

Kapitel 2

Multilineare Algebra

Um die angestrebte begriffliche Klarheit zu fördern, haben wir die algebraischen – also die rein rechnerischen – Aspekte der Differentialgeometrie von den geometrischen abgekoppelt und in diesem Kapitel versammelt. Dieses Kapitel ist damit eine Fortführung der linearen Algebra. Insbesondere wird der Begriff des Tensors eingeführt, der eine Verallgemeinerung sowohl des Begriffs des Vektors als auch der linearen Abbildung ist. Im letzten Abschnitt widmen wir zwei speziellen Typen, nämlich den symmetrischen und den alternierenden Tensoren, besondere Aufmerksamkeit. Die alternierenden Tensoren eröffnen insbesondere die Möglichkeit, die geometrischen Begriffe von *Orientierung* und *orientiertem Volumen* präzise zu definieren, was wir am Schluss kurz erläutern werden.

Hier sollte vor einem Missverständnis gewarnt werden: Unter Physikern (teilweise auch unter Mathematikern) ist es üblich, die Begriffe „Tensor“ und „Tensorfeld“ synonym zu verwenden. Die in diesem Kapitel betrachteten Tensoren sind jedoch definitiv keine Tensorfelder. Vielmehr ist ein Tensorfeld eine Abbildung, die jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen Tensor im Sinne dieses Kapitels zuordnet, und diese Felder werden uns ab dem nächsten Kapitel noch sehr beschäftigen.

Die Bezeichnungen werden in diesem Kapitel leider etwas aufwendig, weil man für die Komponenten der betrachteten Tensoren beliebig viele obere und untere Indizes zulassen muss. Es mag ein Trost sein, dass in der Praxis nur selten mehr als vier Indizes gebraucht werden. Trotzdem müssen wir die grundlegenden Definitionen für den Fall beliebig vieler Indizes formulieren, da nur so ihre begriffliche Klarheit gewährleistet werden kann. In diesem Punkt müssen wir also auf Ihre Geduld vertrauen.

A Dualität bei endlich dimensionalen Vektorräumen

Als Vorbereitung skizzieren wir in diesem Abschnitt die Dualitätstheorie für endlichdimensionale Vektorräume. Sie ist eigentlich nur eine Neuformulierung von ge-

wissen einfachen Resultaten über lineare Abbildungen in einem Spezialfall, und möglicherweise ist sie Ihnen wohlbekannt (vgl. etwa [36], Kap. 7 und 21).

Stets sei V ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.

Definitionen 2.1. Eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt ein *lineares Funktional* oder eine *Linearform*. Der Raum aller Linearformen auf V wird mit V^* bezeichnet und heißt der *Dualraum* zu V . Die Elemente von V^* werden auch als *Kovektoren* bezeichnet.

Satz 2.2.

a. Der Raum V^* der Linearformen auf V bildet zusammen mit der üblichen Addition von Abbildungen und Multiplikation mit Skalaren einen n -dimensionalen Vektorraum.

b. Ist $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V , so ist $\mathfrak{A}^* := (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, wobei $\alpha^i \in V^*$ durch

$$\alpha^i(a_j) = \delta_j^i, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.1)$$

gegeben ist, eine Basis von V^* . Diese Basis heißt die zu \mathfrak{A} duale Basis.

Beweis. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, ist $\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$, insbesondere $\dim V^* = n$. Es bleibt also nur die lineare Unabhängigkeit von $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ zu prüfen. Dies geschieht durch Einsetzen der Basis \mathfrak{A} in die Gleichung $\lambda_1 \alpha^1 + \dots + \lambda_n \alpha^n = 0$. \square

Ist in V eine Basis \mathfrak{A} gegeben, so kann man bekanntlich V^* mit $\mathbb{K}_{1 \times n}$ identifizieren, indem man jeder Linearform $\varphi \in V^*$ die Matrix $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathbb{K}_{1 \times n}$ zuordnet (vgl. z. B. [36], Kap. 7). Insbesondere ist dann $\mathfrak{A}^* = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ durch

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathfrak{A}}^1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \alpha_{\mathfrak{A}}^n &= (0, \dots, 1) \end{aligned}$$

gegeben.

Ist $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine fest vorgegebene Basis von V , $\mathfrak{A}^* = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die duale Basis, so kann man den Index \mathfrak{A} auch weglassen, schreibt also für $v \in V$, $\varphi \in V^*$

$$\begin{aligned} v &= (v^1, \dots, v^n) \quad \text{für } v = \sum_{i=1}^n v^i a_i, \\ \varphi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad \text{für } \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \alpha^i. \end{aligned}$$

Die Zahlen $v^i \in \mathbb{K}$ und $\varphi_i \in \mathbb{K}$ heißen die *Komponenten* von v und φ bezüglich \mathfrak{A} und \mathfrak{A}^* .

Es ist dann

$$\begin{aligned}
 \varphi(v) &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \alpha^i(v) \\
 &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \alpha^i \left(\sum_{j=1}^n v^j a_j \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \varphi_i v^j \alpha^i(a_j) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_i v^j \delta_j^i \\
 &= \sum_{i=1}^n \varphi_i v^i,
 \end{aligned}$$

insbesondere also auch $\varphi(a_i) = \varphi_i$.

Satz 2.3. Sind $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basen von V und $C = (c_k^i)_{k,i=1,\dots,n}$ die Transformationsmatrix, also

$$b_k = \sum_{i=1}^n c_k^i a_i,$$

so ist die Transformationsmatrix zwischen den dualen Basen $\mathfrak{A}^* = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ und $\mathfrak{B}^* = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ durch die transponierte inverse Matrix, also durch

$$\alpha^i = \sum_{k=1}^n c_k^i \beta^k$$

gegeben.

Der Beweis ist eine leichte Übungsaufgabe.

Ist $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler Prähilbertraum, also $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V , so sind V und V^* nicht nur isomorph, sondern können sogar miteinander identifiziert werden, d.h. es existiert ein kanonischer Isomorphismus zwischen V und V^* :

Satz 2.4. Ist $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum, so ist durch

$$V \longrightarrow V^*, \quad v \longmapsto v^b$$

mit $v^b : w \longmapsto \langle v | w \rangle$ ein Isomorphismus gegeben. Die Umkehrung bezeichnen wir mit

$$V^* \longrightarrow V, \quad \varphi \longmapsto \varphi^\#.$$

Beweis. Die angegebene Abbildung ist offenbar linear nach Definition eines Skalarprodukts. Sie ist injektiv, denn aus $\langle v | w \rangle = 0$ für alle $w \in V$, also insbesondere

für $w = v$, folgt auch $v = 0$. Damit folgt die Isomorphie aus Dimensionsgründen. \square

Ist

$$\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n), \quad v = \sum_{i=1}^n v^i a_i \quad \text{und} \quad \langle a_i | a_j \rangle = g_{ij},$$

so ist

$$(v^b)_i = v^b(a_i) = \langle v | a_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n v^j a_j | a_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n v^j g_{ji}.$$

Die Matrix (g_{ij}) beschreibt also den Isomorphismus aus Satz 2.4 in Bezug auf die Basen \mathfrak{A} und \mathfrak{A}^* .

