

Vorwort

In der Literatur über das mathematische Handwerkszeug des theoretischen Physikers scheint eine Lücke zu klaffen: Einerseits gibt es eine Reihe von hervorragenden Lehrbüchern zum Thema „Mathematik für Physiker“ für das Grundstudium, andererseits gibt es eine Fülle von ausgezeichneten Monographien über die mathematischen Grundlagen diverser physikalischer Theorien, meist verfasst von bekannten Fachvertretern aus der mathematischen Physik. Wir denken hier an Werke wie etwa [2, 7, 12, 18, 26, 31, 34, 38, 53, 63–66, 73–76, 94, 95] oder auch Klassiker wie [61, 98] oder [105]. Was uns aber zu fehlen scheint, ist ein Verbindungsstück zwischen diesen beiden Extremen, also ein Aufbaukurs, der es Studierenden im Hauptstudium oder graduierten Theoretikern erlaubt, mit begrenztem Aufwand einen fundierten Einstieg in die mathematischen Grundlagen der fortgeschrittenen Theorien zu gewinnen.

Das zweibändige Werk, dessen erster Band hier vorliegt, versucht, diese Lücke zu schließen. Es beruht zum größten Teil auf Vorlesungen, die die Autoren in Mainz und Regensburg für Studierende der Physik im Hauptstudium gehalten haben. Als potentiellen Leserkreis haben wir aber nicht nur diese im Auge, sondern auch Studierende von Master-, Aufbau-, Graduierten- und Promotionsstudiengängen im Bereich der Physik, außerdem angehende mathematische Physiker, die von der Physik herkommen und möglichst zügig den Einstieg in die rigoros mathematische Behandlung der Probleme gewinnen möchten, und nicht zuletzt alle diejenigen unter den aktiven theoretischen Physikern, die das Bedürfnis verspüren, ein tieferes und klareres Verständnis ihrer mathematischen Werkzeuge zu gewinnen, dabei aber (verständlicherweise!) weder Zeit noch Muße finden, sich mit der mathematischen Fachliteratur und all ihren Beweisdetails ausführlich auseinanderzusetzen.

Bei der großen und ständig wachsenden Vielfalt mathematischer Hilfsmittel, die in der modernen Physik Verwendung finden, war es natürlich nicht möglich, alle wichtigen Themen vollständig abzudecken, und, wie immer, bleibt die Stoffauswahl etwas subjektiv geprägt und ist von den Interessen und der wissenschaftlichen Ausrichtung der Autoren mitbestimmt. So wurden z. B. die statistische Physik und die nichtlineare Dynamik zugegebenermaßen stiefmütterlich behandelt. Im ersten Teil geben wir eine Einführung in die Differentialgeometrie – und damit auch in die moderne Formulierung der Tensorrechnung – als mathematische Grundlage für die klassische Mechanik, die klassische Feldtheorie und vor allem für die Relativitätstheorie. Die Präsentation ist hier insofern elementar gehalten, als dass affine Zusammenhänge nur in Gestalt ihrer kovarianten Ableitungsoperatoren auftreten und

dass allgemeine Bündeltheorie und Prinzipalzusammenhänge gänzlich außen vor bleiben. Trotzdem reicht diese Einführung aus, um darauf aufbauend einen zwanglosen Einstieg in die moderne Gravitationsphysik oder die aktuellen Eichtheorien zu ermöglichen.

Der zweite Teil befasst sich mit mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik, die der Funktionalanalysis, der Integrationstheorie und der Distributionstheorie entstammen. Wiederum sind wir überzeugt, dass die Beschäftigung mit den hier vorgestellten Grundlagen einen leichten Zugang zu verschiedenen weiterführenden Themen ermöglicht, z. B. zur algebraischen Quantenfeldtheorie, zur Theorie der Pfadintegrale oder zur Verwendung von C^* -Algebren in der statistischen Physik.

Allerdings mussten zwei der wichtigsten funktionalanalytischen Themen aus Platzgründen in den zweiten Band verlegt werden, nämlich die unbeschränkten Operatoren und die Spektralzerlegung von HERMITESchen Operatoren. Den Abschluss des zweiten Bandes wird dann eine gründliche, doch recht elementare Diskussion von Gruppen und ihren Darstellungen im Hinblick auf ihre Rolle als mathematische Beschreibung von Symmetrien und Invarianzen in der Quantenphysik bilden.

