne Einstein funktionieren?

Ein GPS-Empfänger registriert Funksignale jeweils mehrerer Satelliten; diese Signale enthalten exakte Zeit- und Ortsangaben der jeweiligen Satelliten. Im Empfangsgerät wird hieraus nach der Formel

$$\text{Lichtweg} = c \cdot \text{Lichtlaufzeit}$$

der genaue Ort des Beobachters errechnet. Aber in einem solchen Navigationssystem müssen mindestens zwei relativistische Effekte berücksichtigt werden:

1. Aus Sicht eines auf der Erdoberfläche ruhenden Beobachters weisen die Satellitenuhren eine Bewegung auf, weshalb die Zeitdilatation der SRT berücksichtigt werden muß (mit der Tendenz zur Verlangsamung des Uhrenlaufs).
2. Ein Beobachter am Erdboden sieht alle Vorgänge in den weiter vom Gravitationszentrum (= Erdmittelpunkt) entfernten Satelliten schneller ablaufen (Umkehrung der gravitativen Zeitdilatation); die Satellitenuhren gehen deshalb schneller als Erd-Uhren.

Wie die genaue Berechnung zeigt, überwiegt für die GPS-Satelliten Effekt 2; die Satellitenuhren gehen aus Erdsicht *schneller* als Erd-Uhren, und zwar im Laufe eines Tages um sage und schreibe 0,04 Millisekunden (entsprechend einem Orientierungsfehler von bis zu zwölf Kilometern)!

Ohne entsprechende Korrekturen zum Ausgleich dieser relativistischen Einflüsse würde das System schnell aus dem Ruder laufen!

Einsteins Theorien als Allerweltsanwendung — wer hätte das gedacht!

2.5 Gravitative Rotverschiebung – Schwerwiegendes läßt erröten

Zum Phänomen der gravitativen Rotverschiebung gelangen wir zwanglos über die oben ermittelte gravitative Zeitdilatation (siehe Abschnitt 2.4). Nehmen wir an, daß für das dortige Gedankenexperiment keine normale Uhr, sondern eine Atomuhr verwendet wird. Die „Unruh“ einer Atomuhr ist eine elektromagnetische Welle mit einer extrem stabilen Schwingungsperiode T (gemessen am Ort der Uhr). Befindet sich eine solche Atomuhr tief im Gravitationsfeld eines massereichen Himmelskörpers, dann dauert für einen

entfernten Beobachter die Schwingungsperiode länger als T , nämlich wegen der gravitativen Zeitdilatation

$$T' = T \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2G \cdot M}{R \cdot c^2}}} . \quad (2.11)$$

Bei elektromagnetischen Wellen besteht die Beziehung

$$\text{Wellenlänge } \lambda = c \cdot T . \quad (2.12)$$

Dementsprechend ist auch die Wellenlänge der Atomuhrschwingung verlängert von

$$\lambda \text{ auf } \lambda' = c \cdot T' . \quad (2.13)$$

Die elektromagnetische Welle der Atomuhr ist also *rotverschoben* (siehe Abschnitt 4.1). Die Rotverschiebung z ist formal definiert als

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} . \quad (2.14)$$

Durch Einsetzen von (2.11) bis (2.13) in (2.14) ergibt sich:

$$\text{gravitative Rotverschiebung } z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2G \cdot M}{R \cdot c^2}}} - 1 \quad (2.15)$$

(z ist eine dimensionslose Zahl)

Der Effekt betrifft selbstverständlich jede elektromagnetische Schwingung, nicht nur die einer Atomuhr.

Analog zur gravitativen Zeitdilatation gilt natürlich, daß das Phänomen nur bei sehr starken Feldern relevant wird (bei schwachen Feldern ist der Wert der Wurzel praktisch nicht von 1 zu unterscheiden und somit $z \approx 0$). Dementsprechend schwierig ist es, den Effekt im Schwerfeld der Erde nachzuweisen, was erstmals 1959 durch Messungen an Gammastrahlen in einem Lichtschacht mit 22,6 m Höhe an der Harvard-Universität gelang. Bestätigt wurde das Auftreten der gravitativen Rotverschiebung später auch durch Untersuchungen an Spektren der Sonne (1962) und von Weißen Zwergen (u.a. 1977).