Ist $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ speziell eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, so ist offenbar $\mathfrak{A}^* = (a_1^b, \dots, a_n^b)$.

Ist also auf V ein Skalarprodukt gegeben, so induziert dies einen Isomorphismus $V \longrightarrow V^*$, der unabhängig von der Wahl einer Basis ist. Im allgemeinen Fall eines \mathbb{K} -Vektorraums ist ein Isomorphismus $V \longrightarrow V^*$ aber erst durch die Wahl einer Basis festgelegt. Da die Wahl einer Basis willkürlich ist – zum Beispiel im physikalischen Raum –, muss oft sorgfältig zwischen V und V^* unterschieden werden. Andererseits kann ein Vektor $v \in V$ durch das Einsetzen $i_v : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \longmapsto \varphi(v)$ als Linearform auf V^* aufgefasst werden. Dies werden wir im weiteren Verlauf ausnutzen, um Dinge, die man mit Kovektoren (= Linearformen) leicht tun kann, auch mit Vektoren zu tun.

Definition 2.5. $(V^*)^* = V^{**}$ heißt der *Bidualraum* von V .

Satz 2.6. *Durch*

$$j : V \longrightarrow V^{**}, \quad v \longmapsto i_v \quad (2.2)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus gegeben. Ist $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V , so ist $\mathfrak{A}^{**} = (i_{a_1}, \dots, i_{a_n})$ die duale Basis der dualen Basis.

Wieder ist der Beweis eine leichte Übung.

Bisher wurden Vektorräumen Dualräume zugeordnet. Auch Abbildungen $A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ zwischen Vektorräumen werden nun duale Abbildungen, jedoch in umgekehrter Richtung, zugeordnet.

Definition 2.7. Sind V und W \mathbb{K} -Vektorräume, $A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, so ist die *duale Abbildung* $A^* \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$ durch

$$A^*(\varphi) := \varphi \circ A$$

definiert.

Man rechnet leicht nach, dass $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{V^*}$ gilt und $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$ für $A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $B \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$. Ist schließlich $C = (c_j^i)$ die Matrix, die die lineare Abbildung A in Bezug auf die Basen $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ von V , $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ von W beschreibt, so wird die duale Abbildung bzgl. der dualen Basen durch die *transponierte* Matrix $C^T = (c_j^i)$ beschrieben. Auch dies bestätigt man durch eine leichte Rechnung.

B Multilineare Abbildungen und Tensoren

In der Physik werden Tensoren meist als Zahlensysteme $c_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ mit unteren und oberen Indizes angesehen, die sich jedoch auf ein gegebenes Koordinatensystem beziehen und daher bei Koordinatenwechsel auf eine ganz bestimmte Art transformiert werden müssen. Diese Beschreibung lässt natürlich offen, was ein Tensor eigentlich ist, und außerdem verbaut sie von vornherein jede Möglichkeit, Rechnungen ohne den Rückgriff auf Koordinaten durchzuführen. Die multilineare Algebra, die wir jetzt erklären wollen, eröffnet die Möglichkeit, Ausdrücken der Form

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_q \otimes \varphi^1 \otimes \varphi^2 \otimes \dots \otimes \varphi^p \quad (2.3)$$

(und auch endlichem Summen von solchen Ausdrücken) einen konkreten mathematischen Sinn zu verleihen. Dabei sind v_1, \dots, v_q gegebene Vektoren aus einem Vektorraum V und $\varphi^1, \dots, \varphi^p \in V^*$ entsprechende Kovektoren, und das Zeichen „ \otimes “ (*Tensorprodukt*) soll sich wie eine Multiplikation verhalten, also insbesondere die üblichen Klammerregeln erfüllen. Die Festlegung eines Koordinatensystems entspricht der Wahl einer Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ von V und der dualen Basis $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ in V^* . Entwickelt man nun die v_j und die φ^i nach diesen Basen, setzt die Entwicklungen in (2.3) ein und distribuiert alles aus, so ergibt sich eine Summe von Termen der Gestalt

$$c_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} a_{j_1} \otimes \dots \otimes a_{j_q} \otimes \alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{i_p}.$$

Auf diese Weise beschreibt das Zahlensystem der $c_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ tatsächlich den Tensor (2.3), und es ist prinzipiell auch klar, wie man diese Koeffizienten beim Übergang zu einer anderen Basis von V – und damit auch zu einer neuen dualen Basis von V^* – umzurechnen hat, wenn das im Einzelnen auch kompliziert sein mag. Die Ausdehnung auf endliche Summen von Ausdrücken der Form (2.3) ist trivial.

Wir werden mit dem Tensorprodukt von *Kovektoren* beginnen, da dieses am leichtesten mathematisch exakt eingeführt werden kann. Vektoren werden dann mittels (2.2) als Linearformen auf V^* aufgefasst, so dass man das vorher für Linearformen eingeführte Tensorprodukt auch für sie nutzbar machen kann. Am Schluss betrachten wir „gemischte Tensoren“, bei denen sowohl Vektoren als auch Kovektoren vorkommen.

Im Folgenden seien V, V_1, \dots, V_p \mathbb{R} -Vektorräume der Dimensionen n, n_1, \dots, n_p und W ein k -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum.

Lineare Abbildungen und Linearformen werden nun verallgemeinert:

Definitionen 2.8.

- Unter einer p -linearen oder *multilinearen Abbildung* auf $V_1 \times \dots \times V_p$ mit Werten in W versteht man eine Abbildung $\varphi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$, die in jeder Variablen bei Festhalten der übrigen linear ist, also

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, \dots, \kappa v_j + \lambda v'_j, \dots, v_p) &= \kappa \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_p) \\ &\quad + \lambda \varphi(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_p) \end{aligned}$$

für $v_k \in V_k, k = 1, \dots, p, v'_j \in V_j, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Ist $W = \mathbb{K}$, so spricht man von einer *Multilinearform*.

- b. Den Raum der p -linearen Abbildungen auf $V_1 \times \dots \times V_p$ mit Werten in W bezeichnet man mit $\text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p; W)$. Für $V = V_1 = \dots = V_p$ schreibt man auch $\text{Mult}^p(V; W)$ und für $W = \mathbb{R}$ auch

$$\text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p) =: V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^* \text{ bzw. } \text{Mult}^p(V) =: \bigotimes^p V^*.$$

$V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*$ heißt auch das *Tensorprodukt* von V_1^*, \dots, V_p^* , und Elemente aus $V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*$ heißen p -fach *kovariante Tensoren*.

- c. Statt von 2-linear spricht man auch von *bilinear*, statt von 3-linear von *trilinear*.

