

II

Le Grand Prix des Sciences Mathématiques

En 1917 et 1918 paraît, aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences, toute une série de notes liées au sujet du Grand Prix. Les auteurs en sont Fatou, Julia, Lattès, Ritt (et Montel). Julia dépose aussi des plis cachetés¹.

À la fin de l'année 1917, les mémoires concourant pour le Grand Prix sont déposés. En 1918, les notes continuent à arriver et les Commissions internes à l'Académie des sciences chargées de choisir les lauréats des prix se réunissent.

Dans ce chapitre est présentée la chronologie des notes relatives à l'itération et des décisions de l'Académie des sciences en 1917 et 1918. Parce que cette histoire n'est pas indépendante de son contexte historique et qu'elle va se dérouler dans l'ambiance évoquée au § I.3, quelques étapes de ces deux années de guerre sont rappelées simultanément.

Remarque. On va le voir, l'efficacité et la vitesse avec lesquelles les *Comptes rendus* sont utilisés comme moyen de communication entre mathématiciens dans cette histoire sont tout à fait remarquables et impressionnantes.

II.1 L'année 1917

En mars, le mathématicien Paul Painlevé est devenu ministre de la guerre (le président de la république est Raymond Poincaré, le cousin du

¹ Le pli cacheté est, comme son nom l'indique, contenu dans une enveloppe fermée, cachetée à la cire ; il n'est pas destiné à la publication immédiate mais permet de s'assurer la propriété d'un résultat. Sauf si l'auteur le demande, il ne peut être ouvert qu'au bout de cent ans (voir l'exemple, ou plutôt le contre-exemple célèbre de l'ouverture de celui de Doebelin dans [Kahane 2006b]). La façon dont Julia l'a utilisé dans cette histoire est la façon classique, « normale » — il en existera de plus particulières, par exemple par des auteurs qui ne pouvaient pas publier leurs résultats, pendant l'Occupation allemande (voir notre article [2007]). Sur le nombre des plis cachetés déposés pendant telle ou telle période, qui semble refléter les événements politiques du moment, voir [Berthon 1986].

mathématicien). Le 2 avril, Émile Picard² est élu (à l'unanimité) Secrétaire perpétuel³ de l'Académie des sciences (en remplacement de Gaston Darboux, mort le 23 février).

Les 2 janvier, 26 février, 19 mars, 10 et 23 avril, l'Académie des sciences publie des notes de Julia sur les formes quadratiques ou non quadratiques relatives au sujet de sa thèse (elle en a déjà publié plusieurs l'année précédente). D'après la notice que Julia a écrite pour son élection à l'Académie des sciences en 1934 et qui est publiée dans [Julia 1968],

Ce travail [...] a occupé [ses] loisirs d'hôpital pendant l'année 1916.

Il a terminé de rédiger les deux cent quatre-vingt-treize pages de sa thèse puisque le rapport de Georges Humbert sur celle-ci est daté du 24 mai⁴. Il a aussi formé son jury, Picard serait président, Humbert rapporteur, il lui fallait un troisième examinateur et, comme il craignait que Borel ne soit trop occupé, il a demandé à Lebesgue d'être cet examinateur (lettre à Borel⁵ du 29 mai 1917).

Le 21 mai

La guerre continue. Les soldats commencent à refuser d'être massacrés pour rien. Painlevé a nommé Pétain commandant en chef et Foch chef d'état-major. Début des mutineries. Le ministère de la guerre envoie une mission scientifique aux États-Unis (ce qui est annoncé dans les *Comptes rendus* juste avant la note de Fatou dont il va être question).

Pierre Fatou

Une note de Pierre Fatou [1917b], présentée à la séance du 14 mai, paraît⁶. L'auteur s'intéresse, comme en 1906, à la question de déterminer les domaines de convergence correspondants aux différents points limites de la fraction rationnelle. Il annonce savoir résoudre complètement le problème de l'itération, qu'il qualifie de « très difficile » en général, dans le cas particulier de fractions rationnelles qui envoient un disque donné sur lui-même. Voici la classification

² On devrait entrevoir dans ce texte l'énorme pouvoir qu'a détenu Émile Picard sur la communauté mathématique et plus généralement scientifique pendant plusieurs décennies (au moins de 1917 à sa mort en 1941). Voir aussi page 190.

³ C'est sur du papier à lettres cadré de noir que Picard, qui a perdu deux enfants en 1915, a envoyé sa candidature à ce poste le 25 mars (dossier biographique de Picard, archives de l'Académie des sciences).

⁴ Tous les renseignements concernant la thèse de Julia (date, rapports) ont été fournis par Juliette Leloup.

⁵ Fonds Borel, archives de l'Académie des sciences.

⁶ Une note est présentée pendant une séance. Elle peut être imprimée une ou plusieurs semaines plus tard, dans le fascicule d'une autre séance, par exemple parce que l'auteur n'a pas pu corriger les épreuves immédiatement.

qu'il obtient Il y a trois possibilités (pour clarifier l'exposition, nous incluons les exemples les plus simples) :

- soit R a deux points fixes attractifs conjugués par rapport au cercle, ainsi que $k - 1$ points fixes répulsifs situés sur le cercle ; l'intérieur du cercle converge vers l'un des points fixes attractifs et l'extérieur vers l'autre. C'est la situation que nous avons rencontrée dans l'exemple I.4.1 où les deux points fixes étaient 0 et ∞ , conjugués par rapport au cercle unité.

- Soit R a un unique point fixe attractif⁷ (ainsi que k autres points fixes qui sont répulsifs) qui est situé sur le cercle et les itérés de tous les points sauf ceux d'un ensemble parfait discontinu contenu dans le cercle convergent vers ce point fixe. En considérant que le « cercle » est l'axe réel (cas auquel Fatou se ramène de toute façon pour ses calculs), c'est le cas par exemple de

$$R(z) = 2z - \frac{1}{z},$$

le point à l'infini est l'unique point fixe attractif, les cycles répulsifs sont situés sur l'axe réel et forment l'ensemble parfait discontinu en question.

- Soit R a un unique point fixe de multiplicateur $s = +1$, racine double ou triple de $R(z) = z$, situé sur le cercle et les itérés de tous les points convergent vers ce point fixe sauf peut-être⁸ ceux de la circonférence (il reste $k - 1$ ou $k - 2$ points fixes répulsifs, situés sur le cercle). C'est le cas (toujours avec l'axe réel comme « cercle ») de

$$R(z) = z - \frac{1}{z},$$

dont le point à l'infini est l'unique point fixe, un point fixe « indifférent ». Les itérés des points de chacun des deux disques (hyperplans) ouverts convergent vers ∞ . Les seuls points de l'axe des x qui convergent vers ce point sont ses antécédents (une partie dénombrable de \mathbf{R}).

Le 4 juin

Gaston Julia

Julia dépose un pli cacheté qui est enregistré sous le numéro 8401. La petite enveloppe⁹ qui l'a contenu porte son nom et son adresse : Gaston Julia, 45 rue d'Ulm¹⁰. Elle contenait (avant son ouverture) onze pages de cahier, remplies

⁷ Le mot « attractif » n'existe toujours pas et Fatou appelle encore ces points des points limites ; ce sont en effet des points qui sont des limites.

⁸ On ne dit rien sur les points de la circonférence.

⁹ Pour tous les détails sur les aspects matériels, physiques, des plis en question, voir les pochettes de séances, aux archives de l'Académie des sciences.

¹⁰ L'adresse est celle de l'ENS. Julia n'y est plus élève mais habite toujours 45 rue d'Ulm, à l'hôpital 103, entre les opérations qu'il doit subir et qui ont lieu, elles, à

de la jolie petite écriture fine de Julia, à l'encre violette (avec beaucoup de ratures), sous le titre « Sur les transformations ponctuelles »¹¹.

Julia a donc déjà obtenu ses premiers résultats sur l'itération. Il n'en continue pas moins à travailler sur la théorie des formes puisqu'il publie encore deux notes à ce sujet, du figlage, les 11 et 25 juin. Il écrit à un ami, le 5 juillet [1970, p. 2] :

J'ai fait assez de travail l'an dernier pendant les loisirs que me laissaient de violents maux de tête, des pansements fréquents et des opérations ; j'ai rédigé une thèse que je soutiendrai je pense en novembre prochain [le 12 décembre, voir ci-dessous]. La thèse terminée, j'ai fait autre chose dont j'attends mieux et que je publierai dans quelques mois seulement, quand j'aurai assez creusé.

Entre temps, j'ai figlé quelques petites questions dont je ferai quelques articles [...] ¹².

Cette autre chose est certainement le début de son travail sur l'itération et le mieux qu'il en attend est peut-être le Grand Prix. Il n'est pas impossible que Georges Humbert, Émile Picard ou d'autres aient incité Julia à concourir.

Paul Montel

La note [Montel 1917a] que Montel publie ce jour-là va inspirer Fatou et Julia.

À cette époque, j'ignorais les travaux de M. Montel. Mon attention sur eux fut attirée par sa Note du 4 juin 1917. Je les étudiâi à ce moment dans un tirage à part que M. Montel voulut bien m'envoyer

écrivait Julia dans sa note [1917] à propos de son premier pli cacheté.

Montel utilise sa théorie des familles normales pour étudier la représentation conforme d'ouverts simplement connexes de \mathbf{C} dont la frontière n'est pas un arc analytique. C'est ce qui donne l'idée à Fatou et Julia d'utiliser cette même théorie pour étudier les ensembles compliqués qu'ils voient apparaître dans leurs travaux sur l'itération.