Der Extremfall der gravitativen Rotverschiebung tritt am Rand Schwarzer Löcher auf: Für einen entfernten Beobachter kommt die elektromagnetische Schwingung der Atomuhr (und natürlich auch jede andere!) völlig zum Erliegen: Schwingungsperiode unendlich, Wellenlänge unendlich, Rotverschiebung also unendlich, Frequenz null. Damit erreicht den entfernten

Beobachter keine elektromagnetische Schwingung, das Schwarze Loch trägt demnach seinen Namen zurecht. Mehr zu Schwarzen Löchern in Kapitel 3.

Wie die gravitative Zeitdilatation ist auch die daraus abgeleitete Rotverschiebung kein einseitiger Effekt:

Ein Beobachter in der Nähe eines Gravitationszentrums sieht das Licht weit entfernter Objekte blauverschoben. Aber die Wellenlänge von Objekten, die auf gleicher Höhe wie er liegen, ist für den Beobachter unverändert.

Die Äquivalenz zwischen Gravitationsfeldern und Beschleunigungsfeldern ist bei der Rotverschiebung besonders augenfällig: Blickt der Astronaut einer beschleunigten Rakete auf deren hinteres Positionslicht, so erscheint ihm dies vermehrt gerötet. Denn: In der Zeitspanne, in der das Licht vom Heck bis zur Astronautenkabine unterwegs ist, haben die Rakete und mit ihr der Astronaut durch die Beschleunigung wieder etwas an Geschwindigkeit zugenommen; die Lichtwellen kommen dementsprechend gestreckt an. Und eine größere Wellenlänge bedeutet wieder eine Rotverschiebung.

Hinweis: Wenn der Beobachter sich nicht „unendlich“ weit von einem Himmelskörper entfernt befindet, sondern von der endlichen Entfernung R_B aus eine Lichtquelle beobachtet, die vom Gravitationszentrum den Abstand R_Q hat, dann beträgt die gravitative Rotverschiebung:

$$z = \frac{\sqrt{1 - \frac{2G \cdot M}{c^2 \cdot R_B}}}{\sqrt{1 - \frac{2G \cdot M}{c^2 \cdot R_Q}}} - 1$$

Für sehr große Werte von R_B geht diese Formel über in die Gleichung (2.15). Und für $R_B < R_Q$ ergibt sich die erwähnte *Blauverschiebung*; deren Extremwerte sind 0 und -1 .

Ein **Rechenbeispiel** zur gravitativen Rotverschiebung: Ein hypothetisches (und übernatürlich robustes!) kleines grünes Männchen (Wellenlänge des Lichts von seiner Haut: 520 nm) sitzt am Nordpol eines Neutronensterns mit denselben Daten wie der aus dem Zahlenbeispiel in Abschnitt 2.4. Welche Farbe hat das Wesen für einen entfernten Beobachter?

Nach (2.15) ist die Rotverschiebung

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2G \cdot M}{R \cdot c^2}}} - 1.$$

Den Wert des Bruches in der Wurzel übernehmen wir einfach aus Abschnitt 2.4:

$$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,44}} - 1 = 0,34$$

Dieses Zwischenergebnis bedeutet, daß die Wellenlänge des Lichts um 34% zugenommen hat. Das Licht von der Haut des Männchens hat für den entfernten Beobachter also die Wellenlänge

$$520 \text{ nm} + 0,34 \cdot 520 \text{ nm} = 697 \text{ nm} .$$

Das ist nun *rot*!

Auch zur Formel (2.15) gibt es eine Näherungsgleichung zur Berechnung der gravitativen Rotverschiebung des Lichts von Körpern mit geringer Gravitation (Erde, Sonne):

$$z = \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}$$

Die beim „Hinabfallen“ von Licht aus einer Entfernung *r* auf einen Himmelskörper (für einen dortigen Beobachter) auftretende Blauverschiebung ist zur Rotverschiebung beim Licht„aufstieg“ von diesem Himmelskörper zu einer Entfernung *r* genau äquivalent. Würde man also z.B. Laser-Licht einer ganz bestimmten Wellenlänge zu einer Neutronensternoberfläche hinabschicken, so würde das von dort reflektierte Licht am Ort des (stationär gedachten) Lasers wieder mit der ursprünglichen Wellenlänge zurückkehren.

Hinweis: Würde jemand behaupten, die Beobachtung der gravitativen Rotverschiebung und Zeitdilatation würde die Richtigkeit der ART in ihrer Gesamtheit beweisen, dann läge er damit falsch. Diese zwei Phänomene beweisen nämlich nur das Äquivalenzprinzip allein. Für den Beweis der Richtigkeit von Einsteins Feldgleichungen muß man daher nach anderen Phänomenen suchen (z.B. Periheldrehung), die natürlich längst gefunden wurden.