Offenbar bildet $\text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p; W)$ mit der üblichen Addition von Abbildungen und der skalaren Multiplikation einen Vektorraum. Ein Beispiel für eine n -Multilinearform auf \mathbb{R}^n ist die Determinante, für eine Bilinearform ein Skalarprodukt und für eine bilineare Abbildung auf \mathbb{R}^3 mit Werten in \mathbb{R}^3 das Vektorprodukt auf \mathbb{R}^3 .

Sind in Vektorräumen V und W Basen gewählt, so werden lineare Abbildungen $A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ bekanntlich durch Matrizen beschrieben. Ganz ähnlich kann man auch multilineare Abbildungen durch Systeme von Zahlen beschreiben:

Definition 2.9. Ist $\varphi \in \text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p; W)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{(j)} &= (a_1^{(j)}, \dots, a_{n_j}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, p \text{ Basen der } V_j, \\ \mathfrak{B} &= (b_1, \dots, b_k) \quad \text{eine Basis von } W, \end{aligned}$$

so werden die *Komponenten*

$$\varphi_{i_1 \dots i_p}^j, \quad \begin{cases} 1 \leq i_r \leq n_r, & 1 \leq r \leq p, \\ 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

von φ durch

$$\varphi(a_{i_1}^{(1)}, \dots, a_{i_p}^{(p)}) = \sum_{j=1}^k \varphi_{i_1 \dots i_p}^j b_j \quad (2.4)$$

definiert.

Für $W = \mathbb{R}$ werden die Komponenten mit $(\varphi_{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_p \leq n_p}$ bezeichnet.

Beispiele:

- (i) Die Komponenten der Determinante im \mathbb{R}^n sind durch

$$(\det)_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i_r = i_s \text{ für ein } r \neq s \\ \text{sgn}(\tau) & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei τ die Permutation $\binom{1 \dots n}{i_1 \dots i_n}$ ist, d. h. die Permutation, die j auf i_j abbildet.

(ii) Die Komponenten des Kreuzprodukts auf \mathbb{R}^3 sind

$$\varphi_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine zyklische Vertauschung von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine zyklische Vertauschung von } (2, 1, 3) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Das System der Komponenten des Kreuzprodukts wird in der Physik als der „Epsilon-Tensor“ bezeichnet und ε_{ij}^k geschrieben.

Wir haben gerade einer gegebenen multilinearen Abbildung ein System von Komponenten zugeordnet. Umgekehrt ist bei gegebenen Basen von V_1, \dots, V_p und W eine multilineare Abbildung durch $n_1 \cdots n_p \cdot k$ reelle Zahlen $\varphi_{i_1 \dots i_p}^j \in \mathbb{R}$ mittels (2.4) definiert.

Die Darstellung durch Komponenten gestattet es, die Dimension des Raums der multilinearen Abbildungen zu berechnen:

Satz 2.10. $\text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p, W)$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension $n_1 \cdots n_p k$.

Beweis. Sind $\mathfrak{A}^{(j)}$ und \mathfrak{B} Basen von V_j und W , so ist ein Isomorphismus $\text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p; W) \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1 \cdots n_p k}$ durch die Abbildung auf die Komponenten gegeben. \square

Wir definieren nun eine Art Multiplikation, durch die gegebenen Linearformen ein kovarianter Tensor zugeordnet wird. Ist nämlich $\varphi^j \in V_j^*$ so ist durch

$$(\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^p)(v_1, \dots, v_p) := \varphi^1(v_1) \cdots \varphi^p(v_p), \quad v_j \in V_j \quad (2.5)$$

eine multilineare Abbildung definiert, die man als das *Tensorprodukt* der φ^j bezeichnet. Dabei gilt

$$\text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p) = \text{LH} \{ \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^p \mid \varphi^j \in V_j^* \}.$$

Eine Basis von $\text{Mult}^p(V_1, \dots, V_p)$ ist durch

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_p} := \left(\alpha_{(1)}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{(p)}^{i_p} \right), \quad 1 \leq i_j \leq n_j, \quad j = 1, \dots, p$$

gegeben mit $(\mathfrak{A}_{(j)})^* = (\alpha_{(j)}^1, \dots, \alpha_{(j)}^{n_j})$ Basis von V_j^* , also

$$(\varepsilon^{i_1 \dots i_p})_{j_1 \dots j_p} = \begin{cases} 1, & i_r = j_r, \quad r = 1, \dots, p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kovariante Tensoren stellen eine Verallgemeinerung der Linearformen dar. Vektoren werden jetzt durch *kontravariante Tensoren* verallgemeinert.

Erinnert man sich daran, dass man mittels des Isomorphismus j aus Satz 2.6 die Elemente von V als Linearformen auf V^* auffassen kann, so liegt nahe, wie das Tensorprodukt von p Vektorräumen zu definieren ist:

Definitionen 2.11.

- Das Tensorprodukt von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ ist der Vektorraum der p -Linearformen auf $V_1^* \times \cdots \times V_p^*$. Elemente aus $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ nennt man *kontravariante* Tensoren vom Rang p .
- Das Tensorprodukt von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \otimes V_{r+1}^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$ ist der Vektorraum der p -Linearformen auf $V_1^* \times \cdots \times V_r^* \times V_{r+1} \times \cdots \times V_p$. Elemente aus $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \otimes V_{r+1}^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$ nennt man r -fach kontra- und $(p - r)$ -fach kovariante Tensoren.
- Sind $v_r \in V_r$ Vektoren, $r = 1, \dots, p$, so ist durch

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p : V_1^* \times \cdots \times V_p^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(p)}) \longmapsto \varphi^{(1)}(v_1) \cdots \varphi^{(p)}(v_p)$$

ein p -fach kontravarianter Tensor gegeben. Diesen bezeichnet man als das *Tensorprodukt* der Vektoren v_1, \dots, v_p .

Insbesondere ist für Basen $(a_1^{(r)}, \dots, a_{n_r}^{(r)}) = \mathfrak{A}^{(r)}$ von V_r , $r = 1, \dots, p$ durch

$$(a_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_{i_p}^{(p)})_{1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_p \leq n_p}$$

eine Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ gegeben, und durch

$$(a_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes a_{i_r}^{(r)} \otimes \alpha_{(r+1)}^{i_{r+1}} \otimes \cdots \otimes \alpha_{(p)}^{i_p})_{\substack{1 \leq i_1 \leq n_1 \\ 1 \leq i_p \leq n_p}}$$

ist eine Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \otimes V_{r+1}^* \otimes \cdots \otimes V_p^*$ gegeben, wobei $\mathfrak{A}^{(r)*} = (\alpha_{(r)}^1, \dots, \alpha_{(r)}^{n_r})$ ist.