★

Le 4 août 1917, Émile Borel écrit la préface de son livre [1917], un cours à l'ENS, rédigé par Julia, qui aurait dû paraître en 1914, mais dont la parution a

quelques centaines de mètres de là, à l'hôpital militaire du Val de Grâce (voir [Julia 1970, p. 381]). Marguerite Borel, la femme du directeur scientifique de l'ENS, est infirmière à l'hôpital 103, ce qui fait que les normaliens blessés se retrouvent vraiment « chez eux ». Sur l'enveloppe du « pli cacheté », cette adresse n'est pas de la main de Julia mais de celle de la personne qui a enregistré le pli à l'Académie.

¹¹ Voir aussi la note 32.

¹² Le correspondant de Julia est un gendre de Poincaré. Dans la suite de sa lettre, Julia évoque donc les rapports de son travail avec celui de Poincaré.

été retardée par la guerre : lors de la mobilisation le 1^{er} août 1914, Julia avait fini les trois premiers chapitres et, a-t-il écrit à Borel¹³, il ne restait que deux problèmes à régler dans le quatrième. Julia a terminé la rédaction fin mai 1917 et corrigé les épreuves après avoir « été glorieusement blessé en janvier 1915 », écrit Borel,

[...] malgré des souffrances courageusement supportées et en même temps qu'il poursuivait de remarquables travaux personnels ; j'apprécie hautement la valeur du concours de ce jeune savant sur qui l'on peut compter pour perpétuer les traditions mathématiques françaises.

Ce qui montre d'une part les exceptionnelles capacités de travail dont disposait Julia, et de l'autre le poids des espérances que ses « pères » plaçaient en lui.

Le 27 août

L'Académie des sciences publie une note sur l'influence présumée de la canonnade sur la chute de la pluie. Julia dépose un deuxième pli cacheté (numéro 8431)¹⁴, sept pages, « Sur les substitutions rationnelles (2^e note) ».

Le 13 septembre, Painlevé est nommé premier ministre.

Le 17 septembre

Julia dépose un troisième pli cacheté (numéro 8438), quatre pages, « Sur les substitutions rationnelles ».

Le 17 novembre, Clemenceau remplace Painlevé à la présidence du Conseil.

Le 10 décembre

L'Académie des sciences tient sa séance publique annuelle¹⁵. Comme le président d'Arsonval est absent, c'est Perrier qui lit sa très sobre allocution

¹³ Julia a aussi rédigé le cours de Bôcher [1917] paru en 1917, mais donné en 1913–14 (le mathématicien américain Maxime Bôcher avait passé trois mois à la Sorbonne, un échange avec Harvard, à partir de novembre 1913 [Eisele 1971]). Julia avait fini cette rédaction avant la guerre : il n'est question ni de lui ni de ses blessures dans la préface. On le voit d'ailleurs s'inquiéter de ce texte dans ses lettres à Borel en août 1914. Pour les lettres de Julia à Borel, fonds Borel aux archives de l'Académie des sciences.

¹⁴ Les enveloppes ayant contenu les manuscrits portent la signature de la personne qui a reçu le pli cacheté et qui semble avoir été ici Lacroix, l'autre Secrétaire perpétuel.

¹⁵ Comme il se doit, la séance publique annuelle comporte une allocution du président (comme celles que nous avons déjà rencontrées, [Perrier 1915 ; Jordan 1916 ; Painlevé 1918c]), la liste des académiciens décédés pendant l'année avec quelques mots sur chacun d'eux et enfin la proclamation et la remise des prix — dont les lauréats sont normalement présents.

(mentionnant quand même que ce n'est pas encore lui qui aura la joie de « saluer l'aurore de la définitive victoire »).

Julia est venu recevoir le prix Bordin, qui lui est attribué pour les travaux de sa thèse, sur le sujet (sur lequel l'Académie n'a reçu que deux mémoires) :

Perfectionner, en quelque point important, la théorie arithmétique des formes non quadratiques.

La longueur du rapport consacré à ce travail¹⁶ et publié dans le volume correspondant des *Comptes rendus* est assez impressionnante. C'est tout simplement une reproduction du rapport que Georges Humbert a écrit sur la thèse en mai. Julia profite peut-être de sa présence en ces lieux pour déposer son quatrième et dernier pli cacheté (numéro 8466), quatre pages (dont l'une est la rédaction d'une rectification à une assertion contenue dans le deuxième pli), « Sur l'itération des fonctions rationnelles $z_1 = \varphi(z)$ ».

Une parenthèse sur la thèse de Julia s'impose ici.

Parenthèse (La thèse de Julia). Le 12 décembre (dans son CV [1970, p. 289], Julia parle de novembre, mais les dates indiquées sur le manuscrit et sur les rapports de thèse et de soutenance concordent et il s'agit bien du 12 décembre), Julia soutient sa thèse, « Étude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes, ou à indéterminées conjuguées¹⁷ ».

À cette époque, le titre officiel de directeur de thèse n'existe pas. Il est clair que le sujet sur lequel Julia a fait cette thèse est inspiré par les travaux d'Hermite, au point qu'un élève tardif de Julia à l'X croit bien se souvenir dans [Montbrial 2003] :

En géométrie, nous eûmes droit à un amphi unique de Gaston Julia. Dans cet amphi, naturellement, ce grand blessé de la première guerre mondiale ne faisait pas de mathématiques, mais il racontait tous les ans la même histoire, sur les conditions dans laquelle il avait fait sa thèse avec l'illustre Charles Hermite.

L'illustre Charles Hermite étant mort en 1901, il est probable que Julia s'est mal fait comprendre (Montbrial a suivi ce cours en 1963, Julia était âgé de soixante-dix ans et n'avait plus beaucoup de voix). Il est certain en tout cas qu'à l'époque où il préparait sa thèse, Julia a beaucoup parlé de mathématiques avec Georges Humbert et aussi avec Émile Picard. Dans une allocution prononcée en 1950, Albert Châtelet [Châtelet 1950, p. 145] s'adresse à Julia en parlant de « ton maître Georges Humbert ». Il est tout aussi certain que

¹⁶ La thèse de Julia elle-même est exceptionnellement longue (293 pages).

¹⁷ Julia a dû plus tard considérer sa thèse et les publications qui l'accompagnaient comme marginales dans l'ensemble de son travail, puisqu'il les a reléguées dans le tome 5 de ses Œuvres complètes. Nous avons vu que son premier article [1913] était déjà un travail classique d'analyse complexe. Julia est un analyste et va le montrer.

le cours de Georges Humbert de 1916 a beaucoup compté pour Julia¹⁸. Et, même si ce que l'on appelait « maître » à l'époque peut être assez varié, il semble bien que le rôle qu'Humbert a joué dans la thèse de Julia était très proche de celui d'un directeur de thèse actuel. Julia a raconté en effet :

Ces belles interprétations géométriques de faits arithmétiques m'enchantèrent. Elles me suggérèrent la thèse que je devais soutenir un an plus tard et qui intéressa vivement Humbert. Chaque semaine après le cours (qui avait lieu de 12^h30 à 14^h30), je lui exposai [*sic*] mes récentes trouvailles et il me pressait invariablement de les rédiger. Pour me surveiller plus étroitement, il m'invitait dans la propriété normande où il vivait presque en permanence et exigeait chaque jour, en plaisantant, un certain nombre de pages et de théorèmes. Puis nous allions nous promener dans la campagne. Assis sur un talus, au coin d'un champ ou d'une hêtraie, il m'expliquait ses propres travaux et, impromptu, de proche en proche, un tas de questions que j'ignorais totalement, car ma formation avait été plus analyste qu'arithmétique ou géométrique tandis qu'Humbert était plutôt algébriste et géomètre qu'analyste¹⁹.

Voir aussi [Desforge 1979]. Il n'est pourtant pas impossible que le cours Peccot donné par Châtelet [1913] lui-même en 1912 (celui que Vidil avait rédigé) ait influencé le choix du sujet de la thèse de Julia.

Toujours est-il que le jury est constitué, comme nous l'avons dit, d'Émile Picard, président, de Georges Humbert, rapporteur, et d'Henri Lebesgue, examinateur. Peut-être le délai entre la date où le rapport de Georges Humbert a été écrit (mai) et la soutenance (décembre) est-il dû aux opérations qu'a dû subir Julia. Il est certain qu'il a subi par exemple une greffe de cartilage en juin [Julia 1970, p. 1]. Peut-être aussi Picard souhaitait-il attendre la proclamation du Prix Bordin pour donner plus de solennité à la soutenance.

Il est probable en tout cas que la soutenance a été plus qu'un événement mathématique. Voici en effet ce que Picard a déclaré et que l'on peut lire dans le rapport de soutenance²⁰ :

¹⁸ Dans la nécrologie [Borel 1922], Borel indique notamment les sujets de sept cours donnés par Humbert au Collège de France, grâce aux notes que lui a communiquées Gaston Julia, qui a suivi tous les cours de Humbert de 1914 à 1920 (sauf celui de 1915) et il écrit :

Humbert a donné la vraie mesure de ses qualités de professeur, formé des élèves et exercé une influence importante sur l'orientation des études mathématiques en France.

Voir aussi les souvenirs de Paul Lévy sur les cours d'Humbert à l'x et au Collège de France dans son livre [1970, p. 37].

¹⁹ Ce texte est extrait d'un article [Julia X] de Julia dont nous avons trouvé un exemplaire (coupure de journal) dans le dossier Humbert aux archives du Collège de France sans parvenir à en déterminer l'origine (dans la suite de cet article, on voit Julia et Humbert chanter en chœur des airs de Wagner dans la campagne).

²⁰ Référence AJ/16/5542 aux Archives nationales. Et encore merci à Juliette Le-loup...