Den Schluss dieses ersten Bandes bildet ein Anhang, den Prof. V. Bach (Mainz) dankenswerterweise beige-steuert hat und in dem an einem konkreten Beispiel aufgezeigt wird, wie gewisse weiterführende Konzepte der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie in der statistischen Physik Verwendung finden. Ferner behandeln wir im ersten Teil als Anwendung des dort entwickelten differentialgeometrischen Kalküls koordinatenfreie Formulierungen der klassischen Mechanik, der MAXWELLgleichungen und der EINSTEINSchen Feldgleichungen. In den Teilen II bis IV verzichten wir jedoch weitgehend auf konkrete physikalische Beispiele und beschränken uns hier auf Andeutungen. Wir gehen vielmehr davon aus, dass die behandelten mathematischen Themen dem Leser schon in irgendeiner Form bei seiner Beschäftigung mit Physik untergekommen sind (oder noch unterkommen werden) und betrachten es als unsere Aufgabe, die uns Mathematikern antrainierte rigorose Denkweise dazu zu nutzen, von den entsprechenden Begriffen und Resultaten ein klares, unzweideutiges Bild zu geben. Der Bezug zur Physik spiegelt sich hier vorwiegend in der Stoffauswahl wieder – so stehen z. B. bei unserer Einführung in die Funktionalanalysis die HILBERträume deutlich im Vordergrund, da sie in der Physik eine ungleich größere Rolle spielen als andere topologische Vektorräume, und in Teil IV werden wir uns selbstverständlich auf diejenigen konkreten Gruppen konzentrieren, die für die Betrachtung von Symmetrien und Invarianzen in der Physik relevant sind.

Die gerade angesprochene streng mathematische Denkweise darf natürlich nicht dazu verleiten, alles detailliert beweisen zu wollen, wie man das bei einem Lehrbuch für angehende Mathematiker tun würde. Vielmehr haben wir uns – ähnlich wie bei unserem Grundkurs [36], in dem das hier vorliegende Buch auch schon angekündigt wurde – von dem Gedanken leiten lassen, dass ein mathematischer Beweis nur dann angebracht ist, wenn er gleichzeitig eine Rechentechnik demonstriert und einüben hilft, die bei den physikalischen Anwendungen wirklich vorkommt. Häufig ist die Beweistechnik, die für ein tieferliegendes mathematisches Resultat benötigt wird, jedoch von ganz anderem Charakter als die Technik seiner Anwendung, und in sol-

chen Fällen beschränken wir uns auf eine bloße Skizze der maßgeblichen Ideen oder sogar auf ein Literaturzitat, das als Quellennachweis zu verstehen ist und nicht unbedingt als eine Aufforderung, sich mit der betreffenden Literatur aktiv auseinanderzusetzen. Auch im Übrigen verfolgen wir ähnliche didaktische Prinzipien wie sie schon in [36] zugrunde gelegt wurden, versuchen also, uns auf das Wesentliche zu konzentrieren, Langatmigkeit zu vermeiden und in wenigen wohlgesetzten Worten ein klares Bild von den Dingen zu vermitteln. Unterstützt wird dieses Bemühen durch eine große Zahl von Übungsaufgaben. Sie dienen teilweise dem Einüben von Rechentechniken, der Gewöhnung an abstrakte Begriffe, indem man diese an konkreten Beispielen diskutiert, und hier und da auch der kurzgefassten Behandlung von zusätzlichem Stoff. Zahlreiche Hinweise unterstützen die Lösung der Übungsaufgaben, so dass die erfolgreiche Behandlung einer Aufgabe nicht daran scheitern sollte, dass einem ein bestimmter raffinierter Trick gerade nicht eingefallen ist.

Trotz der vielen verschiedenen mathematischen Sachgebiete (und trotz dreier verschiedener Autoren) haben wir versucht, generell einheitliche Notationen durchzuhalten, und die meisten dieser Bezeichnungen sind in einem vorbereitenden Abschnitt zusammengefasst und mit kurzen Erläuterungen versehen. Dies hat uns auch Gelegenheit gegeben, einige der benötigten Vorkenntnisse anzusprechen. Grundsätzlich sollte das Buch für alle zugänglich sein, die einen dreisemestrigen mathematischen Grundkurs für Physiker absolviert haben, wie er in Deutschland weitgehend üblich ist. Man wird uns nachsehen, dass wir bei Verweisen auf solche Vorkenntnisse unser eigenes Lehrbuch [36] zitieren, und wir sind überzeugt, dass niemandem, der seine Vorkenntnisse aus anderer Quelle bezieht, hieraus ein Nachteil erwächst.

Schließlich möchten wir Professor Volker Bach unseren gebührenden Dank aussprechen, nicht nur für den von ihm beigesteuerten Artikel über unendliche Produkte von Maßen und statistische Mechanik, sondern auch für viele hilfreiche, interessante und bereichernde Gespräche. Unser Dank gilt überdies Professor Florian Scheck, der die Entstehung auch dieses Werkes mit Unterstützung und Ermutigung begleitet hat. Martin Huber hat kompetent und zuverlässig die Zeichnungen angefertigt, und das Umsetzen der Manuskripte in LaTeX-Quelltext wurde in ebenso kompetenter und zuverlässiger Weise von Renate Emerenziani und Ulrike Jacobi besorgt. Ihnen allen gilt unser aufrichtiger Dank.

Mainz,
Mai 2009

*Karl-Heinz Goldhorn
Hans-Peter Heinz
Margarita Kraus*

Moderne mathematische Methoden der Physik

Band 1

Goldhorn, K.-H.; Heinz, H.-P.; Kraus, M.

2009, XXII, 473 S. 20 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-540-88543-6