Die Komponenten eines r -fach kontra- und $(p - r)$ -fach kovarianten Tensors φ sind durch

$$\varphi_{i_{r+1} \dots i_p}^{i_1 \dots i_r} = \varphi(\alpha_{(1)}^{i_1}, \dots, \alpha_{(r)}^{i_r}, a_{i_{r+1}}^{(r+1)} \dots a_{i_p}^{(p)})$$

gegeben. Natürlich sind auch Tensorprodukte wie $V_1 \otimes V_2^* \otimes V_3 \otimes \cdots \otimes V_p^*$ definiert, wobei die Komponenten eines Tensors aus diesem Raum dann als

$$\varphi_{i_2 \dots i_p}^{i_1 \dots i_r}$$

notiert werden.

Offenbar kann dabei die Reihenfolge der Faktoren im Tensorprodukt nicht beliebig vertauscht werden, d. h. das Tensorprodukt ist nicht kommutativ.

Es wurde bereits in (2.4) beschrieben wie die Anwendung einer Multilinearform auf Vektoren in Komponenten berechnet wird. Ähnlich kann man für r -fach ko- und $p - r$ -fach kontravariante Tensoren $\varphi \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^* \otimes V_{r+1} \otimes \cdots \otimes V_p$ vorgehen:

Ist

$$\eta^j = (\eta_1^j, \dots, \eta_{n_j}^j) \in V_j^*, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$v_j = (v_j^1, \dots, v_j^{n_j}) \in V_j, \quad j = r + 1, \dots, p,$$

so ist

$$\varphi(\eta^1, \dots, \eta^r, v_{r+1}, \dots, v_p) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n_1 \dots \\ 1 \leq i_p \leq n_p}} \varphi_{i_{r+1} \dots i_p}^{i_1 \dots i_r} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_r}^r v_{r+1}^{i_{r+1}} \dots v_p^{i_p}. \quad (2.6)$$

Die Stellung der Indizes oben und unten, wie sie hier benutzt wird, ist Teil des sogenannten *RICCI-Kalküls*. Aus der Stellung der Indizes ersieht man das Transformationsverhalten bei Basiswechsel. Beschreibt eine Verknüpfung von Tensoren einen Skalar, wie z. B. in (2.6), so treten in der Beschreibung im *RICCI-Kalkül* die Indizes jeweils paarweise oben und unten auf. In der physikalischen Literatur wird oft die *EINSTEINSche Summenkonvention* benutzt: Über gegenüberstehende gleiche Indizes wird immer summiert, das Summenzeichen wird weggelassen. Wir verwenden diese Konvention hier jedoch nicht.

Das Verhalten der Komponenten bei Basiswechsel wird in Aufgabe 2.4 behandelt.

Ist $v \in V$, $\varphi \in \text{Mult}^p(V)$, so wird als Verallgemeinerung von (2.2) das *innere Produkt* $i_v \varphi \in \text{Mult}^{p-1}(V)$ von v und φ durch

$$(i_v \varphi)(v_1, \dots, v_{p-1}) := \varphi(v, v_1, \dots, v_{p-1}) \quad \text{für } v_j \in V, j = 1, \dots, p-1 \quad (2.7)$$

definiert. Ist bezüglich einer Basis \mathfrak{A} von V

$$v = (v^1, \dots, v^n), \quad \varphi = (\varphi_{i_1 \dots i_p})_{i_j=1 \dots n},$$

so ist

$$(i_v \varphi)_{i_1 \dots i_{p-1}} = \sum_{j=1}^n v^j \varphi_{j i_1 \dots i_{p-1}}.$$

Lineare Abbildungen $A_j \in \text{Hom}(V_j, W_j)$ und ihre dualen $A_j^* \in \text{Hom}(W_j^*, V_j^*)$ setzen sich in natürlicher Weise fort zu linearen Abbildungen

$$A_1 \otimes \dots \otimes A_r \otimes A_{r+1}^* \otimes \dots \otimes A_p^* : V_1 \otimes \dots \otimes V_r \otimes W_{r+1}^* \otimes \dots \otimes W_p^* \longrightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_r \otimes V_{r+1}^* \otimes \dots \otimes V_p^*.$$

Diese Abbildung ist durch die Forderung

$$(A_1 \otimes \dots \otimes A_r \otimes A_{r+1}^* \otimes \dots \otimes A_p^*)(v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \varphi^{r+1} \otimes \dots \otimes \varphi^p) = A v_1 \otimes \dots \otimes A v_r \otimes A^* \varphi^{r+1} \otimes \dots \otimes A^* \varphi^p \quad (2.8)$$

eindeutig festgelegt, da jeder Tensor als Summe von Termen der Form $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \varphi^{r+1} \otimes \dots \otimes \varphi^p$ geschrieben werden kann. Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig, so dass man nachrechnen muss, dass (2.8) bei verschiedenen Darstellungen desselben Tensors immer den gleichen Wert liefert. Das ist aber nicht schwer und wird hier übergangen.

Ist $r = 0$ und $V_j = V, W_j = W, A_j = A$ für $j = 1, \dots, p$, so schreibt man für diese Abbildung auch

$$\bigotimes^p A^* \equiv \text{Mult}^p A \equiv A^{*p}.$$

Im nächsten Satz stellen wir die wichtigsten Rechenregeln für ko- und kontravariante Tensoren zusammen.

Satz 2.12.

- a. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3),$
- b. $(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 = (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3),$
- c. $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = V^* \otimes W,$
- d. $\text{Mult}^p(V, W) = \bigotimes^p V^* \otimes W,$
- e. $(V_1 \otimes V_2)^* = V_1^* \otimes V_2^*.$

Die Beweise sind jeweils leichte Übungsaufgaben. Wir geben hier nur die Identifizierung aus c. exemplarisch an:

Ein $A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ fasst man als bilineare Abbildung α_A auf, indem man $\alpha_A(v, \varphi) := \varphi(A(v))$ setzt. Umgekehrt ist $\alpha \in \text{Mult}^2(V, W^*)$ als Homomorphismus $A_\alpha \in \text{Hom}(V, W)$ aufzufassen, indem man setzt:

$$A_\alpha(v) := \alpha(v, \cdot) \in W^{**} \equiv W.$$

Dem Tensor $\alpha = \varphi \otimes w \in V^* \otimes W$ entspricht dabei die lineare Abbildung

$$A_\alpha v = \varphi(v)w, \quad v \in V.$$

Bemerkung: Der Identifikation aus c. verdanken die Tensoren ihren Namen, der sich von dem lateinischen Wort für „spannen“ ableitet. Im 19. Jahrhundert bezeichnete man so nämlich u. a. die lineare Abbildung, die einem Verzerrungsvektor (in erster Näherung) den Kraftvektor zuordnet, den ein elastisches Material als Antwort auf die Verzerrung erzeugt. Erst EINSTEIN erkannte, dass diese Tensorrechnung aus der Elastizitätslehre zu dem RICCI-Kalkül äquivalent ist, der kurz zuvor von italienischen Differentialgeometern eingeführt worden war.