Mehr zum Thema Rotverschiebung, insbesondere weitere Formen und „Auslöser“ hierfür, findet sich in Kapitel 4.

Nun noch eine Tabelle, die auf sehr anschauliche Weise die Namensgebung der SRT und der ART erklärt:

	Orte	Zeit	Beschleunigung
Newtonsche Mechanik	relativ	absolut	absolut
Spezielle Relativitätstheorie	relativ	relativ	absolut
Allgemeine Relativitätstheorie	relativ	relativ	relativ

Und auch noch ein Wort zur Bezeichnung „Theorie“ in diesem Zusammenhang: Die vielen in den bisherigen Abschnitten erwähnten Experimente und Beobachtungen, welche die SRT und ART durchweg bestätigen, zeigen,

daß es sich hier um mehr als rein theoretische Gedankenkonstrukte oder Vermutungen handelt. Innerhalb ihrer Geltungsbereiche sind Einsteins Theorien die bisher natürlichsten und exaktesten Beschreibungen der entsprechenden physikalischen Phänomene. Aber es ist keineswegs ausgeschlossen, daß in Zukunft noch exaktere Theorien entwickelt werden und/oder die SRT und ART mit gewissen Modifikationen in eine viel umfassendere Theorie „eingepaßt“ werden.

Die ständige Verbesserung der die Phänomene beschreibenden Gesetze ist eine Kernaufgabe der Naturwissenschaften; von diesem evolutionären (und gelegentlich auch revolutionären) Verbesserungsprozeß können eines Tages auch die Relativitätstheorien erfaßt werden (wie es auch Newtons Gravitations„gesetz“ widerfahren ist). Vor allem im Rahmen der angestrebten Vereinheitlichung der vier Grundkräfte (Elektromagnetismus, Gravitation, schwache und starke Kernkraft) kann dies geschehen („Suche nach der Weltformel“).

2.6 Anhang zu Kapitel 2 – Kovarianz, Invarianz, Konstanz und Erhaltungsgrößen

In diesem Anhang erhält der Leser eine zusammenfassende Erklärung der Begriffe Kovarianz, Invarianz, Konstanz und Erhaltungsgröße.

Kovarianz

Solche *Naturgesetze*, die für eine bestimmte Gruppe von Beobachtern *in identischer Form* gelten („forminvariant sind“), nennt man kovariant. Beispiele:

- In der SRT gelten alle (!) Naturgesetze für alle Inertialbeobachter in identischer Form. Der Fachmann sagt: Alle Naturgesetze sind kovariant unter Lorentz-Transformationen (letztere sind ja „Vermittler“ zwischen verschiedenen Inertialbeobachtern). Im Denkraum der SRT gilt diese Kovarianz für Beobachter in beschleunigten Systemen dagegen nicht.
- In der ART gelten alle (!) Naturgesetze für Beobachter in allen lokalen Inertialsystemen (also Freifallsystemen von infinitesimaler Kleinheit) in identischer Form. Und da sich in allen Gravitationsfeldern solche Freifallsysteme einrichten lassen, sind die Naturgesetze⁸⁴ „kovariant unter beliebigen Koordinatentransformationen“, wie es in der Fachliteratur formuliert wird.

⁸⁴ bei sogenannter tensorieller Formulierung

Bezüglich der SRT drehen die Physiker übrigens den Spieß sogar um: Diese Theorie gilt als so zweifelsfrei gültig, daß sie selbst zur „Prüfinstanz“ anderer Theorien geworden ist! Konkret bedeutet das: Physikalische Theorien kommen nur dann als generell gültig in Betracht, wenn sie sich so formulieren lassen, daß sie unter Lorentz-Transformationen kovariant sind. Bestehen sie diese Feuertaufe nicht, können sie grundsätzlich nicht als allgemeingültig angesehen werden. Die Physiker vertrauen also so stark auf die SRT, daß sie sie zu einem der Fundamente der gesamten modernen Physik erklärt haben.

Das Zweite Newtonsche Bewegungsgesetz (Kraft = Masse mal Beschleunigung bzw. Kraft = Änderung des Impulses pro Zeitintervall) würde übrigens bei diesem Test „durchfallen“: Es ist nur unter der Galilei-Transformation kovariant, nicht jedoch unter Lorentz-Transformationen.