Monsieur, le travail que vous avez présenté comme thèse a été couronné avant-hier par l'Académie [nous sommes bien le 12 décembre]. On lira dans le prochain numéro des *Comptes rendus* le rapport fait à ce sujet par M. Humbert. Je ne redirai pas combien nous avons apprécié votre remarquable travail, dont la deuxième et la troisième partie témoignent d'un véritable esprit d'invention. Nous apprécions aussi les qualités morales dont vous avez fait preuve depuis trois ans. Vous avez eu la pieuse pensée de dédier votre travail à la mémoire de vos camarades de l'École normale tombés au champ d'honneur. Vous avez été plus heureux que tant de jeunes professeurs, dont la mort héroïque restera la gloire de l'École normale. Mais vous avez été cruellement éprouvé, et c'est entre de nombreuses opérations que vous avez eu l'énergie de vous livrer à des recherches mathématiques. Après les heures tragiques que nous vivons, la France aura besoin plus que jamais d'hommes de talent et de caractère. Nous comptons sur vous, monsieur, pour l'avenir. Après ce premier travail, en viendront d'autres que vous avez déjà sur le chantier. Pour aujourd'hui²¹, je suis heureux de vous dire que la Faculté vous confère le grade de docteur avec la mention très honorable, et nous y joignons nos vives et sympathiques félicitations.

On ne peut pas mieux décrire l'ambiance dans laquelle continue à se dérouler notre histoire.

Le 17 décembre

Ce jour-là, les académiciens entendent la lecture d'un télégramme de Vito Volterra²² qui remercie pour avoir été élu associé étranger dans ces termes :

= EN VOUS PRIANT VOULOIR EXPRIMER CONFRÈRES MA PROFONDE
RECONNAISSANCE TRÈS FIER GRAND HONNEUR CÉLÈBRE ACADÉMIE A VOULU ME
RENDRE JE TIENS VOUS DIRE QUE J'EN SUIS PARTICULIÈREMENT ÉMU DANS CE
MOMENT HISTORIQUE OÙ PAR UN ÉLAN FRATERNEL VOTRE NOBLE HÉROÏQUE PAYS
ENVOIE SON ARMÉE SE BATTRE À CÔTÉ DE LA NÔTRE = VITO VOLTERRA²³

Bien que ce ne soit le sujet d'aucun prix, des démonstrations du théorème de Fermat arrivent régulièrement à l'Académie des sciences. Une ce jour-là, par exemple. Mais c'est surtout ce jour-là que l'histoire publiée de l'itération commence vraiment.

Pierre Fatou

Et cette histoire commence par la publication d'une nouvelle note de Pierre Fatou [1917c], dans laquelle celui-ci annonce toute une série de résultats.

²¹ Le travail que Julia va soumettre pour le Grand Prix quelques jours plus tard est déjà annoncé. Connaissant la suite de l'histoire, il est difficile de s'empêcher d'entendre le « pour aujourd'hui » comme une promesse (?).

²² L'Italie a créé, en 1917, un *Uffizio Inventioni*, que dirige Vito Volterra. Sur l'activité de Volterra pendant la guerre, voir [Goodstein 2007].

²³ Pochette de séance, archives de l'Académie des sciences.

– S'intéressant toujours à la frontière du domaine d'attraction d'un point fixe (attractif) a , Fatou définit une partie D_a comme l'ensemble des points z du plan tels que, au voisinage de z , la suite f^n converge uniformément vers la fonction constante égale à a . Il affirme que la frontière de D_a , qu'il appelle F (sans doute parce que c'est une frontière²⁴) est un ensemble parfait (si la fonction f n'est pas linéaire) et surtout, et c'est la grande nouveauté, *qu'en un point de F , la suite des f^n ne peut pas être normale*. Dans tout disque centré en $z \in F$, chacune des f^n prend toutes les valeurs sauf au plus deux, dites exceptionnelles. Ces valeurs exceptionnelles n'existent que si (à conjugaison près), f est un polynôme ou une puissance ($z^{\pm k}$, les valeurs exceptionnelles sont 0 et ∞).

– S'il y a plus de deux points ou cycles limites, un seul des domaines de convergence D_a est connexe, les autres ont une infinité de composantes connexes. Voir l'exemple II.1.1.

– Il montre encore que l'ensemble F est l'ensemble dérivé de $\cup_{n \geq 0} R^{-n}(z)$ (pour tous les points z sauf ceux qui sont exceptionnels), que dans F , il y a en général des points fixes répulsifs²⁵ (voir l'énoncé précis dans la remarque III.1.2). Avec tout ça, l'ensemble nommé E' au I.4, dérivé de l'ensemble des points fixes répulsifs de R^n , est identique à l'ensemble F des points où la suite R^n n'est pas normale.

– Pour chaque cycle limite a_1, \dots, a_n , au moins un des domaines D_{a_i} contient un point critique de la fonction f^{-1} (une application des familles normales)²⁶.

– Il fait le lien avec sa note [1906d] de 1906. Et il donne de nouveaux exemples.

Exemple II.1.1. Fatou donne l'exemple de $R(z) = z^2 - 1$. Le point attractif est le point ∞ . Le domaine D_∞ (son bassin d'attraction) est connexe. Les points 0 et -1 sont échangés par R et forment un cycle d'ordre 2, qui est le seul cycle attractif. Les domaines D_0 et D_{-1} ont une infinité de composantes simplement connexes²⁷, comme le suggère la figure II.1. Il y a des points de D_∞ qui « s'infiltrant » entre les petits domaines qui constituent D_0 et D_{-1} .

Il paraît que cette image (à gauche sur la figure II.1, dessinée par Arnaud Chéritat) évoque les coupoles de la basilique Saint-Marc de Venise et leur reflet dans l'eau un jour d'acqua alta [Mandelbrot 1982, p. 185]; en tout cas elle porte aujourd'hui, chez les spécialistes de dynamique complexe, le nom de « basilique ».

²⁴ Un peu ironiquement, ce qui s'appelle aujourd'hui l'ensemble de Julia et donc se note souvent J , dont les points vont s'appeler assez vite des « points J », a vraiment été inventé par le discret Fatou sous le nom de F .

²⁵ Le mot « répulsif » n'existe toujours pas.

²⁶ C'est vrai aussi des points critiques de f , une application du lemme de Schwarz, voir [Douady 1983]. L'une ou l'autre de ces propriétés implique la finitude du nombre des cycles attractifs.

²⁷ Une « aire simplement connexe » est une aire délimitée par un seul contour.

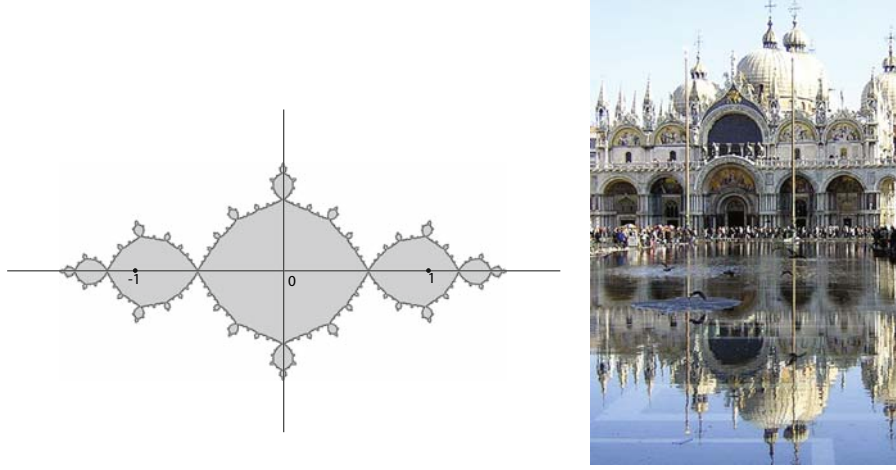


Fig. II.1. L'ensemble F pour $R(z) = z^2 - 1$ (la basilique)

Exemple II.1.2. Soit R le polynôme²⁸ défini par $R(\cos u) = \cos(2u)$, c'est-à-dire

$$R(z) = 2z^2 - 1, \text{ qui est conjugué à } P(z) = z^2 - 2.$$

Le seul point fixe attractif est ∞ et $D_\infty = \mathbf{C} - [-1, 1]$. Ici $\theta(u) = \cos u$ est la fonction de Poincaré définie au § I.6.

On a d'ailleurs $R^n(z) = z$ avec $z = \cos u$ si et seulement si $\cos(2^n u) = \cos u$ c'est-à-dire si et seulement si

$$u = \frac{2k\pi}{2^n \pm 1}.$$

Tous ces points sont répulsifs. Les valeurs de $\cos u$ correspondantes sont denses dans $[-1, 1]$. Donc E' est le segment $[-1, 1]$. Comme dans le cas de l'exemple I.4.1, l'ensemble E' (ou F) est un « continu linéaire²⁹ ».

Le 24 décembre

En cette veille de Noël, l'Académie reçoit une lettre de Gaston Julia, qui deviendra, une semaine plus tard, sa note [1917]. C'est le même jour que Julia dépose son manuscrit concourant pour le Grand Prix au secrétariat de

²⁸ Fatou considère plus généralement ceux définis par $R(\cos u) = \cos(2ku)$ et par $R(\sin u) = \sin(2k+1)u$ (les polynômes de Tchebychev).