C Alternierende und symmetrische Abbildungen und Tensoren

Als besonders wichtig erweisen sich zwei spezielle Typen von multilinearen Abbildungen bzw. Tensoren, die sich dadurch auszeichnen, dass sie auf das Vertauschen von Argumenten entweder gar nicht oder durch Vorzeichenwechsel reagieren:

Definitionen 2.13.

- a. Eine multilineare Abbildung $\varphi \in \text{Mult}^p(V; W)$ heißt *symmetrisch*, falls für $1 \leq i, j \leq p$ stets

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

gilt. Den Raum der symmetrischen p -linearen Abbildungen mit Werten in W bezeichnet man mit $\text{Sym}^p(V; W)$. Ferner schreibt man

$$\text{Sym}^p(V; \mathbb{R}) =: \text{Sym}^p(V) =: S^p V^*.$$

- b. Eine multilineare Abbildung $\varphi \in \text{Mult}^p(V; W)$ heißt *antisymmetrisch* oder *alternierend*, falls für $1 \leq i < j \leq p$ stets

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

gilt. Den Raum der p -linearen alternierenden Abbildungen mit Werten in W bezeichnet man mit $\text{Alt}^p(V; W)$. Ferner schreibt man

$$\text{Alt}^p(V; \mathbb{R}) =: \text{Alt}^p(V) =: \bigwedge^p V^*.$$

- c. Den Vektorraum der p -linearen alternierenden Abbildungen auf V^* bezeichnet man mit

$$\text{Alt}^p(V^*) = \bigwedge^p V$$

und nennt ihn auch die p -te *äußere Potenz* von V .

- d. den Vektorraum der symmetrischen Abbildungen auf V^* bezeichnet man mit

$$\text{Sym}^p(V^*) = S^p V.$$

Offenbar sind $\text{Sym}^p(V) \subseteq \text{Mult}^p(V)$ und $\text{Alt}^p(V) \subseteq \text{Mult}^p(V)$ Untervektorräume.

Die Determinante im \mathbb{R}^n ist ein Element in $\text{Alt}^n(\mathbb{R}^n)$, Skalarprodukte auf einem reellen Vektorraum V sind Elemente in $\text{Sym}^2(V)$ und das Vektorprodukt ist ein Element aus $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.

In den nächsten Kapiteln werden für uns vor allem alternierende Multilinearformen wichtig werden. Der nun folgende Satz zeigt verschiedene äquivalente Möglichkeiten sie zu charakterisieren. Hier – und auch im weiteren Verlauf – bezeichnen wir mit $S(p)$ die Menge aller *Permutationen* der Zahlen $(1, 2, \dots, p)$.

Satz 2.14. Für $\varphi \in \text{Mult}^p(V)$ sind äquivalent:

- (i) $\varphi \in \text{Alt}^p(V)$, d. h. $\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) = -\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p)$, $1 \leq i < j \leq p$.
- (ii) $\varphi(v_1, \dots, v_p) = \text{sgn}(\tau)\varphi(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)})$ für $v_1, \dots, v_p \in V$ und jede Permutation $\tau \in S(p)$.
- (iii) $\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = 0$, falls $v_i = v_j$ für ein $i \neq j$.
- (iv) $\varphi(v_1, \dots, v_p) = 0$, falls $\{v_1, \dots, v_p\}$ linear abhängig sind.

Beweis. Wir führen hier nur den Beweis für die Folgerung $(iii) \implies (i)$; die übrigen folgen dem Muster von Rechnungen, die aus der Determinantentheorie wohl-

bekannt sind, und sie seien dem Leser als Übungsaufgabe überlassen:

$$\begin{aligned}
 & \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) + \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) = \\
 &= \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) + \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_p) \\
 & \quad + \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) + \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_p) = \\
 &= \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots, v_p) + \varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_p) = \\
 &= \varphi(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_p) \stackrel{(iii)}{=} 0.
 \end{aligned}$$

□

Aus der Charakterisierung (iv) des Satzes ist auch sofort ersichtlich, dass

$$\text{Alt}^p(V) = 0 \quad \text{für } p > \dim V$$

gilt.

Die Komponenten der alternierenden Multilinearformen sind natürlich alternierend, d. h. für Multiindizes

$$i = (i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p$$

gilt

$$\varphi_{i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_p} = -\varphi_{i_1 \dots i_s \dots i_r \dots i_p},$$

falls φ alternierend ist, und Analoges gilt für die symmetrischen Multilinearformen. Damit kann nun auch die Dimension der beiden Räume bestimmt werden:

Satz 2.15. *Ist (a_1, \dots, a_n) eine Basis von V und bezeichnet*

$$\varphi_{i_1 \dots i_p} := \varphi(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}), \quad 1 \leq i_j \leq n$$

die Komponenten von $\varphi \in \text{Mult}^p(V)$ bezüglich dieser Basis, so sind durch

$$\begin{aligned}
 \Phi_A : \text{Alt}^p(V) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n}{p}} : \\
 \varphi &\longmapsto (\varphi_{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}, \\
 \Phi_S : \text{Sym}^p(V) &\longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n+p-1}{p}} : \\
 \varphi &\longmapsto (\varphi_{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n}
 \end{aligned}$$

Isomorphismen gegeben.

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}
 \dim \text{Alt}^p(V) &= \binom{n}{p}, \\
 \dim \text{Sym}^p(V) &= \binom{n+p-1}{p}.
 \end{aligned}$$

Beweis. Wir führen den Beweis hier nur für Φ_A , für Φ_S folgt er völlig analog. Offenbar sind die Abbildungen Φ_A und Φ_S linear. Φ_A ist injektiv, denn aus der Antisymmetrie von φ folgt sofort

$$\Phi_A(\varphi) = 0 \iff \varphi(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) = 0 \quad \text{für alle } (i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p.$$

Dies ist aber aufgrund der Multilinearität von φ gleichbedeutend mit $\varphi \equiv 0$.

