

Problèmes inverses elliptiques

2.1 Détermination d'un potentiel dans l'équation de Schrödinger : construction de solutions "optique géométrique"

Nous considérons le problème inverse qui consiste à déterminer $q \in L^\infty(\Omega)$, Ω étant un domaine régulier de \mathbb{R}^n , à partir de l'opérateur Dirichlet-Neumann (ou Steklov-Poincaré) Λ_q donné par : $\Lambda_q : \varphi \rightarrow \partial_\nu u$, où u est la solution de $(-\Delta + q)u = 0$ dans Ω et $u = \varphi$ sur Γ . Le point clé dans la preuve de l'unicité pour ce problème inverse est la densité de produits de solutions. Précisons ce que nous entendons par densité de produits de solutions. Nous prouvons que l'espace vectoriel engendré par les produits $u_1 u_2$ est dense dans $L^1(\Omega)$, où u_j , $j = 1, 2$, décrit l'ensemble des solutions H^2 de $(-\Delta + q_j)u_j = 0$ dans Ω , $q_j \in L^\infty(\Omega)$. Ce dernier résultat repose essentiellement sur la construction de solutions "optique géométrique" pour l'équation $(-\Delta + q_j)u_j = 0$. C'est-à-dire des solutions de la forme $u_j = e^{-ix \cdot \xi}(1 + w_j)$, avec $\xi \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\xi \cdot \xi = 0$ et w_i tend, en norme L^2 , vers 0 quand $|\xi|$ tend vers ∞ . En d'autres termes, des solutions qui sont des perturbations des exponentielles harmoniques $e^{-ix \cdot \xi}$.

Comme autre application des solutions "optique géométrique", nous donnons et démontrons un résultat de stabilité logarithmique pour le problème inverse $q \rightarrow \Lambda_q$.

2.1.1 Solutions "optique géométrique" et densité des produits de solutions

Nous commençons par introduire quelques notations spécifiques à ce paragraphe. Nous notons $D_j = -i\partial_j$ et, pour $\alpha = (\alpha_1 \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Dans ce qui suit, $P(D)$ désigne un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants. C'est-à-dire

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha,$$

où $m \geq 0$ est un entier et $a_\alpha \in \mathbb{C}$, pour chaque α .

Nous associons à $P(D)$ son symbole $P(\xi)$:

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Nous utiliserons aussi la fonction

$$\tilde{P}(\xi) = \left(\sum_{\beta} |D^\beta P(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{N}^n$, nous avons comme conséquence de la formule de Taylor,

$$D^\gamma P(\xi + \eta) = \sum_{\beta} D^{\gamma+\beta} P(\eta) \frac{(i\xi)^\beta}{\beta!}.$$

Nous déduisons de cette dernière identité qu'il existe une constante positive C , dépendant uniquement de n et m (le degré de P), telle que

$$\frac{\tilde{P}(\xi + \eta)}{\tilde{P}(\eta)} \leq (1 + C|\xi|)^m, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, nous introduisons l'espace

$$B_{p,\tilde{P}} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \tilde{P}\mathcal{F}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

que nous munissons de sa norme naturelle :

$$\|u\|_{p,\tilde{P}} = \|\tilde{P}\mathcal{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Rappelons que \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier.

Notons

$$B_{p,\tilde{P}}^{loc} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \varphi u \in B_{p,\tilde{P}}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$$

et si \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^n , nous posons

$$B_{p,\tilde{P}}(\mathcal{O}) = \{u = v|_{\mathcal{O}}; v \in B_{p,\tilde{P}}\}.$$

Nous utiliserons un peu plus loin le

Lemme 2.1. *Soient $u \in B_{\infty,\tilde{P}}$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors $uv \in B_{\infty,\tilde{P}}$ et*

$$\|uv\|_{\infty,\tilde{P}} \leq C\|u\|_{\infty,\tilde{P}},$$

où C est une constante qui dépend uniquement de v , n et m (le degré de P).

Preuve. D’après le Théorème 1.12, $\mathcal{F}(uv) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}u * \mathcal{F}v$. D’où

$$\tilde{P}(\xi)\mathcal{F}(uv)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \tilde{P}(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi - \eta)\mathcal{F}(v)(\eta)d\eta.$$

Cette identité, combinée avec (2.1), implique

$$|\tilde{P}(\xi)\mathcal{F}(uv)(\xi)| \leq (2\pi)^{-n} \sup_{\tau} |\tilde{P}(\tau)\mathcal{F}(u)(\tau)| \int (1 + C|\eta|)^m |\mathcal{F}(v)(\eta)|d\eta,$$

où la constante C dépend uniquement de n et m . \square

Nous énonçons un résultat concernant l’existence d’une solution fondamentale d’un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants. Nous rappelons que $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une solution fondamentale de l’opérateur $P(D)$ si $P(D)F = \delta$, où δ est la mesure de Dirac en 0.

Nous avons, d’après le Théorème 10.2.1 de [Hor2] et sa preuve, le

Théorème 2.2. *$P(D)$ possède une solution fondamentale $F \in B_{\infty, \tilde{P}}^{loc}$ vérifiant $\frac{F}{\cosh|x|} \in B_{\infty, \tilde{P}}$ et il existe une constante positive C , qui dépend uniquement de n et m , telle que*

$$\left\| \frac{F}{\cosh|x|} \right\|_{\infty, \tilde{P}} \leq C. \quad (2.2)$$

Ce théorème est le point clé pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Soit X un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors il existe $E \in \mathcal{L}(L^2(X))$ possédant les propriétés suivantes :*

- (i) $P(D)Ef = f$ pour tout $f \in L^2(X)$,
- (ii) pour tout opérateur différentiel linéaire $Q(D)$ à coefficients constants tel que $\frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)}$ est borné sur \mathbb{R}^n , $Q(D)E$ définit un opérateur borné sur $L^2(X)$ et

$$\|Q(D)E\|_{\mathcal{L}(L^2(X))} \leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)},$$

où C est une constante positive dépendant uniquement de n , m et X .

Preuve. Pour $f \in L^2(X)$, nous notons f_0 son extension par 0 en dehors de X .

Soit $F \in B_{\infty, \tilde{P}}^{loc}$ une solution fondamentale de $P(D)$ ayant la régularité du Théorème 2.2. Nous définissons alors l’opérateur E comme suit

$$E : f \in L^2(X) \rightarrow (F * f_0)|_X.$$

La propriété (i) résulte tout simplement de

$$P(D)(F * f_0) = P(D)F * f_0 = \delta * f_0 = f_0.$$

Nous fixons maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi = 1$ dans un voisinage de la fermeture de $X - X = \{x - y; x, y \in X\}$. Nous vérifions aisément que

$$[(\varphi F) * f_0]_{|X} = [F * f]_{|X}$$

et donc

$$\|Q(D)Ef\|_{L^2(X)} \leq \|Q(D)(\varphi F) * f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}[Q(D)(\varphi F) * f_0]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Or $\mathcal{F}[Q(D)(\varphi F) * f_0] = Q(\xi)\mathcal{F}(\varphi F)\mathcal{F}f_0$. Par suite,

$$\|Q(D)Ef\|_{L^2(X)} \leq \|Q(\xi)\mathcal{F}(\varphi F)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(X)}. \quad (2.3)$$

Nous utilisons alors l'identité

$$Q(\xi)\mathcal{F}(\varphi F) = \frac{Q(\xi)}{\tilde{P}(\xi)} \tilde{P}(\xi)\mathcal{F}[(\varphi \cosh |x|) \frac{F}{\cosh |x|}],$$

le Lemme 2.1 et le fait que F satisfait à (2.2) pour déduire

$$\|Q(\xi)\mathcal{F}(\varphi F)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)}.$$

Ceci et (2.3) entraînent alors (ii). \square

Nous introduisons maintenant la notion d'opérateur elliptique. On dit que $P(D)$ est elliptique si

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0 \text{ pour tout } 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nous disposons du résultat de régularité

Théorème 2.4. *Soit X un ouvert borné de \mathbb{R}^n et nous supposons que $P(D)$ est elliptique. Si $u \in \mathcal{D}'(X)$ est telle que $P(D)u \in L^2(X)$, alors $u \in B_{2,\tilde{P}}(X)$.*

Ce résultat est un cas particulier du Théorème 11.1.8 de [Hor2].

Ci-dessous, $P_a(D)$, $a \in (\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n) \cup \{0\}$, désigne l'opérateur différentiel

$$P_a(D) = -\Delta - ia \cdot \nabla = \sum D_j^2 + a_j D_j$$

Comme $P_a(\xi) = |\xi|^2 + a \cdot \xi$, $P_a(D)$ est donc elliptique.

Rappelons que si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 , alors (voir par exemple J.-L. Lions et E. Magenes [LM])

$$H^2(\Omega) = \{u = v|_\Omega; v \in H^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

En notant que $\tilde{P}_a(\xi) \geq C(1 + |\xi|^2)$, C étant une constante indépendante de ξ , nous obtenons comme conséquence du Théorème 2.4 le

Corollaire 2.5. *Si Ω est de classe C^2 et si $u \in L^2(\Omega)$ vérifie $P_a(D)u \in L^2(\Omega)$, alors $u \in H^2(\Omega)$.*

Pour $q \in L^\infty(X)$, nous posons

$$S_q = \{u \in H^2(X), -\Delta u + qu = 0 \text{ dans } X\}.$$

Comme nous l’avons dit plus haut, le résultat de densité des produits de solutions, que nous énonçons un peu plus loin, est fondé sur la construction de solutions “optique géométrique” de l’équation $(-\Delta + q)u = 0$. C’est l’objet de la proposition suivante :

Proposition 2.6. *Soient X un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $q \in L^\infty(X)$ et $M > 0$ tels que $\|q\|_{L^\infty(X)} \leq M$. Alors nous pouvons trouver une constante positive C , ne dépendant que de M , pour laquelle : pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ tel que $\xi \cdot \xi = 0$ et $|\Im \xi| > C$, il existe $w_\xi \in H^2(X)$ vérifiant*

$$\|w_\xi\|_{L^2(X)} \leq \frac{C}{|\Im \xi| - C} \quad (2.4)$$

et

$$u_\xi = e^{-i\xi \cdot x}(1 + w_\xi) \in S_q.$$

Preuve. Clairement, en prolongeant q par 0 en dehors de X , il suffit d’établir le résultat pour $\Omega \supset X$ de classe C^2 (nous pouvons par exemple prendre pour Ω une boule) et prendre ensuite des restrictions à X .

Notons d’abord que w_ξ doit être une solution de l’équation

$$-\Delta w + 2i\xi \cdot \nabla w = -q(1 + w) \text{ dans } \Omega. \quad (2.5)$$

Nous posons

$$P_\xi(\eta) = -2\xi \cdot \eta + \eta \cdot \eta.$$

D’après le Théorème 2.3, il existe $E_\xi \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ tel que

$$(2i\xi \cdot \nabla - \Delta)E_\xi f = f,$$

pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \|E_\xi\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} &\leq K \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\tilde{P}_\xi(\eta)} \\ &\leq K \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|\nabla P_\xi(\eta)|} \leq \frac{K}{|\Im \xi|}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où la constante K ne dépend que de n et Ω .

Nous considérons l’application

$$\begin{aligned} F_\xi : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ f &\rightarrow E_\xi[-q(1+f)]. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\|F_\xi f - F_\xi g\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K\|q\|_{L^\infty(\Omega)}}{|\Im \xi|} \|f - g\|_{L^2(\Omega)}, \quad f, g \in L^2(\Omega),$$

par (2.6). Par suite, F_ξ possède un unique point fixe $w_\xi \in L^2(\Omega)$ dès que $|\Im \xi| > C = KM$. Comme $P_\xi(D)w_\xi = -q(1 + w_\xi) \in \dot{L}^2(\Omega)$, w_ξ est dans $H^2(\Omega)$ par le Corollaire 2.5.

Pour finir, nous utilisons

$$\begin{aligned} \|w_\xi\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|F_\xi w_\xi - F_\xi 0\|_{L^2(\Omega)} + \|F_\xi 0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{|\Im \xi|} (\|w_\xi\|_{L^2(\Omega)} + 1). \end{aligned}$$

□

Nous utilisons maintenant ce dernier résultat pour établir le

Théorème 2.7. *Soit X un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Si $q_1, q_2 \in L^\infty(X)$ alors*

$$F = \text{vect}\{uv, u \in S_{q_1}, v \in S_{q_2}\}$$

est dense dans $L^1(X)$.

Nous aurons besoin du

Lemme 2.8. *Si $n \geq 3$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $R > 0$, il existe $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^n$ tels que*

$$|\Im \xi_j| \geq R, \quad \xi_j \cdot \xi_j = 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = k, \quad j = 1, 2. \quad (2.7)$$

Preuve. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^n$ non nuls, orthogonaux à k et orthogonaux entre eux (notons que ceci n'est possible que si $n \geq 3$) tels que

$$|k_2|^2 = \frac{|k|^2}{4} + |k_1|^2.$$

Nous posons

$$\begin{cases} \xi_1 = (\frac{k}{2} + k_1) + ik_2, \\ \xi_2 = (\frac{k}{2} - k_1) - ik_2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous vérifions aisément que ξ_1 et ξ_2 ont les propriétés requises dès que $|k_2|$ est assez grand. □

Preuve du Théorème 2.7. Nous raisonnons par l'absurde. Si F n'était pas dense dans $L^1(X)$ alors, par le théorème de séparation de Hahn-Banach (voir

par exemple H. Brézis [Bre] ou L. Schwartz [Sc2]), il existerait $f \in L^\infty(X)$ non identiquement nulle telle que

$$\int_X f g dx = 0, \quad g \in F. \quad (2.9)$$

Fixons $k \in \mathbb{R}^n$, $k \neq 0$. D’après le Lemme 2.8, pour R assez grand il existe $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$|\Im \xi_j| \geq R, \quad \xi_j \cdot \xi_j = 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = k, \quad j = 1, 2.$$

Nous appliquons alors la Proposition 2.6 pour avoir l’existence de $w_{\xi_j} \in H^2(X)$, $j = 1, 2$, telle que

$$\|w_{\xi_j}\|_{L^2(X)} \leq \frac{C}{R - C},$$

où la constante C est indépendante de R , et

$$u_j = e^{-i\xi_j \cdot x} (1 + w_{\xi_j}) \in S_{q_j}.$$

Comme $u_1 u_2 \in F$, (2.9) implique

$$\int_X e^{-ik \cdot x} f dx + \int_X z dx = 0, \quad (2.10)$$

avec $z = e^{-ik \cdot x} (w_{\xi_1} + w_{\xi_2} + w_{\xi_1} w_{\xi_2}) f$. Or w_{ξ_j} converge vers zéro dans $L^2(X)$ quand R tend vers $+\infty$. Par suite, nous passons à la limite dans (2.10) pour avoir

$$\int_X e^{-ik \cdot x} f dx = 0, \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

C’est-à-dire que $\mathcal{F}f = 0$ et donc $f = 0$, ce qui aboutit à une contradiction. \square

Nous énonçons aussi un autre résultat de densité qui nous sera bien utile pour résoudre un problème spectral inverse au paragraphe 2.2. Pour $q, q_1, q_2 \in L^\infty(X)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous notons

$$S_q(\lambda) = \{u \in H^2(X); (-\Delta + q - \lambda)u = 0 \text{ dans } X\}$$

et

$$F(q_1, q_2, \mu) = \text{vect } \cup_{\lambda \leq -\mu} S_{q_1}(\lambda) S_{q_2}(\lambda).$$

Théorème 2.9. *Soit X un ouvert borné de \mathbb{R}^n , avec $n \geq 2$. Soient $M > 0$, $q_1, q_2 \in L^\infty(X)$ telles que $\|q_1\|_{L^\infty(X)}, \|q_2\|_{L^\infty(X)} \leq M$. Alors il existe $\lambda_0 > 0$ qui dépend uniquement de M et Ω tel que $F(q_1, q_2, \lambda_0)$ est dense dans $L^1(X)$.*

Pour montrer ce théorème, nous procédons de la même manière que dans la preuve du Théorème 2.7; sauf qu’à la place de la proposition 2.6 et du Lemme 2.8 nous utilisons la

Proposition 2.10. *Soient $M > 0$ et $q \in L^\infty(X)$ telles que $\|q\|_{L^\infty} \leq M$. Alors il existe $\lambda_0 > 0$, qui dépend uniquement de M et Ω pour lequel : pour tout $\lambda \leq -\lambda_0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\xi \cdot \xi = \lambda$, il existe $w_{\lambda,\xi} \in H^2(X)$ telle que*

$$\|w_{\lambda,\xi}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}$$

et $u = e^{-i\xi \cdot x}(1 + w_{\lambda,\xi}) \in S_q(\lambda)$, où la constante C est indépendante de λ et ξ .

et le fait que si $\lambda < 0$, $k \in \mathbb{R}^n$ et k_1 est orthogonal à k , avec $|k_1|^2 = \frac{|k|^2}{4} + |\lambda|$ alors ξ_1 et ξ_2 donnés par

$$\xi_1 = \frac{k}{2} + ik_1 \text{ et } \xi_2 = \overline{\xi_1}$$

vérifient $\xi_1 \cdot \xi_1 = \xi_2 \cdot \xi_2 = \lambda$ et $\xi_1 + \xi_2 = k$.

Pour la construction des solutions “optique géométrique” nous nous sommes largement inspiré de V. Isakov [Isa1]. Dans ce même article, l’auteur exhibe aussi des solutions “optique géométrique” pour les opérateurs $(\partial_t - \Delta) + q$ et $(\partial_{tt} - \Delta) + q$, et d’autres. Nous donnons au sous-paragraphe 2.1.4 une construction plus directe qui est due à P. Hähner [Ha]. Nous verrons aussi au sous-paragraphe 2.1.5 une autre façon de construire les solutions “optique géométrique”, qui sont nulles sur une partie de la frontière. Elle est fondée sur une inégalité de Carleman. Signalons aussi que les deux articles de J. Sylvester et G. Uhlmann [SU1], [SU2] contiennent une construction de solutions “optique géométrique” sur l’espace tout entier, dans des espaces de Sobolev appropriés.

2.1.2 Détermination du potentiel à partir de l’opérateur DN

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 et de frontière Γ .

Si $q \in L^\infty(\Omega)$, nous désignons par A_q l’opérateur $A_q = -\Delta + q$ ayant pour domaine $D(A_q) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

D’après le Théorème 1.26, si $q \in L^\infty(\Omega)$ est telle que 0 n’est pas une valeur propre de l’opérateur A_q et si $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, alors le problème aux limites non homogène

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u|_\Gamma = \varphi, \end{cases} \quad (2.11)$$

admet une unique, solution $u_{q,\varphi} \in H^2(\Omega)$ et il existe une constante C , indépendante de φ , telle que

$$\|u_{q,\varphi}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.12)$$

Il en résulte que l’opérateur

$$\Lambda_q : \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow \partial_\nu u_{q,\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est borné.

Le premier résultat que nous nous proposons de démontrer est le

Théorème 2.11. *Pour $i = 1, 2$, soit $q_i \in L^\infty(\Omega)$ telle que 0 n'est pas valeur propre de A_{q_i} . Si $n \geq 3$ alors*

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \Rightarrow q_1 = q_2.$$

Preuve. Nous faisons l'hypothèse que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$. Soient $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $v \in S_{q_1}$ (S_{q_1} est défini au sous-paragraphe précédent). Nous montrons sans peine que $u = u_{q_1,\varphi} - u_{q_2,\varphi}$ satisfait à

$$\begin{cases} (-\Delta + q_1)u = (q_2 - q_1)u_{q_2,\varphi}, & \text{dans } \Omega, \\ u|_\Gamma = \partial_\nu u|_\Gamma = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous appliquons la formule de Green à u et v pour avoir

$$\int_\Omega (q_2 - q_1)u_{q_2,\varphi}v dx = 0, \quad \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \quad v \in S_{q_1}.$$

Or $\{u_{q_2,\varphi}; \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\} = S_{q_2}$. D'où

$$\int_\Omega (q_2 - q_1)g dx = 0, \quad g \in F,$$

où $F = \{uv; u \in S_{q_1}, v \in S_{q_2}\}$. Il s'ensuit que $q_1 = q_2$ car F est dense dans $L^1(\Omega)$ par le Théorème 2.7. \square

Pour $a \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $a \geq a_0 > 0$, nous considérons le problème aux limites non homogène

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a \nabla w) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w|_\Gamma = \varphi. \end{cases} \quad (2.14)$$

Notons que si w est une solution H^2 de (2.14) alors $v = a^{\frac{1}{2}}w$ est une solution H^2 de

$$\begin{cases} (-\Delta + a^{-\frac{1}{2}} \Delta a^{\frac{1}{2}})v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v|_\Gamma = a^{\frac{1}{2}}\varphi, \end{cases} \quad (2.15)$$

et réciproquement. Il en résulte que (2.14) admet une unique solution $w_{a,\varphi} \in H^2(\Omega)$ et que l'opérateur

$$\Sigma_a : \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow \partial_\nu w_{a,\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est borné.

Dans ce qui suit, nous notons l'ensemble des $b \in W^{2,\infty}(\Omega)$ qui vérifient $b \geq b_0$, pour un certain $b_0 > 0$, par $W_+^{2,\infty}(\Omega)$ et, pour $a \in W_+^{2,\infty}(\Omega)$, nous

posons $q_a = a^{-\frac{1}{2}} \Delta a^{\frac{1}{2}}$. Aussi, nous désignerons par $v_{q_a, \varphi}$, $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, la solution H^2 du problème aux limites

$$\begin{cases} (-\Delta + q_a)v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v|_{\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, nous avons

$$\partial_\nu w_{a, a^{-\frac{1}{2}}\varphi} = \varphi \partial_\nu a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \partial_\nu v_{q_a, \varphi}.$$

C'est-à-dire,

$$\Sigma_a(a^{-\frac{1}{2}}\varphi) = \varphi \partial_\nu a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} \Lambda_{q_a} \varphi. \quad (2.16)$$

Comme conséquence du Théorème 2.11, nous avons le

Corollaire 2.12. *Soient $a_1, a_2 \in W_+^{2,\infty}(\Omega)$ telles que*

$$a_1 = a_2, \quad \nabla a_1 = \nabla a_2, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.17)$$

et $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$. Alors $a_1 = a_2$.

Preuve. Nous avons $\Lambda_{q_{a_1}} = \Lambda_{q_{a_2}}$ par (2.16) et donc $q_{a_1} = q_{a_2}$ par le Théorème 2.11. C'est-à-dire,

$$a_1^{-\frac{1}{2}} \Delta a_1^{\frac{1}{2}} = a_2^{-\frac{1}{2}} \Delta a_2^{\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Nous posons $y = a_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{1}{2}}$. Nous déduisons de (2.18)

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta a_1^{\frac{1}{2}} - \Delta a_2^{\frac{1}{2}} \\ &= a_1^{\frac{1}{2}} a_2^{-\frac{1}{2}} \Delta a_1^{\frac{1}{2}} - \Delta a_2^{\frac{1}{2}} \\ &= a_1^{\frac{1}{2}} \Delta a_2^{\frac{1}{2}} (a_2^{-\frac{1}{2}} - a_1^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Mais

$$a_2^{-\frac{1}{2}} - a_1^{-\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{1}{(a_2^{\frac{1}{2}} + \tau[a_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{1}{2}}])^2} d\tau (a_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{1}{2}}).$$

En utilisant (2.17), nous concluons que y vérifie

$$\begin{cases} \Delta y + cy = 0, & \text{dans } \Omega, \\ y = \partial_\nu y = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où

$$c = -a_1^{\frac{1}{2}} \Delta a_2^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{(a_2^{\frac{1}{2}} + \tau[a_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{1}{2}}])^2} d\tau.$$

Il s'ensuit que $y = 0$ par le Corollaire 1.38 (unicité du prolongement). Par suite, $a_1 = a_2$. \square

L'hypothèse (2.17) dans le corollaire 2.12 n'est pas vraiment nécessaire. En effet, nous avons

Théorème 2.13. Soient $a_1, a_2 \in W_+^{2,\infty}(\Omega)$ telles que $a_1 - a_2 \in C^1(\overline{\Omega})$. Si $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$ alors

$$a_1 = a_2 \text{ et } \nabla a_1 = \nabla a_2 \text{ sur } \Gamma.$$

Ce théorème sera démontré au sous-paragraphe 2.3.3.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat de stabilité conditionnelle pour le problème inverse qui consiste à déterminer q à partir de A_q .

Théorème 2.14. Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant $q_1 - q_2 \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q_2\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q_1 - q_2\|_{H^1(\Omega)} \leq M.$$

Alors il existe deux constantes positives C, D qui ne dépendent que de M, n et Ω telles que

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\ln \frac{D}{\|A_{q_1} - A_{q_2}\|} \right)^{-\frac{2}{n+2}}$$

si $\|A_{q_1} - A_{q_2}\|$ est assez petit, où $\|A_{q_1} - A_{q_2}\|$ est la norme de $A_{q_1} - A_{q_2}$ dans $\mathcal{L}(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous montrons d’abord un lemme.

Lemme 2.15. Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M.$$

Alors il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $r \geq r_0$, nous pouvons trouver $u_1 \in S_{q_1}$ et $u_2 \in S_{q_2}$ possédant les propriétés suivantes :

(i) pour $j = 1, 2$, $u_j = e^{-i\xi_j \cdot x}(1 + w_{\xi_j})$, avec $\xi_j \in \mathbb{C}^n$, $\xi_j \cdot \xi_j = 0$ et $\xi_1 + \xi_2 = k$,

(ii) $\|w_{\xi_j}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|k|+r}$,

(iii) $\|u_j\|_{H^2(\Omega)} \leq Ce^{\delta(r+|k|)}$,

où les constantes C et δ ne dépendent que de M et Ω .

Preuve. Rappelons que $P_\xi(\eta) = \eta \cdot \eta - 2\xi \cdot \eta$. En utilisant l’estimation

$$\tilde{P}_\xi^2 \geq |P_\xi|^2 + \sum_j |D_j^2 P_\xi|^2,$$

nous arrivons aisément à montrer

$$\tilde{P}_\xi(\eta) \geq \begin{cases} 2, & \text{si } |\eta| \leq 4|\Im \xi|, \\ \frac{|\eta|^2}{2}, & \text{si } |\eta| > 4|\Im \xi|. \end{cases}$$

Pour $1 \leq k, l \leq n$, on note $Q_k(\eta) = \eta_k$ et $Q_{k,l}(\eta) = \eta_k \eta_l$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $|\Im \xi| \geq 1$, un calcul simple nous donne

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_k(\eta)|}{\tilde{P}_\xi(\eta)}, \quad \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_{k,l}(\eta)|}{\tilde{P}_\xi(\eta)} \leq 8|\Im \xi|. \quad (2.19)$$

Soient $k \in \mathbb{R}^n$ et ξ_1, ξ_2 donnés par (2.8). Puisque $|\Im(\xi_j)| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}(|k| + r)$, d'après la Proposition 2.6, il existe $u_j = e^{-i\xi_j \cdot x}(1 + w_j) \in S_{q_j}$ pourvu que $r \geq r_0$, pour un certain r_0 indépendant de ξ_j . De plus,

$$\|w_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|k| + r}.$$

Or, d'après la preuve de la Proposition 2.6, $w_j = E_{\xi_j}(-q_j(1 + w_j)) \in H^2(\Omega)$. Ceci, (2.19) et le Théorème 2.3 (ii) entraînent alors

$$\|w_i\|_{H^2(\Omega)} \leq C(|k| + r).$$

Il en résulte immédiatement l'estimation

$$\|u_j\|_{H^2(\Omega)} \leq C e^{\delta(|k|+r)}.$$

□

Preuve du Théorème 2.14. Dans cette démonstration C, C', C_0 et C_1 sont des constantes génériques.