²⁹ Il ne semble pas qu'il y ait dans les travaux considérés ici de définition précise de l'expression « continu linéaire ». Le segment qui apparaît ici est certainement un continu linéaire... continu voulant sans doute dire connexe et linéaire indiquant une « courbe » — l'expression cohabite souvent avec celle de « continu superficiel », plutôt en dimension 2 cette fois. Voir aussi la note 12 du chapitre III.

l'Académie des sciences [Julia 1917, note 2]. Il apporte la lettre en même temps. Il affirme dans cette lettre que les résultats annoncés par Fatou dans la note [1917c] sont contenus dans ses plis cachetés et demande l'ouverture de ceux-ci. Les plis sont ouverts en séance (les enveloppes vides sont conservées dans la pochette de cette séance) et l'Académie nomme Georges Humbert pour les étudier. Une coïncidence : au cours de la même séance, Hadamard transmet une note de Hardy et Littlewood [1917], dans laquelle ceux-ci généralisent un théorème de la thèse de Fatou [1906c] (sur les séries de Fourier) — les *Comptes rendus* publient aussi une note sur le son du canon à grande vitesse.

Le 31 décembre

L'Académie des sciences joue ici son rôle de validation des découvertes scientifiques et de leur priorité et les *Comptes rendus* publient le court rapport de Georges Humbert [1917] :

La comparaison du texte des deux Notes³⁰ avec celui des quatre plis montre que l'assertion de M. Julia est fondée : ses plis renferment bien, parmi d'autres, tous les énoncés dont il revendique la priorité ; ils y figurent, soit dans les termes de l'une ou de l'autre Note, soit en des termes équivalents, parfois aussi sous une forme plus générale ou plus étendue.

Gaston Julia

La lettre de Gaston Julia est donc publiée comme note [1917]. Voici l'essentiel de son premier paragraphe³¹ :

Je viens de lire avec intérêt la Note de M. Fatou publiée dans le *Compte rendu* du 17 décembre 1917. Les résultats essentiels qu'elle contient, je les ai consignés moi-même antérieurement dans une série de quatre plis cachetés [...] L'Académie pourra, en ouvrant ces quatre plis, se rendre compte que les résultats que donne M. Fatou, aux notations et aux exemples près, s'y trouvent avec l'indication brève des méthodes suivies dont l'une, coïncidence curieuse, utilise précisément les résultats de M. Montel sur les suites normales de fonctions analytiques qu'utilise M. Fatou. L'Académie estimera, à la fois quant aux méthodes et quant aux résultats, à qui doit être attribuée la priorité. J'ajoute que mes quatre plis contiennent d'autres résultats en sus de ceux indiqués par M. Fatou, et d'autres méthodes. Et relativement aux résultats énoncés par M. Fatou, il y a des précisions nouvelles qu'on peut énoncer.

³⁰ Les deux notes dont Humbert parle ici sont [Fatou 1917c] et [Julia 1917].

³¹ Cette lettre est arrivée à l'Académie des sciences le 24 décembre. La publication des *Comptes rendus* allait donc extrêmement vite. Malheureusement, le manuscrit en a été conservé par l'auteur et ne se trouve donc pas aux archives de l'Académie des sciences.

On a, paraît-il (voir [Alexander 1994, p. 115]), glosé sur l'expression « coïncidence curieuse », qu'il faut pourtant prendre comme une manifestation du fait que Julia est très en colère plus que comme une insinuation. Julia n'accuse pas Fatou de lui avoir volé ses résultats. La coïncidence, ce n'est pas que tous deux travaillaient sur le sujet, sachant que celui-ci était en concours et que Fatou avait déjà abordé la question, ce n'était pas inattendu, la coïncidence, c'est plutôt que tous deux ont vu le parti qu'ils pouvaient tirer des familles normales de Montel. Il est vrai que le ton de la lettre de Julia est un tantinet arrogant — mais n'est-ce pas tout simplement l'éternelle suffisance du normalien brillant, peut-être confortée ici par l'idée que beaucoup (tout ?) lui était dû, en raison des atroces blessures qu'il avait subies. On verra plus bas ce qu'il faut penser de son affirmation que ses résultats sont plus précis que ceux de Fatou.

À la requête de Julia, Humbert et l'Académie des sciences ont décidé de lui accorder la priorité. Il y aurait pourtant bien eu un petit bémol : après tout, quand Julia écrit dans sa note

Si j'ai pris la décision de déposer ces plis, c'est qu'à la date du 21 mai 1917, M. Fatou faisait connaître dans les *Comptes rendus* quelques-uns des résultats auxquels j'étais parvenu. Aussi, dès le 4 juin, je faisais connaître [...]

il reconnaît bien une priorité à Fatou³². Mais on semble ne pas le remarquer.

Toujours est-il que Julia reprend, dans sa note, les résultats énoncés par Fatou et qu'il explicite ce qu'il a fait exactement autour de chacun d'eux :

- Il a montré qu'il y avait un point critique pour f^{-1} , mais dans le domaine *restreint*, précise-t-il sans donner la définition.
- Il a, lui aussi, évalué le nombre de points fixes possibles, de façon moins précise que Fatou³³, dit-il, mais il a amélioré ce résultat depuis.
- Après quoi, il y a eu la note de Montel [1917a] et il s'est mis à utiliser les familles normales, introduisant l'ensemble que Fatou appelle F et lui E' , étudiant ses propriétés et démontrant celles annoncées par Fatou, oubliant le cas de l'exponentielle (à cause des préoccupations liées à sa thèse, dit-il).
- Lui aussi a trouvé des exemples ayant les mêmes propriétés que celui de Fatou (l'exemple II.1.1 ci-dessus)... et même celui de $R(z) = z^2 - 2$ (qui est, Julia l'a vérifié, conjugué à l'exemple II.1.2 lié à $\theta(u) = \cos u$).

La fin 1917

Les mémoires concourant pour le prix sont déposés à la fin de 1917 (si la date limite semble ne pas se trouver dans les *Comptes rendus*, elle figure sur

³² Ceci pourrait expliquer l'aspect de ses plis cachetés : il s'agit de brouillons, raturés, sur des pages de cahier arrachées. Il a certainement voulu déposer quelque chose, le plus vite possible, après avoir vu [Fatou 1917b] paraître dans les *Comptes rendus*.

³³ Il y a une erreur dans son énoncé, voir la remarque III.1.2.

le manuscrit de Pincherle³⁴ dont nous parlerons plus bas : 31 décembre 1917). En tout cas, nous l'avons vu, Julia dit dans sa note [1917] avoir déposé le sien le 24 décembre. Nous verrons lorsque la Commission les examinera qu'ils seront au nombre de trois.

II.2 L'année 1918

Pendant toute l'année 1918, même si les concurrents ont déposé leurs mémoires, les protagonistes de l'histoire continuent à envoyer des notes aux *Comptes rendus*, reprenant ou pas des résultats contenus dans leurs mémoires. Cette année-là, le président de l'Académie des sciences est Paul Painlevé (qui n'a plus de fonctions politiques).

Le 7 janvier 1918

C'est donc à Painlevé de prononcer un discours « en prenant possession du fauteuil » (selon le jargon consacré) lors de la première séance de l'année. Ce discours fait une part importante aux recherches liées à la guerre :

[...] Si je jette les yeux dans cette salle, à côté de ceux de nos confrères que leurs fonctions mêmes ont placées à la tête des grands services de la Défense nationale, j'aperçois (je cite au hasard, et combien l'énumération serait longue si elle était complète) tel astronome qui s'est révélé artilleur inventif et tenace, tels physiciens qui ont contribué à développer les applications militaires de la T. S. F. ; tels chimistes qui, dans la guerre des gaz, ont accru nos moyens de protection et d'attaque ; tel mathématicien, tel géodésien dont les calculs ont servi à repérer et à détruire les batteries ennemies. Vous avez encouragé ou récompensé de nombreux travaux dont les résultats ont dû être tenus secrets. Vos élèves, dont beaucoup sont déjà des maîtres, les plus jeunes au front, les autres dans les universités, dans les arsenaux, dans les usines, se sont attaqués efficacement à tous les problèmes nouveaux qu'a soulevés la guerre sur terre et sur mer. Il y a quinze mois, un de nos grands chefs employait une journée entière à visiter des laboratoires de science pure, qui spontanément s'étaient consacrés à la Défense nationale, et il ne dissimulait pas les sentiments d'admiration que lui inspirait cette mobilisation scientifique ; son œil aigu d'observateur avait discerné la vérité et la délicatesse des recherches, leur ténacité allant des premiers tâtonnements jusqu'à la réalisation en série des instruments pratiques ; le merveilleux rendement de ressources bien restreintes, obtenu grâce à l'ardeur désintéressée de tous, des initiateurs come des collaborateurs les plus modestes. [...] [Painlevé 1918a].

³⁴ Dossier des prix, archives de l'Académie des sciences.

Samuel Lattès

Conformément à la déclaration de motivations accompagnant l'intitulé du Grand Prix, Lattès³⁵, utilisant l'existence, démontrée par Fatou [1917c]³⁶ d'un point fixe répulsif (pour une fraction rationnelle ayant des points fixes distincts), fonde sa note [1918a] sur l'étude de la fonction de Poincaré notée θ (voir le § I.6 pour la définition de θ). Il pose sa version du problème de l'itération :

Déterminer l'ensemble E' dérivé de l'ensemble E des conséquents z_n d'un point z arbitrairement donné.

Et il propose de l'étudier en utilisant les propriétés de la fonction θ , en particulier dans le cas des fonctions θ pour lesquelles s est un entier, par exemple une fonction trigonométrique (nous avons vu que $\theta = \cos$ pour la fraction rationnelle de l'exemple II.1.2, Lattès mentionne aussi $\theta = \tan$ pour $s = 2$ et la fraction rationnelle exprimant $\tan(2u)$ en fonction de $\tan u$) ou une fonction elliptique, comme la fonction \wp dans l'exemple ci-dessous³⁷. Ces exemples sont les cas naturels dans lesquels on connaît une formule de duplication (comme $\cos(2w) = 2\cos^2 w - 1$) qui donne $\theta(2w)$ comme fraction rationnelle de $\theta(w)$. Ils figuraient donc, en tant que tels, dans l'article de Schröder [1871] — bien avant que les mathématiciens s'intéressent à l'étude de l'ensemble E' .