Die Abbildung Φ_A ist surjektiv, denn ist

$$\omega \in \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}, \quad \omega = (\omega_{i_1, \dots, i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n},$$

so definiere für $(j_1, \dots, j_p) \in \{1, \dots, n\}^p$

$$\omega_{j_1 \dots j_p} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j_r = j_s \quad \text{für ein } r \neq s, \\ \text{sgn}(\tau) \omega_{j_{\tau(1)} \dots j_{\tau(p)}} & \text{für } j_{\tau(1)} < \dots < j_{\tau(p)}. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in \text{Alt}^p(V)$ mit $\Phi_A^{-1}(\omega) = \varphi$ durch

$$\varphi(v_1, \dots, v_p) := \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n v_1^{j_1} \dots v_p^{j_p} \omega_{j_1 \dots j_p}$$

wohldefiniert. (Hier ist $v_r^{j_r}$ natürlich die j_r -te Komponente des Vektors v_r , nicht etwa eine Potenz!) \square

Eine lineare Abbildung $A \in \text{Hom}(V, W)$ induziert, wie im letzten Abschnitt gezeigt, auch eine lineare Abbildung

$$\otimes^p A^* : \text{Mult}^p(W) \longrightarrow \text{Mult}^p(V).$$

Einschränkung dieser Abbildung ergibt lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \bigwedge^p A^* : \bigwedge^p W^* &\longrightarrow \bigwedge^p V^*, \\ S^p A^* : S^p W^* &\longrightarrow S^p V^*. \end{aligned}$$

Ebenso überträgt sich auch das innere Produkt (2.7) auf $\bigwedge^p V^*$ und $S^p V^*$, d. h. für $v \in V$ und $\varphi \in \bigwedge^p V^*$ ist $i_v \varphi \in \bigwedge^{p-1} V^*$, und für $\psi \in S^p V^*$ ist $i_v \psi \in S^{p-1} V^*$ wohldefiniert.

Anders verhält es sich mit dem Produkt. Durch

$$\begin{aligned} \text{Mult}^p(V) \times \text{Mult}^q(V) &\longrightarrow \text{Mult}^{p+q}(V) : \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi \otimes \psi =: \chi \end{aligned}$$

mit

$$\chi(v_1, \dots, v_{p+q}) := \varphi(v_1, \dots, v_p) \psi(v_{p+1}, \dots, v_{p+q})$$

ist ein Produkt multilinearer Abbildungen, das *Tensorprodukt* der Abbildungen definiert. Das Tensorprodukt zweier alternierender bzw. symmetrischer Abbildungen

ist jedoch nicht alternierend bzw. symmetrisch, und daher muss das Produkt zweier alternierender Abbildungen auf andere Weise definiert werden:

Definition 2.16. Ist $\varphi \in \text{Alt}^p(V)$, $\psi \in \text{Alt}^q(V)$, so ist $\varphi \wedge \psi \in \text{Alt}^{p+q}(V)$ durch

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{p+q}) &:= \\ &\sum_{\tau \in S(p; q)} \text{sgn}(\tau) \varphi(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \psi(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+q)}) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in S(p+q)} \text{sgn}(\tau) \varphi(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \psi(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+q)}) \end{aligned}$$

definiert, wobei $S(p; q) \subseteq S(p+q)$ die Menge aller Permutationen ist, für die $\tau(1) < \tau(2) < \dots < \tau(p)$ und $\tau(p+1) < \tau(p+2) < \dots < \tau(p+q)$ gilt. Man nennt \wedge das *äußere Produkt* von φ und ψ .

Hat also φ die Komponenten $(\varphi_{i_1 \dots i_p})_{i_1 < \dots < i_p}$ und ψ die Komponenten $(\psi_{j_1 \dots j_q})_{j_1 < \dots < j_q}$, so sind die Komponenten von $\varphi \wedge \psi$ durch

$$(\varphi \wedge \psi)_{i_1 \dots i_{p+q}} = \sum_{\tau \in S(p, q)} \text{sgn}(\tau) \varphi_{i_{\tau(1)} \dots i_{\tau(p)}} \cdot \psi_{i_{\tau(p+1)} \dots i_{\tau(p+q)}}$$

gegeben.

Beispiele:

- a. $p = q = 1$, also $\varphi \in V^*$, $\psi \in V^*$. Dann ist

$$(\varphi \wedge \psi)(u, v) = \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u).$$

Sind also $(\varphi_i)_{i=1, \dots, n}$ und $(\psi_k)_{k=1, \dots, n}$ die Komponenten von φ und ψ , so sind $(\varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i)_{1 \leq i < j \leq n}$ die Komponenten von $\varphi \wedge \psi$.

- b. $p = 2, q = 1$, $\varphi \in \text{Alt}^2(V)$, $\psi \in \text{Alt}^1(V)$. Dann ist

$$(\varphi \wedge \psi)(v_1, v_2, v_3) = \varphi(v_1, v_2)\psi(v_3) + \varphi(v_2, v_3)\psi(v_1) - \varphi(v_1, v_3)\psi(v_2).$$

Sind also $(\varphi_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ und $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ die Komponenten von φ und ψ , so sind die Komponenten von $\varphi \wedge \psi$ durch

$$(\varphi_{ij} \psi_k + \varphi_{jk} \psi_i - \varphi_{ik} \psi_j)_{1 \leq i < j < k \leq n}$$

gegeben.

Im folgenden Satz werden die wichtigsten Eigenschaften des äußeren Produkts zusammengestellt.

Satz 2.17. Seien $\varphi, \psi \in \text{Alt}^r(V)$, $\eta \in \text{Alt}^p(V)$, $\xi \in \text{Alt}^q(V)$. Dann gilt:

- a. \wedge ist *schiefssymmetrisch*, d. h.

$$\varphi \wedge \eta = (-1)^{pr} \eta \wedge \varphi.$$

b. \wedge ist bilinear, also

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi) \wedge \eta &= \varphi \wedge \eta + \psi \wedge \eta, \\ (\lambda \varphi) \wedge \eta &= \lambda(\varphi \wedge \eta) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

c. \wedge ist assoziativ, d. h.

$$(\varphi \wedge \eta) \wedge \xi = \varphi \wedge (\eta \wedge \xi),$$

d. \wedge ist natürlich, d. h.

$$A^*(\varphi \wedge \eta) = A^*\varphi \wedge A^*\eta \in \text{Alt}^{r+p}(W)$$

für alle linearen Abbildungen $A \in \text{Hom}(W; V)$.

Beweis. b. und d. sind klar.

a. Sei $\sigma \equiv \sigma_{r,p} \in S(r+p)$ durch $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & r+p \\ r+1 & \dots & r+p & 1 & \dots & r \end{pmatrix}$ gegeben. Dann ist $\text{sgn}(\sigma_{r,p}) = (-1)^{rp}$. Also ist

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{r+p}) &= \frac{1}{r!p!} \sum_{\tau \in S(r+p)} \text{sgn}(\tau) \varphi(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) \\ &\quad \cdot \eta(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+p)}) \\ &= \frac{1}{r!p!} \sum_{\tau \in S(r+p)} \text{sgn}(\tau) \eta(v_{(\tau \circ \sigma_{r,p})(1)}, \dots, v_{(\tau \circ \sigma_{r,p})(p)}) \\ &\quad \cdot \varphi(v_{(\tau \circ \sigma_{r,p})(p+1)}, \dots, v_{(\tau \circ \sigma_{r,p})(p+r)}) \\ &= \frac{1}{r!p!} \sum_{\tilde{\tau} \in S(r+p)} (-1)^{rp} \text{sgn}(\tilde{\tau}) \eta(v_{\tilde{\tau}(1)}, \dots, v_{\tilde{\tau}(p)}) \\ &\quad \cdot \varphi(v_{\tilde{\tau}(p+1)}, \dots, v_{\tilde{\tau}(p+r)}) \\ &= (-1)^{rp} (\eta \wedge \varphi)(v_1, \dots, v_{r+p}).\end{aligned}$$

b. Eine ähnliche Rechnung wie in a. zeigt, dass

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \eta) \wedge \xi &= \varphi \wedge (\eta \wedge \xi) = \sum_{\tau \in S(r,p,q)} \varphi(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \\ &\quad \cdot \eta(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+r)}) \cdot \xi(v_{\tau(p+r+1)}, \dots, v_{\tau(p+r+q)}),\end{aligned}$$

wobei $S(r, p, q) \subseteq S(r+p+q)$ die Menge aller Permutationen τ mit

$$\begin{aligned}\tau(1) &< \dots < \tau(r), \\ \tau(r+1) &< \dots < \tau(r+p), \\ \tau(r+p+1) &< \dots < \tau(r+p+q).\end{aligned}$$

Genauer findet man den Beweis in [17].