Soit $u_j \in S_{q_j}$, $j = 1, 2$, comme dans le lemme ci-dessus. Nous appliquons alors la formule de Green à $u_{q_2, u_1|_\Gamma} - u_1$ et u_2 pour avoir

$$\int_{\Omega} (q_2 - q_1) u_1 u_2 = \int_{\Gamma} [\Lambda_{q_2} - \Lambda_{q_1}](u_1|_{\Gamma}) u_2.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (q_2 - q_1) e^{-ik \cdot x} &= - \int_{\Omega} (q_2 - q_1) e^{-ik \cdot x} (w_1 + w_2 + w_1 w_2) \\ &\quad + \int_{\Gamma} [\Lambda_{q_2} - \Lambda_{q_1}](u_1|_{\Gamma}) u_2. \end{aligned}$$

Si q désigne l'extension par 0, en dehors de Ω , de $q_2 - q_1$, nous obtenons

$$|\hat{q}(k)| \leq C \left(\frac{1}{|k| + r} + \|\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}\| e^{2\delta(|k|+r)} \right),$$

par les estimations données au Lemme 2.15.

Pour simplifier les notations, nous posons $\gamma = \|\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}\|$ et $\rho = |k| + r$. L'inégalité précédente s'écrit alors

$$|\hat{q}(k)| \leq C\left(\frac{1}{\rho} + \gamma e^{C\rho}\right).$$

Si $|k| \leq \alpha$, pour $\rho_0 = r_0 + \alpha$, le minimum sur $[\rho_0, +\infty)$ de la fonction $\frac{1}{\rho} + \gamma e^{C\rho}$ est atteint pour ρ_* tel que

$$-\frac{1}{\rho_*^2} + C\gamma e^{C\rho_*} = 0.$$

C'est-à-dire $\gamma = \frac{1}{C\rho_*^2} e^{-C\rho_*}$. Notons que la condition $\rho_* \geq \rho_0$ est satisfaite si γ est assez petit car la fonction $\rho \rightarrow \frac{1}{C\rho^2} e^{-C\rho}$ est décroissante. Par suite, si γ est assez petit, nous avons

$$|\hat{q}(k)| \leq C\left(\frac{1}{\rho_*} + \frac{C}{\rho_*^2}\right) \leq \frac{C}{\rho_*}\left(1 + \frac{C}{\rho_0}\right) = \frac{C'}{\rho_*}, \text{ si } |k| \leq \alpha.$$

Or $\frac{1}{C\gamma} = \rho_*^2 e^{C\rho_*} \leq 2e^{(C+1)\rho_*}$ et donc

$$\frac{1}{\rho_*} \leq \frac{C_0}{\ln(\frac{1}{C_1\gamma})} = \gamma_1.$$

Il en résulte que

$$|\hat{q}(k)| \leq C\gamma_1, \text{ si } |k| \leq \alpha.$$

D'où

$$\int_{|k| \leq \alpha} |\hat{q}(k)|^2 \leq C\alpha^n \gamma_1^2. \quad (2.20)$$

D'autre part, comme $q \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{|k| > \alpha} |\hat{q}(k)|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{|k| > \alpha} |k|^2 |\hat{q}(k)|^2 \leq \frac{\|q\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2}{\alpha^2} \leq \frac{M^2}{\alpha^2}. \quad (2.21)$$

(2.20) et (2.21) impliquent

$$\|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{q}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C\alpha^n \gamma_1^2 + \frac{M^2}{\alpha^2}, \text{ pour tout } \alpha \geq 0.$$

Le minimum sur $[0, +\infty)$ de la fonction $\alpha \rightarrow C\alpha^n \gamma_1^2 + \frac{M^2}{\alpha^2}$ est atteint en α_* tel que

$$nC\alpha_*^{n-1} \gamma_1^2 - \frac{2M^2}{\alpha_*^3} = 0.$$

C'est-à-dire, $\alpha_* = \left(\frac{2M^2}{nC\gamma_1^2}\right)^{\frac{1}{n+2}}$ et donc

$$\|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C\gamma_1^{\frac{4}{n+2}}.$$

□

Pour faire ce sous-paragraphe, nous avons adapté les différents résultats existant dans la littérature. Spécialement, G. Alessandrini [Al1], [Al2], V. Isakov [Isa3], J. Sylvester et G. Uhlmann [SU1], [SU2].

2.1.3 Détermination du potentiel à partir d'un opérateur DN partiel

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 et de frontière Γ . Soit γ un fermé de Γ d'intérieur non vide. Introduisons $H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, le sous-espace fermé de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, donné par

$$H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma) = \{\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma); \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \gamma\}.$$

Rappelons qu'au sous-paragraphe 2.1.2 nous avons noté A_q , $q \in L^{\infty}(\Omega)$, l'opérateur $A_q = -\Delta + q$ ayant pour domaine $D(A_q) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. D'autre part, nous avons vu que si 0 n'est pas dans le spectre de A_q alors

$$\Lambda_q : \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow \partial_{\nu} u_{q,\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

définit un opérateur borné, où $u_{q,\varphi} \in H^2(\Omega)$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

Nous en déduisons que l'opérateur

$$\tilde{\Lambda}_q : \varphi \in H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow \partial_{\nu} u_{q,\varphi}|_{\gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$$

est aussi borné.

Théorème 2.16. *Nous supposons que $n \geq 3$. Soient $q_1, q_2 \in L^{\infty}(\Omega)$ telles que $\Gamma \cap \text{supp}(q_1 - q_2) = \emptyset$. Alors $\tilde{\Lambda}_{q_1} = \tilde{\Lambda}_{q_2}$ implique $q_1 = q_2$.*

La démonstration de ce théorème utilise le lemme suivant dans lequel, pour $q \in L^{\infty}(\Omega)$, nous notons

$$S_q = \{u \in H^2(\Omega), -\Delta u + qu = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Lemme 2.17. *Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$ et $\Omega \setminus \overline{\omega}$ est connexe. Alors \tilde{S}_q donné par*

$$\tilde{S}_q = \{u \in S_q; u = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \gamma\}$$

est dense dans S_q , pour la norme de $L^2(\omega)$.

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde. Nous supposons donc qu'il existe $v \in S_q$ tel que

$$\int_{\omega} uv = 0, \forall u \in \tilde{S}_q. \quad (2.22)$$

Soit $G = G(x, y)$ la fonction de Green pour $-\Delta + q$ avec une condition de Dirichlet sur le bord. C'est-à-dire, $G(\cdot, y)$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} (-\Delta + q)G(\cdot, y) = \delta_y, & \text{dans } \Omega, \\ G(\cdot, y) = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Si $u \in \tilde{S}_q$ alors une intégration par parties nous donne

$$u(x) = \int_{\gamma} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega.$$

Donc, pour $\varphi = u|_{\Gamma} \in H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, nous avons

$$u(x) = \int_{\gamma} \partial_{\nu_y} G(x, y) \varphi(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega. \quad (2.23)$$

Inversement, si u est donnée par (2.23) pour un certain $\varphi \in H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ alors u satisfait à $(-\Delta + q)u = 0$ dans Ω . D'autre part, nous vérifions aisément, comme ci-dessus, que $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$, la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} (-\Delta + q)\tilde{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{u}|_{\Gamma} = \varphi, \end{cases}$$

est donnée par

$$\tilde{u}(x) = \int_{\gamma} \partial_{\nu_y} G(x, y) \varphi(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega. \quad (2.24)$$

Par suite, $u = \tilde{u}$. En particulier, $u = 0$ sur $\Gamma \setminus \gamma$. Nous en déduisons que tout élément de \tilde{S}_q est donné par la formule (2.23) pour un certain $\varphi \in H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Par conséquence, vu (2.22),

$$\int_{\omega} v(y) \partial_{\nu_y} G(x, y) d\sigma(y) = 0, \quad x \in \gamma.$$

Nous définissons

$$w(x) = \int_{\omega} G(x, y) v(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Clairement, $w \in H^2(\Omega)$, $w = \partial_{\nu} w = 0$ sur γ et

$$(-\Delta + q)w = \begin{cases} v & \text{dans } \omega \\ v = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega}. \end{cases}$$

Il s'ensuit, d'après le Corollaire 1.38 (unicité du prolongement), que $w = v$ dans $\Omega \setminus \overline{\omega}$, ce qui entraîne que $w = \partial_{\nu} w = 0$ sur $\partial\omega$. Mais $(-\Delta + q)w = v$ dans ω . Nous multiplions cette équation par v et nous faisons une intégration par parties pour avoir $\int_{\omega} v^2 = 0$. Donc $v = 0$ dans ω . Or $(-\Delta + q)v = 0$ dans Ω . Par suite $v = 0$ par le Théorème 1.37 (unicité du prolongement). Ceci donne la contradiction recherchée et termine la preuve. \square

Preuve du Théorème 2.16. Nous procédons de manière similaire à la preuve du Théorème 2.11. Pour $i = 1, 2$, soit $u_i \in \tilde{S}_{q_i}$. D'après la formule de Green, nous avons

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 u_2 dx = \int_{\gamma} (\partial_{\nu} u_1 u_2 - u_1 \partial_{\nu} u_2) d\sigma. \quad (2.25)$$

Soit $v_1 \in H^2(\Omega)$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} (-\Delta + q_1) v_1 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v_1|_{\Gamma} = u_2|_{\Gamma}. \end{cases}$$

Comme $\tilde{A}_{q_1} = \tilde{A}_{q_2}$, nous avons alors

$$\partial_{\nu} v_1 = \partial_{\nu} u_2 \text{ sur } \gamma. \quad (2.26)$$

D'autre part, de nouveau par la formule de Green, nous obtenons

$$0 = \int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 v_1 dx = \int_{\gamma} (\partial_{\nu} u_1 v_1 - u_1 \partial_{\nu} v_1) d\sigma. \quad (2.27)$$

Nous combinons (2.25), (2.26), (2.27) et nous utilisons $v_1|_{\Gamma} = u_2|_{\Gamma}$ pour conclure

$$\int_{\omega} (q_1 - q_2) u_1 u_2 dx = 0, \quad u_i \in \tilde{S}_{q_i} \quad i = 1, 2.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\omega} (q_1 - q_2) u_1 u_2 dx = 0, \quad u_i \in S_{q_i} \quad i = 1, 2,$$

par le Lemme 2.17. Nous terminons alors la preuve comme celle du Théorème 2.11. C'est-à-dire en utilisant le fait que $F = \text{vect}\{u_1 u_2; u_i \in S_{q_i}, i = 1, 2\}$ est dense dans $L^1(\Omega)$. \square

Là encore le Théorème 2.16 s'applique au problème de conductivité inverse. Plus précisément, nous considérons la détermination du coefficient de conductivité à partir d'un opérateur Dirichlet-Neumann partiel. Nous reprenons les notations de la fin du paragraphe 2.1.2. Pour $a \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $a \geq a_0 > 0$, nous considérons le problème aux limites non homogène

$$\begin{cases} \text{div}(a \nabla w) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w|_{\Gamma} = \varphi \in H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma). \end{cases} \quad (2.28)$$

Nous avons vu plus haut que ce problème admet une unique solution $w_{a,\varphi} \in H^2(\Omega)$. Nous définissons alors l'opérateur Dirichlet-Neumann partiel $\tilde{\Sigma}_a$ par

$$\tilde{\Sigma}_a : \varphi \in H_{\gamma}^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow \partial_{\nu} w_{a,\varphi}|_{\gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma).$$

De façon similaire qu'auparavant, nous montrons sans peine

$$\tilde{\Sigma}_a(a^{-\frac{1}{2}}\varphi) = \varphi\partial_\nu a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\tilde{\Lambda}_{q_a}\varphi, \quad (2.29)$$

où $q_a = a^{-\frac{1}{2}}\Delta a^{\frac{1}{2}}$.

Pour $i = 1, 2$, soit $a_i \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $a_i \geq a_0 > 0$, et nous supposons que $\tilde{\Sigma}_{a_1} = \tilde{\Sigma}_{a_2}$ et $a_1 = a_2$ dans un voisinage de Γ . De la dernière identité nous déduisons $\tilde{\Lambda}_{q_1} = \tilde{\Lambda}_{q_2}$, avec $q_i = q_{a_i}$, $i = 1, 2$. D'où, $q_1 = q_2$ par le Théorème 2.16, ce qui implique, comme au paragraphe 2.1.2, que $a_1 = a_2$.

En résumé, nous venons de démontrer

Théorème 2.18. *Soient $a_1, a_2 \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $a_i \geq a_0 > 0$, $i = 1, 2$, telles que $a_1 = a_2$ dans un voisinage de Γ . Alors $\tilde{\Sigma}_{a_1} = \tilde{\Sigma}_{a_2}$ implique $a_1 = a_2$.*

Les résultats de ce paragraphe proviennent essentiellement de H. Ammari et G. Uhlmann [AU].

2.1.4 Une méthode directe de construction de solutions “optique géométrique”

Nous introduisons d'abord quelques définitions. Dans ce qui suit, (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n . Notons le cube $(-R, R)^n$ par Q et posons

$$Z_0 = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n; \frac{\alpha_1 R}{\pi} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{\alpha_j R}{\pi} \in \mathbb{Z} \text{ si } j \geq 2\}.$$

Observons que

$$Z_0 = \frac{\pi}{2R}e_1 + \frac{\pi}{R}\mathbb{Z}^n$$

et donc $|\alpha_1| \geq \frac{\pi}{2R}$ si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Z_0$.

Nous rappelons qu'une fonction $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ est dite Q -périodique si

$$u(\cdot + 2Re_j) = u(\cdot), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Remarquons qu'une fonction Q -périodique est entièrement déterminée par ses valeurs dans Q . Le sous-espace de $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions Q -périodiques sera noté $H_{\text{per}}^1(Q)$. Clairement, $H_{\text{per}}^1(Q)$ est un sous-espace fermé de $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Nous définissons aussi $H_{\text{per}}^2(Q)$ par

$$H_{\text{per}}^2(Q) = \{u \in H_{\text{per}}^1(Q); \partial_j u \in H_{\text{per}}^1(Q), \quad 1 \leq j \leq n\}.$$

Nous introduisons aussi les fonctions Z_0 -quasi-périodiques. Une fonction $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ est dite Z_0 -quasi-périodique si la fonction $x \rightarrow e^{-\frac{i\pi x_1}{2R}}u(x)$ est Q -périodique. L'ensemble des fonctions, de $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, Z_0 -quasi-périodiques, noté $H_{Z_0}^1(Q)$, est un sous-espace fermé de $H^1(Q)$. De la même manière, nous définissons $H_{Z_0}^2(Q)$ comme étant l'espace des fonctions de $H_{\text{loc}}^2(Q)$ qui sont Z_0 -quasi-périodiques. Nous vérifions sans peine que

$$H_{Z_0}^1(Q) = e^{\frac{i\pi x_1}{2R}} H_{\text{per}}^1(Q) \text{ et } H_{Z_0}^2(Q) = e^{\frac{i\pi x_1}{2R}} H_{\text{per}}^2(Q).$$

Pour $\alpha \in Z_0$, nous posons

$$\varphi_\alpha(x) = (2R)^{-\frac{n}{2}} e^{i\alpha \cdot x}. \quad (2.30)$$

Nous vérifions aisément que φ_α est Z_0 -quasi-périodique, $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in Z_0}$ est une base hilbertienne de $L^2(Q)$ et

$$\nabla \varphi_\alpha = i\alpha \varphi_\alpha, \quad \Delta \varphi_\alpha = -|\alpha|^2 \varphi_\alpha.$$

Nous donnons maintenant quelques propriétés des fonctions Q -périodiques. Soient $u, v \in C^1(Q) \cap H_{\text{per}}^1(Q)$. En remarquant que $\sigma \rightarrow \nu_j(\sigma)$ est anti-périodique sur ∂Q , $1 \leq j \leq n$, nous avons

$$\int_{\partial Q} u \bar{\nu} \nu_j d\sigma = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

et par suite,

$$\int_Q \nabla u \bar{\nu} dx = - \int_Q u \nabla \bar{\nu} dx.$$

Aussi, pour $u, v \in C^2(Q) \cap H_{\text{per}}^2(Q)$, $\sigma \rightarrow \nabla u(\sigma) \cdot \nu(\sigma)$ étant anti-périodique, nous avons

$$\int_{\partial Q} \partial_\nu u \bar{\nu} d\sigma = 0, \quad \int_{\partial Q} u \partial_\nu \bar{\nu} d\sigma = 0.$$

D'où

$$\int_Q \Delta u \bar{\nu} dx = \int_Q u \Delta \bar{\nu} dx.$$

Nous nous donnons $u, v \in C^2(\bar{Q})$ deux fonctions Z_0 -quasi-périodiques. Donc φ et ψ , données par

$$\varphi(x) = e^{-\frac{i\pi x_1}{2R}} u(x), \quad \psi(x) = e^{-\frac{i\pi x_1}{2R}} v(x)$$

sont Q -périodiques et

$$\nabla u = e^{\frac{i\pi x_1}{2R}} \nabla \varphi + \frac{i\pi}{2R} e^{\frac{i\pi x_1}{2R}} \varphi e_1, \quad \nabla v = e^{\frac{i\pi x_1}{2R}} \nabla \psi + \frac{i\pi}{2R} e^{\frac{i\pi x_1}{2R}} \psi e_1.$$

Des dernières formules, nous déduisons

$$\int_{\partial Q} (\partial_\nu u \bar{\nu} - u \partial_\nu \bar{\nu}) d\sigma = \int_{\partial Q} (\partial_\nu \varphi \bar{\psi} - \varphi \partial_\nu \bar{\psi}) d\sigma + \frac{i\pi}{R} \int_{\partial Q} \varphi \bar{\psi} e_1 \cdot \nu d\sigma = 0.$$

De cette identité, nous tirons

$$\int_Q \nabla u \bar{\nu} dx = - \int_Q u \nabla \bar{\nu} dx \quad (2.31)$$

et

$$\int_Q \Delta u \bar{v} dx = \int_Q u \Delta \bar{v} dx. \quad (2.32)$$

Un argument classique de densité permet d'étendre (2.31) (resp. (2.32)) à $u, v \in H_{Z_0}^1(Q)$ (resp. $u, v \in H_{Z_0}^2(Q)$).

Proposition 2.19. *Soient $s \in \mathbb{R}, s \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi \cdot e_1 = 0$ et posons $\zeta = i\xi + se_1$. Alors, pour tout $f \in L^2(Q)$, il existe un unique $\psi \in H_{Z_0}^1(Q) \cap H^2(Q)$ tel que*

$$-\Delta \psi - 2\zeta \cdot \nabla \psi = f, \text{ dans } Q. \quad (2.33)$$

De plus

$$\|\psi\|_{L^2(Q)} \leq \frac{R}{\pi|s|} \|f\|_{L^2(Q)}.$$

Preuve. Comme $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in Z_0}$ est une base hilbertienne de $L^2(Q)$, (2.33) est équivalente à

$$\langle -\Delta \psi - 2\zeta \cdot \nabla \psi, \varphi_\alpha \rangle = \langle f, \varphi_\alpha \rangle, \text{ pour tout } \alpha \in Z_0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(Q)$.

Des formules (2.31) et (2.32), nous déduisons

$$\langle -\Delta \psi - 2\zeta \cdot \nabla \psi, \varphi_\alpha \rangle = (\alpha \cdot \alpha - 2i\zeta \cdot \alpha) \langle \psi, \varphi_\alpha \rangle, \text{ pour tout } \alpha \in Z_0.$$

Comme

$$|\alpha \cdot \alpha - 2i\zeta \cdot \alpha| \geq |\Im(\alpha \cdot \alpha - 2i\zeta)| = |2s\alpha_1| \geq \frac{|s|\pi}{R}, \quad (2.34)$$

nous concluons

$$\langle \psi, \varphi_\alpha \rangle = \frac{\langle f, \varphi_\alpha \rangle}{\alpha \cdot \alpha - 2i\zeta \cdot \alpha}, \text{ pour tout } \alpha \in Z_0.$$

Nous avons donc

$$\psi = \sum_{\alpha \in Z_0} \frac{\langle f, \varphi_\alpha \rangle}{\alpha \cdot \alpha - 2i\zeta \cdot \alpha} \varphi_\alpha$$

et, par (2.34),

$$\|\psi\|_{L^2(Q)} = \sum_{\alpha \in Z_0} \frac{|\langle f, \varphi_\alpha \rangle|^2}{|\alpha \cdot \alpha - 2i\zeta \cdot \alpha|^2} \leq \frac{R^2}{|s|^2 \pi^2} \|f\|_{L^2(Q)}.$$

Pour terminer, nous notons que $\psi \in H^2(Q)$ résulte tout simplement des résultats de régularité elliptique. \square

Corollaire 2.20. Soit $\zeta = i\xi + \eta$, avec $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\xi \cdot \eta = 0$ et $\eta \neq 0$. Si X est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors il existe un opérateur borné $E_\zeta : L^2(X) \rightarrow H^2(X)$ tel que $\psi = E_\zeta(f) \in H^2(X)$ est solution de

$$-\Delta\psi - 2\zeta \cdot \nabla\psi = f. \quad (2.35)$$

De plus

$$\|E_\zeta\|_{\mathcal{L}(L^2(X), H^2(X))} \leq \frac{C}{|\eta|},$$

où C est une constante, indépendante de ξ et η .

Preuve. Sans perte de généralité, nous supposons que $0 \in X$. Fixons alors un $R > 0$ tel que pour toute rotation S de \mathbb{R}^n autour de l'origine, $S(X) \subset Q = (-R, R)^n$. Nous nous donnons $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta \neq 0$, nous posons $s = |\eta|$ et nous considérons S une rotation autour de l'origine telle que $Se_1 = \frac{\eta}{s}$.

Pour $f \in L^2(X)$, nous notons son prolongement, sur \mathbb{R}^n tout entier, par 0 en dehors de X par f_0 .

Si $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ alors $v(x) = u(Sx) \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ et vérifie

$$\zeta_0 \cdot \nabla v(x) = (S\zeta_0) \cdot (\nabla u)(Sx), \quad \Delta v(x) = \Delta u(x),$$

où $\zeta_0 = iS^*\xi + S^*\eta$.

Donc pour trouver une solution de (2.35), il suffit de résoudre

$$v \in H^2(Q) \cap H_{\mathcal{Z}_0}^1(Q), \quad -\Delta v - 2\zeta_0 \cdot \nabla v = g,$$

où $g(x) = f_0(Sx)$. D'après la Proposition 2.19, ce dernier problème admet une unique solution telle que

$$\|v\|_{L^2(Q)} \leq \frac{C}{s} \|g\|_{L^2(Q)}.$$

Il suffit de poser $E_\zeta(f) = (v \circ S^*)|_X$, qui possède bien les propriétés requises. \square

Proposition 2.21. Soit $\zeta = i\xi + \eta$, avec $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\xi \cdot \eta = 0$ et $\eta \neq 0$. Si X est un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $q \in L^\infty(X)$, $\|q\|_{L^\infty(X)} \leq M$, avec M une constante positive donnée, alors nous trouvons une constante $K > 0$, qui ne dépend que de M , pour laquelle pour tous $|\eta| \geq K$ et $f \in L^2(X)$, il existe $\psi \in H^2(X)$ vérifiant

$$-\Delta\psi - 2\zeta \cdot \nabla\psi + q\psi = f \quad (2.36)$$

et

$$\|\psi\|_{L^2(X)} \leq \frac{C}{|\eta|} \|f\|_{L^2(X)},$$

où C est une constante, indépendante de ξ et η et f .

Preuve. Notons que l'équation (2.36) est équivalente à

$$-\Delta\psi - 2\zeta \cdot \nabla\psi = -q\psi + f.$$

Si E_ζ est l'opérateur du Corollaire 2.20, nous sommes donc ramenés à résoudre

$$\psi = F_\zeta(\psi) = E_\zeta(f) - E_\zeta(q\psi). \quad (2.37)$$

Nous avons $\|E_\zeta\| \leq \frac{C}{|\eta|}$. Donc si $|\eta| \geq 2CM$ alors

$$\|F_\zeta(\psi_1) - F_\zeta(\psi_2)\|_{L^2(X)} = \|E_\zeta(q\psi_1) - E_\zeta(q\psi_2)\|_{L^2(X)} \leq \frac{1}{2}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(X)},$$

pour tous $\psi_1, \psi_2 \in L^2(X)$. Donc, F_ζ étant une contraction stricte sur $L^2(X)$, (2.37) admet une unique solution $\psi \in L^2(X)$, et comme E_ζ envoie $L^2(X)$ dans $H^2(X)$, $\psi \in H^2(X)$. Finalement,

$$\|\psi\|_{L^2(X)} \leq \frac{C}{|\eta|}\|f\|_{L^2(X)} + \frac{CM}{|\eta|}\|\psi\|_{L^2(X)}.$$

D'où, puisque $\frac{CM}{|\eta|} \leq \frac{1}{2}$,

$$\|\psi\|_{L^2(X)} \leq \frac{2C}{|\eta|}\|f\|_{L^2(X)},$$

ce qui termine la preuve. \square

Les résultats de ce sous-paragraphe sont dus à [Ha].

2.1.5 Construction de solutions “optique géométrique” à l'aide d'une inégalité de Carleman

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ . Même si ce n'est pas toujours nécessaire, nous supposons que Ω est de classe C^2 .

Pour $\xi \in S^{n-1} = \{\eta \in \mathbb{R}^n; |\eta| = 1\}$, nous introduisons les ensembles

$$\Gamma_\pm(\xi) = \{x \in \Gamma; \pm\nu(x) \cdot \xi > 0\}.$$

Dans tout ce sous-paragraphe, les fonctions que nous considérerons seront à valeurs complexes.

Nous commençons par démontrer la

Proposition 2.22. *Pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u = 0$ sur Γ ,*

$$\begin{aligned} \frac{4\lambda^2}{m^2} \int_{\Omega} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |u|^2 dx + 2\lambda \int_{\Gamma_+(\xi)} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} (\xi \cdot \nu) |\partial_\nu u|^2 d\sigma \\ \leq \int_{\Omega} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |\Delta u|^2 dx \\ - 2\lambda \int_{\Gamma_-(\xi)} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} (\xi \cdot \nu) |\partial_\nu u|^2 d\sigma, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où $m = \sup\{|x|; x \in \overline{\Omega}\}$.

Preuve. Soient $\lambda > 0$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ $u = 0$ sur Γ et $v = e^{-\lambda(x \cdot \xi)} u$.