Exemple II.2.1. Lattès³⁸ considère la fraction rationnelle

$$R(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}.$$

³⁵ Le manuscrit de la note de Lattès conservé dans la pochette de la séance aux archives de l'Académie des sciences est rédigé à l'encre verte, d'une belle et grande écriture.

³⁶ Tout ça va très vite : Lattès utilise une note parue trois semaines plus tôt, il est à Toulouse, on ne peut pas rêver qu'il mentionne la note de Julia [1917] du 31 décembre. Par contre, il utilise la notation E' comme Julia.

³⁷ Les cas des fonctions puissances (comme dans l'exemple I.4.1), des polynômes de Tchebychev (comme dans l'exemple II.1.2) et des fonctions elliptiques (comme ici) sont des cas où la fonction de Poincaré est périodique (voire bi-périodique). Pour une étude générale moderne de ces cas, voir [Milnor 2006b].

³⁸ Les travaux de Samuel Lattès n'ont pas été reconnus à leur valeur, pensait Lebesgue qui écrivait déjà en 1910 dans son style vivant et peu conventionnel :

Il a fait des travaux intéressants, *utiles, personnels* [souligné], seulement sa thèse n'est connue que de Hadamard, qui n'en est pas épaté comme de celle de Fréchet. [Lebesgue 1991, p. 251]

En plus de ses propres travaux, ce mathématicien niçois d'origine italienne a traduit le livre [Burali-Forti & Marcolongo 1910] auquel il a ajouté un supplément sur les systèmes quaternionniens.

La fonction \wp de Weierstrass associée à la courbe elliptique d'équation $y^2 = 4z(z^2 - 1)$ satisfait à la formule de duplication

$$\wp(2u) = \frac{(\wp(u)^2 + 1)^2}{4\wp(u)(\wp(u)^2 - 1)},$$

autrement dit, \wp est la fonction θ de Poincaré pour R avec $s = 2$. Les conséquents de $z = \wp(u)$ sont donc les

$$z_n = \wp(2^n u).$$

Déterminer l'adhérence de la suite des conséquents d'un point z donné est alors une question d'arithmétique.

★

Ce jour-là, l'Académie des sciences discute en comité secret (voir la note 14 page 7) de la trop grande abondance des mots étrangers introduits par certains jeunes scientifiques dans leurs textes ; Picard se plaint que les éphémérides des « petites planètes³⁹ » [astéroïdes] soient calculées par les Allemands⁴⁰.

Le 14 janvier

Gaston Julia

Dans cette note [1918a] (passée à la séance du 7 janvier comme celle de Lattès [1918a], mais publiée le 14), Julia considère comme Lattès l'ensemble des conséquents $\{z_1, \dots, z_n, \dots\}$ d'un point z et son ensemble dérivé. Le problème fondamental qu'il étudie est la façon dont un point limite de cet ensemble dépend de l'origine z de la suite dont il est la limite.

– Il considère donc l'ensemble dénombrable et non vide E des points répulsifs (avec la même notation ici qu'au §I.4).

– Il annonce que l'ensemble dérivé E' est parfait.

– La structure de l'ensemble E' est la même que celle de toutes ses parties, au sens où E' est partout discontinu ou partout continu linéaire, ou partout continu superficiel⁴¹ (et il démontre dans ce cas que, si E' est d'intérieur non vide, c'est \mathbf{C} tout entier — autrement dit, s'il y a un point dans E' qui n'est pas dans \mathbf{C} , alors E' est d'intérieur vide). Il ne donne aucun exemple (tout simplement parce qu'il n'en avait pas encore trouvé [Julia 1918f, p. 105]).

– Lorsque E' n'est pas \mathbf{C} tout entier, Julia étudie enfin les régions du plan délimitées par E' .

³⁹ Le rapport de l'Observatoire de Paris pour 1916 mentionne en effet que, faute d'éphémérides, on a ajourné l'observation des astéroïdes.

⁴⁰ Registre des comités secrets, archives de l'Académie des sciences.

⁴¹ Voir la note 29.

Le 28 janvier**Samuel Lattès**

Dans la note [1918b], passée à la séance du 21 janvier, Lattès commence son étude des fractions rationnelles à deux variables⁴²

$$(z_1, z_2) \longmapsto (R_1(z_1, z_2), R_2(z_1, z_2)).$$

Il considère la question « paramétrique », c'est-à-dire avec fonction θ , comme au § I.6 et s'intéresse au cas où il existe un point (z_1, z_2) en lequel les deux multiplicateurs⁴³ s_i satisfont à $|s_i| > 1$. Il étudie en particulier le cas d'une transformation de Cremona (cas où R_1 et R_2 sont des polynômes).

Cette note contient une petite erreur, qui sera signalée, quelques années plus tard, par Fatou [1924b] (voir ici la note 27 du chapitre V).

Gaston Julia

Dans sa note [1918b], Julia commence par se saisir de l'exemple que Lattès vient de publier [1918a] (ici l'exemple II.2.1) et signale que, dans cet exemple, l'ensemble E' est « identique au plan complet », c'est \mathbf{P}_1 tout entier : on choisit $u = 2\omega(v + iw)$ avec v et w des rationnels qui ont un développement en base 2 qui est périodique de période n ; alors $2^n u \equiv u$ modulo le réseau, u est alors un point fixe répulsif de R^n et, bien sûr, de tels u sont denses dans le parallélogramme de périodes.

Il étudie ensuite les régions du plan délimitées par son ensemble E' , quand celui-ci n'est pas le plan tout entier.

Le 4 février**Pierre Fatou**

Les *Comptes rendus* publient la note [Fatou 1918a]⁴⁴, dans laquelle Fatou montre que la frontière d'un ouvert invariant simplement connexe contenant un point fixe attractif ne peut être un arc analytique que si cet ouvert est un disque (et sa frontière un cercle!).

⁴² Le titre de sa thèse l'indique (voir page 22), Lattès est un spécialiste des équations fonctionnelles pour des fonctions de plusieurs variables, sur lesquelles il a publié plusieurs articles.

⁴³ Pour définir les multiplicateurs s_1 et s_2 en un point fixe, on change de coordonnées au voisinage de ce point fixe (ramené en 0) de façon à ce que la transformation s'écrive

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s_1 z_1 + F_1(z_1, z_2) \\ s_2 z_2 + F_2(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

où F_1 et F_2 ne contiennent pas de terme de degré 1. Samuel Lattès a déjà étudié le cas où $|s_1|$ et $|s_2|$ sont tous deux < 1 dans [Lattès 1911].

⁴⁴ Pierre Fatou, qui n'a pas envoyé de mémoire pour le Grand Prix, intitule *dorénavant* ses travaux « Sur les équations fonctionnelles », alors que les deux notes

Le 4 mars

La paix de Brest-Litovsk entre la Russie soviétique d'une part et les « empires centraux », l'Allemagne, l'Autriche-Hongrie, la Turquie et la Bulgarie de l'autre, a été signée la veille.

Joseph Fels Ritt

Au moment où deux millions de soldats américains partent ou se préparent à partir pour l'Europe, notons l'apparition d'un Américain dans notre histoire⁴⁵, Joseph Fels Ritt (1893–1951), qui sera un des fondateurs de l'algèbre différentielle et qui est déjà un spécialiste des équations différentielles. Il a lui aussi obtenu des résultats sur l'itération, dont une partie a été présentée à l'*American Mathematical Society*... le 27 décembre 1917⁴⁶, qui sont en relation intime avec les théorèmes publiés récemment par Fatou, et qui vont paraître, pense-t-il, au *Bulletin de l'AMS*. Il envoie donc aux *Comptes rendus* sa note [1918] dans laquelle il présente ceux de ses « théorèmes qui ne semblent pas identiques à ceux de M. Fatou et quelques autres qui [lui] paraissent être entièrement nouveaux ». Il utilise notamment l'application de Poincaré près d'un point fixe répulsif. Il donne des propriétés de la fonction θ grâce auxquelles il arrive à des résultats assez forts : près d'un point fixe de R , il y a une infinité de points fixes de R^n , en utilisant les ordinaux transfinis, dit-il. Lui aussi montre que l'ensemble des points d'accumulation des antécédents d'un point donné contient un ensemble parfait dans lequel tous les antécédents des

publiées avant la colère de Julia portaient le titre « Sur les substitutions rationnelles ». Fatou continue à travailler et à publier ses résultats mais se démarque, dans ses titres, du sujet du concours. Il me semble que l'appréciation de [Alexander 1994, p. 124] selon laquelle le titre « équations fonctionnelles » sentirait un peu son dix-neuvième siècle est un peu un contre-sens et en tout cas ne tient pas compte du fait que Fatou a changé de titre au cours de l'histoire racontée ici.

⁴⁵ D'autres Américains ont déjà contribué à l'histoire du sujet ou de sujets proches, notamment Edward Kasner (avec qui Ritt a fait sa thèse) et George Pfeiffer, mais il ne semble pas que nos protagonistes connaissent leurs travaux. Voir ici le § IV.4.