□

Auf Grund der Assoziativität kann man mehrfache äußere Produkte $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ bilden, ohne sich auf eine bestimmte Klammerung festzulegen. Diese mehrfachen Produkte sind besonders wichtig, wenn es sich bei den φ_i um Linearformen handelt. Es gilt nämlich:

Satz 2.18.

a. Sind $v_1, \dots, v_p \in V$ und $\varphi^1, \dots, \varphi^p \in V^*$, so gilt

$$(\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^p)(v_1, \dots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \varphi^1(v_1) & \cdots & \varphi^p(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi^1(v_p) & \cdots & \varphi^p(v_p) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

b. Ist $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V , $\mathfrak{A}^* = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die dazu duale, so ist

$$\begin{aligned} & (\alpha^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\mu_p})(a_{v_1}, \dots, a_{v_p}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \{\mu_1, \dots, \mu_p\} \neq \{v_1, \dots, v_p\} \\ & \text{oder } v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j, \\ \operatorname{sgn}(\tau) & \text{falls } v_j = \tau(\mu_j) \text{ für alle } j \in \{1, \dots, p\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Beweis.

a. Die zur Behauptung äquivalente Gleichung

$$(\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^p)(v_1, \dots, v_p) = \sum_{\tau \in S(p)} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^p \varphi^i(v_{\tau(i)})$$

folgt sofort durch Induktion nach p , wenn man $\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^p = (\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^{p-1}) \wedge \varphi^p$ schreibt und die Definition des äußeren Produkts anwendet.

b. folgt mittels Determinantentheorie aus a., kann aber auch leicht durch Induktion nach p direkt bewiesen werden: Da $\alpha^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\mu_p}$ alternierend ist, genügt es, die Behauptung für $\mu_1 < \cdots < \mu_p$ und $v_1 < \cdots < v_p$ nachzuweisen. Es ist

$$\begin{aligned} & ((\alpha^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\mu_p}) \wedge \alpha^{\mu_{p+1}})(a_{v_1}, \dots, a_{v_{p+1}}) = \\ &= \sum_{\tau \in S(p,1)} \operatorname{sgn}(\tau) (\alpha^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\mu_p})(a_{v_{\tau(1)}}, \dots, a_{v_{\tau(p)}}) \cdot \alpha^{\mu_{p+1}}(a_{v_{\tau(p+1)}}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls kein } v_j \text{ mit } v_j = \mu_{p+1} \text{ existiert,} \\ \operatorname{sgn}(\tau) (\alpha^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\mu_p})(a_{v_1}, \dots, \hat{a}_{v_j}, \dots, a_{v_{p+1}}), & \text{falls } v_j = \mu_{p+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet \hat{a}_{v_j} , dass der Vektor a_{v_j} in der Aufzählung ausgelassen ist. Die Behauptung folgt jetzt aus der Induktionsannahme. □

Satz 2.19. Sei $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V und $\mathfrak{A}^* = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die duale Basis.

- a. Dann ist $(\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p})_{i_1 < \cdots < i_p}$ eine Basis von $\text{Alt}^p(V)$, die durch \mathfrak{A} gegebene Basis.
- b. Für $\varphi \in \text{Alt}^p(V)$ gilt dann also

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \varphi_{i_1 \dots i_p} \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p}, \quad (2.11)$$

wobei $(\varphi_{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ die Komponenten von φ bezüglich \mathfrak{A} sind.

Beweis. Dass die alternierenden Multilinearformen $(\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ linear unabhängig sind, folgt sofort aus (2.10). Damit bilden sie nach Satz 2.15 eine Basis von $\text{Alt}^p(V)$. Die Gl. (2.11) folgt durch Einsetzen der Basisvektoren auf beiden Seiten. \square

Orientierung und orientiertes Volumen

Die n -te äußere Potenz $\text{Alt}^n(V)$ ist nach 2.15 ein eindimensionaler Vektorraum. Ist $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V , $\mathfrak{A}^* = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die duale Basis, so ist die durch \mathfrak{A} gegebene Basis von $\text{Alt}^n(V)$

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n.$$

In Aufgabe 2.3 wird gezeigt, dass für $\eta \in \text{Alt}^n(V)$ und $A \in \text{End}(V)$ gilt

$$A^* \eta = \det A \cdot \eta. \quad (2.12)$$

Ist also $V = \mathbb{R}^n$ und \mathfrak{A} die *Standardbasis*, d. h. $a_i = e_i$, so ist $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n$ die *Determinante*.

Wir erinnern daran, dass zwei Basen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} eines Vektorraums *gleichorientiert* heißen, falls für die Transformationsmatrix C , die $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ in $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$ überführt, $\det C > 0$ gilt. Aus (2.12) folgt nun, dass zwei Basen genau dann gleichorientiert sind, wenn für eine beliebige alternierende n -Form $\eta \neq 0$ auf V

$$\text{sgn}(\eta(a_1, \dots, a_n)) = \text{sgn}(\eta(b_1, \dots, b_n))$$

gilt. Ein Vektorraum V heißt *orientiert*, wenn eine seiner beiden möglichen Orientierungen „ausgezeichnet“ ist. Die Basen, die diese ausgezeichnete Orientierung repräsentieren, heißen *positiv orientiert*. Ist V ein orientierter Vektorraum, so heißt $\eta \in \text{Alt}^n(V)$ *positiv orientiert*, falls $\eta(a_1, \dots, a_n) > 0$ für eine (und dann jede) positiv orientierte Basis von V .

Bemerkung: Die beiden Orientierungen eines n -dimensionalen reellen Vektorraums V sind wieder ein Beispiel für *Äquivalenzklassen* im Sinne der Anmerkung 1.24. Hier ist S die Menge aller Basen von V (jede Basis als n -Tupel aufgefasst, nicht nur als Menge!), und die Äquivalenzrelation ist gegeben durch

$\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2 \iff$ die Transformationsmatrix, die \mathfrak{B}_1 in \mathfrak{B}_2 überführt, hat positive Determinante.