Si $L = e^{-\lambda(x \cdot \xi)} \Delta e^{\lambda(x \cdot \xi)} = \Delta + 2\lambda\xi \cdot \nabla + \lambda^2$, alors

$$|e^{-\lambda(x \cdot \xi)} \Delta u|^2 = |Lv|^2. \quad (2.39)$$

Nous écrivons $L = L_+ + L_-$, avec $L_+ = \Delta + \lambda^2$ et $L_- = 2\lambda\xi \cdot \nabla$. Donc

$$|Lv|^2 = |L_+v|^2 + |L_-v|^2 + 2\Re(L_+vL_-\bar{v}).$$

Nous utilisons la formule $2\Re(\xi \cdot v \nabla \bar{v}) = \xi \cdot \nabla(|v|^2)$ pour avoir

$$2 \int_{\Omega} \Re(\xi \cdot v \nabla \bar{v}) dx = \int_{\Omega} \xi \cdot \nabla(|v|^2) dx = \int_{\Gamma} (\xi \cdot \nu) |v|^2 d\sigma = 0, \quad (2.40)$$

car $v = 0$ sur Γ . D'autre part, pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$2 \int_{\Omega} \Re(\partial_{ii}^2 v \partial_j \bar{v} \xi_j) dx = -2 \int_{\Omega} \Re(\partial_i v \partial_{ij}^2 \bar{v} \xi_j) dx + 2 \int_{\partial\Omega} \Re(\partial_i v \partial_j \bar{v} \xi_j) \nu_i d\sigma$$

et donc, puisque $2\Re(\partial_i v \partial_{ij}^2 \bar{v}) = \partial_j(|\partial_i v|^2)$,

$$\begin{aligned} 4\lambda \int_{\Omega} \Re(\Delta v (\xi \cdot \nabla \bar{v})) dx &= -2\lambda \int_{\Omega} (\operatorname{div}(|\nabla v|^2 \xi)) dx + 4\lambda \int_{\Gamma} \Re(\partial_{\nu} v \nabla \bar{v} \cdot \xi) d\sigma \\ &= -2\lambda \int_{\Gamma} |\nabla v|^2 (\xi \cdot \nu) d\sigma + 4\lambda \int_{\Gamma} \Re(\partial_{\nu} v \nabla \bar{v} \cdot \xi) d\sigma. \end{aligned}$$

Or $v = 0$ sur Γ . Donc son gradient tangentiel est nul sur Γ . D'où, $\nabla v = \partial_{\nu} v \nu$ et par conséquence

$$\begin{aligned} 4\lambda \int_{\Omega} \Delta v (\xi \cdot \nabla \bar{v}) dx &= 2\lambda \int_{\Gamma} |\partial_{\nu} v|^2 (\xi \cdot \nu) d\sigma \\ &= 2\lambda \int_{\Gamma} \Re(e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |\partial_{\nu} u|^2 (\xi \cdot \nu)) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.40) et (2.41) impliquent

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \Re(L_+ v L_- \bar{v}) dx &= 4\lambda \int_{\Omega} \Re(\Delta v (\xi \cdot \nabla \bar{v})) dx + 4\lambda^3 \int_{\Omega} \Re(\xi \cdot v \nabla \bar{v}) \\ &= +2\lambda \int_{\Gamma} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |\partial_{\nu} u|^2 (\xi \cdot \nu) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Maintenant, d'après la Proposition 1.22, nous avons

$$\int_{\Omega} |L_- v|^2 dx = 4\lambda^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq \frac{4\lambda^2}{m^2} \int_{\Omega} |v|^2 dx = \frac{4\lambda^2}{m^2} \int_{\Omega} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |u|^2 dx. \quad (2.43)$$

Vu (2.42) et (2.43), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |\Delta u|^2 dx &= \int_{\Omega} |Lv|^2 dx \\
&\geq \int_{\Omega} |L_- v|^2 + 2 \int_{\Omega} \Re(L_+ v L_- \bar{v}) dx \\
&\geq \frac{4\lambda^2}{m^2} \int_{\Omega} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |u|^2 dx + 2\lambda \int_{\Gamma} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |\partial_{\nu} u|^2 (\xi \cdot \nu) d\sigma,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne (2.38). \square

Comme conséquence de cette proposition, nous avons le

Corollaire 2.23. (*Inégalité de Carleman*) Soient $q \in L^{\infty}(\Omega)$ et $M \geq \|q\|_{L^{\infty}}$. Alors il existe deux constantes positives λ_0 et C , qui ne dépendent que de Ω et M , telles que : pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u = 0$ sur Γ ,

$$\begin{aligned}
C\lambda^2 \int_{\Omega} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |u|^2 dx + \lambda \int_{\Gamma_+(\xi)} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} (\xi \cdot \nu) |\partial_{\nu} u|^2 d\sigma \\
\leq \int_{\Omega} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} |(\Delta - q)u|^2 dx \\
- \lambda \int_{\Gamma_-(\xi)} e^{-2\lambda(x \cdot \xi)} (\xi \cdot \nu) |\partial_{\nu} u|^2 d\sigma. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Preuve. Pour $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u = 0$ sur Γ , nous avons

$$\begin{aligned}
|\Delta u|^2 &\leq 2|(\Delta - q)u|^2 + 2\|q\|_{L^{\infty}}^2 |u|^2 \\
&\leq 2|(\Delta - q)u|^2 + 2M^2 |u|^2.
\end{aligned}$$

Vu la Proposition 2.22, il suffit de choisir λ_0 telle que $0 < \frac{4}{m^2} - \frac{2M^2}{\lambda_0^2}$ et de poser $2C = \frac{4}{m^2} - \frac{2M^2}{\lambda_0^2}$. \square

Nous fixons $\xi \in S^{n-1}$ jusqu'à la fin de la preuve du Lemme 2.24 et soit $q \in L^{\infty}(\Omega)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous munissons $L^2(\Omega)$ du produit scalaire équivalent $(\cdot, \cdot)_{\lambda}$ donné par

$$(f, g)_{\lambda} = \int_{\Omega} e^{2\lambda(x \cdot \xi)} f(x) \bar{g}(x) dx.$$

La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|\cdot\|_{\lambda}$.

Quand $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\lambda}$, nous le noterons $L_{\lambda}^2(\Omega)$.

Clairement, le dual de $L_{\lambda}^2(\Omega)$ s'identifie à $L_{-\lambda}^2(\Omega)$. Plus précisément, pour tout $\varphi \in L_{\lambda}^2(\Omega)'$, il existe un unique $g \in L_{-\lambda}^2(\Omega)$ telle que

$$\varphi(f) = (g, f)_0 \text{ pour tout } f \in L_{\lambda}^2(\Omega).$$

Soit

$$\mathcal{X} = \{w \in C^2(\overline{\Omega}); w|_{\Gamma} = 0 \text{ et } \partial_{\nu} w|_{\Gamma_+(\xi)} = 0\}.$$

Nous considérons alors \mathcal{Y} le sous-espace de $L_{\lambda}^2(\Omega)$ donné par $\mathcal{Y} = (-\Delta + \bar{q})\mathcal{X}$.

Lemme 2.24. *Il existe deux constantes positives λ_0 et K , qui ne dépendent que de Ω et M , $M \geq \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$, telles que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in H_\Delta(\Omega)$ vérifiant*

$$\begin{cases} (-\Delta + q)v = f, & \text{dans } \Omega, \\ v|_{\Gamma_-(\xi)} = 0, \end{cases}$$

et

$$\|v\|_{-\lambda} \leq \frac{K}{\lambda} \|f\|_{-\lambda}.$$

Preuve. Soient λ_0 et C (qui dépendent uniquement de Ω et M) les deux constantes du Corollaire 2.23. L'inégalité de Carleman (2.44), avec $-\xi$ à la place de ξ et \bar{q} à la place q , nous donne

$$C\lambda^2 \|w\|_\lambda^2 \leq \|(-\Delta + \bar{q})w\|_\lambda^2, \quad (2.45)$$

pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et pour tout $w \in \mathcal{X}$. Notons que, pour établir (2.45), nous avons utilisé $\Gamma_-(\xi) = \Gamma_+(-\xi)$.

Nous définissons sur \mathcal{Y} la forme anti-linéaire l comme suit

$$l : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C} : l((-\Delta + \bar{q})w) = (f, w)_0, \quad w \in \mathcal{X}.$$

Nous remarquons que l , donnée comme ci-dessus, est bien définie. En effet, si $w_1, w_2 \in \mathcal{X}$ sont telles que $(-\Delta + \bar{q})w_1 = (-\Delta + \bar{q})w_2$ alors $w_1 = w_2$ par (2.45). De plus, (2.45) nous fournit aussi

$$|l((-\Delta + \bar{q})w)| \leq \|f\|_{-\lambda} \|w\|_\lambda \leq \frac{\|f\|_{-\lambda}}{\lambda\sqrt{C}} \|(-\Delta + \bar{q})w\|_\lambda, \quad \forall w \in \mathcal{X}.$$

C'est-à-dire,

$$|l(h)| \leq \frac{\|f\|_{-\lambda}}{\lambda\sqrt{C}} \|h\|_\lambda, \quad h \in \mathcal{Y}. \quad (2.46)$$

En d'autres termes, l est continue sur \mathcal{Y} . Nous invoquons alors le théorème de prolongement de Hahn-Banach (voir [Sc2] par exemple) pour conclure que l se prolonge en une forme anti-linéaire continue, encore notée l , sur $L_\lambda^2(\Omega)$. D'où, il existe un unique $v \in L_{-\lambda}^2(\Omega)$ tel que

$$\|v\|_{-\lambda} = \|l\|, \quad (2.47)$$

$\|l\|$ étant la norme de l comme élément de $L_\lambda^2(\Omega)'$, et

$$l(w) = (v, w)_0, \quad w \in L_\lambda^2(\Omega).$$

En particulier,

$$(f, w)_0 = (v, (-\Delta + \bar{q})w)_0, \quad w \in \mathcal{X}. \quad (2.48)$$

De plus (2.46) et (2.47) impliquent

$$\|v\|_{-\lambda} \leq \frac{1}{\lambda\sqrt{C}}\|f\|_{-\lambda}.$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{X}$, nous déduisons, de façon standard, de (2.48) que

$$(-\Delta + q)v = f, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et par suite $v \in H_\Delta(\Omega)$. Nous utilisons ensuite la formule d'intégration par parties du Théorème 1.20 et (2.48) pour déduire

$$\int_\Gamma v \partial_\nu w = 0, \text{ pour tout } w \in \mathcal{X},$$

et donc $v = 0$ sur $\Gamma_-(\xi)$. \square

Nous utilisons maintenant ce lemme pour démontrer la

Proposition 2.25. *Soient $q \in L^\infty(\Omega)$ et $M \geq \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$. Nous pouvons alors trouver deux constantes positives λ_0 et C , ne dépendant que de M et Ω , telles que :*

pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et pour tout $\rho = \lambda(\xi + i\eta)$, avec $\xi, \eta \in S^{n-1}$, $\xi \cdot \eta = 0$, il existe $u \in H_\Delta(\Omega)$ telle que $(-\Delta + q)u = 0$ dans Ω et

$$u = e^{\rho \cdot x}(1 + w),$$

où $w \in H_\Delta(\Omega)$ vérifie

$$w|_{\Gamma_-(\xi)} = 0 \text{ et } \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Preuve. Soient λ_0, K comme dans le Lemme 2.24 et soit $\lambda \geq \lambda_0$. Il existe alors $v \in H_\Delta(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} (-\Delta + q)v = -qe^{\rho \cdot x}, & \text{dans } \Omega, \\ v|_{\Gamma_-(\xi)} = 0, \end{cases}$$

et

$$\|v\|_{-\lambda} \leq \frac{K}{\lambda}\|qe^{\rho \cdot x}\|_{-\lambda}.$$

Si $w = e^{-\rho \cdot x}v$ et $u = v + e^{\rho \cdot x} = e^{\rho \cdot x}(1 + w)$, nous vérifions sans difficulté que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \|e^{-\rho \cdot x}v\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{-\lambda} \leq \frac{K}{\lambda}\|qe^{\rho \cdot x}\|_{-\lambda} \leq \frac{K|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\|q\|_{L^\infty} \leq \frac{K|\Omega|^{\frac{1}{2}}M}{\lambda},$$

$(-\Delta + q)u = 0$ dans Ω et $w|_{\Gamma_-(\xi)} = 0$. \square

Les résultats de ce paragraphe correspondent à une partie de l'article de A. L. Bukhgeim et G. Uhlmann [BU]. Dans ce même article, les auteurs utilisent les solutions “optique géométrique”, données par la Proposition 2.25, pour démontrer l'unicité de q dans $-\Delta + q$, à partir d'un opérateur Dirichlet-Neumann partiel. C'est un résultat qui généralise le Théorème 2.6. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article original pour les énoncés précis et les démonstrations (voir aussi le Problème 5).

2.2 Un problème spectral inverse : un théorème de Borg-Levinson multidimensionnel

2.2.1 Unicité

Dans ce sous-paragraphe Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 . Nous notons sa frontière par Γ .

Comme au paragraphe précédent, $A_q, q \in L^\infty(\Omega)$, est l'opérateur $-\Delta + q$ ayant pour domaine $D(A_q) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Nous rappelons que le spectre de A_q est constitué de valeurs propres, comptées avec leur multiplicité,

$$-\infty < \lambda_{1,q} \leq \lambda_{2,q} \leq \dots \leq \lambda_{k,q} \rightarrow +\infty,$$

et que A_q possède une base de fonctions propres $(\varphi_{k,q})$. Nous verrons plus loin que, pour chaque k , $\varphi_{k,q} \in H^2(\Omega)$ et donc $\partial_\nu \varphi_{k,q} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Notre objectif ici est de démontrer le

Théorème 2.26. *Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ et (φ_{k,q_1}) une base de fonctions propres de A_{q_1} . Nous supposons que, pour tout k , $\lambda_{k,q_1} = \lambda_{k,q_2}$ et qu'il existe (φ_{k,q_2}) une base de fonctions propres de A_{q_2} telle que*

$$\partial_\nu \varphi_{k,q_1} = \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \text{ pour chaque } k.$$

Alors $q_1 = q_2$.

Nous montrons d'abord quelques résultats préliminaires. Dans la suite, pour $q \in L^\infty(\Omega)$, $\sigma(A_q)$ et $\rho(A_q)$ désignent respectivement le spectre et l'ensemble résolvant de A_q , c'est-à-dire, $\sigma(A_q) = \{\lambda_{k,q}, k \geq 1\}$ et $\rho(A_q) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A_q)$.

D'après le Théorème 1.26, si $\lambda \in \rho(A_q)$ et si $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ alors il existe un unique $u_{q,f}(\lambda)$ solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + qu - \lambda u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et l'opérateur

$$\Lambda_q(\lambda) : f \rightarrow \partial_\nu u_{q,f}(\lambda)$$

est borné de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Soient maintenant $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < 0$ et $|\lambda| \geq 2M$, où $M \geq \max(\|q_1\|_{L^\infty}, \|q_2\|_{L^\infty})$. Nous posons $u = u_{q_1,f}(\lambda) - u_{q_2,f}(\lambda)$. Alors il est aisé de voir que u est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1 u - \lambda u = (q_2 - q_1)u_{q_2,f}(\lambda), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Par une application de la formule de Green, nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} (q_1 - \lambda) u^2 = \int_{\Omega} (q_2 - q_1) u_{q_2, f}(\lambda) u. \quad (2.49)$$

D'où

$$\frac{|\lambda|}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_{q_2, f}(\lambda)\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{4M}{|\lambda|} \|u_{q_2, f}(\lambda)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.50)$$

D'autre part, nous avons $u_{q_2, f}(\lambda) = v_0 + v_1$, où v_0 et v_1 sont les solutions respectives des problèmes aux limites

$$\begin{cases} -\Delta v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = f, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta v + q_2 v - \lambda v = (\lambda - q_2) v_0, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme précédemment, nous avons l'estimation

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{4\|q_2 - \lambda\|_{L^\infty(\Omega)}}{|\lambda|} \|v_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 8\|v_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or, d'après le Théorème 1.26, $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}$, où C dépend uniquement de Ω . Il en résulte que

$$\|u_{q_2, f}(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.51)$$

Cette estimation, en combinaison avec (2.50), entraîne

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.52)$$

Une nouvelle application de l'estimation du Théorème 1.26 conduit à

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(|\lambda|\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|q_2 - q_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_{q_2, f}(\lambda)\|_{L^2(\Omega)}).$$

Ceci, (2.51) et (2.52) impliquent

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}, \quad (2.53)$$

où la constante C ne dépend que de Ω et M . Nous faisons alors appel à l'inégalité d'interpolation

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{s}{2}} \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{s}{2}}, \quad 0 \leq s \leq 2,$$

pour conclure que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-\frac{s}{2}}} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}, \quad 0 \leq s \leq 2,$$

où C est une constante qui dépend uniquement de Ω , M et s . Nous en déduisons que, pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$,

$$\|\partial_\nu u\|_{H^t(\Gamma)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1-2t}{4}}} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)},$$

car l'opérateur de trace $w \rightarrow \partial_\nu w|_\Gamma$ est borné de $H^{t+\frac{3}{2}}(\Omega)$ dans $H^t(\Gamma)$. Par suite, $\|\cdot\|_t$ désignant la norme dans $\mathcal{L}(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), H^t(\Gamma))$,

$$\|A_{q_1}(\lambda) - A_{q_2}(\lambda)\|_t \leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1-2t}{4}}}.$$

En particulier, nous avons le

Lemme 2.27. *Pour $0 \leq t < \frac{1}{2}$,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|A_{q_1}(\lambda) - A_{q_2}(\lambda)\|_t = 0.$$

Les espaces $H^s(\Omega)$, $0 \leq s \in \mathbb{R}$, se construisent à partir des espaces $H^m(\Omega)$, m entier positif, par interpolation. Pour $0 < s < 1$ et $m \geq 0$ entier, $H^{m+s}(\Omega)$ constitue un espace intermédiaire entre $H^m(\Omega)$ et $H^{m+1}(\Omega)$. Le lecteur intéressé pourra consulter J.-L. Lions et E. Magenes [LM] pour avoir plus de détails sur la construction des espaces $H^s(\Omega)$, ainsi que les théorèmes de traces pour ces espaces.

Nous énonçons maintenant un second lemme.

Lemme 2.28. *Soit $q \in L^\infty(\Omega)$. Alors pour tout entier $m > \frac{n}{2}$, pour tout $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et pour tout $\lambda \in \rho(A_q)$*

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} A_q(\lambda) f = -m! \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q} - \lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q},$$

où

$$\langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle = \int_\Gamma f \partial_\nu \varphi_{k,q} d\sigma.$$

Preuve. Pour $\lambda \in \rho(A_q)$, nous posons $R_q(\lambda) = (A_q - \lambda)^{-1}$. D'après la Proposition 2.30 ci-dessous,

$$R_q(\lambda)h = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_{k,q} - \lambda} (h, \varphi_{k,q}) \varphi_{k,q}, \quad h \in L^2(\Omega),$$

(\cdot, \cdot) désignant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\lambda \in \rho(A_q) \rightarrow R_q(\lambda) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega))$ est holomorphe.

Soient $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et F la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Nous vérifions facilement que

$$u_{q,f}(\lambda) = F - R_q(\lambda)[(q - \lambda)F]$$

et donc $\lambda \in \rho(A_q) \rightarrow u_{q,f}(\lambda)$ est holomorphe. D'autre part, il est aisé de voir que $u^{(m)} = \frac{d^m}{d\lambda^m} u_{q,f}(\lambda)$, $m \geq 1$, est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + qu - \lambda u = mu^{(m-1)}, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$u^{(m)} = mR_q(\lambda)u^{(m-1)} = \dots = m!R_q(\lambda)^m u^0,$$

ou encore

$$u^{(m)} = m!R_q(\lambda)^m \{F - R_q(\lambda)[(q - \lambda)F]\}. \quad (2.54)$$

A l'aide de la formule de Green et de l'identité

$$(q - \lambda)\varphi_{k,q} = (\lambda_{k,q} - \lambda)\varphi_{k,q} + \Delta\varphi_{k,q},$$

nous obtenons

$$((q - \lambda)F, \varphi_{k,q}) = (\lambda_{k,q} - \lambda)(F, \varphi_{k,q}) + \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} R_q(\lambda)^{m+1}[(q - \lambda)F] &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q} - \lambda)^{m+1}} ((q - \lambda)F, \varphi_{k,q}) \varphi_{k,q} \\ &= R_q(\lambda)^m F + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q} - \lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle \varphi_{k,q}. \end{aligned}$$

Nous admettons pour le moment que la série ci-dessus est convergente dans $H^2(\Omega)$ pour $m > \frac{n}{2}$. (2.54) entraîne alors

$$u^{(m)}(\lambda) = -m! \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q} - \lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle \varphi_{k,q}.$$

Par suite,

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} A_q(\lambda)f = \partial_\nu u^{(m)}(\lambda) = -m! \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q} - \lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q}.$$

Pour compléter la preuve, il nous reste à montrer la convergence dans $H^2(\Omega)$ de la série de terme général $\frac{1}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle \varphi_{k,q}$. Nous rappelons d'abord que si (μ_k) est la suite des valeurs propres de A_0 (i.e. A_q avec $q = 0$), alors il existe deux constantes positives C_1 et C_2 , qui dépendent uniquement de Ω , telles que

$$C_1 k^{\frac{2}{n}} \leq \mu_k \leq C_2 k^{\frac{2}{n}}. \quad (2.55)$$

(Le lecteur trouvera une démonstration de ces estimations dans O. Kavian [Ka1].)

D'autre part, nous montrons facilement, à l'aide de la formule du min-max (voir par exemple R. Dautray et J.-L. Lions [DL]) pour les valeurs propres, que

$$\mu_k \leq \lambda_{k,q} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mu_k + 2\|q\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ceci, combiné avec le fait $\|\varphi_{k,q}\|_{H^2(\Omega)} \leq C|\lambda_{k,q}|\|\varphi_{k,q}\|_{L^2(\Omega)} = C|\lambda_{k,q}|$ (voir le Théorème 1.26), conduit à

$$\left\| \frac{1}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle \varphi_{k,q} \right\|_{H^2} \sim \frac{1}{k^{\frac{2m}{n}}} \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Preuve du Théorème 2.26. Soit $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. D'après le lemme 2.28, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} [\Lambda_{q_1}(\lambda)f - \Lambda_{q_2}(\lambda)f] = 0 \text{ pour tous } m > \frac{n}{2}, \text{ et } \lambda \leq -\lambda_0,$$

et donc $\Lambda_{q_1}(\lambda)f - \Lambda_{q_2}(\lambda)f$ est un polynôme en λ . D'où

$$\Lambda_{q_1}(\lambda)f - \Lambda_{q_2}(\lambda)f = 0 \text{ pour tout } \lambda \leq -\lambda_0$$

par le Lemme 2.27. Pour conclure, nous utilisons le théorème suivant :

Théorème 2.29. Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$. Nous supposons qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\Lambda_{q_1}(\lambda) = \Lambda_{q_2}(\lambda)$ pour tout $\lambda \leq -\lambda_0$. Alors $q_1 = q_2$.

La démonstration de ce théorème est quasi-similaire à celle du Théorème 2.11 sauf qu'il faut utiliser le Théorème 2.9 à la place du Théorème 2.7. \square

Nous terminons ce paragraphe par la preuve du résultat que nous avons utilisé pour démontrer le Lemme 2.28.

Proposition 2.30. i) Pour tout $\lambda \in \rho(A_q)$ et pour tout $h \in L^2(\Omega)$,

$$R_q(\lambda)h = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_{k,q} - \lambda} (h, \varphi_{k,q}) \varphi_{k,q}.$$

ii) Soit $\lambda \in \rho(A_q)$. Alors il existe deux constantes $\delta > 0$ et $C > 0$ pour lesquelles

$$\|R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda) - \mu R_q(\lambda)^2\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega))} \leq C|\mu|^2, \quad \forall \mu \in \mathbb{C}, \quad |\mu| \leq \delta. \quad (2.56)$$

En particulier, $\lambda \in \rho(A_q) \rightarrow R_q(\lambda) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega))$ est holomorphe.

Preuve. i) Nous fixons $\lambda \in \rho(A_q)$ et $h \in L^2(\Omega)$. Pour $1 \leq k < l$, nous avons

$$(-\Delta + q - \lambda) \sum_{i=k}^l \frac{1}{\lambda_{i,q} - \lambda} (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q} = \sum_{i=k}^l (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q}.$$

Ceci et le Théorème 1.26 nous permettent de conclure qu'il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de q et λ) telle que

$$\left\| \sum_{i=k}^l \frac{1}{\lambda_{i,q} - \lambda} (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q} \right\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left\| \sum_{i=k}^l (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q} \right\|_{L^2(\Omega)} = C \left(\sum_{i=k}^l (h, \varphi_{i,q})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or la série de terme général $(h, \varphi_{i,q})^2$ converge vers $\|h\|_{L^2(\Omega)}^2$ et donc la série de terme général $\frac{1}{\lambda_{i,q} - \lambda} (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q}$ converge vers sa somme dans $H^2(\Omega)$, qui est aussi un élément de $H_0^1(\Omega)$.

Nous utilisons maintenant le fait que

$$(-\Delta + q - \lambda)[R_q(\lambda)h - \sum_{i \leq k} \frac{1}{\lambda_{i,q} - \lambda} (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q}] = h - \sum_{i \leq k} (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q},$$

et de nouveau le Théorème 1.26 pour déduire que

$$\|R_q(\lambda)h - \sum_{i \leq k} \frac{1}{\lambda_{i,q} - \lambda} (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|h - \sum_{i \leq k} (h, \varphi_{i,q}) \varphi_{i,q}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le résultat s'ensuit alors puisque le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus converge vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

ii) Soit $\lambda \in \rho(A_q)$. Ce dernier étant ouvert, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\lambda + \mu \in \rho(A_q)$ pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \leq \delta$. Comme $u = R_q(\lambda + \mu)h$, $h \in L^2(\Omega)$ et $|\mu| \leq \delta$, vérifie

$$(-\Delta + q - \lambda)u = \mu u + h,$$

nous avons alors

$$R_q(\lambda + \mu) = \mu R_q(\lambda) R_q(\lambda + \mu) + R_q(\lambda).$$

D'où,

$$R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda) - \mu R_q(\lambda)^2 = \mu R_q(\lambda) [R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda)].$$

Nous utilisons encore une fois le Théorème 1.26 (appliqué à $u = R_q(\lambda) [R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda)]h$) pour conclure que

$$\| [R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda) - \mu R_q(\lambda)^2] h \|_{H^2(\Omega)} \leq C |\mu| \| [R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda)] h \|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.57)$$

où C est une constante indépendante de μ . D'autre part, pour $h \in L^2(\Omega)$,

$$[R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda)] h = \mu \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q} - \lambda - \mu)(\lambda_{k,q} - \lambda)} (h, \varphi_{k,q}) \varphi_{k,q}$$

et donc

$$\| [R_q(\lambda + \mu) - R_q(\lambda)] h \|_{L^2(\Omega)} \leq K \| h \|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.58)$$

avec $K > 0$ une constante qui majore $\frac{1}{(\lambda_{k,q} - \lambda - \mu)(\lambda_{k,q} - \lambda)}$ uniformément en k et μ . Nous combinons (2.57) et (2.58) pour avoir (2.56). \square

Le Théorème 2.26 a été démontré indépendamment par A. Nachman, J. Sylvester, G. Uhlmann [NSU] et R. G. Novikov [No]. La démonstration, de ce théorème, que nous donnons ici suit les grandes lignes de celle proposée dans [NSU]. Nous verrons au sous-paragraphe 2.2.4 un résultat dû à H. Isozaki [Iso] qui dit que la conclusion du Théorème 2.26 reste valable seulement avec $\lambda_{k,q_1} = \lambda_{k,q_2}$ et $\partial_\nu \varphi_{k,q_1} = \partial_\nu \varphi_{k,q_2}$ à partir d'un certain rang.

2.2.2 Stabilité

Les notations sont celles du paragraphe précédent. Soient $0 \leq q \in L^\infty(\Omega)$, $(\lambda_{k,q})$ la suite des valeurs propres de l'opérateur A_q et $(\varphi_{k,q})$ une base orthonormale de fonctions propres pour A_q où, rappelons le, A_q est l'opérateur $-\Delta + q$ avec pour domaine $D(A_q) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Dans ce qui suit C est une constante générique ne dépendant que de Ω et q .

Puisque $\varphi_{k,q}$ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} (-\Delta + q)\varphi = \lambda_{k,q}\varphi, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

alors, d'après le Théorème 1.26, elle vérifie

$$\| \varphi_{k,q} \|_{H^2(\Omega)} \leq C \lambda_{k,q} \| \varphi_{k,q} \|_{L^2(\Omega)} = C \lambda_{k,q}$$

et donc

$$\| \partial_\nu \varphi_{k,q} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \lambda_{k,q}.$$

Mais $\lambda_{k,q} \leq C k^{\frac{2}{n}}$ (voir (2.55)). D'où

$$\| \partial_\nu \varphi_{k,q} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C k^{\frac{2}{n}}. \quad (2.59)$$

Nous en déduisons que la suite $(k^{-\frac{2m}{n}} \| \partial_\nu \varphi_{k,q} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \in l^1$ dès que $m > \frac{n}{2} + 1$. Ici, nous avons noté par l^1 , comme nous le faisons habituellement, l'espace

de Banach des suites numériques dont les séries associées sont absolument convergentes. Il est muni de sa norme naturelle.

Nous fixons $\frac{n}{2} + 1 < \zeta \leq n + 1$ et soit $w = (w_k)$ la suite donnée par $w_k = k^{-\frac{2\zeta}{n}}$ pour chaque $k \geq 1$. Nous considérons alors l'espace de Banach

$$l^1(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), w) = \{g = (g_k); g_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), k \geq 1, \text{ et } (w_k \|g_k\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \in l^1\}$$

que nous munissons de sa norme naturelle

$$\|g\|_{l^1(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), w)} = \sum_{k \geq 1} w_k \|g_k\|_{l^1(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), w)}.$$

D'autre part, si $\mu = (\mu_k)$ désigne la suite des valeurs propres de A_0 , c'est-à-dire les valeurs propres du laplacien avec une condition Dirichlet au bord alors, d'après une conséquence de la formule du min-max,

$$|\lambda_{k,q} - \mu_k| \leq \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \quad k \geq 1.$$

Il en résulte que la suite $\lambda_q = (\lambda_{k,q})$ appartient à l'espace affine $\tilde{l}^\infty = \mu + l^\infty$, l^∞ étant l'espace de Banach des suites numériques bornées. Nous munissons \tilde{l}^∞ de la distance

$$d_\infty(\lambda_1, \lambda_2) = \|(\lambda_1 - \mu) - (\lambda_2 - \mu)\|_{l^\infty} = \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{l^\infty},$$

pour $\lambda_i \in \tilde{l}^\infty$, $i = 1, 2$.