⁴⁶ La vingt-quatrième réunion annuelle de la société a en effet lieu les 27 et 28 décembre à New York. Ritt y présente son travail « *On the iteration of rational functions* » ; le secrétaire de la séance en prend note, de sorte qu'il y en a un résumé dans le volume 24 du *Bulletin* (page 272). L'article ne paraîtra pas. Le fait que Fatou et Julia aient annoncé des résultats analogues et la publication de la note [Ritt 1918], ont dû dissuader Ritt, ou le *Bulletin of the American mathematical society*, de le publier. En 1920, il publiera aux *Transactions* de l'AMS [1920] ceux de ses résultats qui ne sont pas dans les mémoires de Fatou et Julia,

I wish to present here that small part of my work which has not been covered by the other writers, postponing until after the appearance of their memoirs the publication of such of my other results as may still be of interest.

points répulsifs sont contenus (un des résultats annoncés par Lattès [1918a]). Dans le cas où R est un polynôme, il énonce clairement une dichotomie⁴⁷ en termes du bassin d'attraction de ∞ :

- soit toutes les orbites des points critiques de R restent bornées (et alors le bassin d'attraction de ∞ dans \mathbf{P}_1 est connexe et simplement connexe),
- soit une des orbites d'un point critique tend vers ∞ et alors le bassin en question est multiplement connexe.

De même que Lattès, il n'utilise pas les familles normales. Parmi les résultats qu'il utilise, le théorème de Böttcher, qui est, nous l'avons dit, l'outil indispensable pour étudier le voisinage de ∞ dans le cas d'un polynôme.

C'est dans cette note que le mot « répulsif » apparaît, sous la forme « point de répulsion », accompagné du « point d'attraction », comme le montre la lecture des articles mentionnés ici (ce sera confirmé par Ritt dans son article [1920]). La terminologie efficace attractif/répulsif est donc due à un Américain⁴⁸ (écrivant en français) ! De quoi reconforter les Académiciens inquiets de l'utilisation excessive de mots étrangers (voir le comité secret du 7 janvier, mentionné ci-dessus). Par contre, Ritt nomme aussi « point de circulation » un point fixe où la dérivée vaut 1, mais cette terminologie moins heureuse n'est pas passée à la postérité...

Le 18 mars

Gabriel Koenigs, un des ancêtres de l'itération, est élu membre de l'Académie des sciences dans la section de mécanique (en remplacement d'Henri Léauté).

Le 25 mars

Les offensives allemandes ont repris, Paris a été bombardé deux jours plus tôt par les *Pariser Kanonen*.

Samuel Lattès

À la suite de la note de Ritt [1918], Lattès reprend dans la sienne [1918c] l'utilisation de l'application de Poincaré. D'après le théorème de Picard, la fonction entière θ de Poincaré prend toutes les valeurs sauf peut-être deux, α et β . Lattès fait le lien avec l'approche de Fatou et Julia : si z est un point de

⁴⁷ Qui est aujourd'hui classique (et qui est donnée ici en termes modernes), entre les cas où l'ensemble de Julia est connexe et celui où il a une infinité non dénombrable de composantes connexes — mais ce n'est pas l'ensemble de Julia que décrit Ritt.

⁴⁸ Elle devra faire l'objet d'une sorte de double traduction pour devenir aussi efficace en anglais : Ritt écrit [1920] *point of attraction*, *point of repulsion*, pour ce qui s'appelle aujourd'hui *attracting point*, *repelling point*.

la frontière d'un domaine d'attraction, les $R^n(z)$ prennent toutes les valeurs sauf peut-être deux, qui ont les mêmes α et β .

La note [Lattès 1918c] est parue sous le titre « Sur l'itération des fractions irrationnelles », une coquille dans le titre... elle a été suivie d'un *erratum*. Il y avait déjà eu un *erratum* pour une coquille très visible (mais qui ne venait pas du manuscrit) dans une formule de la note [Lattès 1918a]. Apparemment, Lattès n'a pas corrigé ses épreuves avec beaucoup de soin.

Le 15 avril

Gaston Julia

Dans cette note [1918c], transmise la semaine précédente, Julia donne des exemples d'ensemble E' pour la note de Fatou [1918a] du 4 février. Il présente dans cette note des résultats contenus dans le mémoire qu'il a déposé pour le Grand Prix. Notamment le fait que les domaines de convergence vers un point fixe attractif (il utilise la terminologie « point limite à convergence régulière » mais ne doit pas y croire vraiment puisqu'il signale « point d'attraction » dans une note infrapaginale), ne sont multiplement connexes que si leur ordre de connexion est infini, c'est-à-dire, sont simplement connexes (comme un disque), doublement connexes (comme un anneau) ou un un groupe fondamental à une infinité de générateurs. Il donne trois exemples. Le premier est l'exemple de Fatou [1906d] que nous avons appelé ici exemple I.4.3, dans lequel il affirme que les lignes séparant les domaines de convergence (dont Fatou avait déjà signalé qu'ils n'étaient pas analytiques) forment une courbe de Jordan. J'explicite les deux autres ici.

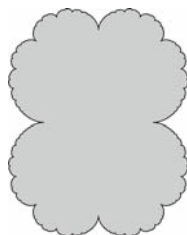


Fig. II.2. Un chou-fleur, $R(z) = z^2 + \frac{1}{4}$

Exemple II.2.2.

Il s'agit d'une perturbation d'un exemple simple, deux points attractifs symétriques par rapport à un cercle (comme dans le cas de $r(z) = z^2$, ici

l'exemple I.4.1 où ces deux points sont 0 et ∞). Julia dit pouvoir perturber r en R de façon que R ait deux points fixes attractifs proches des points attractifs initiaux, une courbe limite fermée simple (de Jordan) proche du cercle... mais aussi telle que, en aucun point de E , la courbe en question n'ait de tangente. Pour les lecteurs modernes : l'ensemble E' est un intermédiaire entre la figure I.1 (le cercle) et la figure I.2 (une poussière), comme par exemple la figure I.4 (cercle à fossettes) ou encore ce que l'on appelle aujourd'hui (suivant Douady) un « chou-fleur » et qui est représenté sur la figure II.2.

Exemple II.2.3 (... avec digressions). La fraction rationnelle est

$$R(z) = \frac{-z^3 + 3z}{2}.$$

Julia montre la forme de la courbe séparant les bassins d'attraction des points 1 et -1 , en lesquels $R'(1) = R'(-1) = 0$ (ce que l'on appelle aujourd'hui des points superattractifs). Le troisième point fixe à distance finie est 0 et il est répulsif. Julia indique une construction itérative donnant une courbe ayant, comme celle qui apparaît ici, la propriété de n'avoir de tangente en aucun point, analogue à celle construite par von Koch [1906]⁴⁹ (le mémoire contiendra la référence, mais ce n'est pas le cas de cette note, pourtant les triangles utilisés semblent bien en avoir été inspirés) : partir de deux triangles équilatéraux, ajouter six triangles équilatéraux huit fois plus petits, et ainsi de suite⁵⁰, comme sur la figure II.3.

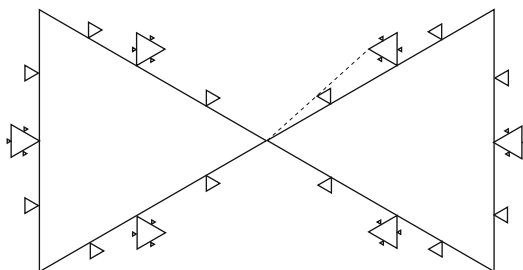


Fig. II.3.

Il était certainement encore nécessaire de donner et de redonner des exemples de ce qui était encore considéré, peu de temps auparavant, comme des monstruosités. Nous ne sommes pas si loin de l'« épistolaire bêtise d'Hermite »,

⁴⁹ Les ensembles totalement discontinus de l'itération, la courbe de von Koch, bientôt l'ensemble triadique de Cantor... Il reste à noter que le triangle de Sierpinski est apparu [1915], dans les *Comptes rendus*, peu de temps auparavant.

⁵⁰ Une remarque un peu hors-sujet mais irrésistible au milieu de ces questions de priorité : Paul Lévy raconte dans ses souvenirs [1970] qu'il a découvert la courbe de von Koch à l'âge de seize ans, en 1902 (quatre ans avant la parution de [von Koch 1906], donc). Voir aussi la note 61 du chapitre VI.

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivée

(en 1893, voir [Baillaud & Bourguet 1905b]) que Darboux répétait encore avec insistance vers 1906, d'après [Lebesgue 1991, p. 136] et que l'on cite souvent. À la décharge d'Hermite, mentionnons une façon plus délicate d'exprimer, certes son horreur, mais aussi sa « soumission », dans une lettre à du Bois-Reymond du 17 mai 1885 [Lampe 1916]⁵¹ :

Mais je ne sais quelle force d'inertie me retient dans un temps plus heureux et maintenant loin de nous, dans l'âge d'or de l'analyse, où jamais l'existence de la dérivée ne faisait une question, de sorte que ce n'est pas sans un sérieux effort, une grande gêne, je vous l'avouerai, que je me plie aux exigences, aux dures nécessités du temps présent en fait de rigueur.