Aber niemand stellt sich eine Orientierung wirklich als eine Menge von Basen vor, sondern als den „Drehsinn“ oder „Schraubsinn“, den gleichorientierte Basen gemeinsam haben.

Ist V schließlich ein orientierter *euklidischer* Vektorraum, so heißt die eindeutig bestimmte alternierende n -Form $\eta \in \text{Alt}^n(V)$ mit

$$\eta(e_1, \dots, e_n) = 1$$

für eine (und dann jede) positiv orientierte Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) die *Volumenform* auf V . Wie wir noch sehen werden (vgl. 4.10 und die Bemerkung danach), ist die Zahl $\eta(a_1, \dots, a_n)$ dann nämlich das *orientierte Volumen* des von den Vektoren a_1, \dots, a_n aufgespannten Parallelepipeds, also das Volumen, versehen mit einem Vorzeichen, das angibt, ob das Vektorsystem (a_1, \dots, a_n) positiv oder negativ orientiert ist.

Die Volumenform führt zu wichtigen Isomorphismen:

Satz 2.20. *Sei η die Volumenform auf dem n -dimensionalen euklidischen Raum V .*

a. Dann sind durch

$$\text{Alt}^n(V) \cong \mathbb{R}, \quad c \cdot \eta \mapsto c$$

und

$$V \cong \text{Alt}^{n-1}(V), \quad v \mapsto i_v \eta \tag{2.13}$$

kanonische Isomorphismen gegeben.

b. Ist $\mathfrak{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, so ist der Isomorphismus aus (2.13) durch

$$\sum_{i=1}^n v^i a_i \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v^i \alpha^1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha}^i \wedge \dots \wedge \alpha^n \tag{2.14}$$

gegeben. Dabei ist wieder $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die duale Basis, und $\hat{\alpha}^i$ bedeutet, dass dieser Faktor weggelassen wird.

Beweis.

a. Nur für die Abbildung aus (2.13) ist die Behauptung nicht trivial. Wegen

$$\dim \text{Alt}^{n-1}(V) = \binom{n}{n-1} = n = \dim \mathbb{R}^n$$

genügt es aber, die Injektivität nachzuweisen. Ist nun $v \neq 0$, so kann man den Einheitsvektor $v/\|v\|$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis ergänzen, etwa durch w_2, \dots, w_n , und dann ist

$$(i_v \eta)(w_2, \dots, w_n) = \eta(v, w_2, \dots, w_n) = \|v\| \neq 0$$

nach Definition der Volumenform.

- b. Es genügt, die Behauptung für die Basisvektoren $v = a_i$ zu beweisen. Dafür folgt sie aber direkt aus (2.10), wenn man beachtet, dass die Volumenform in der Gestalt

$$\eta = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n$$

geschrieben werden kann.

□

Aufgaben zu Kap. 2

2.1. Beweisen Sie Satz 2.3: Die Transformationsmatrix der dualen Basen ist die Transponierte der Transformationsmatrix.

2.2. Sei $\alpha \in \text{Alt}^k V$. Zeigen Sie, dass dann gilt: Sind v_1, \dots, v_k linear abhängig, so ist $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

2.3. Zeigen Sie: Ist $A \in \text{End}(V)$ und $\eta \in \text{Alt}^n V$, so ist $A^* \eta = \det A \cdot \eta$.
Hinweis: Beweisen Sie dies zunächst für $V = \mathbb{R}^n$ und $\eta = \det$, indem Sie die Standardbasis auf beiden Seiten einsetzen.

2.4. Seien $\mathfrak{A}^{(j)}$ und $\mathfrak{B}^{(j)}$ Basen von V_j und $(c^{(j)k}_i)$ die zugehörigen Transformationsmatrizen, also $a_i^{(j)} = \sum_{k=1}^n c^{(j)k}_i b_k$. Sei

$$\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \otimes V_{r+1}^* \otimes \cdots \otimes V_{r+s}^*.$$

Wie berechnet man die Komponenten von ω bezüglich der Basen \mathfrak{A} aus denen bezüglich der Basis \mathfrak{B} ? (*Hinweis:* Benutzen Sie Satz 2.3.)

2.5. Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis und $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ die duale Basis von $V^* = \text{Alt}^1 V$.

- a. Wir setzen

$$\gamma_1 := \delta_2 \wedge \delta_3, \quad \gamma_2 := \delta_3 \wedge \delta_1, \quad \gamma_3 := \delta_1 \wedge \delta_2.$$

Dann ist $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ eine Basis von $\text{Alt}^2 V$. Seien nun $\alpha, \beta \in V^*$ 1-Formen,

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \delta_i, \quad \beta = \sum_{j=1}^3 \beta_j \delta_j. \quad \text{Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen}$$

$\alpha \wedge \beta$ und dem Vektorprodukt der Vektoren $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ und $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$?

- b. Seien nun $\omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i \delta_i \in V^*$ eine 1-Form und $\mu = \sum_{k=1}^3 \mu_k \gamma_k \in \text{Alt}^2 V$ eine 2-Form. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\omega \wedge \mu$ und dem Skalarprodukt der Vektoren $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ und $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$?

2.6. Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Standardbasen gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Sei $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ die Standardbasis von \mathbb{R}^{3*} . Berechnen Sie $A^*\omega$ für

- (i) $\omega := \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$;
- (ii) $\omega := \delta_1 \wedge \delta_2 + \delta_2 \wedge \delta_3 + \delta_3 \wedge \delta_1$;
- (iii) $\omega := \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3$.

2.7. Zeigen Sie: Für die kanonische Volumenform vol auf einem orientierten euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ der Dimension n gilt:

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1 | e_1 \rangle & \cdots & \langle v_1 | e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n | e_1 \rangle & \cdots & \langle v_n | e_n \rangle \end{pmatrix}$$

wobei \det die Determinante in \mathbb{R}^n bezeichnet, und (e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V ist.

2.8. Zeigen Sie, dass k Linearformen $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in V^*$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k \neq 0$ gilt.

2.9. Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum.

- a. Zeigen Sie, dass es für jede 2-Form $\omega \in \text{Alt}^2 V$ eine Basis $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ von V^* gibt, so dass

$$\omega = \sigma_1 \wedge \sigma_2 + \cdots + \sigma_{2r-1} \wedge \sigma_{2r}.$$

gilt. (*Hinweis:* Man imitiere das GRAM-SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren.)

- b. Zeigen Sie weiterhin, dass die Zahl r von der Wahl der Basis unabhängig ist und durch die Bedingung

$$\omega^r \neq 0, \quad \omega^{r+1} = 0$$

charakterisiert wird.

Moderne mathematische Methoden der Physik

Band 1

Goldhorn, K.-H.; Heinz, H.-P.; Kraus, M.

2009, XXII, 473 S. 20 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-88543-6