Nous sommes en mesure d'énoncer maintenant le résultat de stabilité que nous allons démontrer dans ce sous-paragraphe.

Théorème 2.31. *Soit, pour $i = 1, 2$, $q_i \in L^\infty(\Omega)$. Nous fixons $0 < \alpha < 1$ et soit M une constante telle que $M \geq \|q_i\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$, $i = 1, 2$. Il existe alors une constante positive C qui ne dépend que de M et α telle que*

$$\|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(d_\infty(\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}) + \|\partial_\nu \varphi_{q_1} - \partial_\nu \varphi_{q_2}\|_{l^1(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), w)})^\beta,$$

avec $\partial_\nu \varphi_{q_i} = (\partial_\nu \varphi_{k,q_i})$, $i = 1, 2$, et $\beta = (1 - \frac{4}{(1-2t)+n+4})(\frac{2\alpha \min(\alpha, \frac{1}{2})}{(2\alpha+n)(2n+5)(n+\alpha+\frac{15}{2})})$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous démontrons un certain nombre de résultats intermédiaires. Nous commençons d'abord par une extension du lemme 2.6.

Dans ce qui suit, nous fixons $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Lemme 2.32. *Soit l un entier positif donné. Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant $0 \leq q_1, q_2 \leq M$, pour une certaine constante positive M . Alors il existe C , une constante qui ne dépend que de Ω et M , telle que*

$$\|\frac{d^j}{d\lambda^j}[A_{q_1}(\lambda) - A_{q_2}(\lambda)]\|_t \leq \frac{C}{|\lambda|^{j+\frac{1-2t}{4}}}, \quad \lambda \leq 0 \text{ et } 0 \leq j \leq l,$$

où, comme dans le dernier sous-paragraphe, $\|\cdot\|_t$ désigne la norme de $\mathcal{L}(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), H^t(\Gamma))$.

Preuve. Nous nous donnons $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Pour $i = 1, 2$ et $\lambda \in \rho(A_{q_1}) \cap \rho(A_{q_2})$, soit $u_{q_i, f}(\lambda)$ comme dans le sous-paragraphe précédent. C'est-à-dire $u_{q_i, f}(\lambda)$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + q_i u - \lambda u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

$u(\lambda) = u_{q_1, f}(\lambda) - u_{q_2, f}(\lambda)$ est alors la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1 u - \lambda u = (q_2 - q_1)u_{q_2, f}(\lambda), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme dans la preuve du Lemme 2.27, nous montrons

$$\|u(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{|\lambda|} \|u_{q_2, f}(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.60)$$

et

$$\|u_{q_2, f}(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.61)$$

Donc

$$\|u(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.62)$$

Pour simplifier les notations, nous posons $u_2(\lambda) = u_{q_2, f}(\lambda)$. Nous pouvons vérifier que $u'_2(\lambda)$ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u'_2 + q_2 u'_2 - \lambda u'_2 = u_2, & \text{dans } \Omega, \\ u'_2 = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

En utilisant les arguments ayant servis pour établir (2.60) et (2.61), nous montrons

$$\|u'_2(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{|\lambda|} \|u_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci et (2.61) impliquent

$$\|u'_2(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.63)$$

Puisque $u'(\lambda)$ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u' + q_1 u' - \lambda u' = u(\lambda) + (q_2 - q_1)u'_2(\lambda), & \text{dans } \Omega, \\ u' = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

elle vérifie alors

$$\|u'(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{|\lambda|} \|u(\lambda) + (q_2 - q_1)u'_2(\lambda)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cette dernière, inégalité (2.62) et (2.63) entraînent

$$\|u'(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{M}{|\lambda|} \|u(\lambda) + (q_2 - q_1)u'_2(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.64)$$

Nous avons aussi, d'après l'estimation H^2 du Théorème 1.26,

$$\|u'(\lambda)\|_{H^2(\Omega)} \leq C(|\lambda| \|u'(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} + \|u'_2(\lambda)\|_{L^2(\Omega)})$$

Nous en déduisons

$$\|u'(\lambda)\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}, \quad (2.65)$$

qui résulte de (2.62), (2.63) et (2.64).

Les inégalités (2.64), (2.65) et l'inégalité d'interpolation

$$\|w\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|w\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{s}{2}} \|w\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{s}{2}}, \quad 0 \leq s \leq 2, \quad w \in H^2(\Omega),$$

nous permettent de conclure

$$\|u(\lambda)\|_{H^s(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{s}{2}}} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}, \quad 0 \leq s \leq 2.$$

De ceci, nous tirons

$$\|\partial_\nu u'(\lambda)\|_{H^t(\Gamma)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1+\frac{1-2t}{4}}} \|f\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}.$$

Donc

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} [A_{q_1}(\lambda) - A_{q_2}(\lambda)] \right\|_t \leq \frac{C}{|\lambda|^{1+\frac{1-2t}{4}}}.$$

Nous venons donc de montrer le résultat pour $l = 0$ et $l = 1$. Le cas général s'obtient tout simplement par induction sur l . \square

Posons $F(\lambda) = A_{q_1}(\lambda) - A_{q_2}(\lambda)$. La formule de Taylor avec reste intégral nous donne, pour $1 \leq j \leq n$,

$$F^{(j)}(0) = \sum_{p=j}^n \frac{(-\lambda)^{p-j}}{(p-j)!} F^{(p)}(\lambda) + \int_\lambda^0 \frac{(-\tau)^{n-j}}{(n-j)!} F^{(n+1)}(\tau) d\tau.$$

Nous admettons pour le moment le

Lemme 2.33.

$$\|F^{(n+1)}(\lambda)\|_t \leq \delta, \quad (2.66)$$

où

$$\delta = C(d_\infty(\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}) + \|\partial_\nu \varphi_{q_1} - \partial_\nu \varphi_{q_2}\|_{l^1(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), w)}).$$

Vu le Lemme 2.32, nous déduisons de cette estimation

$$\|F^{(j)}(0)\|_t \leq C(|\lambda|^{-j-\frac{1-2t}{4}} + |\lambda|^{n-j+1}\delta)$$

et donc

$$\|F^{(j)}(0)\|_t \leq C(|\lambda|^{-\frac{1-2t}{4}} + |\lambda|^{n+1}\delta), \text{ si } |\lambda| \geq 1.$$

En particulier,

$$\|F^{(j)}(0)\|_t \leq C \min_{\rho \geq 1} (\rho^{-\frac{1-2t}{4}} + \rho^{n+1}\delta) = C\delta^\theta, \quad (2.67)$$

où $\theta = 1 - \frac{4}{(1-2t)+n+4}$.

Notons $Q = \Omega \times (0, T)$ et $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Le point important dans la preuve du Théorème 2.31 consiste d'abord à établir un résultat de stabilité pour un problème inverse hyperbolique. Nous considérons alors le problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + q)u = 0, & \text{dans } Q, \\ u(\cdot, 0) = \partial_t u(\cdot, 0) = 0, \\ u|_\Sigma = f. \end{cases} \quad (2.68)$$

Soit

$$\Xi = \{h \in H^1(0, T; H^{3/2}(\Gamma)) \cap H^2(0, T; L^2(\Gamma)); h(\cdot, 0) = \partial_t h(\cdot, 0) = 0\}.$$

D'après le Théorème 3.1 de [LM], Vol II, et sa preuve nous déduisons que, pour chaque $f \in \Xi$, le problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u^0 - \Delta u^0 = 0, & \text{dans } Q, \\ u^0(\cdot, 0) = \partial_t u^0(\cdot, 0) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u^0|_\Sigma = f, \end{cases}$$

admet une unique solution $u_f^0 \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))$ et

$$\|u_f^0\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C_0 \|f\|_{H^1(0, T; H^{3/2}(\Gamma)) \cap H^2(0, T; L^2(\Gamma))},$$

pour une certaine constante positive C_0 .

Maintenant pour $q \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in \Xi$, nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u^1 - \Delta u^1 + qu^1 = qu^0, & \text{dans } Q, \\ u^1(\cdot, 0) = \partial_t u^1(\cdot, 0) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u^1|_\Sigma = 0. \end{cases}$$

Puisque $qu^0 \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, ce problème admet une unique solution $u_{q,f}^1 \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))$ et

$$\begin{aligned} \|u_{q,f}^1\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))} &\leq C_1 \|qu^0\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} \\ &\leq C'_1 \|f\|_{H^1(0, T; H^{3/2}(\Gamma)) \cap H^2(0, T; L^2(\Gamma))}, \end{aligned}$$

où C_1 et C'_1 sont deux constantes positives. Ceci résulte tout simplement d'un théorème de J.-L. Lions (voir [LM]).

Nous en déduisons que le problème aux limites (2.68) admet une unique solution $u_{q,f} = u_f^0 + u_{q,f}^1 \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))$ et l'opérateur Dirichlet-Neumann hyperbolique défini par

$$H_q : f \in \Xi \rightarrow \partial_\nu u_{q,f} \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

est borné.

Nous nous intéressons au problème inverse qui consiste à la détermination de q à partir de H_q . Nous n'allons pas considérer directement H_q comme opérateur borné de Ξ dans $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ mais nous utiliserons seulement sa restriction, encore notée H_q , au sous-espace de Ξ donné par

$$\Xi_0 = \{g \in H^{2(n+2)}((0, T); H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)); \partial_t^j g(\cdot, 0) = 0, 0 \leq j \leq 2n+3\}.$$

Pour q_1, q_2 , dans $L^\infty(\Omega)$, nous noterons $\|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t$ la norme de $H_{q_1} - H_{q_2}$, considéré comme opérateur borné de Ξ_0 , muni de la norme de $H^{2(n+2)}((0, T); H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))$, à valeurs $L^2(0, T; H^t(\Gamma))$.

Nous avons le

Théorème 2.34. *Soit, pour $i = 1, 2$, $q_i \in L^\infty(\Omega)$. Nous fixons $0 < \alpha < 1$ et soit $M > 0$ une constante telle que $M \geq \|q_i\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$. Soit $T = \text{diam}(\Omega) + 3$. Alors il existe une contante positive C , qui ne dépend que de M et α , telle que*

$$\|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t^\kappa,$$

$$\text{où } \kappa = \frac{2\alpha \min(\alpha, \frac{1}{2})}{(2\alpha+n)(2n+5)(n+\alpha+\frac{15}{2})}.$$

La démonstration de ce théorème fera l'objet principal du prochain sous-paragraphe.

Preuve du Théorème 2.31. Comme précédemment, nous posons

$$\delta = d_\infty(\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}) + \|\partial_\nu \varphi_{q_1} - \partial_\nu \varphi_{q_2}\|_{L^1(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), w)}.$$

Dans un premier temps, nous montrons

$$\|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t \leq C \delta^\theta, \quad (2.69)$$

avec θ comme ci-dessus. C'est-à-dire $\theta = 1 - \frac{4}{(1-2t)+n+4}$. Pour cela, nous utiliserons le

Lemme 2.35. *Soit $f \in \Xi_0$. Alors*

$$H_q f = \sum_{j=0}^{n+1} \left[\frac{d^j}{d\lambda^j} A_q(\lambda) \right]_{|\lambda=0} (-\partial_t^2 f) + R_q f, \quad (2.70)$$

avec

$$R_q f = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_{q,k}^{n+\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_\nu \varphi_{q,k} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_{q,k}}(t-s) ds \langle -\partial_s^{2(n+2)} f(\cdot, s), \partial_\nu \varphi_{q,k} \rangle.$$

De façon similaire à la preuve du Lemme 2.27, nous montrons

$$\|R_{q_1} - R_{q_2}\|_t \leq C\delta.$$

Ceci, l'identité (2.70) et l'estimation (2.67) impliquent

$$\|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t \leq C(\delta + \delta^\theta).$$

Par suite,

$$\|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t \leq C\delta^\theta, \text{ pour } \delta \text{ assez petit.}$$

Nous combinons cette dernière estimation avec le Théorème 2.34 pour avoir

$$\|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\delta^\beta,$$

où $\beta = \theta\kappa = (1 - \frac{4}{(1-2t)+n+4})(\frac{2\alpha \min(\alpha, \frac{1}{2})}{(2\alpha+n)(2n+3)(n+\alpha+\frac{1}{2})})$. D'où le résultat. \square

Il nous reste à montrer les Lemmes 2.33 et 2.35.

Preuve du Lemme 2.33. D'après le Lemme 2.28, nous avons

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\lambda) &= -n! \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)^{n+2}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \\ &\quad + n! \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{n+2}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_2}. \end{aligned}$$

Nous décomposons $F^{(n+1)}(\lambda)$ en trois termes $F^{(n+1)}(\lambda) = I_1 + I_2 + I_3$, avec

$$\begin{aligned} I_1 &= -n! \sum_{k \geq 1} \left[\frac{1}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)^{n+2}} - \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{n+2}} \right] \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_1}, \\ I_2 &= -n! \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{n+2}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} - \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_1}, \\ I_3 &= -n! \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{n+2}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \rangle [\partial_\nu \varphi_{k,q_1} - \partial_\nu \varphi_{k,q_2}]. \end{aligned}$$

Pour I_1 , nous avons

$$\|I_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq n! \|f\|_{L^2(\Gamma)} \left| \frac{1}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)^{n+2}} - \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{n+2}} \right| \|\partial_\nu \varphi_{k,q_2}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2.$$

Mais

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)^{n+2}} - \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{n+2}} \right| &\leq \max\left(\frac{1}{\lambda_{k,q_1}^{n+3}}, \frac{1}{\lambda_{k,q_2}^{n+3}}\right) |\lambda_{k,q_1} - \lambda_{k,q_2}| \\ &\leq \frac{C}{k^{\frac{2(n+3)}{n}}} |\lambda_{k,q_1} - \lambda_{k,q_2}|, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (2.55) dans la dernière inégalité. Par suite, comme (voir (2.59))

$$\begin{aligned} \|\partial_\nu \varphi_{k,q_2}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq C k^{\frac{2}{n}}, \\ \|I_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Gamma)} d_\infty(\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\frac{2(n+2)}{n}}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Nous procédons de façon identique pour démontrer

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|I_3\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_{k,q_2}^{n+1}} \|\partial_\nu \varphi_{k,q_2} - \partial_\nu \varphi_{k,q_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\frac{2(n+1)}{n}}} \|\partial_\nu \varphi_{k,q_2} - \partial_\nu \varphi_{k,q_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\frac{2}{n}}} \|\partial_\nu \varphi_{k,q_2} - \partial_\nu \varphi_{k,q_1}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|I_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|I_3\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_\nu \varphi_{q_1} - \partial_\nu \varphi_{q_2}\|_{L^1(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), w)}. \quad (2.72)$$

Le résultat est alors une conséquence immédiate de (2.71) et (2.72). \square

Preuve du Lemme 2.35. Nous fixons q , f et, pour simplifier les notations, nous utiliserons simplement u à la place de $u_{q,f}$. Nous décomposons u sous la forme suivante :

$$u = \sum_{k=0}^{n+1} u^k + r, \quad (2.73)$$

où les u^k et r vérifient

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u^0 = 0, & \text{dans } Q, \\ u^0 = f, & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u^k = -\partial_t^2 u^{k-1}, & \text{dans } Q, \\ u^k = 0, & \text{sur } \Sigma, \text{ pour } 1 \leq k \leq n+1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (-\partial_t^2 - \Delta + q)r = -\partial_t^2 u^{n+1}, & \text{dans } Q, \\ r(\cdot, 0) = \partial_t r(\cdot, 0) = 0, \\ r = f, & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Nous pouvons démontrer sans trop de difficultés que

$$\partial_\nu u^k = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{|\lambda=0}^k A_q(\lambda)[- \partial_t^2 f] \quad (2.74)$$

et

$$r = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_{q,k}^{n+\frac{5}{2}}} \partial_\nu \varphi_{q,k} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_{q,k}}(t-s) ds \langle -\partial_s^{2(n+2)} f(\cdot, s), \partial_\nu \varphi_{q,k} \rangle. \quad (2.75)$$

(2.70) résulte alors de (2.73), (2.74) et (2.75). \square

2.2.3 Retour sur la stabilité du problème hyperbolique

Rappelons les notations : $Q = \Omega \times (0, T)$ et $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Dans ce sous-paragraphe nous démontrons le Théorème 2.34. La preuve nécessite quelques résultats préliminaires. Nous commençons par le

Lemme 2.36. *Pour $f_i \in \Xi_0$ et $u_i = u_{q_i, f_i}$, $i = 1, 2$, nous avons*

$$\int_Q (q_1 - q_2) u_1 u_2 = \int_\Sigma f_1 (H_{q_1} - H_{q_2})(f_2). \quad (2.76)$$

Preuve. Puisque les u_i sont les solutions variationnelles de (2.68) pour $q = q_i$ et $f = f_i$, nous avons

$$\int_Q (-\partial_t u_1 \partial_t u_2 + \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + q_1 u_1 u_2) = \int_\Sigma f_2 H_{q_1}(f_1) \quad (2.77)$$

et

$$\int_Q (-\partial_t u_1 \partial_t u_2 + \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + q_2 u_1 u_2) = \int_\Sigma f_1 H_{q_2}(f_2). \quad (2.78)$$

Nous soustrayons, membre à membre, (2.77) de (2.78) pour avoir

$$\int_Q (q_1 - q_2) u_1 u_2 = \int_\Sigma f_2 H_{q_1}(f_1) - f_1 H_{q_2}(f_2). \quad (2.79)$$

Comme H_{q_i} est auto-adjoint (conséquence immédiate de la formulation variationnelle de (2.68)), (2.79) entraîne (2.76). \square

Dans un second lemme nous montrons l'existence de solutions particulières de l'équation

$$(-\partial_t^2 + \Delta + q)u = 0, \quad (2.80)$$

avec $q \in L^\infty(\Omega)$.

Lemme 2.37. Soient $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in S^{n-1}$ et $\rho > 0$. Alors (2.80) admet une solution de la forme

$$u_{q,\pm} = \chi(x + t\omega)e^{\pm i\rho(x \cdot \omega + t)} + w_{q,\pm}, \quad (2.81)$$

où $w_{q,\pm} \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ vérifie $\partial_t w_{q,\pm} \in C([0, T], L^2(\Omega))$, $w_{q,\pm} = 0$ sur Σ et $w_{q,\pm}(\cdot, 0) = \partial_t w_{q,\pm}(\cdot, 0) = 0$. De plus, il existe une constante positive, qui ne dépend que de Ω , T et $M \geq \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$, telle que

$$\|w_{q,\pm}\|_{L^2(Q)} \leq \frac{C}{\rho} \|\tilde{\chi}\|_{H^3(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad (2.82)$$

avec $\tilde{\chi}(x, t) = \chi(x + t\omega)$.

Preuve. Dans cette démonstration, pour simplifier les notations, nous utilisons u_\pm (resp w_\pm) au lieu de $u_{q,\pm}$ (resp. $w_{q,\pm}$). Nous montrons l'existence de u_+ . Celle de u_- se démontre de la même manière. Nous commençons d'abord par noter que w_+ doit être la solution de l'équation

$$\begin{cases} (-\partial_t^2 - \Delta + q)w = -e^{\pm i\rho(x \cdot \omega + t)}(\partial_t^2 - \Delta + q)\chi(x + t\omega), & \text{dans } Q, \\ w(\cdot, 0) = \partial_t w(\cdot, 0) = 0, \\ w = 0, & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

L'existence de w_+ , dans l'espace approprié, est assurée par les résultats classiques concernant la résolution des équations hyperboliques (voir par exemple J.-L. Lions et E. Magenes [LM]).

Nous posons maintenant $W_+(x, t) = \int_0^t w_+(x, s)ds$ et $\theta = -(-\partial_t^2 - \Delta + q)\chi(x + t\omega)$. Il n'est pas difficile de vérifier que W_+ est solution de l'équation

$$\begin{cases} (-\partial_t^2 - \Delta + q)W = \int_0^t e^{i\rho(x \cdot \omega + s)}\theta(x, s)ds, & \text{dans } Q, \\ W(\cdot, 0) = \partial_t W(\cdot, 0) = 0, \\ W = 0, & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Nous appliquons l'inégalité d'énergie classique (voir par exemple J.-L. Lions et E. Magenes [LM]) à W_+ pour conclure

$$\|w_+\|_{L^2(Q)} = \|\partial_t W_+\|_{L^2(Q)} \leq C \left\| \int_0^t e^{i\rho(x \cdot \omega + s)}\theta(x, s)ds \right\|_{L^2(Q)}. \quad (2.83)$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{i\rho(x \cdot \omega + s)}\theta(x, s)ds &= \frac{1}{i\rho} \int_0^t \partial_s e^{i\rho(x \cdot \omega + s)}\theta(x, s)ds \\ &= -\frac{1}{i\rho} \int_0^t e^{i\rho(x \cdot \omega + s)}\partial_s \theta(x, s)ds + \frac{1}{i\rho} e^{i\rho(x \cdot \omega + t)}\theta(x, t) \\ &\quad - \frac{1}{i\rho} e^{i\rho x \cdot \omega} \theta(x, 0). \end{aligned}$$

Cette identité et (2.83) impliquent

$$\|w_{\pm}\|_{L^2(Q)} \leq \frac{C}{\rho} \|\tilde{\chi}\|_{H^3(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

□

Preuve du Théorème 2.34. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, à support dans la boule unité, telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 = 1$. Soient $0 < \epsilon \leq 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $1 < \text{dist}(x_0, \Omega) < 2$. Nous posons alors

$$\chi(x) = \epsilon^{-\frac{n}{2}} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\epsilon}\right).$$

Notons que le choix de x_0 et β implique que le support de $\chi(x + t\omega)$, considérée comme fonction des variables (x, t) , n'intersecte ni $\Omega \times \{0\}$, ni $\Omega \times \{T\}$. Par conséquence les solutions $u_{q_i, \pm}$ de (2.81) données par le Lemme 2.37, $i = 1, 2$, correspondantes au χ défini ci-dessus, vérifient

$$u_{q_i, \pm}(\cdot, 0) = \partial_t u_{q_i, \pm}(\cdot, 0) = 0.$$

Nous posons $u_1 = u_{q_1, +}$, $w_1 = w_{q_1, +}$, $u_2 = u_{q_2, -}$, $w_2 = w_{q_2, -}$. Nous appliquons alors le Lemme 2.36 avec u_1 et u_2 pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_Q (q_1 - q_2) \chi^2(x + t\omega) &= - \int_Q (q_1 - q_2) (\chi_- w_1 + \chi_+ w_2 + w_1 w_2) \\ &\quad + \int_{\Sigma} u_1 (H_{q_1} - H_{q_2})(u_2), \end{aligned}$$

où $\chi_{\pm} = \chi(x + t\omega)e^{\pm i(x \cdot \omega + t)}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \left| \int_Q (q_1 - q_2) \chi^2(x + t\omega) \right| &\leq \frac{C}{\rho} \epsilon^{-3} \\ &\quad + \|u_1\|_{L^2(\Sigma)} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t \|u_2\|_{H^{2n+4}(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

par (2.82), où nous avons utilisé le fait que

$$\|\tilde{\chi}\|_{H^3(\mathbb{R}^{n+1})} \leq K \epsilon^{-3},$$

pour une certaine constante K ne dépendant que de φ .

Pour poursuivre la preuve, nous admettons pour le moment le lemme suivant :

Lemme 2.38. *Pour tous $0 < \epsilon \leq 1$ et $\rho \geq 1$, nous avons*

$$\|u_1\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \epsilon^{-1}$$

et

$$\|u_2\|_{H^{2n+4}(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} \leq C \epsilon^{-(2n+6)} \rho^{2n+4},$$

où C est une constante qui ne dépend que de T , Ω et φ .

Les estimations de ce lemme et (2.84) impliquent, avec $q = q_1 - q_2$ que nous prolongeons par 0 en dehors de Ω ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(x) \epsilon^{-n} \varphi^2\left(\frac{x + t\omega - x_0}{\epsilon}\right) dx \leq C \epsilon^{-(2n+7)} \left(\frac{1}{\rho} + \rho^{2n+4} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t\right). \quad (2.85)$$

Dans cette inégalité le membre de gauche fait apparaître la composée de deux transformées appliquée à q . C'est ce que nous allons expliciter maintenant. Nous définissons la transformée régularisante de paramètre ϵ par

$$R_\epsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi^2\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) dy, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

La transformée rayon- X , qui envoie les fonctions de \mathbb{R}^n sur les fonctions définies sur \mathcal{L} , l'espace des droites orientées de \mathbb{R}^n (usuellement, \mathcal{L} est identifié à TS^{n-1} , l'espace tangent à S^{n-1}), est donnée par

$$Xf(l) = \int_l f = \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + t\omega) dt,$$

où x_0 est un point quelconque de la droite l et ω est le vecteur unitaire tangent à l . Notons que $Xf(l)$ ne dépend pas du choix de x_0 . Avec ces nouvelles notations, (2.85) se réécrit sous la forme

$$|XR_\epsilon q(l)| \leq C \epsilon^{-(2n+7)} \left(\frac{1}{\rho} + \rho^{2n+4} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t\right), \quad (2.86)$$

pour toute droite l qui passe par un point x_0 qui vérifie $1 < \text{dist}(x_0, \Omega) < 2$. Mais toute droite qui intersecte $\Omega_1 = \{x; \text{dist}(x, \Omega) \leq 1\}$ passe aussi par un x_0 tel que $1 < \text{dist}(x_0, \Omega) < 2$, et, puisque $R_\epsilon q$ est à support dans Ω_1 , $XR_\epsilon(l) = 0$ pour toute droite l qui n'intersecte pas Ω_1 . Nous en déduisons que (2.86) est valable pour toute droite l . Il s'ensuit

$$\|XR_\epsilon q\|_{L^2(TS^{n-1})} \leq C \epsilon^{-(2n+7)} \left(\frac{1}{\rho} + \rho^{2n+4} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t\right).$$

Cette estimation et le lemme (voir [LN] pour la preuve)

Lemme 2.39.

$$\|f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Xf\|_{L^2(TS^{n-1})}.$$

entraînent

$$\|R_\epsilon q\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \epsilon^{-(2n+5)} \left(\frac{1}{\rho} + \rho^{2n+2} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t\right). \quad (2.87)$$

D'autre part, nous avons par interpolation

$$\|R_\epsilon q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|R_\epsilon q\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \|R_\epsilon q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}.$$

Comme

$$\|R_\epsilon q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \leq C\epsilon^{-\frac{1}{2}},$$

(cette estimation se démontre facilement en revenant à la définition de R_ϵ), nous déduisons

$$\|R_\epsilon q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon^{-\frac{1}{2}} \|R_\epsilon q\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}.$$

Cette estimation, combinée avec (2.87), nous donne

$$\|R_\epsilon q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon^{-(2n+7+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{\rho} + \rho^{2n+4} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t \right). \quad (2.88)$$

Pour tirer de cette dernière une estimation pour $\|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.40. *Soient $0 < \epsilon < 1$ et $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, f nulle en dehors de Ω . Alors il existe une constante positive $C = C(\Omega)$ telle que*

$$\|f - R_\epsilon f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon^{\tilde{\alpha}} \|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)},$$

avec $\tilde{\alpha} = \min(\alpha, \frac{1}{2})$.