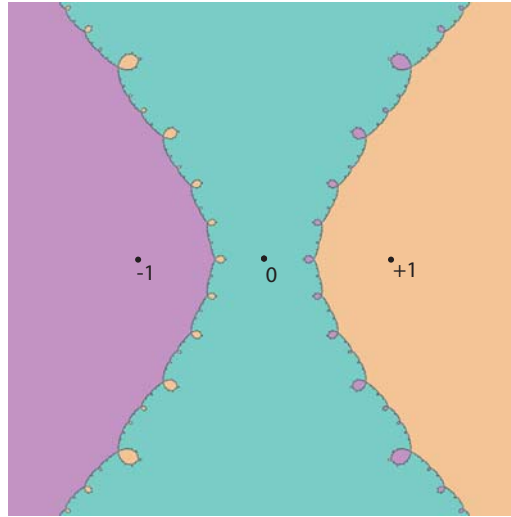


Fig. II.4. La méthode de Newton pour $z(z^2 - 1)$

Julia le signalera plus tard (cet exemple occupera dix-huit pages dans son mémoire [1918f]), l'itération de cette fraction rationnelle est liée à l'utilisation de la méthode de Newton pour trouver les racines du polynôme $z(z^2 - 1)$. La fraction rationnelle R étudiée ici est conjuguée (par $w = 1/z$) à

$$S(w) = \frac{2w^3}{3w^2 - 1} = w - \frac{w(w^2 - 1)}{3w^2 - 1}$$

⁵¹ Ce n'est certainement pas par hasard que ces lettres des années 1880 ont été publiées, en pleine guerre, en 1916 et en Allemagne : elles sont emplies de l'expression de la foi d'Hermite en la coopération scientifique, au-dessus des divisions entre la France et l'Allemagne..

donnée par la méthode de Newton pour trouver les racines de $w(w^2 - 1)$. Les points fixes ∞ , 1 et -1 de R correspondent aux points fixes 0, 1 et -1 de S (c'est pourquoi ils sont superattractifs, c'est toujours le cas avec la méthode de Newton pour un polynôme à racines simples). En principe, itérer la fraction rationnelle R devrait « donner » les racines de ce polynôme. Oui, mais... en partant de quel point ? Les bassins d'attraction de 1 et -1 sont constitués des points dont les itérés convergent vers ces racines. On voit ici (figure II.4) que la convergence de la méthode de Newton est plus compliquée que ce que l'étude du degré 2 pouvait laisser imaginer (voir la note 80 du chapitre I).

★

Encore une coïncidence : au cours de cette même séance du 15 avril, Georges Humbert présente une note [1918] dans laquelle il étend (au cas de formes quadratiques indéfinies) un théorème d'une « Note extrêmement remarquable » de Fatou [1906a].

En mai, Samuel Lattès tombe malade, d'une fièvre typhoïde. Le 5 juillet, il meurt, à l'âge de 45 ans⁵².



Samuel Lattès (1873–1918)

Le 8 juillet

En réunion en comité secret, l'Académie commence à décider à qui elle va décerner ses prix. Ce jour-là, elle décide d'attribuer le prix Francœur à Paul Montel.

Le 18 juillet commence la deuxième bataille de la Marne.

⁵² Pour en savoir plus sur la vie, la mort, et les travaux de Samuel Lattès, voir [Montel 1919 ; Buhl 1921].

Septembre

Victoires de l'Alliance.

Le 28 octobre

La réunion des académiciens en comité secret discute des organisations scientifiques qu'il y aurait intérêt à faire revivre parmi les Alliés⁵³.

Elle continue à écouter les rapports sur les prix. Elle décide d'attribuer à Fatou un prix de 2 000 F (de la fondation Henri Becquerel) « pour ses travaux sur la théorie des séries et l'itération des fractions rationnelles » et une partie du prix Gegner à Lattès (une aide financière de 2 000 F pour sa famille).

Les membres de l'Institut retenus à Lille pendant l'occupation de cette ville par l'armée allemande⁵⁴ protestent contre les exactions commises.

Il est touchant de constater que, guerre ou pas guerre, l'Académie des sciences continue à recevoir son contingent de lettres de loufoques — et ce jour-là, c'est un parfumeur de Perthuis (Vaucluse) qui s'inquiète du mémoire sur la quadrature du cercle qu'il a envoyé quelques semaines plus tôt.

Le 4 novembre

La veille, l'Autriche-Hongrie a signé l'armistice avec les alliés.

La réunion de l'Académie des sciences en comité secret se tient en deux parties. L'une d'elles est consacrée à écouter des rapports qui vont mener à l'élection de Foch (oui, du Maréchal Foch, le chef d'État-major général) comme académicien libre. La guerre est plus que présente. Pendant la seconde partie, les académiciens continuent à attribuer les prix.

M. Émile Picard dépose le rapport sur le Grand prix des Sciences mathématiques qui conclut à l'attribution du prix à M. Julia, une mention très honorable serait faite au travail de M. Lattès. Adopté.

⁵³ Une réunion s'est tenue à Londres du 9 au 11 octobre au cours de laquelle les Académies scientifiques des pays alliés ont arrêté des résolutions quant aux futures relations avec les savants allemands [Painlevé 1918c, p. 802]. L'armistice est proche... et le boycott scientifique de l'Allemagne et de ses alliés est déjà décidé.

La réunion d'octobre est suivie d'une deuxième, à Paris du 26 au 29 novembre, puis d'une troisième, à Bruxelles, du 18 au 28 juillet 1919 (moins d'un mois après la signature du traité de Versailles le 28 juin), qui met en place le Conseil de recherches (sous la présidence de Picard). On trouvera les conclusions de ces réunions dans [EnsMath 1920] pour les conférences de Londres et de Paris et dans [EnsMath 1921] pour celle de Bruxelles. Voir ce que Picard lui-même en dit dans son allocution [1921] au Congrès de Strasbourg.

⁵⁴ La ville de Lille a été occupée par l'armée allemande du 12 octobre 1914 au 17 octobre 1918. Pour une brève histoire de cette terrible période, voir [Pierrard 1992].

Le mémoire de Julia contenait pourtant une faute, qui le rendait, disons, lacunaire (voir la remarque III.1.2) et qu'il corrigera avant la publication.

La commission qui a examiné les mémoires (identique à celle qui a attribué le Prix Bordin à Julia un an plus tôt) était formée de Jordan, Appell, Painlevé, Hadamard, Boussinesq, Lecornu ; les rapporteurs étaient Émile Picard et Georges Humbert. On notera que Gabriel Koenigs n'en était pas membre, mais elle avait été constituée avant son élection.

Le 11 novembre

Au moment-même, dira Painlevé [1918c] trois semaines plus tard, où l'armistice est signé, le maréchal Foch est élu membre de l'Académie des sciences. Ce jour-là, Madame Lattès remercie l'Académie de la distinction accordée aux travaux de son mari.

Parenthèse (Jeanne Lattès). Samuel Lattès avait épousé, en 1910, une de ses élèves montpelliéraines, Jeanne Ferrier. Ils avaient une petite fille (voir [Buhl 1921]). Titulaire d'une licence de mathématiques et d'une licence de physique, Jeanne Lattès était professeur au lycée de garçons de Tarbes. Grâce à une bourse Carnegie, elle est devenue en 1921 une collaboratrice de Marie Curie à l'Institut du radium. En 1924, dans une note [Lacassagne & Lattès 1924]⁵⁵ avec Lacassagne, elle inventait une technique qui permet de détecter la présence et de préciser la localisation intracellulaire d'un élément radioactif injecté (au nombre des travaux qui en ont découlé, ce serait une des plus importantes découvertes de la biologie au xx^e siècle, d'après [Latarjet 1979]). En 1926, elle passait sa thèse [Lattès 1926]. En 1930, à la suite d'alertes de santé, elle a quitté l'Institut du radium pour l'Institut Henri Poincaré (la porte à côté) comme assistante de calcul des probabilités auprès d'Émile Borel, et elle y est restée jusqu'à son départ à la retraite en 1958. Voir la rubrique nécrologique [Latarjet 1979] et une belle photo de Jeanne Lattès, au travail, dans le jardin de l'Institut du radium, dans [Devaux 2004].

Le 18 novembre

Le président (Painlevé) accueille Foch à l'Académie des sciences en ces termes :

Il y a cent vingt-deux ans⁵⁶, l'Académie des sciences accueillait dans son sein le vainqueur d'Arcole et de Rivoli ; aujourd'hui, pour reprendre les paroles lapidaires que vous adressiez hier aux soldats de la République, nous saluons en vous, monsieur le Maréchal, le vainqueur de la plus grande bataille

⁵⁵ Affirmation de sa fidélité à la mémoire de son mari ou ombre portée, par les règlements des *Comptes rendus* ou par elle-même, sur le fait qu'elle est une femme, ses notes sont signées Lattès (nom), J. Samuel (prénom).

⁵⁶ C'est cent vingt-et-un ans plus tôt que Napoléon Bonaparte a été élu académicien des sciences (le 5 nivôse an VI ou 25 décembre 1797).

de l'Histoire et le défenseur victorieux de la plus noble des causes : la liberté du monde. [Painlevé 1918b]

Sur cette séance, il existe un témoignage de René Garnier⁵⁷ écrit cinquante ans après. René Garnier était venu à l'Académie des sciences ce jour-là, pour remettre une note à Appell afin qu'il la présentât, il se souvient avec émotion de l'entrée solennelle de Foch en uniforme, encadré par Painlevé et Picard.

Le 2 décembre

Ce jour-là se tient la séance publique annuelle. Elle s'ouvre par l'allocution du président — une chance que ce soit à un authentique homme politique que revienne la joie tant attendue de célébrer la victoire. J'ai déjà cité page 27 le passage de ce discours concernant le sacrifice des jeunes scientifiques. Après les théories de Picard sur l'« esprit germanique » dans la science allemande, il est rassurant de voir l'argumentation changer de niveau [Painlevé 1918c, p. 800] :

[...] car il n'y a point une géométrie française et une géométrie allemande ; il y a une géométrie. Mais, ainsi que le même fer peut servir à moissonner ou à tuer, l'inflexible raison humaine peut être employée aux fins les plus généreuses ou aux plus abominables forfaits. La culture scientifique, âprement poursuivie dans un but d'utilisation immédiate, de lucre sordide ou de domination oppressive, dégrade l'âme au lieu de l'élever au-dessus d'elle-même. Elle aboutit à une sorte de barbarie savante, de cruauté organisée qui prend pour ses adeptes l'aspect d'une religion sauvage, dont tous les crimes sont sacrés et devant qui les infidèles doivent plier les genoux.