Paradebeispiel eines unter Lorentz-Transformationen kovarianten Gesetzes sind die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik. H.A. Lorentz hätte deren Kovarianz schon 1904 beinahe gefunden, aber ihm ist ein Rechenfehler unterlaufen! So war es dann Einstein, der diesen Zusammenhang als erster erkannte (Juni 1905), knapp vor Poincaré (Juli 1905).

Invarianz

Größen, die *für verschiedene Mitglieder einer bestimmten Beobachterklasse denselben Wert* aufweisen, nennt man invariant.

Beispiele, die schon in der SRT erwähnt wurden, die also für alle Inertialbeobachter invariant sind, sind die Raum-Zeit-Intervalle, die Impulsenergie eines geschlossenen Systems und die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Diese Größen sind unter Lorentz-Transformationen invariant. Das Prinzip der Konstanz von c müßte also (im Kontext der SRT) exakt lauten: Prinzip der Invarianz von c .

Man sieht, daß hier die Nomenklatur nicht immer exakt verwendet wird, was aber auch für diesen Text gilt. Das Wort Konstanz ist so eingängig, daß man es nur ungern gegen das Wort Invarianz tauschen will!

Beispiele für allgemeine Invarianten (die nicht nur in der SRT gelten, also nicht nur Lorentz-invariant sind) sind die elektrische Ladung des Elektrons oder des Protons und die Teilchenzahl N eines abgeschlossenen Systems.

Konstanz

Größen, bei denen das *Fehlen einer Veränderung im zeitlichen Verlauf* im Vordergrund steht, nennt man Konstanten. Als Beispiele können die Elementarladung (Elektron, Proton), das Plancksche Wirkungsquantum h oder die Gravitationskonstante G dienen; c ist in *diesem* Sinne auch konstant.

Es gibt allerdings auch exotische Theorien, denen zufolge sich selbst solche Naturkonstanten langsam ändern könnten. Warum die Zahlenwerte der Naturkonstanten so sind, wie sie sind, ist übrigens eines der größten noch ungeklärten Rätsel der Wissenschaft. Hauptproblem dabei sind nicht die absoluten Zahlenwerte, sondern die Relationen der Naturkonstanten untereinander. Die absoluten Zahlenwerte sind ja durch vom Menschen frei gewählte Einheiten festgelegt. Aber warum beträgt z.B. die Protonenmasse das 1 836, 152 672 47-fache der Elektronenmasse?

Erhaltungsgrößen

Das sind Größen, die *bei ablaufenden Vorgängen oder Prozessen* ihren Wert beibehalten.

Beispiele: Bei Kollisionen oder Zerfallsprozessen von Elementarteilchen bleiben Energie und Impuls eines geschlossenen Systems erhalten, bei rotierenden Himmelskörpern bleibt der Drehimpuls beim Kollaps zu kompakteren Körpern erhalten.

Leser des Anhangs 1.18 wissen auch, daß die Impulsenergie eines abgeschlossenen Systems ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

Invarianten und Erhaltungsgrößen, wie sie hier beispielhaft im Kontext der Relativitätstheorie vorgestellt wurden, sind eigentlich die Dreh- und Angelpunkte einer jeden physikalischen Theorie. Interessanterweise wurde einmal sogar daran gedacht, die SRT als „Invariantentheorie“ zu bezeichnen. Dies wäre durchaus gerechtfertigt: Sie läßt zwar einerseits Strecken und Zeitintervalle nicht mehr als invariant gelten, setzt aber andererseits dafür neue und sicherere invariante Fundamente, wie etwa c , die Raum-Zeit-Intervalle und die Impulsenergie.

Mit diesem „Blick durch das Schlüsselloch“ in die ART endet der eigentliche Rundgang durch die wunderbare Welt der Relativitätstheorien, die uns Albert Einstein erschlossen hat. Im folgenden Kapitel 3 geht es um die exotischsten aller Himmelskörper, die Schwarzen Löcher. Kapitel 4 wird dann noch einen Überblick über alle Formen von Rotverschiebung geben, in diesem Zusammenhang werden auch einige kosmologische Fragen⁸⁵ angeschnitten.

⁸⁵ Kosmologie: Teilgebiet der Astrophysik, das sich mit den Eigenschaften, der Struktur und der Evolution des Weltalls als Ganzes befaßt.

Kleines 1x1 der Relativitätstheorie
Einsteins Physik mit Mathematik der Mittelstufe
Beyvers, G.; Rosenbaum, E.
2009, XVIII, 358 S. 25 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-53711-4