Preuve. Si $\text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon$, nous avons alors

$$\begin{aligned} |f(x) - R_\epsilon f(x)| &= \left| \int_{|y-x|<\epsilon} \epsilon^{-n} \varphi^2\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) [f(x) - f(y)] dy \right| \\ &\leq \sup_{x' \neq x''} \frac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha} \epsilon^\alpha. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Si $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon$,

$$|f(x) - R_\epsilon f(x)| \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

D'où

$$\int_{\text{dist}(x, \Gamma) \leq \epsilon} |f(x) - R_\epsilon f(x)|^2 dx \leq C\epsilon \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (2.90)$$

Le résultat s'ensuit alors des estimations (2.89) et (2.90). \square

Vu le dernier lemme, (2.88) implique

$$\|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C[\epsilon^{-(2n+7+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{\rho} + \rho^{2n+4} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t \right) + \epsilon^{\tilde{\alpha}}].$$

Dans cette estimation, nous choisissons $\rho = \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t^{-\frac{1}{2n+5}}$ pour avoir

$$\|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\epsilon^{-(2n+7+\frac{1}{2})} \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t^{\frac{1}{2n+5}} + \epsilon^{\tilde{\alpha}}).$$

Ensuite, en prenant $\epsilon = \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t^{\frac{1}{(2n+5)(2n+7+\frac{1}{2}+\tilde{\alpha})}}$, nous concluons

$$\|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t^{\frac{\bar{\alpha}}{(2n+5)(2n+5+\frac{1}{2}+\bar{\alpha})}}. \quad (2.91)$$

Finalement, par interpolation

$$\begin{aligned} \|q\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C \|q\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}^{1-\mu} \|q\|_{L^2(\Omega)}^\mu \\ &\leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}^\mu, \end{aligned}$$

où $\mu = \frac{2\alpha}{2\alpha+n}$. Cette dernière inégalité et (2.91) impliquent alors

$$\|q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|H_{q_1} - H_{q_2}\|_t^{\frac{2\alpha\bar{\alpha}}{(2\alpha+n)(2n+5)(2n+7+\frac{1}{2}+\bar{\alpha})}}.$$

□

Preuve du Lemme 2.38. Nous montrons l'estimation pour u_2 . Celle pour u_1 se démontre de manière similaire. Nous posons $\psi(x, t) = \chi(x + t\omega)$. Puisque $u_2 = \psi e^{i\rho(x \cdot \omega + t)}$ sur Σ , il suffit de d'établir l'estimation

$$\|\psi\|_{H^{2n+4}(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} \leq C \epsilon^{-(2n+6)}.$$

Par définition, on a

$$\psi = \epsilon^{-\frac{n}{2}} \varphi\left(\frac{x + t\omega - x_0}{\epsilon}\right).$$

D'où

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x + t\omega - x_0}{\epsilon}\right)^2 dx.$$

Le simple changement de variable $y = \frac{x+t\omega-x_0}{\epsilon}$ donne

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

et puisque

$$\partial_i \psi(x, t) = \epsilon^{-\frac{n}{2}-1} \partial_i \varphi\left(\frac{x + t\omega - x_0}{\epsilon}\right), \quad \partial_{ij}^2 \psi(x, t) = \epsilon^{-\frac{n}{2}-2} \partial_{ij}^2 \varphi\left(\frac{x + t\omega - x_0}{\epsilon}\right),$$

nous concluons

$$\|\psi(\cdot, t)|_\Gamma\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq C \|\psi(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \epsilon^{-2} \|\varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}.$$

D'autre part, pour $k = 1, \dots, 2n+4$, on obtient par un calcul simple

$$\partial_t^k \psi(x, t) = \epsilon^{-\frac{n}{2}-k} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_1 \dots i_k}^k \varphi\left(\frac{x + t\omega - x_0}{\epsilon}\right) \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k}.$$

En procédant comme pour ψ , nous déduisons de cette dernière identité

$$\|\partial_t^k \psi(\cdot, t)|_\Gamma\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq C \epsilon^{-(k+2)} \|\varphi\|_{H^{2+k}(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui entraîne aisément l'estimation recherchée. □

Pour faire ce sous-paragraphe et celui qui le précède, nous nous sommes largement inspiré de l'article de G. Alessandrini et J. Sylvester [AS].

2.2.4 Une extension

Nous proposons une extension du Théorème 2.26. Plus précisément, nous démontrons que le potentiel $q = q(x)$ est déterminé par les propriétés asymptotiques des valeurs propres et des dérivées normales des fonctions propres de l'opérateur $-\Delta + q$ avec une condition de Dirichlet au bord.

Dans ce sous-paragraphe, nous supposons que Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 et de frontière Γ .

Nous utilisons les mêmes notations qu'au sous-paragraphe 2.2.2. C'est-à-dire, A_q , $q \in L^\infty(\Omega)$, désigne l'opérateur $-\Delta + q$ avec comme domaine $D(A_q) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. La suite des valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, est notée $(\lambda_{n,q})$.

Ce sous-paragraphe est consacré à la preuve du

Théorème 2.41. *Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ et (φ_{k,q_1}) une base de fonctions propres de A_{q_1} . Nous fixons $N \geq 1$ et nous supposons que, pour tout $k \geq N$, $\lambda_{k,q_1} = \lambda_{k,q_2}$ et qu'il existe (φ_{k,q_2}) une base de fonctions propres de A_{q_2} telle que*

$$\partial_\nu \varphi_{k,q_1} = \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \text{ pour chaque } k \geq N.$$

Alors $q_1 = q_2$.

Dans tout le reste de ce sous-paragraphe, les fonctions que nous considérerons seront à valeurs complexes. Les produits scalaires usuels sur $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma)$ sont notés respectivement par

$$(f, g) = \int_\Omega f \bar{g} dx \text{ et } \langle f, g \rangle = \int_\Gamma f \bar{g} d\sigma.$$

Au paragraphe précédent, nous avons défini, pour $\lambda \in \rho(A_q)$,

$$A_q(\lambda) : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : f \rightarrow \partial_\nu u_{q,f}(\lambda),$$

où $u_{q,f} \in H^2(\Omega)$ est l'unique solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + qu - \lambda u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ et $\omega \in S^{n-1}$, nous posons $\varphi_{\lambda,\omega}(x) = e^{i\sqrt{\lambda}\omega \cdot x}$. Nous définissons aussi la fonction $S_q(\lambda, \theta, \omega)$ par

$$S_q(\lambda, \theta, \omega) = \langle A_q(\lambda) \varphi_{\lambda,\omega}, \overline{\varphi_{\lambda,-\theta}} \rangle, \quad \lambda \in \rho(A_q) \setminus (-\infty, 0] \text{ et } \theta, \omega \in S^{n-1}.$$

Dans la preuve du Théorème 2.41 nous utiliserons le

Lemme 2.42. Pour $\lambda \in \rho(A_q) \setminus (-\infty, 0]$ et $\theta, \omega \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned} S_q(\lambda, \theta, \omega) &= -\frac{\lambda}{2} |\theta - \omega|^2 \int_{\Omega} e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x} q(x) dx - (R_q(\lambda) q \varphi_{\lambda, \omega}, \overline{q \varphi_{\lambda, -\theta}}), \end{aligned}$$

avec $R_q(\lambda) = (A_q - \lambda)^{-1}$.

Preuve. Nous introduisons la fonction

$$\psi(x, \lambda, \omega) = \varphi_{\lambda, \omega}(x) - R_q(\lambda)(q \varphi_{\lambda, \omega})(x).$$

Nous vérifions sans peine que $\psi(\cdot, \lambda, \omega)$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta \psi + q\psi = \lambda \psi, & \text{dans } \Omega, \\ \psi = \varphi_{\lambda, \omega}, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Nous déduisons de la définition de $S_q(\lambda, \theta, \omega)$ que

$$S_q(\lambda, \theta, \omega) = \int_{\Gamma} \varphi_{\lambda, -\theta} \partial_{\nu} \psi(x, \lambda, \omega) d\sigma.$$

D'autre part, la formule de Green appliquée à $\psi(\cdot, \lambda, \omega)$ et $\varphi_{\lambda, -\theta}$ nous donne

$$\begin{aligned} S_q(\lambda, \theta, \omega) &= -i\sqrt{\lambda} \int_{\Gamma} \theta \cdot \nu e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x} q(x) dx - (R_q(\lambda) q \varphi_{\lambda, \omega}, \overline{q \varphi_{\lambda, -\theta}}). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Nous appliquons ensuite la formule de Green à $e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x}$ et la fonction constante égale à 1, puis à $e^{-i\sqrt{\lambda}\theta \cdot x}$ et $e^{i\sqrt{\lambda}\omega \cdot x}$ pour avoir les deux identités suivantes :

$$\begin{aligned} -\lambda |\theta - \omega|^2 \int_{\Omega} e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x} &= -i\sqrt{\lambda} \int_{\Gamma} (\theta - \omega) \cdot \nu e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x}, \\ 0 &= -i\sqrt{\lambda} \int_{\Gamma} (\theta + \omega) \cdot \nu e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x}. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces deux identités, nous obtenons

$$-i\sqrt{\lambda} \int_{\Gamma} \theta \cdot \nu e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x} = -\frac{\lambda}{2} = |\theta - \omega|^2 \int_{\Omega} e^{-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) \cdot x}. \quad (2.93)$$

L'identité recherchée s'obtient en reportant (2.93) dans (2.92). \square

Nous rappelons la méthode “Born approximation” utilisée dans le procédé de reconstruction dans la théorie de scattering inverse. Soit $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$

arbitrairement fixé et choisissons $\eta \in S^{n-1}$ orthogonal à ξ . A étant un grand paramètre, nous définissons

$$\begin{cases} \theta_A = c_A \eta + \frac{\xi}{2A}, & c_A = \sqrt{1 - \frac{|\xi|^2}{4A^2}}, \\ \omega_A = c_A \eta - \frac{\xi}{2A}, \\ \sqrt{t_A} = A + i. \end{cases}$$

Nous vérifions sans difficulté

$$\begin{cases} \theta_A, \omega_A \in S^{n-1}, \\ \sqrt{t_A}(\theta_A - \omega_A) \rightarrow \xi \text{ quand } A \rightarrow +\infty, \\ \Im t_A \rightarrow +\infty \text{ quand } A \rightarrow +\infty, \\ \Im \sqrt{t_A} \theta_A, \Im \sqrt{t_A} \omega_A \text{ sont bornées quand } A \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.94)$$

Si nous utilisons (2.94) et le Lemme 2.42 alors nous pouvons facilement montrer le

Théorème 2.43.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} S_q(t_A, \theta_A, \omega_A) = -\frac{|\xi|^2}{2} \int_{\Omega} e^{-ix \cdot \xi} + \int_{\Omega} e^{-ix \cdot \xi} q(x).$$

Notons que le dernier théorème nous permet d'affirmer que q est déterminée de manière unique à partir de S_q .

Nous aurons besoin d'étendre A_q , $q \in L^\infty(\Omega)$, en un opérateur borné de $H^1(\Gamma)$ à valeurs dans $L^2(\Gamma)$. C'est le cas si $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$. En effet, c'est une conséquence immédiate des Théorèmes 7.3 et 7.4 de [LM], Vol I. Nous montrons maintenant que c'est aussi vrai quand q est seulement dans $L^\infty(\Omega)$. D'abord, pour $f \in H^1(\Gamma)$, d'après le Théorème 7.4 de [LM], Vol I, le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u^0 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u^0|_{\Gamma} = f, \end{cases}$$

admet une unique solution $u_f^0 \in H^{3/2}(\Omega)$ et il existe une constante positive C_0 , indépendante de f , telle que

$$\|u^0\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Pour $q \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda \in \rho(A_q)$, notons $u_{q,f}^1 \in D(A_q) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u^1 + (q - \lambda)u^1 = (\lambda - q)u^0, & \text{dans } \Omega, \\ u^0|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Nous avons

$$\|u_{q,f}^1\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \|(\lambda - q)u^0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{H^1(\Gamma)},$$

avec C_1 et C_2 deux constantes positives, dépendant de q et λ . Il en résulte que $u_{q,f} = u_f^0 + u_{q,f}^1 \in H^{3/2}(\Omega)$ et il existe une constante C_3 , qui dépend de q et λ , pour laquelle

$$\|u_{q,f}\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C_3 \|f\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Par suite,

$$\|A_q(f)\|_{L^2(\Gamma)} = \|\partial_\nu u_{q,f}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|u_{q,f}\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C' \|f\|_{H^1(\Gamma)},$$

avec C et C' deux constantes qui dépendent de q et λ .

Un autre résultat que nous utiliserons dans la démonstration du Théorème 2.41 est le lemme suivant.

Lemme 2.44. *Sous les hypothèses du Théorème 2.41, il existe une constante positive C telle que*

$$\|A_{q_1}(\lambda) - A_{q_2}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Gamma), L^2(\Gamma))} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad |\lambda| \text{ assez grand.}$$

Preuve. Comme dans le Lemme 2.28, pour tout entier $m > \frac{n}{2}$ et pour tout $f \in H^1(\Gamma)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{d\lambda^m} A_{q_1}(\lambda) f - \frac{d^m}{d\lambda^m} A_{q_2}(\lambda) f &= -m! \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \\ &\quad + m! \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \\ &= -m! \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)^{m+1}} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_1}. \end{aligned}$$

En intégrant m fois cette identité, nous concluons

$$\begin{aligned} A_{q_1}(\lambda) f - A_{q_2}(\lambda) f &= - \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)} \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \rangle \partial_\nu \varphi_{k,q_2} + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k L_k, \end{aligned}$$

où $L_k \in \mathcal{L}(H^1(\Gamma), L^2(\Gamma))$, pour chaque k . D'où le résultat car $L_k = 0$, pour tout k , par le Lemme 2.27. \square

Preuve du Théorème 2.41. Soit $0 \neq \xi \in \mathbb{R}$ et $(t_A, \theta_A, \omega_A)$ comme dans la méthode ‘‘Born approximation’’. Puisque $|\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}| = e^{\Im \sqrt{t_A} \omega_A}$ et $|\varphi_{\sqrt{t_A}, \theta_A}| = e^{\Im \sqrt{t_A} \theta_A}$, nous déduisons de (2.94) que $\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}$ et $\varphi_{\sqrt{t_A}, \theta_A}$ sont bornées quand A tend vers $+\infty$. D'après le Lemme 2.44 on a

$$\|A_{q_1}(t_A) - A_{q_2}(t_A)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Gamma), L^2(\Gamma))} \leq \frac{C}{|t_A|}, \text{ pour } A \text{ assez grand.}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \langle [A_{q_1}(t_A) - A_{q_2}(t_A)]\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}, \overline{\varphi_{\sqrt{t_A}, -\theta_A}} \rangle \\ & \|A_{q_1}(t_A) - A_{q_2}(t_A)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Gamma), L^2(\Gamma))} \|\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}\|_{H^1(\Gamma)} \|\varphi_{\sqrt{t_A}, -\theta_A}\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Mais il existe des constantes K_i , $i = 1, 2, 3$, indépendantes de A , telles que

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}\|_{H^1(\Gamma)} & \leq K_1 \|\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \\ & \leq K_2 \|\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \\ & \leq K_3 |t_A|^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

La première inégalité s'obtient par la continuité de l'opérateur $w \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \rightarrow w|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)$, la seconde par interpolation ; quant à la troisième, elle s'obtient par un calcul explicite.

Par conséquence,

$$|\langle [A_{q_1}(t_A) - A_{q_2}(t_A)]\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}, \overline{\varphi_{\sqrt{t_A}, -\theta_A}} \rangle| \leq C |t_A|^{-\frac{1}{4}},$$

ce qui implique

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \langle [A_{q_1}(t_A) - A_{q_2}(t_A)]\varphi_{\sqrt{t_A}, \omega_A}, \overline{\varphi_{\sqrt{t_A}, -\theta_A}} \rangle = 0.$$

Nous utilisons alors la définition de S_{q_i} , $i = 1, 2$, pour conclure

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} [S_{q_1}(t_A, \theta_A, \omega_A) - S_{q_2}(t_A, \theta_A, \omega_A)] = 0.$$

D'autre part, nous déduisons du Théorème 2.43

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} [S_{q_1}(t_A, \theta_A, \omega_A) - S_{q_2}(t_A, \theta_A, \omega_A)] = \int_{\Omega} e^{-ix \cdot \xi} (q_1(x) - q_2(x)).$$

D'où

$$\int_{\Omega} e^{-ix \cdot \xi} (q_1(x) - q_2(x)) = 0.$$

En d'autres termes, ξ étant arbitraire, la transformée de Fourier de $q_1 - q_2$ est nulle et par suite $q_1 = q_2$. \square

Le résultat principal de ce paragraphe est dû à H. Isosaki [Iso].

2.3 Détermination de la conductivité à la frontière : une méthode de solutions singulières

2.3.1 Construction de solutions singulières

$R > 0$ étant fixé, nous considérons sur $B_R = B(0, R)$ l'opérateur elliptique L définie par

$$Lu = \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u).$$

Nous supposons que, pour chaque $x \in B_R$, la matrice $(a_{ij}(x))$ est symétrique, $a_{ij} \in W^{1,p}(B_R)$, $i, j = 1, \dots, n$, avec $p > n$; et il existe deux constantes positives λ et M telles que

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2, \quad x \in B_R, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.95)$$

et

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,p}(B_R)} \leq M, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.96)$$

Dans ce sous-paragraphe, nous nous proposons de démontrer le

Théorème 2.45. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute fonction harmonique sphérique de degré m , normalisée par $\|S_m\|_{W^{2,\infty}(S^{n-1})} = (m+n)^{-2}$, il existe $u \in W_{loc}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$ solution de*

$$Lu = 0, \quad \text{dans } B_R \setminus \{0\} \quad (2.97)$$

qui est de la forme

$$u(x) = \begin{cases} \ln|x|S_0(\frac{x}{|x|}) + w(x), & \text{si } n = 2, m = 0, \\ |x|^{2-n-m}S_m(\frac{x}{|x|}) + w(x), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.98)$$

où $w \in W_{loc}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$ vérifie

$$|w(x)| + |\nabla w(x)| \leq C|x|^{2-n-m+\beta} \quad \text{dans } B_R \setminus \{0\}, \quad (2.99)$$

et

$$\left(\int_{r < |x| < 2r} |\mathcal{H}w|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr^{-n-m+\beta+\frac{n}{p}}, \quad 0 < r < \frac{R}{2}, \quad (2.100)$$

où $\beta = 1 - \frac{n}{p}$ et C une constante qui ne dépend que de n, p, R, λ et M .

Ici et dans toute la suite $\mathcal{H}w = (\partial_{ij}^2 w)$ est la matrice hessienne de w .

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous démontrons trois lemmes préliminaires. Aussi, pour des raisons de clarté de l'exposé, nous nous limiterons au cas $n \geq 3$. Le cas $n = 2$ se traite de la même manière, moyennant quelques modifications mineures.

Lemme 2.46. Soit $u \in W_{loc}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$, $p > n$, telle qu'il existe un réel positif s pour lequel

$$|u(x)| \leq |x|^{2-s}, \quad x \in B_R \setminus \{0\}, \quad (2.101)$$

$$\left(\int_{r < |x| < 2r} |Lu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Ar^{\frac{n}{p}-s}, \quad 0 < r < \frac{R}{2}. \quad (2.102)$$

Alors

$$|\nabla u(x)| \leq C|x|^{1-s} \text{ dans } B_R \setminus \{0\}, \quad (2.103)$$

$$\left(\int_{r < |x| < 2r} |\mathcal{H}u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr^{\frac{n}{p}-s}, \quad 0 < r < \frac{R}{4}, \quad (2.104)$$

où C est une constante qui dépend seulement de A , n , p , λ et M .

Preuve. C'est une conséquence des estimations de Schauder intérieures, desquelles nous déduisons

$$\begin{aligned} \left(\int_{r < |x| < 2r} |\mathcal{H}u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + r^{1+\frac{n}{p}} \sup_{r < |x| < 2r} |\nabla u| \leq C \left[\left(\int_{\frac{r}{2} < |x| < 4r} |Lu|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ \left. + r^{-2} \left(\int_{\frac{r}{2} < |x| < 4r} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned}$$

Pour les détails, nous renvoyons à L. Nirenberg [Ni] et D. Gilbarg, N. S. Trudinger [GT]. \square

Lemme 2.47. Soit $f \in L_{loc}^p(B_R \setminus \{0\})$ vérifiant

$$\left(\int_{r < |x| < 2r} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Ar^{\frac{n}{p}-s}, \quad 0 < r < \frac{R}{2}, \quad (2.105)$$

avec $2 < s < n < p$. Alors il existe $u \in W_{loc}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$ solution de

$$Lu = 0, \text{ dans } B_R \setminus \{0\}, \quad (2.106)$$

telle que

$$|u(x)| \leq C|x|^{2-s}, \quad \forall x \in B_R \setminus \{0\}. \quad (2.107)$$

Ici, C est une constante qui ne dépend que de A , s , p , R , λ et M .

Preuve. Nous supposons dans un premier temps que $f \in L^\infty(B_R)$. Si G est la fonction de Green associée à l'opérateur L sur B_R , alors la fonction u donnée par

$$u(x) = \int_{B_R} G(x, y) f(y) dy \quad (2.108)$$

est dans $W_{loc}^{2,p}(B_R)$ et vérifie (2.106). Pour montrer que u vérifie aussi (2.107), nous faisons appel à l'estimation (voir C. Miranda [Mi])

$$G(x, y) \leq C|x - y|^{2-n} \text{ pour } x \neq y, \quad (2.109)$$

avec C une constante qui ne dépend que de n et λ . Nous avons alors

$$|u(x)| \leq C(I_1 + I_2),$$

avec

$$I_1 = \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |x - y|^{2-n} |f(y)| dy$$

et

$$I_2 = \int_{\frac{|x|}{2} < |y| < R} |x - y|^{2-n} |f(y)| dy.$$

Dans le reste de cette démonstration nous utiliserons l'estimation suivante, dont la preuve sera donnée un peu plus loin.

$$\int_{r < |y| < 2r} |y|^t |f(y)| dy \leq K \int_{r < |y| < 2r} |y|^{t-s} dy, \quad (2.110)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, où K est une constante qui ne dépend que de t , s , n et A .

Pour I_1 , si $|y| < \frac{|x|}{2}$, nous avons alors $|x - y| \geq \frac{|x|}{2}$. D'où

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C|x|^{2-n} \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |f(y)| dy \\ &\leq C|x|^{2-n} \sum_{j \geq 1} \int_{2^{-j-1}|x| < |y| < 2^{-j}|x|} |f(y)| dy \\ &\leq C|x|^{2-n} \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |y|^{-s} dy = C|x|^{2-s}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Notons que la dernière intégrale n'est convergente que si $n > s$.

Pour I_2 , nous prolongeons d'abord f par 0 en dehors de B_R . Nous gardons la notation f pour ce prolongement. Dans ce cas (2.105) est encore valable pour $r \geq \frac{R}{2}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\frac{|x|}{2} < |y| < 2|x|} |x - y|^{2-n} |f(y)| dy \\ &\quad + \sum_{j \geq 1} \int_{2^j|x| < |y| < 2^{j+1}|x|} |x - y|^{2-n} |f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{\frac{|x|}{2} < |y| < 2|x|} |x - y|^{(2-n)q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{|x|}{2} < |y| < 2|x|} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \sum_{j \geq 1} \int_{2^j|x| < |y| < 2^{j+1}|x|} |x - y|^{2-n} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Cette estimation, (2.105) et (2.108) impliquent

$$\begin{aligned} I_2 &\leq A|x|^{\frac{n}{p}-s} \left(\int_{\frac{|x|}{2} < |y| < 2|x|} |x - y|^{(2-n)q} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + C \int_{|y| > 2|x|} |y|^{2-n-s} \leq C|x|^{2-s}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned} \left(\int_{\frac{|x|}{2} < |y| < 2|x|} |x-y|^{(2-n)q} dy \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_{|z| < 3|x|} |z|^{(2-n)q} dz \right)^{\frac{1}{q}} \leq C|x|^{\frac{n}{q}+2-n} \\ &= C|x|^{2-\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

(2.107) se déduit alors de (2.111) et (2.112).

Nous allons maintenant nous affranchir de l'hypothèse supplémentaire $f \in L^\infty(B_R)$. Pour cela, pour chaque entier positif N , nous introduisons la fonction f_N donnée par

$$f_N = \begin{cases} N, & \text{si } f > N \\ f, & \text{si } |f| < N \\ -N & \text{si } f < -N. \end{cases}$$

Clairement, pour chaque N , $|f_N| \leq N$ et donc $f_N \in L^\infty(B_R)$. D'autre part, puisque $|f_N| \leq |f|$, pour tout N et que f_N converge presque partout vers f , nous concluons par le théorème de convergence dominée que f_N converge dans $L_{loc}^p(B_R \setminus \{0\})$ et que, pour chaque N , f_N vérifie (2.105) avec la même constante A et s . Soit u_N la fonction donnée par la formule (2.108) pour $f = f_N$. Pour chaque N , u_N est solution de $Lu_N = f_N$ dans B_R et vérifie (2.107) avec une constante C indépendante de N . Il s'ensuit, comme conséquence des estimations de Schauder L^p (voir D. Gilbarg et N. S. Trudinger [GT] par exemple), que (u_N) est bornée dans $W_{loc}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$. Elle admet donc une sous-suite qui converge faiblement vers $u \in W_{loc}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$. Nous pouvons facilement vérifier que u satisfait à (2.106) et (2.107).

Pour terminer la preuve, il reste à montrer (2.110). Par l'inégalité de Hölder nous avons, où $q = \frac{p}{p-1}$ est l'exposant conjugué de p ,

$$\begin{aligned} \int_{r < |y| < 2r} |y|^t |f(y)| dy &\leq \left(\int_{r < |y| < 2r} |y|^{qt} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{r < |y| < 2r} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Ar^{\frac{n}{p}-s} \left(\int_{r < |y| < 2r} |y|^{qt} dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{r < |y| < 2r} |y|^{qt} dy \right). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Nous supposons que $t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{r < |y| < 2r} |y|^{qt} dy &= \int_{r < |y| < 2r} |y|^{(q-1)t+s} |y|^{t-s} dy \\ &\leq (2r)^{(q-1)t+s} \int_{r < |y| < 2r} |y|^{t-s} dy. \end{aligned} \quad (2.114)$$

D'autre part, un calcul élémentaire nous donne

$$\left(\int_{r < |y| < 2r} |y|^{qt} dy \right)^{-\frac{1}{p}} \leq Cr^{-\frac{n}{p}-\frac{qt}{p}}, \quad (2.115)$$

pour une certaine constante C qui ne dépend que de n et p . (2.110) résulte alors immédiatement de (2.113), (2.114) et (2.115).

Le cas $t < 0$ se traite de façon tout à fait similaire au cas $t \geq 0$. \square

Lemme 2.48. *On suppose $n \geq 3$. Soit $s > n$ un réel non entier et supposons que f vérifie (2.105) avec $p > n$. Alors il existe $u \in W_{loc}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$ qui vérifie $\Delta u = f$ dans $B_R \setminus \{0\}$ et (2.108), où la constante C ne dépend que de A , s , n , p et R .*

Preuve. Soit $\Gamma(x-y) = -c_n|x-y|^{2-n}$ la solution fondamentale du laplacien sur \mathbb{R}^n . Si les $C_j^{\frac{n-2}{2}}$, $j \geq 0$, sont les polynômes de Gegenbauer définis au sous-paragraphe 1.4.6, nous posons, pour $m = [s] - n$,

$$\tilde{\Gamma}(x, y) = \Gamma(x-y) + c_n \sum_{j=0}^m \frac{|y|^j}{|x|^{j+n-2}} C_j^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|}\right).$$

Vu que les polynômes $C_j^{\frac{n-2}{2}}$ sont solutions de l'équation différentielle (1.17), nous pouvons facilement démontrer que

$$\Delta \tilde{\Gamma}(\cdot, y) = \delta_y \text{ dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (2.116)$$

Comme nous l'avons fait au lemme précédent, un procédé de troncature nous permet de nous ramener au cas $f \in L^\infty(B_R)$. Soit

$$u(x) = \int_{B_R} \tilde{\Gamma}(x, y) f(y) dy.$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons l'estimation suivante, vérifiée par les polynômes $C_j^{\frac{n-2}{2}}$:

$$|C_j^{\frac{n-2}{2}}(t)| \leq K j^{n-3}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.117)$$

où K est une constante qui ne dépend que de n (voir A. Erdelyi et al. [Er], L. Caffarelli et A. Friedman [CF] pour plus de détails).