Ce n'est pas que les Allemands ont une façon de penser différente, germanique, mais c'est que leurs dirigeants politiques ont donné de mauvaises fonctions à la science. Il développe, remercie les Américains et envisage l'avenir des collaborations scientifiques [Painlevé 1918c, p. 802] :

[...] il ne suffit pas que le militarisme prussien soit abattu et momentanément réduit à l'impuissance : il faut que la mentalité allemande soit transformée. Tant que l'Allemagne n'aura pas renoncé au fond d'elle-même à son idéal sanglant d'oppression, de rapines et de violences ; tant qu'elle n'aura pas pris conscience et horreur de ses crimes, il n'y aura pas de réconciliation possible, fût-ce pour une collaboration scientifique, entre elle et l'humanité.

Il dresse ensuite la liste de rigueur des académiciens décédés en cours d'année, puis revient à la participation à l'effort de guerre pour annoncer ce que devrait être l'organisation de la recherche en France, dans une fin de discours résolument politique (et moderne).

Puis il donne la parole au Secrétaire perpétuel pour la lecture du palmarès. J'ai déjà cité ci-dessus le début du rapport sur le Grand Prix. Ce rapport est long (presque quatre pages), détaille l'apport de Lattès et celui de Julia, puis rappelle la « querelle » avec Fatou (qui n'a pas eu lieu) en ces termes :

⁵⁷ Dossier René Garnier, archives de l'Académie des sciences.

Au fur et à mesure de sa recherche, M. Julia avait consigné ces résultats dans des plis cachetés, déposés à l'Académie ; postérieurement au dépôt du dernier pli, et en décembre 1917, un géomètre connu, M. Fatou, auquel la théorie de l'itération devait déjà d'intéressants progrès dans une voie nouvelle, énonçait aux *Comptes rendus* la plus grande partie des mêmes résultats, qu'il avait obtenus de son côté et par la même méthode, en utilisant, lui aussi, les propriétés des suites normales de M. Montel : ce n'est pas la première fois, dans l'histoire de la Science, qu'on aura vu deux savants de valeur arriver en même temps, par la même marche, à une même découverte⁵⁸.

Il se conclut par des louanges sur les qualités mathématiques du mémoire de Julia et la décision de lui décerner le prix et d'attribuer une mention très honorable au travail de Lattès. Nous l'avons dit, Fatou reçoit 2 000 F de la fondation Becquerel, le Prix Francœur est décerné à Montel « pour ses travaux sur les suites de fonctions analytiques ». Tous nos protagonistes — tous nos protagonistes français — sont donc récompensés.

L'Académie n'a reçu que trois mémoires. Ceux de Julia et de Lattès, et celui du mathématicien italien Salvatore Pincherle (qui n'est pas nommé dans le rapport de Picard).

Sur Salvatore Pincherle

Salvatore Pincherle (1853–1936), l'auteur du troisième mémoire, est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il a étudié notamment avec Weierstrass. À l'époque dont nous parlons, il était professeur d'analyse infinitésimale à Bologne. Il a envoyé son mémoire « Sur l'itération de la substitution $x^2 - a$ » sous la devise « *La verità, che tante ci sublima...* Dante⁵⁹ ». Ses propres contributions au problème de l'itération constituent une partie très marginale de son œuvre. Comme son titre l'indique, son mémoire consiste en l'étude des transformations $R(z) = P(z)/Q(z)$ de degré 2, qui se ramènent par homographie à $R(z) = z^2 - a$ (il s'agit des polynômes quadratiques qui produiront, bien plus tard, l'ensemble de Mandelbrot). Il considère seulement le cas où a est un réel strictement positif, mais il fait une étude assez précise de l'« ensemble de Julia » (qu'il n'appelle évidemment pas ainsi mais qu'il nomme \mathbb{Z}) selon la position de a par rapport à 2. Les six parties de son mémoire s'intitulent

⁵⁸ Citons encore une fois le rapport d'Hadamard sur Fatou :

Elle [l'Académie des sciences] a ainsi obtenu les travaux de premier ordre de M. Julia et aussi de M. Lattès, qui ont constitué pour la science mathématique française un grand succès, montrant au lendemain de la guerre, qu'elle gardait sa vitalité et sa puissance.

⁵⁹ Dossier des prix, archives de l'Académie des sciences. Pour ce type de concours, la règle est d'envoyer un mémoire anonyme identifié par une devise ainsi qu'une deuxième enveloppe portant la même devise et contenant le nom de l'auteur. Les devises utilisées par Julia et Lattès nous sont inconnues.

- I Préliminaires,
- II $a > 2$,
- III $a = 2$,
- IV $a < 2$,
- V Domaines de convergence régulière et irrégulière,
- VI Équations fonctionnelles.

Il serait injuste de dire que ce travail ne consiste que d'exemples — il faut dire que Pincherle lui-même répète en conclusion qu'il n'a étudié qu'un cas très particulier. Ces résultats ont fait l'objet de plusieurs notes dans les académies italiennes. Voir sa liste de travaux [1925]. Il est aussi l'auteur de l'article sur les équations et opérations fonctionnelles dans l'*Encyclopädie* allemande (et aussi dans l'édition française), un article un peu désuet — dont les § 33 à 38 sont consacrés à l'itération.

Salvatore Pincherle a aussi été le premier directeur de l'Union mathématique italienne en 1921 et le président du congrès international des mathématiciens de Bologne en 1928, ce qui n'a pas été une tâche facile, voir ici page 191, il y a d'ailleurs fait un discours dont, pour situer le contexte politique, nous citons quelques lignes [Pincherle 1929a] :

L'Homme exceptionnel que la fortune de l'Italie a fait surgir pour qu'il en dirige les destinées a approuvé notre ligne de conduite ; le Congrès a eu son appui [...]

Mussolini était en effet un des présidents du Congrès.

Pourquoi Fatou n'a-t-il pas concouru ?

On l'a compris : Fatou n'a pas envoyé de mémoire. Ses deux notes [1917b ; 1917c] n'étaient pourtant que la partie visible d'un iceberg qui sera publié en trois parties en 1919–1920, au total près de trois cents pages, et qui indiquent qu'il avait bien l'intention de concourir pour le grand prix.

Le rapport de la commission du prix le dit presque explicitement : si Fatou avait concouru, l'Académie aurait dû partager le prix. Il est certain aussi qu'un Grand Prix des sciences mathématiques aurait accru ses chances d'obtenir un poste de mathématicien.

Quant aux raisons pour lesquelles il n'a finalement pas concouru, laissant la place libre à Julia, on ne peut que les imaginer. Les 2 000 F de la fondation Becquerel lui ont été attribués pour « ses travaux sur la théorie des séries et l'itération des fractions rationnelles »... ce qui est très proche de l'intitulé du grand prix. Lui a-t-on demandé de ne pas concourir ? S'est-il retiré de lui-même après la note [Julia 1917] de Julia en décembre ? On a pu imaginer aussi que le fait de ne pas avoir fait la guerre, qui a culpabilisé plus d'un réformé, avait pu retenir Fatou. Il était peut-être tout simplement malade, comme le dit Hadamard dans le rapport de 1921 que nous avons déjà cité plusieurs fois :

son état de santé [l'] avait empêché de participer au concours en temps utile.

Il a pourtant envoyé des notes publiées le 17 décembre 1917 et le 4 février 1918, comme nous l'avons vu. Ce ne pouvait donc pas être une très grave maladie ! Le plus probable est qu'il a décidé de ne pas concourir parce que la compétition ne lui convenait pas — et le ton de son concurrent non plus. Il me semble que le changement d'intitulé de ses travaux signalé dans la note 44 va dans ce sens. Voir quelques éclairages sur la personnalité de Fatou au chapitre V.

Le 23 décembre

Pierre Fatou

Les prix ont été proclamés, Fatou n'a pas concouru, mais ça ne l'empêche pas de continuer à travailler. Il publie encore une note [1918b]⁶⁰ dans laquelle il démontre que, lorsque le complémentaire de notre ensemble E' , ou F , a deux composantes connexes, domaines d'attraction de deux points fixes attractifs, la courbe qui les sépare n'a de tangente en aucun point (sauf si c'est un cercle). Si l'un des points fixes devient⁶¹ indifférent, c'est-à-dire ici, comme Fatou le précise⁶², de multiplicateur $s = +1$, la courbe acquiert un point de rebroussement, qui est le seul où elle a une tangente.

Cette année-là, Julia a encore publié deux notes aux *Comptes rendus* [1918d ; 1918e], dont la dernière suit immédiatement [Fatou 1918b], mais sur de tout autres sujets.

Communication ?

Une question intéressante, à laquelle nous reviendrons (au § V.8), serait de savoir si, durant cette période, Fatou et Julia ont parlé, entre eux, de leurs travaux mathématiques (une sous-question serait : où pouvaient-ils se rencontrer ?).

⁶⁰ Alors que toutes les notes sur l'itération de Fatou, Julia et Lattès de 1917–18, de même que celle de Montel, sont parues sans nom de présentateur, celle-ci est présentée par Georges Humbert.

⁶¹ Le mot « devient » est dans le texte. On remarquera l'aspect dynamique, le côté « variation d'un paramètre », de cette façon de penser.

⁶² Il semble que la terminologie « indifférent » a été inventée dans cette note, avec le sens restrictif $s = +1$ (ce que l'on appelle aujourd'hui un point fixe parabolique).

Fatou, Julia, Montel,
le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et
après...

Audin, M.

2009, VI, 276 p., Softcover

ISBN: 978-3-642-00445-2