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \Gamma(x-y) f(y) dy &\leq c_n \int_{\frac{|x|}{2} < |y| < R} |x-y|^{2-n} |f(y)| dy \\ &\quad + \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |\Gamma(x-y)| |f(y)| dy \\ &\leq c_n I_2 + \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |\Gamma(x-y)| |f(y)| dy, \end{aligned} \quad (2.118)$$

où I_2 est le même que celui du lemme précédent. Or, nous savons (voir L. Bers [Ber] ou M. Marcus [Marcu]) que, pour $|y| < |x|$,

$$\Gamma(x, y) = -c_n \sum_{j \geq 0} \frac{|y|^j}{|x|^{j+n-2}} C_j^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right). \quad (2.119)$$

De (2.117), (2.118) et (2.119), nous déduisons aisément l'estimation

$$|u(x)| \leq C(I_2 + I_3 + I_4),$$

avec I_3 et I_4 donnés par

$$I_3 = \sum_{j=0}^m j^{n-3} \int_{\frac{|x|}{2} < |y| < R} \frac{|y|^j}{|x|^{j+n-2}} |f(y)| dy$$

$$I_4 = \sum_{j \geq m+1} j^{n-3} \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \frac{|y|^j}{|x|^{j+n-2}} |f(y)| dy$$

Comme nous l'avons fait dans le lemme précédent, nous prolongeons f par 0 en dehors de B_R et nous utilisons (2.110) pour avoir

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C \sum_{j=0}^m j^{n-3} \sum_{k \geq 0} \int_{2^{k-1}|x| < |y| < 2^k|x|} \frac{|y|^{j-s}}{|x|^{j+n-2}} dy \\ &\leq C \sum_{j=0}^m j^{n-3} |x|^{2-n-j} \int_{\frac{|x|}{2} < |y|} |y|^{j-s} dy \leq C |x|^{2-s}, \\ I_4 &\leq C \sum_{j \geq m+1} j^{n-3} \sum_{k \geq 0} |x|^{2-n-j} \int_{2^{-k-1}|x| < |y| < 2^{-k}|x|} |y|^{j-s} dy \\ &\leq C \sum_{j=0}^m j^{n-3} |x|^{2-n-j} \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |y|^{j-s} dy \leq C |x|^{2-s}. \end{aligned}$$

□

Preuve du Théorème 2.45. Nous posons

$$\Psi(x) = |x|^{2-n-m} S_m \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad x \in B_R \setminus \{0\}.$$

Nous cherchons alors $w \in W_{\text{loc}}^{2,p}(B_R \setminus \{0\})$ satisfaisant (2.99), (2.100) et

$$Lw = -L\Psi \text{ dans } B_R \setminus \{0\}.$$

Comme $\Delta\Psi = 0$ dans $B_R \setminus \{0\}$, nous avons

$$-L\Psi = \sum_{i,j} (\delta_{ij} - a_{ij}) \partial_{ij}^2 \Psi - \sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_j \Psi.$$

Après un calcul fastidieux, mais simple, nous aboutissons à l'estimation

$$|L\Psi| \leq C |x|^{1-\frac{n}{p}-n-m}, \quad x \in B_R \setminus \{0\},$$

où C est une constante positive, dépendant uniquement de M , n , p et R (rappelons que nous avons normalisé S_m par $\|S_m\|_{W^{2,\infty}(S^{n-1})} = (n+m)^{-2}$).

De la dernière estimation, nous déduisons sans peine

$$\left(\int_{r < |x| < 2r} |L\Psi|^p \right) \leq Cr^{1-m-n}, \quad 0 < r < \frac{R}{2}. \quad (2.120)$$

Fixons $0 < \alpha < \beta = 1 - \frac{n}{p}$ et posons $N = [\frac{m}{\alpha}] + 1$. Soit w_0 la solution de $\Delta w_0 = f$ donnée par le lemme 2.46 quand $f = -L\Psi$ et par induction sur j , $j = 1, \dots, N-1$, nous notons w_j la solution de $\Delta w_j = f$, pour $f = (\Delta - L)w_{j-1}$.

D'après (2.120) et le Lemme 2.48 nous déduisons, pour $s = m + n - \beta$,

$$\begin{aligned} |w_0(x)| &\leq C|x|^{2-s}, \\ |\nabla w_0(x)| &\leq C|x|^{1-s}, \\ \left(\int_{r < |x| < 2r} |\mathcal{H}w_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq Cr^{\frac{n}{p}-s}. \end{aligned}$$

De ces estimations, nous tirons

$$\left(\int_{r < |x| < 2r} |(\Delta - L)w_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr^{\frac{n}{p}-s+\alpha},$$

qui, combinée avec le Lemme 2.47, implique

$$\begin{aligned} |w_1(x)| &\leq C|x|^{2-s+\alpha}, \\ |\nabla w_1(x)| &\leq C|x|^{1-s+\alpha}, \\ \left(\int_{r < |x| < 2r} |\mathcal{H}w_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq Cr^{\frac{n}{p}-s+\alpha}. \end{aligned}$$

En continuant comme ceci, nous arrivons à

$$\begin{aligned} |w_j(x)| &\leq C|x|^{2-s+j\alpha}, \\ |\nabla w_j(x)| &\leq C|x|^{1-s+j\alpha}, \\ \left(\int_{r < |x| < 2r} |\mathcal{H}w_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq Cr^{\frac{n}{p}-s+j\alpha}, \end{aligned}$$

pour $j = 1, \dots, N-1$.

Maintenant puisque $s - (N-1)\alpha < n - \beta + \alpha < n$ (noter que $N\alpha > m$), nous pouvons appliquer de nouveau le Lemme 2.47 pour conclure qu'il existe w_N solution de $Lw_N = f$, quand $f = (\Delta - L)w_{N-1}$, qui vérifie

$$|w_N(x)| \leq C|x|^{2-s+(N-1)\alpha}.$$

Nous posons

$$w = \sum_{j=0}^N w_j.$$

Alors

$$\begin{aligned} Lw &= \sum_{j=0}^{N-1} Lw_j + Lw_N \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \Delta w_j - \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta - L)w_j + Lw_N = -L\Psi \end{aligned}$$

et

$$|w(x)| \leq C \sum_{j=0}^N |x|^{2-s+j\alpha} \leq C|x|^{2-s} = C|x|^{2-n-m+\beta}.$$

Les estimations de $|\nabla w|$ et $\mathcal{H}w$ s'obtiennent tout simplement en appliquant le Lemme 2.46. \square

2.3.2 Stabilité dans le détermination de la conductivité à la frontière

Pour $0 < a_0 \leq a \in L^\infty(\Omega)$, où a_0 est une certaine constante, et $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, nous notons $w_{a,\varphi} \in H^1(\Omega)$ l'unique solution variationnelle du problème aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla w) = 0 \text{ dans } \Omega \\ w|_\Gamma = \varphi. \end{cases}$$

Rappelons que, d'après les Théorèmes 1.21 et 1.27

$$\Sigma_a : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \varphi \rightarrow a\partial_\nu u_{a,\varphi}$$

défini un opérateur borné.

Notre objectif dans ce sous-paragraphe est de démontrer le

Théorème 2.49. *Soient $a, b \in W^{1,p}(\Omega)$, avec $p > n$, telles qu'il existe deux constantes $\lambda \geq 1$ et $M_0 > 0$ pour lesquelles*

$$\lambda^{-1} \leq a, b \leq \lambda. \quad (2.121)$$

$$\|a\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \|b\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M_0. \quad (2.122)$$

Alors il existe une constante positive $C_0 = C_0(n, p, \Omega, \lambda, M_0)$ telle que

$$\|a - b\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_0 \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}^{\frac{p}{n}-1}. \quad (2.123)$$

Si de plus $a, b \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, pour un certain α , $0 < \alpha < 1$, et

$$\|a\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}, \|b\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M_1, \quad (2.124)$$

où M_1 est une constante positive, alors

$$\|\partial_\nu a - \partial_\nu b\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_1 \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}^{(\frac{p}{n}-1)\frac{\alpha-1}{2+\alpha}}, \quad (2.125)$$

avec $C_1 = C_1(\alpha, n, p, \Omega, \lambda, M_1)$.

Nous donnons une démonstration de ce théorème qui repose de façon essentielle sur les solutions singulières construites au sous-paragraphe précédent. Avant de donner la preuve, nous montrons un lemme qui précisera comment nous utiliserons ces solutions singulières. À cette fin, nous introduisons quelques notations. Nous fixons $x_0 \in \Gamma$ et posons $x_\sigma = x_0 + \sigma\nu(x_0)$. Clairement, il existe deux constantes positives C et σ_0 , qui ne dépendent que de Ω , telles que

$$C\sigma \leq \text{dist}(x_\sigma, \Gamma) \leq \sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_0.$$

Fixons $R > 2\text{diam}(\Omega)$. Nous pouvons alors prolonger a et b à $B_R(x_\sigma)$ de telle sorte que nous ayons

$$\tilde{\lambda}^{-1} \leq a, b \leq \tilde{\lambda}, \quad \text{dans } B_R(x_\sigma)$$

et

$$\|a\|_{W^{1,p}(B_R(x_\sigma))}, \|b\|_{W^{1,p}(B_R(x_\sigma))} \leq \tilde{M}_0,$$

avec $\tilde{\lambda}$ et \tilde{M}_0 dépendant uniquement de λ , M_0 , Ω et R .

Lemme 2.50. *Supposons que a , b vérifient (2.121) et (2.122). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe des solutions u , $v \in W^{2,p}(\Omega)$ de*

$$\text{div}(a\nabla u) = \text{div}(b\nabla v) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.126)$$

qui vérifient

$$|\nabla u(x)|, |\nabla v(x)| \leq C|x - x_\sigma|^{1-n-m}, \quad x \in \Omega, \quad (2.127)$$

et

$$\nabla u \cdot \nabla v \geq |x - x_0|^{2(1-n-m)}, \quad x \in \Omega \cap B_{r_0}(x_\sigma), \quad (2.128)$$

où C et r_0 sont des constantes qui ne dépendent que de λ , M , n , p et Ω .

Preuve. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x_\sigma = 0$. D'après le Théorème 2.45, il suffit de trouver une fonction harmonique sphérique S_m telle que

$$|\nabla(|x|^{2-n-m} S_m(\frac{x}{|x|}))|^2 \geq 2|x|^{2(1-n-m)}. \quad (2.129)$$

Ceci est évident quand $n = 2$ (en dimension deux, les fonctions harmoniques sphériques sont de la forme $\cos(k\theta)$ ou bien $\sin(k\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$). Pour $n \geq 3$, nous choisissons $S_m(\frac{x}{|x|}) = AC_m^{\frac{n-2}{2}}(\frac{x}{|x|})$, A étant une constante non nulle et

$C_m^{\frac{n-2}{2}}$ sont les polynômes de Gegenbauer donnés au sous-paragraphe 1.4.6. Pour $t = \frac{x_n}{|x|}$, nous avons

$$|\nabla(|x|^{2-n-m} S_m(\frac{x}{|x|}))|^2 = A^2 |x|^{2(1-n-m)} ((2-n-m)^2 (C_m^{\frac{n-2}{2}}(t))^2 + (\frac{d}{dt} C_m^{\frac{n-2}{2}}(t))^2).$$

(2.129) résulte alors du fait que $C_m^{\frac{n-2}{2}}(t)$ et $\frac{d}{dt} C_m^{\frac{n-2}{2}}(t)$ ne peuvent pas être nulles simultanément. Pour monter ce fait, notons d'abord $C_m^{\frac{n-2}{2}}(\pm 1) \neq 0$ et que $C_m^{\frac{n-2}{2}}(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$(t^2 - 1)f'' + (n-1)tf' - m(m+n-2)f = 0.$$

Donc, d'après l'unicité des solutions de cette équation différentielle pour la condition initiale $(f(t), f'(t))$, $\frac{d}{dt} C_m^{\frac{n-2}{2}}(t) \neq 0$ si $C_m^{\frac{n-2}{2}}(t) = 0$, pour tout $|t| < 1$. \square

Preuve du Théorème 2.49. Nous montrons d'abord (2.123). Soit $x_0 \in \Gamma$ tel que $|(a-b)(x_0)| = \|a-b\|_{L^\infty(\Gamma)}$. Quitte à intervertir les rôles de a et b , nous supposons que $(a-b)(x_0) > 0$. Nous avons alors

$$\|a-b\|_{L^\infty(\Gamma)} = (a-b)(x_0) \leq (a-b)(x) + C|x-x_0|^\beta, \text{ avec } \beta = 1 - \frac{n}{p}.$$

En procédant de manière similaire à ce que nous avons fait à plusieurs reprises, nous montrons l'identité

$$\int_{\Omega} (a-b) \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle (\Sigma_a - \Sigma_b)u, v \rangle_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}, \quad (2.130)$$

pour u, v vérifiant (2.126).

Choisissons u, v comme dans le Lemme 2.50. Pour $0 < \sigma \leq \min(\frac{r_0}{2}, \sigma_0)$, nous avons d'après (2.127) et (2.128),

$$\begin{aligned} \|a-b\|_{L^\infty(\Gamma)} & \int_{B_{2\sigma}(x_\sigma) \cap \Omega} |x-x_\sigma|^{2(1-n-m)} dx \\ & \leq C \left(\int_{\Omega \setminus B_{2\sigma}(x_\sigma)} |a-b| |x-x_\sigma|^{2(1-n-m)} dx \right. \\ & \quad + \int_{B_{2\sigma}(x_\sigma) \cap \Omega} |x-x_0|^\beta |x-x_\sigma|^{2(1-n-m)} dx \\ & \quad \left. + \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right). \end{aligned} \quad (2.131)$$

Quitte à remplacer u (resp. v) par u (resp. v) plus une constante, nous supposons

$$\int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} v dx = 0.$$

Ceci, l'inégalité de Poincaré et le théorème de trace impliquent

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Mais d'après (2.127),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &\leq C \int_{\Omega} |x - x_{\sigma}|^{2(1-n-m)} dx \leq C \int_{B_R(x_{\sigma}) \setminus B_{\sigma}(x_{\sigma})} |x - x_{\sigma}|^{2(1-n-m)} dx \\ &\leq C \sigma^{1-n-2m}. \end{aligned}$$

Le même argument vaut aussi pour v . Nous obtenons alors

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \sigma^{1-n-2m}. \quad (2.132)$$

D'autre part, $B_{2\sigma}(x_{\sigma}) \cap \Omega$ contient un cône \mathcal{C} . En utilisant les coordonnées polaires, nous déduisons qu'il existe Λ une partie de S^{n-1} de mesure non nulle et indépendante de σ telle que

$$|\mathcal{C}| = \int_{\mathcal{C}} dx = \int_0^{\sigma} r^{n-1} dr \int_{\Lambda} d\omega = C \sigma^n,$$

et puisque $|x - x_{\sigma}| \leq 2\sigma$, $x \in \mathcal{C}$, nous concluons

$$\int_{B_{2\sigma}(x_{\sigma}) \cap \Omega} |x - x_{\sigma}|^{2(1-n-m)} \geq C \sigma^{2-n-2m}. \quad (2.133)$$

Nous pouvons aussi vérifier sans difficultés que

$$\int_{B_{2\sigma}(x_{\sigma}) \cap \Omega} |x - x_0|^{\beta} |x - x_{\sigma}|^{2(1-n-m)} \leq C \sigma^{2-n-2m+\beta} \quad (2.134)$$

et

$$\int_{\Omega \setminus B_{2\sigma}(x_{\sigma})} |a - b| |x - x_{\sigma}|^{2(1-n-m)} \leq C \sigma^{2-n-2m}. \quad (2.135)$$

Une combinaison de (2.131) - (2.135) implique

$$\begin{aligned} \|a - b\|_{L^{\infty}(\Gamma)} &\leq C(\sigma^{-1} \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} + \sigma^{-2+n+2m} + \sigma^{\beta}) \\ &\leq C(\sigma^{-1} \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} + \sigma^{\beta}). \end{aligned}$$

Si $\|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}$ est assez petit, nous pouvons choisir $\sigma = \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}^{\frac{2}{n}}$, ce qui donne immédiatement (2.123).

Nous procédons maintenant à la preuve de (2.125). Soit $x_0 \in \Gamma$ tel que

$$\partial_\nu a(x_0) - \partial_\nu b(x_0) = \|\partial_\nu a - \partial_\nu b\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

Notons $\Omega_{\sigma_0} = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \Gamma) < \sigma_0\}$. Alors, il n'est pas difficile de vérifier que tout $x \in \overline{\Omega}_{\sigma_0}$ peut être représenté sous la forme $x = y - s\nu(y)$, pour un certain $y \in \Gamma$ et $0 \leq s \leq \sigma_0$. Nous avons aussi $Cs \leq \text{dist}(x, \Gamma) \leq s$ et $|y - x_0| \leq C|x - x_0|$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $t \in (0, 1)$ tel que

$$|(a-b)(x) - (a-b)(y) - s\partial_\nu(a-b)(x_0)| = |s\partial_\nu(a-b)(y - ts\nu(y)) - \partial_\nu(a-b)(x_0)|.$$

D'où,

$$|(a-b)(x) - (a-b)(y) - s\partial_\nu(a-b)(x_0)| \leq Cs|y - x_0|^\alpha \leq Cs|x - x_0|^\alpha,$$

où nous avons utilisé (2.124). Il en résulte

$$s\|\partial_\nu a - \partial_\nu b\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq |(a-b)(x)| + \|a-b\|_{L^\infty(\Gamma)} + Cs|x - x_0|^\alpha. \quad (2.136)$$

Comme précédemment, pour u et v des solutions données par le Lemme 2.50 et $\sigma \leq \frac{1}{2} \min(\sigma_0, r_0)$, nous avons, vu (2.130),

$$\begin{aligned} \sigma\|\partial_\nu a - \partial_\nu b\|_{L^\infty(\Gamma)} & \int_{B_{2\sigma}(x_\sigma) \cap \Omega} |x - x_\sigma|^{2(1-n-m)} \text{dist}(x, \Gamma) \\ & \leq C \left(\int_{\Omega \setminus B_{2\sigma}(x_\sigma)} |a-b||x - x_\sigma|^{2(1-n-m)} \right. \\ & \quad + \int_{B_{2\sigma}(x_\sigma) \cap \Omega} \text{dist}(x, \Gamma) |x - x_0|^\alpha |x - x_\sigma|^{2(1-n-m)} \\ & \quad + \int_{B_{2\sigma}(x_\sigma) \cap \Omega} |x - x_\sigma|^{2(1-n-m)} \text{dist}(x, \Gamma) \|a-b\|_{L^\infty(\Gamma)} \\ & \quad \left. + \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right). \end{aligned}$$

Puisque $C\sigma \leq \text{dist}(x, \Gamma) \leq \sigma$, de la même manière que précédemment, nous tirons de cette estimation

$$\|\partial_\nu a - \partial_\nu b\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C\sigma^{-1} \left(\sigma^\alpha + \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}^{\frac{p}{n}-1} \sigma^{-2} \right),$$

où nous avons utilisé (2.123) pour estimer $\|a-b\|_{L^\infty(\Gamma)}$. Le choix de $\sigma = \|\Sigma_a - \Sigma_b\|_{\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}^{\frac{(\frac{p}{n}-1)\frac{1}{\alpha+2}}$ permet d'obtenir l'estimation recherchée. \square

Pour faire ce sous-paragraphe, nous nous sommes largement inspiré de l'article de G. Alessandrini [Al4].

2.3.3 Une alternative aux solutions singulières

Nous reprenons les définitions et notations du sous-paragraphe 2.3.2. Pour $0 < a_0 \leq a \in L^\infty(\Omega)$, où a_0 est une certaine constante, et $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, nous notons $w_{a,\varphi} \in H^1(\Omega)$ l'unique solution variationnelle du problème aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a\nabla w) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w|_\Gamma = \varphi. \end{cases} \quad (2.137)$$

Rappelons que l'opérateur borné Σ_a , que nous avons construit plus haut, est donné par

$$\Sigma_a : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \varphi \rightarrow a\partial_\nu w_{a,\varphi}.$$

Les solutions singulières permettent de montrer (voir [Al4] pour plus de détails) que si $a_1, a_2 \in C^1(\overline{\Omega})$ sont telles que $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$ alors

$$a_1 = a_2 \text{ et } \nabla a_1 = \nabla a_2 \text{ sur } \Gamma.$$

Bien entendu, ce résultat, combiné avec ceux du paragraphe 2.1, permet de déduire que $a_1 = a_2$ dans $\overline{\Omega}$.

Dans ce sous-paragraphe, nous donnons une alternative aux solutions singulières. Elle consiste à construire des solutions particulières du problème aux limites (2.137).

Nous débutons par le

Lemme 2.51. *Supposons que Ω est de classe $C^{1,1}$ et soit $\sigma_0 \in \Gamma$. Alors il existe (ψ_m) une suite de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \cap C^{1,1}(\Gamma)$ et deux constantes C_1 et C_2 telles que*

$$(a) \operatorname{supp}(\psi_{m+1}) \subset \operatorname{supp}(\psi_m) \text{ et } \bigcap_{m \geq 1} \operatorname{supp}(\psi_m) = \{\sigma_0\},$$

$$(b) \|\psi_m\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 1,$$

$$(c) \frac{C_1}{m^{\frac{1+2s}{2}}} \leq \|\psi_m\|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq \frac{C_2}{m^{\frac{1+2s}{2}}} \text{ pour } -1 \leq s \leq 1.$$

Preuve. Tout au long de cette démonstration, les C_i désignent des constantes génériques. Plaçons-nous d'abord dans le cas $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ et $\sigma_0 = 0$. Soit alors $f_* \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\operatorname{supp}(f_*) \subset [-1, 1] \text{ et } \int_{-1}^1 f_*(t) dt = 1.$$

Pour $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $m \geq 1$ entier, nous définissons

$$f_m(x') = \prod_{i=1}^{n-1} f_*(mx_i).$$

Nous avons $\text{supp}(f_m) \subset [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]^{n-1}$ et, puisque $f_m(x') = f_1(mx')$,

$$\hat{f}_m(\xi') = \frac{1}{m^{n-1}} \hat{f}_1\left(\frac{\xi'}{m}\right).$$

Par suite, pour $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|f_m\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^{n-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{-s} |\hat{f}_m(\xi')|^2 d\xi' \\ &= \frac{1}{m^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + m^2 |\xi'|^2)^{-s} |\hat{f}_1(\xi')|^2 d\xi'. \end{aligned} \quad (2.138)$$

De $(1 + m^2 \theta^2)^{-1} \geq m^{-2}(1 + \theta^2)^{-1}$, pour $\theta > 0$, nous tirons

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + m^2 |\xi'|^2)^{-s} |\hat{f}_1(\xi')|^2 d\xi' \geq \frac{C_3}{m^{2s}}. \quad (2.139)$$

D'autre part, comme f_* est de moyenne nulle, $\hat{f}(0) = 0$. D'où, \hat{f}_1 étant analytique (car f_1 est à support compact), $|\xi|^{-1} \hat{f}_1(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Nous obtenons alors, en utilisant l'inégalité $(1 + m^2 \theta^2)^{-1} \leq (\theta m)^{-2}$ pour $\theta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + m^2 |\xi'|^2)^{-s} |\hat{f}_1(\xi')|^2 d\xi' \leq \frac{1}{m^{2s}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\hat{f}_1(\xi')|^2}{|\xi'|^{2s}} d\xi' = \frac{C_4}{m^{2s}} \quad (2.140)$$

si $0 \leq s \leq 1$.

Une combinaison de (2.138), (2.139) et (2.140) nous donne, pour $0 \leq s \leq 1$,

$$C_5(s) m^{-\frac{n-1}{2}-s} \leq \|f_m\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_6(s) m^{-\frac{n-1}{2}-s}. \quad (2.141)$$

De la même manière, nous pouvons démontrer que nous avons une inégalité similaire à (2.141) dans le cas $s \geq 0$. C'est-à-dire

$$C_7(s) m^{-\frac{n-1}{2}+s} \leq \|f_m\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_8(s) m^{-\frac{n-1}{2}+s}. \quad (2.142)$$

Il résulte de (2.141) et (2.142) que, pour tout $s \geq -1$,

$$C_9(s) m^{-\frac{n-1}{2}+s} \leq \|f_m\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_{10}(s) m^{-\frac{n-1}{2}+s}$$

et donc ψ_m , définie par

$$\psi_m(x') = \frac{f_m(x')}{\|f_m\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}},$$

satisfait à, pour $-1 \leq s \leq 1$,

$$C_{11}(s) m^{-\frac{1-2s}{2}} \leq \|f_m\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_{12}(s) m^{-\frac{1-2s}{2}}.$$

Le cas général se ramène au cas précédent en utilisant les cartes locales. Vu la régularité $C^{1,1}$ de Ω , nous pouvons vérifier que la nouvelle suite (ψ_m) que nous obtenons est dans $C^{1,1}(\Gamma) \cap H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et elle satisfait aux conditions (a) - (c). \square

Dans ce qui suit σ_0 est un point quelconque de Γ et, pour simplifier les notations, nous posons $u_m = w_{a,\psi_m}$.

Lemme 2.52. *Supposons que Ω est de classe $C^{1,1}$ et que $a \in W^{1,\infty}(B_R(\sigma_0) \cap \Omega)$. Alors il existe une constante positive C et m_0 un entier positif pour lesquels*

$$\|u_m\|_{H^1(\Omega \setminus \overline{B_R(\sigma_0)})} \leq \frac{C}{m}, \text{ pour tout } m \geq m_0. \quad (2.143)$$

Preuve. Choisissons d'abord m_0 assez large de telle sorte que le support de ψ_m soit contenu dans $B_{\frac{R}{8}}(\sigma_0) \cap \Gamma$ pour tout $m \geq m_0$. Soit $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction de troncature telle que $0 \leq \zeta \leq 1$,

$$\zeta = 1 \text{ dans } \overline{\Omega} \setminus B_R(\sigma_0) \text{ et } \zeta = 0 \text{ dans } B_{\frac{R}{2}}(\sigma_0).$$

Soient $\omega = \overline{\Omega} \setminus B_{\frac{R}{4}}(\sigma_0)$ et $v_m = \zeta u_m$. Nous avons

$$-\operatorname{div}(av_m) = -a \nabla \zeta \cdot \nabla u_m - \operatorname{div}(au_m \nabla \zeta).$$

Nous multiplions chaque membre de cette équation par $v_m = \zeta u_m$ et nous faisons ensuite une intégration par parties sur ω pour avoir, en notant que $v_m = 0$ sur $\partial\omega$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega} a |\nabla v_m|^2 dx &= - \int_{\omega} a \nabla \zeta \cdot \nabla u_m dx + \int_{\omega} au_m \nabla \zeta \cdot \nabla (\zeta u_m) dx \\ &= \int_{\omega} au_m^2 |\nabla \zeta|^2 dx. \end{aligned}$$

Comme $v_m = u_m$ sur $\Omega \setminus \overline{B_R(\sigma_0)} \subset \omega$, nous déduisons de la dernière identité

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B_R(\sigma_0)}} |\nabla u_m|^2 dx \leq C \int_{\Omega} u_m^2 |\nabla \zeta|^2 dx. \quad (2.144)$$

Nous estimons maintenant le membre de droite de la dernière inégalité en fonction de $\|\psi_m\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$. Soit $w \in H_0^1(\Omega)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(a \nabla w) = u_m |\nabla \zeta|^2 \text{ dans } \Omega, \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (2.145)$$

Puisque $a \in W^{1,\infty}(B_R(\sigma_0) \cap \Omega)$, d'après les résultats de régularité locale pour les équations elliptiques, $w \in H^2(B_R(\sigma_0) \cap \Omega)$ (voir par exemple D. Gilbarg et N. S. Trudinger [GT]). Par suite $\partial_\nu w \in H^{\frac{1}{2}}(B_R(\sigma_0) \cap \Gamma)$. De plus

$$\|a \partial_\nu w\|_{H^{\frac{1}{2}}(B_R(\sigma_0) \cap \Gamma)} \leq C \|w\|_{H^2(B_R(\sigma_0) \cap \Omega)} \leq C' \|u_m |\nabla \zeta|^2\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.146)$$

Nous multiplions maintenant (2.145) par u_m et nous faisons une intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_m^2 |\nabla \zeta|^2 dx &= \int_{\Omega} a \nabla w \cdot \nabla u_m dx - \int_{\Gamma} a \partial_{\nu} w \psi_m d\sigma \\ &= - \int_{\Gamma} a \partial_{\nu} w \psi_m d\sigma, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\int_{\Omega} a \nabla w \cdot \nabla u_m dx = 0,$$

qui résulte du fait que u_m est solution de (2.137), avec $\varphi = \psi_m$, et $w \in H_0^1(\Omega)$.

Nous avons alors

$$\int_{\Omega} u_m^2 |\nabla \zeta|^2 dx \leq C \|a \partial_{\nu} w\|_{H^{\frac{1}{2}}(B_R(\sigma_0) \cap \Gamma)} \|\psi_m\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

ce qui, combiné avec (2.146) et l'inégalité $|\nabla \zeta|^2 \leq lC |\nabla \zeta| l$, entraîne

$$\begin{aligned} \|u_m |\nabla \zeta|\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|u_m |\nabla \zeta|^2\|_{L^2(\Omega)} \|\psi_m\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C' \|u_m |\nabla \zeta|\|_{L^2(\Omega)} \|\psi_m\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Vu l'estimation du Lemme 2.51 (c) pour ψ_m et (2.144), nous obtenons

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{B_R(\sigma_0)})} \leq \frac{C}{m} \text{ si } m \geq m_0.$$

Mais d'après l'inégalité de Poincaré,

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{B_R(\sigma_0)})} \leq C \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{B_R(\sigma_0)})},$$

car $u_m = 0$ sur $\Gamma \cap B_R(\sigma_0)$, ce qui achève la preuve. \square

Lemme 2.53. *Sous les hypothèses et les notations du Lemme 2.52, il existe un entier $m_1 \geq m_0$ et une constante $C = C(R)$ tels que*

$$\int_{B_R(\sigma) \cap \Omega} |\nabla u_m|^2 dx \geq C, \quad m \geq m_1.$$

Preuve. Nous avons

$$\|u_m|_{\Gamma}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \leq C (\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}),$$

tout simplement car $w \rightarrow \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \|w|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}$ définit une norme équivalente à la norme originale sur $H^1(\Omega)$. Mais, d'après le Lemme 2.51,

$$\|u_m|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \|\psi_m|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{C}{m}$$

et $1 = \|u_m|_Γ\|_{H^{\frac{1}{2}}(Γ)}^2 = \|\psi_m|_Γ\|_{H^{\frac{1}{2}}(Γ)}^2$. Par conséquence,

$$1 = \|u_m|_Γ\|_{H^{\frac{1}{2}}(Γ)}^2 \leq C\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{m}.$$

Ceci et le dernier lemme impliquent

$$1 \leq C\left(\int_{B_R(\sigma_0) \cap \Omega} |\nabla u_m|^2 dx + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}\right).$$

D'où le résultat pour $m \geq m_1$, $m_1 \geq m_0$ assez grand. \square

Nous avons utilisé plus haut l'ensemble $W_+^{1,\infty}(\Omega)$. Rappelons qu'il est défini par

$$W_+^{1,\infty}(\Omega) = \{a \in W^{1,\infty}(\Omega); a \geq a_0 \text{ p.p. pour une certaine constante } a_0 > 0\}.$$

Nous utilisons les deux lemmes précédents pour démontrer le

Théorème 2.54. *Supposons que Ω est de classe $C^{1,1}$ et soient $a_1, a_2 \in W_+^{1,\infty}(\Omega)$ telles que $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$. Alors $a_1 = a_2$ sur Γ .*

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde. Nous faisons alors l'hypothèse qu'il existe $\sigma_0 \in \Gamma$ tel que $a_1(\sigma_0) \neq a_2(\sigma_0)$. Sans perte de généralité, nous supposons, par exemple, que $a_1(\sigma_0) > a_2(\sigma_0)$. D'où, il existe R et δ deux constantes > 0 telles que

$$a_1(x) \geq a_2(x) + \delta, \quad x \in B_R(\sigma_0) \cap \Omega. \quad (2.147)$$

En notant $u_m^j = u_{a_j, \psi_m}$, $j = 1, 2$ et $B = B_R(\sigma_0) \cap \Omega$, nous avons

$$Q_{a_1}(\psi_m) = \int_{\Omega} a_1 |\nabla u_m^1|^2 \geq \int_B a_1 |\nabla u_m^1|^2$$

et donc, vu (2.147),

$$Q_{a_1}(\psi_m) \geq \int_B a_2 |\nabla u_m^1|^2 + \delta \int_B a_1 |\nabla u_m^1|^2.$$

En utilisant la minoration du Lemme 2.53, nous déduisons qu'il existe un entier positif m_1 pour lequel

$$Q_{a_1}(\psi_m) \geq \int_B a_2 |\nabla u_m^1|^2 + C_0 \delta, \quad \text{si } m \geq m_1.$$

Cette estimation, combinée avec celle du Lemme 2.52, entraîne

$$Q_{a_1}(\psi_m) \geq \int_{\Omega} a_2 |\nabla u_m^1|^2 - \frac{C}{m^2} + C_0 \delta, \quad \text{si } m \geq m_1. \quad (2.148)$$

D'autre part, nous savons que si

$$K_{\psi_m} = \psi_m + H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega); w = \psi_m \text{ sur } \Gamma\},$$

alors

$$\int_{\Omega} a_2 |\nabla u_m^1|^2 \geq \min_{w \in K_{\psi_m}} \int_{\Omega} a_2 |\nabla w|^2 = \int_{\Omega} a_2 |\nabla u_m^2|^2 = Q_{a_2}(\psi_m).$$

Cette dernière inégalité et (2.148) impliquent

$$Q_{a_1}(\psi_m) \geq Q_{a_2}(\psi_m) - \frac{C}{m^2} + C_0 \delta, \text{ si } m \geq m_1. \quad (2.149)$$

Par conséquence, il existe $m_2 \geq m_1$ tel que

$$Q_{a_1}(\psi_m) \geq Q_{a_2}(\psi_m) + \frac{C_0 \delta}{2}, \text{ si } m \geq m_2. \quad (2.150)$$

Mais $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$ entraîne, en particulier, $Q_{a_1}(\psi_m) = Q_{a_2}(\psi_m)$ pour chaque m (noter que pour $a = a_i$, il n'est pas difficile de montrer $Q_a(\varphi) = \langle \Sigma_a \varphi, \varphi \rangle$ si $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$). D'où la contradiction. \square

Une conséquence immédiate du dernier théorème est un résultat de stabilité lipschitzienne :

Corollaire 2.55. *Soient $M > 0$ et $\lambda > 0$ deux constantes. Alors il existe une constante $C = C(M, \lambda)$ telle que : pour tous $a_1, a_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant*

$$\lambda \leq a_j \text{ et } \|a_j\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq M, \quad (2.151)$$

nous avons

$$\|a_1 - a_2\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C \|\Sigma_{a_1} - \Sigma_{a_2}\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))}.$$

Preuve. Soient $a_1, a_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant (2.151) et telles que $a_1 - a_2 \not\equiv 0$ sur Γ . Si $0 < 2\beta = \|a_1 - a_2\|_{L^\infty(\Gamma)}$, alors il existe $B = B_R(\sigma_0) \cap \Omega$ pour laquelle

$$|a_1(x) - a_2(x)| \geq \delta, \quad x \in B,$$

par exemple,

$$a_1(x) - a_2(x) \geq \delta, \quad x \in B,$$

Au cours de la preuve du Théorème 2.54, nous avons utilisé des estimations a priori H^2 pour établir (2.150) sans préciser la dépendance des données de la constante C_0 . Il est démontré (voir D. Gilbarg and N. S. Trudinger [GT] pour les détails) que la constante C_0 ne dépend que de λ et M . Rappelons que, toujours d'après (2.150),

$$\frac{\delta C_0}{2} \leq Q_{a_1}(\psi_m) - Q_{a_2}(\psi_m) = \langle (\Sigma_{a_1} - \Sigma_{a_2})(\psi_m), \psi_m \rangle,$$

pour m assez grand et donc, puisque $\|\psi_m\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 1$,

$$\frac{\delta C_0}{2} \leq \|\Sigma_{a_1} - \Sigma_{a_2}\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))}.$$

D'où le résultat avec $C = \frac{4}{C_0}$. \square

La preuve de $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$ implique $\nabla a_1 = \nabla a_2$ sur Σ se fait aussi par un raisonnement par l'absurde. D'abord le lemme précédent nous dit que si $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$ alors $a_1 = a_2$ sur Γ et donc $\partial_\tau a_1 = \partial_\tau a_2$ sur Γ . Donc supposer que $\nabla a_1 \neq \nabla a_2$ sur Γ revient à supposer que $\partial_\nu a_1 \neq \partial_\nu a_2$, par exemple $\partial_\nu a_1 > \partial_\nu a_2$ en un point de Γ . Par conséquence, il existe $\delta > 0$ et $B = B_R(\sigma_0) \cap \Omega$ tels que

$$a_1(x) \geq a_2(x) + \delta \text{dist}(x, \Gamma), \quad x \in B. \quad (2.152)$$

Dans ces conditions, le Lemme 2.53 ne suffira pas pour faire un raisonnement par l'absurde. Nous le remplacerons par le lemme suivant qui est plus précis :

Lemme 2.56. *Sous les hypothèses et les notations du Lemme 2.53, il existe C une constante > 0 et un entier $m_1 \geq m_0$, qui dépendent de R , telles que*

$$\int_{B_R(\sigma_0) \cap \Omega} \text{dist}(x, \Gamma) |\nabla u_m|^2 dx \geq \frac{C}{m}, \quad \text{pour tout } m \geq m_1. \quad (2.153)$$

Preuve. Soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ la première fonction propre de l'opérateur $Au = -\text{div}(a\nabla u)$, avec une condition de Dirichlet sur le bord, qui vérifie

$$\varphi > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \int_{\Omega} \varphi^2 dx = 1.$$

D'après le lemme de Hopf (Lemme 1.34), nous déduisons

$$\begin{aligned} -\partial_\nu \varphi_1 &\geq c_0 > 0, \text{ sur } B_R(\sigma_0) \cap \Omega, \\ c_1 \text{dist}(x, \Gamma) &\leq \varphi_1 \leq c_2 \text{dist}(x, \Gamma), \text{ sur } B_R(\sigma_0) \cap \Omega, \end{aligned} \quad (2.154)$$

où les constantes c_j , $j = 1, 2, 3$, dépendent de R .

Nous supposons que $m \geq m_0$ est suffisamment grand de telle sorte que $\text{supp}(\psi_m) \subset B_R(\sigma_0) \cap \Omega$. Comme $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, $u_m \varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$. Nous multiplions alors (2.137), avec $\varphi = \psi_m$, par $\varphi_1 u_m$ et nous intégrons ensuite sur Ω pour obtenir

$$\int_{\Omega} \text{div}(a\nabla u_m) \varphi_1 u_m dx = 0.$$

Cette identité implique, après une intégrations par parties,

$$\int_{\Omega} a |\nabla u_m|^2 dx + \int_{\Omega} a u_m \nabla u_m \cdot \nabla \varphi_1 dx = 0. \quad (2.155)$$

Or

$$\int_{\Omega} a u_m \nabla u_m \cdot \nabla \varphi_1 dx = \int_{\Omega} a \nabla \frac{u_m^2}{2} \cdot \nabla \varphi_1 dx.$$

Une nouvelle intégration par parties entraine

$$\int_{\Omega} a u_m \nabla u_m \cdot \nabla \varphi_1 dx = \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} u_m^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_m a \partial_{\nu} \varphi_1.$$

Nous utilisons cette identité dans (2.155) pour conclure

$$\int_{\Omega} a |\nabla u_m|^2 dx = -\frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} u_m^2 \varphi_1 d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_m a \partial_{\nu} \varphi_1 d\sigma. \quad (2.156)$$

D'après (2.154), nous avons

$$-\int_{\Gamma} \psi_m a \partial_{\nu} \varphi_1 \geq c_0 \int_{\Gamma} a \psi_m d\sigma \geq \frac{C}{m}, \quad (2.157)$$

où la dernière inégalité résulte du Lemme 2.51 ((c) avec $s = 0$).

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$ la solution de

$$-\operatorname{div}(a \nabla w) = u_m \varphi_1 \text{ dans } \Omega, \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (2.158)$$

Comme dans les commentaires après la preuve du Théorème 2.11, on montre que

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u_m \varphi_1\|_{L^2(\Omega)},$$

et par suite, en utilisant le fait que $\varphi_1 \leq c \varphi_1^{\frac{1}{2}}$,

$$\|a \partial_{\nu} w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u_m \varphi_1^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.159)$$

Nous multiplions maintenant (2.158) par u_m et nous faisons une intégration par parties pour déduire

$$\int_{\Omega} u_m^2 \varphi_1 dx = - \int_{\Gamma} \psi_m a \partial_{\nu} w d\sigma,$$

puisque $\int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla w = 0$ (noter que u_m est solution de (2.137), avec $\varphi = \psi_m$).
Donc

$$\int_{\Omega} u_m^2 \varphi_1 dx \leq \|\psi_m\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|a \partial_{\nu} w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Mais $\|\psi_m\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \frac{C}{m}$ par le Lemme 2.51 ((c) avec $s = -\frac{1}{2}$). D'où

$$\int_{\Omega} u_m^2 \varphi_1 dx \leq \frac{C}{m} \|a \partial_{\nu} w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Cette inégalité et (2.159) impliquent

$$\int_{\Omega} u_m^2 \varphi_1 dx \leq \frac{C}{m^2}. \quad (2.160)$$

Finalement, une combinaison de (2.156), (2.157) et (2.160) nous fournit

$$\int_{\Omega} \varphi_1 |\nabla u_m|^2 dx \geq \frac{C}{m}.$$

Le résultat s'ensuit par (2.154) en notant que $\text{supp}(\psi_m) \subset B_R(\sigma_0) \cap \Omega$. \square

Théorème 2.57. *Soient $a_1, a_2 \in L_+^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ telles que $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$. Alors*

$$a_1 = a_2 \text{ et } \nabla a_1 = \nabla a_2 \text{ sur } \Gamma.$$

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde. Nous supposons donc que $a_1 \neq a_2$ (conséquence du Théorème 2.54) et $\nabla a_1 \neq \nabla a_2$ sur Γ , ce qui entraîne (voir plus haut) qu'il existe $B = B_R(\sigma_0) \cap \Omega$ et $\delta > 0$ pour lesquelles (2.152) est vérifiée. C'est-à-dire

$$a_1(x) \geq a_2(x) + \delta \text{dist}(x, \Gamma), \quad x \in B.$$

Comme précédemment, posons $u_m^j = u_{a_j, \psi_m}$, $j = 1, 2$ et soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ la première fonction propre de l'opérateur $Au = -\text{div}(a \nabla u)$, avec une condition de Dirichlet sur le bord, qui vérifie $\varphi > 0$ dans Ω et $\int_{\Omega} \varphi^2 dx = 1$. Nous appliquons d'abord le Lemme 2.56 pour obtenir, avec $m \geq m_1$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a_1 |\nabla u_m^1|^2 dx &\geq \int_B a_1 |\nabla u_m^1|^2 dx \\ &\geq \int_B a_2 |\nabla u_m^1|^2 dx + \delta \int_B \text{dist}(x, \Gamma) |\nabla u_m^1|^2 dx \\ &\geq \int_B a_2 |\nabla u_m^1|^2 dx + \frac{\delta c_0}{m}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\int_{\Omega} a_1 |\nabla u_m^1|^2 dx \geq \int_{\Omega} a_2 |\nabla u_m^1|^2 dx - \frac{c_1}{m^2} + \frac{\delta c_0}{m},$$

pourvu que $m \geq m_1$. Mais

$$\int_{\Omega} a_2 |\nabla u_m^1|^2 dx \geq Q_{a_2}(\psi_m).$$

D'où, il existe $m_2 \geq m_1$ un entier pour lequel, pour tout $m \geq m_2$,

$$Q_{a_1}(\psi_m) = \int_{\Omega} a_1 |\nabla u_m^1|^2 dx \geq \int_{\Omega} a_2 |\nabla u_m^1|^2 dx + \frac{\delta c_0}{2m} \geq Q_{a_2}(\psi_m) + \frac{\delta c_0}{2m},$$

ce qui contredit le fait que $\Sigma_{a_1} = \Sigma_{a_2}$ implique $Q_{a_1} = Q_{a_2}$. \square

Nous avons préparé ce sous-paragraphe à partir de O. Kavian [Ka2].

2.4 Détermination d'un coefficient frontière

2.4.1 Cas où le domaine est une couronne : une méthode de décomposition en série de Fourier

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r_1 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < r_2\}$, de frontière Γ et notons $\Gamma_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; r = r_i\}$, $i = 1, 2$. Donc $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Nous considérons alors le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \Gamma_2 \\ \partial_\nu u + qu = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.161)$$

Fixons $\alpha \in (0, 1)$ et $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma_2)$. Alors pour toute fonction $q \in C^{1,\alpha}(\Gamma_1)$ positive et non identiquement égale à zéro, le problème aux limites (2.161) admet une unique solution $u = u_q \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (voir Théorème 1.25).

Notre objectif dans ce sous-paragraphe est d'établir le

Théorème 2.58. *Soit $M > 0$ une constante donnée. Nous supposons que les conditions ci-dessous sont satisfaites :*

- (i) $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma_2)$ est non identiquement égale à zéro,
- (ii) $q_i \in C^{1,\alpha}(\Gamma_1)$, $i = 1, 2$ est positive et non identiquement égale à zéro,
- (iii) $\|q_i\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma_1)} \leq M$, $i = 1, 2$.

Soient $u_i = u_{q_i}$, $i = 1, 2$, et K un compact de $\{x \in \Gamma_1; u_2(x) \neq 0\}$. Alors il existe des constantes positives ϵ , A et B qui ne dépendent que de M , K , r_1 et r_2 telles que

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Gamma_2)}} \right)},$$

si $\|q_2 - q_1\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma_1)} \leq \epsilon$.

Nous allons voir que ce théorème s'obtient comme conséquence d'un résultat de stabilité pour un problème de Cauchy pour le laplacien en coordonnées polaires. Rappelons à cette fin que le laplacien en coordonnées polaires (r, θ) , noté $\tilde{\Delta}$, est donné par

$$\tilde{\Delta} = \partial_{r^2}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta^2}^2.$$

Posons $D =]r_1, r_2[\times]0, 2\pi[$, où $0 < r_1 < r_2$, et

$$C_p^2(\overline{D}) = \{v = w|_{\overline{D}}; w \in C^2([r_1, r_2] \times \mathbb{R}), \text{ et } w \text{ est } 2\pi\text{-périodique en } \theta\}.$$

La formule de Green suivante nous sera bien utile dans la suite :

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \tilde{\Delta} v w r d r d \theta &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} v \tilde{\Delta} w r d r d \theta \\
&+ \int_0^{2\pi} [r \partial_r v w - r v \partial_r w]_{|r=r_2} d \theta \\
&- \int_0^{2\pi} [r \partial_r v w - r v \partial_r w]_{|r=r_1} d \theta, \quad (2.162)
\end{aligned}$$

pour $v, w \in C_p^2(\overline{D})$.

Nous avons le résultat de stabilité logarithmique

Théorème 2.59. *Soit $M > 0$ une constante donnée. Alors il existe des constantes positives ϵ , A et B , dépendant uniquement de M , r_1 et r_2 , telles que : pour tout $v \in C_p^2(\overline{D})$ vérifiant $\tilde{\Delta} v = 0$,*

$$\|v(r_1, \cdot)\|_{H^1(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{H^1(0, 2\pi)}^2 \leq M, \quad (2.163)$$

et $\|v(r_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \epsilon$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left(\|v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{(\|v(r_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2)^{\frac{1}{2}}} \right)}.
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $v \in C_p^2(\overline{D})$ satisfaisant $\tilde{\Delta} v = 0$. Nous posons

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r_1, \theta) e^{-ik\theta} d\theta, \quad \beta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_r v(r_1, \theta) e^{-ik\theta} d\theta \\
a_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r_2, \theta) e^{-ik\theta} d\theta, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_r v(r_2, \theta) e^{-ik\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

Soit $v_{\pm} = r^{\pm k} e^{-ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $\tilde{\Delta} v_{\pm} = 0$ dans D , une application de la formule de Green (2.162), avec v et $w = v_{\pm}$, nous donne

$$\begin{aligned}
r_1^{k+1} \beta_k - k r_1^k \alpha_k &= r_2^{k+1} b_k - k r_2^k a_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
r_1^{-k+1} \beta_k + k r_1^{-k} \alpha_k &= r_2^{-k+1} b_k - k r_2^{-k} a_k, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ces deux identités impliquent

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{2} [r_1^{-k-1} r_2^{k+1} b_k - k r_1^{-k-1} r_2^k a_k + r_1^{k-1} r_2^{-k+1} b_k - k r_1^{k-1} r_2^{-k} a_k], \quad k \in \mathbb{Z} \\
\alpha_k &= \frac{1}{2k} [r_1^k r_2^{-k+1} b_k - k r_1^k r_2^{-k} a_k + r_1^{-k} r_2^{k+1} b_k + k r_1^{-k} r_2^k a_k], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.
\end{aligned}$$

Par suite, il existe une constante positive $C = C(r_1, r_2)$ telle que

$$|\alpha_k| \leq C|k|\rho^k(|a_k| + |b_k|), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0. \quad (2.164)$$

et

$$|\beta_k| \leq C|k|\rho^k(|a_k| + |b_k|), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.165)$$

où nous avons posé $\rho = r_1^{-1}r_2$.

Pour simplifier les notations, nous posons

$$\delta = \|v(r_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Comme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) \leq M$ par (2.163), il n'est pas difficile de vérifier

$$\|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_k|^2 \leq \sum_{|k| \leq N} |\beta_k|^2 + \frac{M}{N^2}, \quad (2.166)$$

pour tout entier positif N .

De (2.165) et (2.166) nous déduisons

$$\|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq c_0 e^{c_0 N} \delta + \frac{M}{N^2}, \quad (2.167)$$

pour tout entier positif N , où $c_0 = c_0(r_1, r_2)$ est une certaine constante positive.

De façon similaire, (2.164) entraîne

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} |\alpha_k|^2 \leq c_0 e^{c_0 N} \delta + \frac{M}{N^2}. \quad (2.168)$$

Soit maintenant w la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \tilde{\Delta} w = 0, & \text{dans } \Omega, \\ r_1 \partial_r w(r_1, \cdot) = r_2 \partial_r w(r_2, \cdot) = 1. \end{cases}$$

Une nouvelle application de la formule de Green (2.162) nous permet de conclure

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v(r_1, \theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} v(r_2, \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} r_2 \partial_r v(r_2, \theta) w(r_2, \theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} r_1 \partial_r v(r_1, \theta) w(r_1, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\alpha_0 = a_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_2 \partial_r v(r_2, \theta) w(r_2, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_1 \partial_r v(r_1, \theta) w(r_1, \theta) d\theta.$$

Par conséquence,

$$|\alpha_0|^2 \leq 3 \left[|a_0|^2 + c' (\|\partial_r v(r_2, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2) \right],$$

pour une certaine constante positive $c' = c'(r_1, r_2)$.

Cette estimation, combinée avec (2.166) et (2.168), donne

$$\|v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq ce^{cN} \delta + \frac{d}{N^2},$$

pour tout entier positif N , avec $c = c(r_1, r_2)$ et $d = d(M, r_1, r_2)$ deux constantes positives. Par suite,

$$\|v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \min_{N \in \mathbb{N}, N \neq 0} \left(ce^{cN} \delta + \frac{d}{N^2} \right).$$

De cette estimation nous déduisons, comme nous l'avons fait à plusieurs reprises,

$$(\|v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_r v(r_1, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{\ln(\frac{B}{\delta})},$$

pourvu que δ soit assez petit. Ici $A = A(M, r_1, r_2)$ et $B = B(M, r_1, r_2)$ sont deux constantes positives. \square

Avant de donner la preuve du Théorème 2.58, nous transposons d'abord le résultat du dernier théorème au laplacien en coordonnées cartésiennes, dans la couronne Ω . Notons que si $u = u(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$ est telle que $\Delta u = 0$ dans Ω alors $v = v(r, \theta) \in C_p^2(\overline{D})$ donnée par $v(r, \theta) = u(x, y)$, où $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, satisfait à $\Delta v = 0$ dans D et $\partial_r v(r, \theta) = \partial_\nu u(x, y)$, pour $r = r_1, r_2$. Comme conséquence immédiate du Théorème 2.59, nous avons

Corollaire 2.60. *Soit $M > 0$ une constante donnée. Alors il existe trois constantes positives ϵ , A et B , qui ne dépendent que de M , r_1 et r_2 , telles que pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant $\Delta u = 0$ dans Ω , $\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M$ et*

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \leq \epsilon,$$

nous avons

$$(\|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{(\|u\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + \|\partial_\nu u\|_{L^2(\Gamma_2)}^2)^{\frac{1}{2}}} \right)}.$$

Preuve du Théorème 2.58. Remarquons d'abord que $u = u_1 - u_2$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{sur } \Gamma_2, \\ \partial_\nu u + q_1 u = (q_2 - q_1) u_2 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

D'après les estimations hölderiennes du Théorème 1.25, il existe une constante $C = C(M, \Omega)$ pour laquelle

$$\|u_2\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{1,\alpha}(I_2)} \text{ et } \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|(q_2 - q_1)u_2\|_{C^{1,\alpha}(I_1)}.$$

Du dernier corollaire, nous déduisons qu'il existe des constantes positives A' , B' et ϵ (dépendant uniquement de M , r_1 et r_2) telles que

$$(\|u\|_{L^2(I_1)}^2 + \|\partial_\nu u\|_{L^2(I_1)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{\ln\left(\frac{B}{\|u\|_{L^2(I_2)}}\right)}.$$

à condition que $\|q_2 - q_1\|_{C^{1,\alpha}(I_1)} \leq \epsilon$. Mais

$$q_2 - q_1 = \frac{1}{u_2}(\partial_\nu u + q_1 u) \text{ sur } \tilde{I},$$

où $\tilde{I} = \{x \in I_1; u_2(x) \neq 0\}$. Par suite,

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \frac{A}{\ln\left(\frac{B}{\|u\|_{L^2(I_2)}}\right)},$$

pour tout compact K de \tilde{I} , avec A et B deux constantes positives qui ne dépendent que de K , M , r_1 et r_2 . \square

2.4.2 Cas d'un domaine rectangulaire : méthode fondée sur la transformée de Fourier

Dans ce sous-paragraphe nous établissons un résultat de stabilité logarithmique dans le cas $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Posons

$$I_1 = (0, 1) \times \{0\}; I_2 = \{1\} \times (0, 1); I_3 = (0, 1) \times \{1\}; I_4 = \{0\} \times (0, 1).$$

Nous limiterons notre étude aux coefficients q supportés dans I_1 et au cas où f est à support dans I_3 . Avec ces conditions, (2.161) devient

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ -\partial_y u + q(x)u = 0, & \text{sur } I_1, \\ \partial_y u = f, & \text{sur } I_3, \\ \partial_x u = 0, & \text{sur } I_2 \cup I_4. \end{cases} \quad (2.169)$$

Nous travaillerons avec des coefficients q dans l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \{q \in C^3[0, 1]; q \geq 0, q \neq 0, \text{supp}(q) \subset (0, 1)\}.$$

Comme cas particulier du Théorème 2.2 de G. Inglese [In], nous avons

Théorème 2.61. *Soient $q \in \mathcal{Q}$, $f \in C^3[0, 1]$ avec $\text{supp}(f) \subset (0, 1)$. Alors (2.169) admet une unique solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*

Le résultat principal de ce sous-paragraphe est le

Théorème 2.62. *Soient $q_m, q_M \in \mathcal{Q}$, $f \in C^3[0, 1]$ avec $\text{supp}(f) \subset (0, 1)$, et $M > 0$. Supposons que f est positive et non identiquement égale à zéro. Alors il existe une constante positive A , dépendant seulement de q_m, q_M, M et f , et deux constantes positives B, ϵ , dépendant uniquement de q_m, M et f telles que, pour tous $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ vérifiant*

$$(i) \|q_1\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_1)}, \|q_2\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_1)} \leq M,$$

$$(ii) q_m \leq q_1, q_2 \leq q_M,$$

$$(iii) \|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \leq \epsilon,$$

nous avons

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{\|(u_1 - u_2)|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}\|_{L^1(\Gamma \setminus \Gamma_1)} + |(u_1 - u_2)(0,0)| + |(u_1 - u_2)(1,0)|} \right)},$$

où u_i est la solution de (2.169) correspondante à $q = q_i$, $i = 1, 2$.

Nous démontrons au préalable un certain nombre de résultats préliminaires. Nous commençons par une version du lemme de Hopf dans un coin. Soient

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 0), P_3 = (1, 1), P_4 = (0, 1).$$

Lemme 2.63. *Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que $\partial_x u = 0$ sur Γ_4 , $\Delta u \geq 0$ et il existe une boule B de centre P_1 pour laquelle $u(P_1) > u(P)$ pour tout $P \in (\Omega \cup \Gamma_4) \cap B$. Alors $\partial_y u(P_1) < 0$.*

Preuve. Nous définissons la fonction v sur $\Omega' = (-1, 1) \times (0, 1)$ comme suit : v est paire par rapport à la première variable et est égale à u dans Ω . Il n'est pas difficile de voir que $v \in C^2(\overline{\Omega}')$, $\Delta v \geq 0$ et $v(P_1) > v(P)$ pour tout $P \in \Omega' \cap B$. D'où, d'après le Lemme 1.34 (lemme de Hopf),

$$\partial_\nu v(P_1) = -\partial_y v(P_1) = -\partial_y u(P_1) > 0.$$

□

Remarque (i) La condition $\Delta u \geq 0$ peut être remplacée par $Lu \geq 0$, pour un opérateur elliptique approprié L .

(ii) Comme les autres coins de Ω jouent le même rôle que P_1 , nous avons un résultat similaire pour P_2, P_3 et P_4 .

Proposition 2.64. *Soient $a, g \in C[0, 1]$ deux fonctions positives $a \neq 0$ et $\text{supp}(a), \text{supp}(g) \subset (0, 1)$. Soient $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfaisant*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ -\partial_y u + a(x)u \geq 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_y u = g, & \text{sur } \Gamma_3, \\ \partial_x u = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

Si g est non identiquement égale à zéro alors $u > 0$ dans $\overline{\Omega}$. En particulier, $u \geq 0$.

Preuve. Notons d'abord que, d'après le Théorème 1.33 (principe du maximum fort), u ne peut pas atteindre son minimum en un point de Ω . Par le Lemme 1.34 (lemme de Hopf) et le dernier lemme, u atteint son minimum en un point P de Γ_1 . De nouveau, nous obtenons par le Lemme 1.34 (lemme de Hopf) $0 < -\partial_\nu u(P) = \partial_y u(P) \leq a(P)u(P)$. \square

Nous déduisons de cette proposition le principe de comparaison suivant :

Corollaire 2.65. *Soit u_i la solution du problème aux limites (2.167) correspondant à $q = q_i$, $i = 1, 2$. Alors $q_1 \leq q_2$ implique $u_1 \geq u_2$.*

Preuve. Clairement, $u = u_1 - u_2$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ -\partial_y u + q_1(x)u = (q_2(x) - q_1(x))u_2, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_y u = 0, & \text{sur } \Gamma_3, \\ \partial_x u = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

Nous appliquons deux fois la proposition précédente. Une première fois pour conclure que $u_2 \geq 0$ et une seconde fois pour déduire que $u \geq 0$. \square

Nous montrons maintenant des estimations a priori pour les solutions du problème aux limites (2.169).

Proposition 2.66. *Soient $q_m \in \mathcal{Q}$, $f \in C^3[0, 1]$, avec $\text{supp}(f) \subset (0, 1)$ et $M > 0$. Alors il existe une constante positive C , ne dépendant que de q_m , M et f telle que si $q \in \mathcal{Q}$ satisfait à $q_m \leq q$ et $\|q'\|_{L^\infty} \leq M$ alors*

$$\|u(\cdot, 0)\|_{H^2(0,1)}, \|\partial_y u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)} \leq C,$$

où u est la solution de (2.169).

Preuve. Dans cette preuve C et les C_i sont des constantes génériques qui ne dépendent que de q_m , M et f . Dans un premier temps, nous montrons

$$\|u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)} \leq C. \quad (2.170)$$

D'après la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 &= - \int_0^1 \partial_y u(\cdot, 0) u(\cdot, 0) + \int_0^1 \partial_y u(\cdot, 1) u(\cdot, 1) \\ &= - \int_0^1 q u(\cdot, 0)^2 + \int_0^1 f u(\cdot, 1). \end{aligned}$$

D'où,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_0^1 q u(\cdot, 0)^2 = \int_0^1 f u(\cdot, 1) \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|u(\cdot, 1)\|_{L^2(0,1)}$$

et donc

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_0^1 q_m u(\cdot, 0)^2 \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|u(\cdot, 1)\|_{L^2(0,1)}.$$

Puisque l'opérateur de trace $v \in H^1(\Omega) \rightarrow v(\cdot, 1) \in L^2(0, 1)$ est borné et que

$$v \in H^1(\Omega) \rightarrow \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_0^1 q_m v(\cdot, 0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme équivalente sur $H^1(\Omega)$, nous obtenons

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0,$$

Or l'opérateur de trace $v \in H^1(\Omega) \rightarrow v(\cdot, 0) \in L^2(0, 1)$ est borné. Par suite,

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq C_1. \quad (2.171)$$

D'autre part, nous observons que $w = \partial_x u$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{dans } \Omega, \\ -\partial_y w + q(x)w = -q'(x)u, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_y w = f', & \text{sur } \Gamma_3, \\ w = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

Une nouvelle fois, une application de la formule de Green nous donne

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \int_0^1 q w(\cdot, 0)^2 = - \int_0^1 q' u(\cdot, 0) w(\cdot, 0) + \int_0^1 f' w(\cdot, 1).$$

Les mêmes argument que précédemment nous permettent de conclure

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 (\|q'\|_{L^\infty(0,1)} \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} + \|f'\|_{L^2(0,1)}).$$

Comme $v \in H^1(\Omega) \rightarrow \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme équivalente sur $H = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_4\}$, nous déduisons

$$\begin{aligned} \|\partial_x u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} &= \|w(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq C_3 (\|q'\|_{L^\infty(0,1)} \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} + \|f'\|_{L^2(0,1)}). \end{aligned} \quad (2.172)$$

Nous combinons alors (2.171) et (2.172) pour avoir (2.170).

Pour montrer l'estimation H^2 pour $u(\cdot, 0)$, nous introduisons la fonction $z = \partial_{x_2}^2 u$, qui est, par une simple vérification, la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta z = 0, & \text{dans } \Omega, \\ -\partial_y z + qz = -2q'\partial_x u - q''u, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_y z = f'', & \text{sur } \Gamma_3, \\ z = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

La formule de Green nous donne

$$\int_{\Omega} |\nabla z|^2 + \int_0^1 q z^2(\cdot, 0) = -2 \int_0^1 q' \partial_x u(\cdot, 0) z(\cdot, 0) - \int_0^1 q'' u(\cdot, 0) z(\cdot, 0) + \int_0^1 f'' z(\cdot, 1).$$

D'où,

$$\int_{\Omega} |\nabla z|^2 + \int_0^1 q_m z^2(\cdot, 0) \leq C_4 (\|z(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} + \|z(\cdot, 1)\|_{L^2(0,1)}).$$

Or la norme $[\int_{\Omega} |\nabla z|^2 + \int_0^1 q_m z^2(\cdot, 0)]^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à $\|z\|_{H^1(\Omega)}$ et l'opérateur de trace $w \in H^1(\Omega) \rightarrow (w(\cdot, 0), w(\cdot, 1)) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ est borné. Par conséquence,

$$\|z\|_{H^1(\Omega)} \leq C_5.$$

Ceci et la continuité de l'opérateur de trace $w \in H^1(\Omega) \rightarrow w(\cdot, 0) \in L^2(0, 1)$ impliquent

$$\|\partial_{x^2}^2 u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} = \|z(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq C_6.$$

La dernière estimation, combinée avec (2.170), donne,

$$\|u(\cdot, 0)\|_{H^2(0,1)} \leq C_7. \quad (2.173)$$

Il nous reste à estimer la norme H^1 de $v = \partial_y u$. Comme ci-dessus, nous commençons par noter que v est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = qu, & \text{sur } \Gamma_1, \\ v = f, & \text{sur } \Gamma_3, \\ \partial_x v = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

Nous décomposons v sous la forme $v = v_0 + v_1$, où v_0 et v_1 sont les solutions respectives des problèmes aux limites

$$\begin{cases} \Delta v_0 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v_0 = qu, & \text{sur } \Gamma_1, \\ v_0 = 0, & \text{sur } \Gamma_3, \\ \partial_x v_0 = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v_1 = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ v_1 = f, & \text{sur } \Gamma_3, \\ \partial_x v_1 = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

Toujours d'après la formule de Green

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 = - \int_0^1 qu(\cdot, 0) \partial_y v_0(\cdot, 0)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 &\leq \|qu(\cdot, 0)\|_{H^{\frac{1}{2}}(0,1)} \|\partial_y v_0(\cdot, 0)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(0,1)} \\ &\leq C_8 \|q\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)} \|\partial_y v_0(\cdot, 0)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(0,1)}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que l'opérateur de trace

$$w \in \{\psi \in H^1(\Omega); \Delta\psi \in L^2(\Omega)\} \rightarrow \partial_y w(\cdot, 0) \in H^{-\frac{1}{2}}(0, 1)$$

est borné. Par suite,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 \leq C_9 \|q\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)} \|v_0\|_{H^1(\Omega)}.$$

Mais $\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à $\|w\|_{H^1(\Omega)}$ sur $\{w \in H^1(\Omega); w(\cdot, 1) = 0\}$. Par conséquence,

$$\|v_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{10} \|q\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)}.$$

De la même manière, nous avons aussi $\|v_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{11} \|f\|_{H^1(0,1)}$. Il s'ensuit

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{12} (\|f\|_{H^1(0,1)} + \|q\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)})$$

et par suite,

$$\|v(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq C_{13} (\|f\|_{H^1(0,1)} + \|q\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)}), \quad (2.174)$$

en utilisant la continuité de l'opérateur de trace $w \in H^1(\Omega) \rightarrow w(\cdot, 0) \in L^2(0, 1)$.

Nous terminons par estimer $\|\partial_x v(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}$. Nous répétons les mêmes arguments que ci-dessus. Nous commençons par noter que $w = \partial_x v$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w = q'u + q\partial_x u, & \text{sur } \Gamma_1, \\ w = f', & \text{sur } \Gamma_3, \\ w = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

En procédant comme nous l'avons fait à plusieurs reprises dans cette preuve, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} &\leq C_{14} (\|f'\|_{H^1(0,1)} + \|q'\|_{W^{1,\infty}} \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)} \\ &\quad + \|q\|_{W^{1,\infty}} \|\partial_x u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)}). \end{aligned} \quad (2.175)$$

D'une combinaison de (2.174) et (2.175), nous tirons

$$\|\partial_x u(\cdot, 0)\|_{H^1(0,1)} \leq C_{15}.$$

□

Preuve du Théorème 2.62. Rappelons d'abord que $u = u_1 - u_2$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ -\partial_y u + q_1(x)u = (q_2(x) - q_1(x))u_2, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_y u = 0, & \text{sur } \Gamma_3, \\ \partial_x u = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

Nous introduisons les fonctions harmoniques suivantes

$$v_{\pm}(\xi)(x, y) = e^{-ix\xi \pm \xi y}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

et nous posons

$$f(\xi) = \int_0^1 u(x, 0)e^{-ix\xi} dx, \quad g(\xi) = \int_0^1 \partial_y u(x, 0)e^{-ix\xi} dx.$$

Nous appliquons alors la formule de Green avec u et $v_{\pm}(\xi)$ pour avoir

$$\begin{aligned} -g(\xi) + \xi f(\xi) &= \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} u \partial_{\nu} v_+(\xi) dx \\ -g(\xi) - \xi f(\xi) &= \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} u \partial_{\nu} v_-(\xi) dx. \end{aligned}$$

Ces deux identités nous fournissent

$$f(\xi) = \frac{1}{2\xi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} u(\partial_{\nu} v_+(\xi) - \partial_{\nu} v_-(\xi)) dx$$

et

$$g(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} u(\partial_{\nu} v_+(\xi) + \partial_{\nu} v_-(\xi)) dx.$$

Comme $|v_{\pm}(\xi)| \leq e^{|\xi|}$ et $|\partial_{\nu} v_{\pm}(\xi)| \leq |\xi|e^{|\xi|}$, nous déduisons les estimations

$$|f(\xi)| \leq e^{|\xi|} \|u\|_{L^1(\Gamma \setminus \Gamma_1)}, \quad (2.176)$$

et

$$|g(\xi)| \leq e^{2|\xi|} \|u\|_{L^1(\Gamma \setminus \Gamma_1)}. \quad (2.177)$$

Pour poursuivre la preuve, nous faisons appel à un lemme. Si $w \in L^2(0, 1)$, $EW \in L^2(\mathbb{R})$ désignera son extension par 0 en dehors de $(0, 1)$.

Lemme 2.67. *Pour tout $\rho > 0$ et $v \in H^1(0, 1)$, nous avons*

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq a \left[\int_{|\xi| \leq \rho} |\mathcal{F}Ev(\xi)|^2 d\xi + (\rho + 1)(|v(0)| + |v(1)|)^2 + \frac{\|v\|_{H^1(0,1)}^2}{\rho^2} \right],$$

où a est un nombre réel et, rappelons le, \mathcal{F} désigne la transformée de Fourier.

La preuve de ce lemme sera donnée plus loin.

Notons $u^0 = u(\cdot, 0)$. Alors (2.176) se met sous la forme

$$|\mathcal{F}Eu^0(\xi)| \leq \|u|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}\|_{L^1(\Gamma \setminus \Gamma_1)} e^{|\xi|}. \quad (2.178)$$

D'autre part, il résulte de la Proposition 2.66 qu'il existe C_0 , qui dépend seulement de q_m , f et M , telle que

$$\|u^0\|_{H^1(0,1)} \leq C_0. \quad (2.179)$$

Vu le dernier lemme, une combinaison de (2.178) et (2.179) implique

$$\|u^0\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}Eu^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{a}{2\pi} \left[2\gamma^2 \rho e^{2\rho} + (\rho + 1)\gamma^2 + \frac{C_0^2}{\rho^2} \right],$$

pour tout $\rho > 0$, où a est comme dans le Lemme 2.67 et

$$\gamma = \|u|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}\|_{L^1(\Gamma \setminus \Gamma_1)} + |u(0, 0)| + |u(1, 0)|.$$

La dernière inégalité entraîne

$$\|u^0\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{a}{2\pi} \min_{\rho > 0} \left(\gamma^2 e^{5\rho} + \frac{C_0^2}{\rho^2} \right).$$

Comme nous l'avons déjà fait, cette inégalité nous permet d'établir

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{A_0}{\ln \frac{B_0}{\gamma}},$$

Ici et dans ce qui suit les A_i et B_i sont des constantes qui ne dépendent que de q_m , M et f .

De façon tout à fait similaire, nous montrons, grâce à (2.177), l'estimation

$$\|\partial_y u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{A_1}{\ln \frac{B_1}{\gamma}},$$

Donc

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} + \|\partial_y u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{A_2}{\ln \frac{B_2}{\gamma}}, \quad (2.180)$$

Maintenant, puisque (voir le problème aux limites vérifié par u)

$$(q_1 - q_2)u_2(\cdot, 0) = -\partial_y u(\cdot, \cdot) + q_1 u(\cdot, 0).$$

nous concluons

$$\|(q_1 - q_2)u_2(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{A_3}{\ln \frac{B_3}{\gamma}}. \quad (2.181)$$

Mais comme $q_2 \leq q_M$, nous avons

$$u_2 \geq u_M > 0 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

d'après la Proposition 2.64 et son corollaire, où u_M est la solution de (2.169) quand $q = q_M$. Par suite,

$$\begin{aligned} \|q_1 - q_2\|_{L^2(0,1)} &= \left\| \frac{1}{u_2} [(q_1 - q_2)u_2(\cdot, 0)] \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{u_M} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|(q_1 - q_2)u_2(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.182)$$

L'inégalité recherchée s'obtient comme conséquence de (2.181) et (2.182). \square

Preuve du Lemme 2.67. Soit $\varphi \in C_c^1(0, 1)$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Une simple intégration par parties nous donne

$$\xi \mathcal{F}E\varphi(\xi) = -i \mathcal{F}E\varphi'(\xi).$$

Par suite,

$$\|\xi \mathcal{F}E\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}E\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|\varphi'\|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_{H^1(0,1)}.$$

Pour $\rho > 0$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}E\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{|\xi| \leq \rho} |\mathcal{F}E\varphi|^2(\xi) d\xi + \int_{|\xi| > \rho} |\mathcal{F}E\varphi|^2(\xi) d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \leq \rho} |\mathcal{F}E\varphi|^2(\xi) d\xi + \frac{1}{\rho^2} \int_{|\xi| > \rho} \xi^2 |\mathcal{F}E\varphi|^2(\xi) d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| \leq \rho} |\mathcal{F}E\varphi|^2(\xi) d\xi + \frac{1}{\rho^2} \|\xi \mathcal{F}E\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq \int_{|\xi| \leq \rho} |\mathcal{F}E\varphi|^2(\xi) d\xi + \frac{2\pi}{\rho^2} \|\varphi\|_{H^1(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Comme $C_c^1(0, 1)$ est dense dans $H_0^1(0, 1)$, nous déduisons

$$\|\mathcal{F}Eu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \int_{|\xi| \leq \rho} |\mathcal{F}Eu|^2(\xi) d\xi + \frac{2\pi}{\rho^2} \|u\|_{H^1(0,1)}^2, \quad (2.183)$$

pour tout $u \in H_0^1(0, 1)$.

Maintenant si $v \in H^1(0, 1)$, $u = v - [(1-x)v(0) + xv(1)]$ est dans $H_0^1(0, 1)$. Nous vérifions sans peine que

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}(|v(0)| + |v(1)|), \quad (2.184)$$

$$|\mathcal{F}Eu(\xi)|^2 \leq 2|\mathcal{F}Ev(\xi)|^2 + \frac{1}{2}(|v(0)| + |v(1)|)^2 \quad (2.185)$$

et

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq (1 + \frac{4}{\sqrt{3}}) \|v\|_{H^1(0,1)}. \quad (2.186)$$

L'estimation que nous voulons montrer résulte alors de (2.183) - (2.186). \square

2.4.3 Cas d'un domaine quelconque régulier : une méthode d'inégalité de Carleman

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ . Même si ce n'est pas toujours nécessaire, nous supposons que Ω est classe $C^{2,\alpha}$ pour un certain α , $0 < \alpha < 1$. Nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = f, & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_0, \\ \partial_\nu u + qu = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (2.187)$$

avec Γ_0 une partie de Γ .

Réécrivons (2.187) sous la forme

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u + qu = f, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.188)$$

et rappelons que sous les hypothèses suivantes :

(H1) $q \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $q \geq 0$ et non identiquement égale à zéro,

(H2) $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$,

le problème aux limites (2.188) admet une unique solution $u = u_q \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (voir Théorème 1.25).

Le résultat de stabilité que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Théorème 2.68. *Soient Γ_0 un fermé de Γ d'intérieur non vide tel que $\Gamma \setminus \Gamma_0 \neq \emptyset$ et $M > 0$. Pour $i = 1, 2$, soit q_i vérifiant (H1), $\text{supp}(q_i) \subset \Gamma_0$ et $\|q_i\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leq M$. Supposons que f satisfait à (H2) et est non identiquement nulle. Soient K un compact de $\{x \in \Gamma_0; u_1 \neq 0\}$ et γ un ouvert non vide de $\Gamma \setminus \Gamma_0$. Alors il existe des constantes positives ϵ , A et B telles que*

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{\|g_1 - g_2\|_{L^2(\gamma)}} \right)}$$

si $\|q_1 - q_2\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leq \epsilon$, où $g_i = u_{q_i}|_\gamma$.

Remarque. Notons que le dernier résultat généralise le Théorème 2.58.

Comme précédemment, la preuve de ce théorème repose sur un résultat de stabilité pour un problème de Cauchy. En effet, puisque

$$\partial_\nu u_1 + q_1 u_1 = \partial_\nu u_2 + q_2 u_2 \text{ sur } \Gamma_0,$$

nous avons

$$(q_1 - q_2)u_1 = q_2(u_2 - u_1) + \partial_\nu(u_2 - u_1) \text{ sur } \Gamma_0. \quad (2.189)$$

Soit K un compact de $\{x \in \Gamma_0; u_1 \neq 0\}$. En utilisant le fait que $|q_2| \leq M$ sur Γ_0 et (2.189), nous concluons

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq C(\|u_2 - u_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|\partial_\nu(u_2 - u_1)\|_{L^2(\Gamma_0)}),$$

pour une certaine constante positive C .

Supposons que nous puissions démontrer

$$\left(\int_{\Gamma_0} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{(\int_{\gamma} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma)^{\frac{1}{2}}} \right)}, \quad (2.190)$$

où $u = u_1 - u_2$ et A, B sont deux constantes. Alors

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{(\int_{\gamma} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma)^{\frac{1}{2}}} \right)}.$$

Mais $\partial_\nu u = 0$ sur γ . D'où,

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{(\int_{\gamma} [(g_1 - g_2)^2 + |\partial_\tau(g_1 - g_2)|^2] d\sigma)^{\frac{1}{2}}} \right)}.$$

D'après l'estimation hölderienne du Théorème 1.25,

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C_0,$$

où C_0 est une constante qui dépend seulement de Ω, M et f . D'autre part, nous déduisons des inégalités d'interpolation classique (voir par exemple R. A. Adams [Ad])

$$\begin{aligned} \|\partial_\tau(g_1 - g_2)\|_{L^2(\gamma)} &\leq \|g_1 - g_2\|_{H^1(\gamma)} \leq C_1 \|g_1 - g_2\|_{L^2(\gamma)}^{\frac{1}{2}} \|g_1 - g_2\|_{H^2(\gamma)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 \|g_1 - g_2\|_{L^2(\gamma)}^{\frac{1}{2}} \|u_1 - u_2\|_{C^2(\overline{\Omega})}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc

$$\|\partial_\tau(g_1 - g_2)\|_{L^2(\gamma)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^2(\gamma)}^{\frac{1}{2}},$$

avec C une constante qui dépend uniquement de Ω, M et f . Par suite,

$$\|q_1 - q_2\|_{L^2(K)} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{\|g_1 - g_2\|_{L^2(\gamma)}} \right)}.$$

Le reste de ce sous-paragraphe sera consacré à la preuve de l'estimation (2.190) pour un opérateur un peu plus général que le laplacien. Plus précisément, nous considérons l'opérateur

$$Pu = -\Delta u + b_1 \partial_1 u + b_2 \partial_2 u + cu,$$

où b_1, b_2 et c sont des fonctions de $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 2.69. *Soient Γ_0 une partie fermée de Γ d'intérieur non vide telle que $\Gamma \setminus \Gamma_0$ est non vide, $\gamma \subset \Gamma \setminus \Gamma_0$ un ouvert non vide et $M > 0$. Alors il existe des constantes positives ϵ , A et B (dépendant de M et des normes L^∞ des coefficients de P) telles que*

$$\left(\int_{\Gamma_0} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{\ln \left(\frac{B}{(\int_{\gamma} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma)^{\frac{1}{2}}} \right)}, \quad (2.191)$$

pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant $Pu = 0$, $\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M$ et $(\int_{\gamma} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$.

Puisque

$$\int_{\Gamma_0} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma \leq \int_{\Gamma_0 \cup (\Gamma \setminus \gamma)} [u^2 + |\nabla u|^2] d\sigma,$$

nous pouvons nous ramener au cas $\gamma = \Gamma \setminus \Gamma_0$. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

Nous aurons besoin des deux lemmes qui suivent dans la preuve du dernier théorème.

Lemme 2.70. (*A. L. Bukhgeim [Buk]*) *Soit ψ une fonction arbitraire de $C^2(\overline{\Omega})$. Nous avons alors l'inégalité de Carleman suivante*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta \psi u^2 + (\Delta \psi - 1) |\nabla u|^2) e^{\psi} \\ & \leq \int_{\Omega} |\Delta u|^2 e^{\psi} dx + \int_{\Gamma} \partial_{\nu} \psi (u^2 + |\nabla u|^2) + 2 |\partial_{\tau} |\nabla u|^2| e^{\psi} d\sigma, \end{aligned}$$

pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Lemme 2.71. *Il existe $\psi_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, non identiquement égale à zéro, ayant les propriétés suivantes*

$$\Delta \psi_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \psi_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \partial_{\nu} \psi_0 < 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \psi_0 \geq 0 \text{ sur } \gamma.$$

Preuve. Soit $\chi \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$ telle que

$$\chi = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \chi \geq 0 \text{ sur } \gamma,$$

et χ non identiquement égale à zéro sur γ .

Puisque Ω est de classe $C^{2,\alpha}$, le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta \psi_0 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \psi_0 = \chi, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

possède une unique solution $\psi_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (voir Théorème 1.25). Notons que ψ_0 est non constante car χ est non identiquement égale à zéro. Il en résulte

que $\psi_0 > 0$ dans Ω par le Théorème 1.33 (principe du maximum fort). Mais ψ_0 est identiquement nulle sur Γ_0 . Nous pouvons alors appliquer le Lemme 1.34 (lemme de Hopf) pour conclure que $\partial_\nu \psi_0 < 0$ sur Γ_0 . Donc, ψ_0 possède bien les propriétés requises. \square

Preuve du Théorème 2.69. Elle est fondée sur l'inégalité de Carleman du Lemme 2.70 pour un choix approprié de la fonction poids ψ . Soit $\psi_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, non identiquement nulle, telle que

$$\Delta \psi_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \psi_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \partial_\nu \psi_0 < 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \psi_0 \geq 0 \text{ sur } \gamma.$$

Une telle fonction existe, d'après le Lemme 2.71. Soit λ un réel positif à notre disposition. Notons par $\psi_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ l'unique solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta \psi_1 = \lambda \text{ dans } \Omega \\ \psi_1 = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Soient $s > 0$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant $Pu = 0$. Nous appliquons alors l'estimation du Lemme 2.70, avec $\psi = \psi_1 + s\psi_0$, pour avoir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda u^2 + (\lambda - 1)|\nabla u|^2) e^\psi dx \\ \leq \int_{\Omega} |\Delta u|^2 e^\psi dx + \int_{\Gamma} [\partial_\nu \psi (u^2 + |\nabla u|^2) \\ + 2|\partial_\tau |\nabla u|^2|] e^\psi d\sigma. \end{aligned} \quad (2.192)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 e^\psi dx &\leq 4 \int_{\Omega} (Pu)^2 e^\psi dx + 4 \max(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2, \|b_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + 4\|c\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} u^2 dx \\ &\leq 4 \max(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2, \|b_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + 4\|c\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Fixons λ telle que $\lambda \geq 4 \max(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2, \|b_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2) + 1$ et $\lambda \geq 4\|c\|_{L^\infty(\Omega)}^2$. Alors (2.192) et (2.193) impliquent

$$0 \leq \int_{\Gamma} [\partial_\nu \psi (u^2 + |\nabla u|^2) + 2|\partial_\tau |\nabla u|^2|] e^\psi d\sigma. \quad (2.194)$$

Supposons que u satisfait en plus à $\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M$, pour une certaine constante $M > 0$. Puisque $\psi_0 = 0$ sur Γ_0 et $\theta = \min_{\Gamma_0} |\partial_\nu \psi_0| > 0$, nous déduisons de (2.194)

$$0 \leq -\frac{s\theta}{2} \int_{\Gamma_0} (u^2 + |\nabla u|^2) d\sigma + 4M^2 + sK,$$

où

$$K = C_0 \int_{\gamma} (u^2 + |\nabla u|^2) e^{\psi} d\sigma + 2M \int_{\gamma} |\nabla u| e^{\psi} d\sigma,$$

avec C_0 une constante dépendant de Γ_0 .

D'où

$$\frac{s\theta}{2} \int_{\Gamma_0} (u^2 + |\nabla u|^2) d\sigma \leq C_1 \left(\frac{1}{s} + K \right),$$

pour une certaine constante positive C_1 qui dépend de M et Γ_0 .

Soit $\delta = \int_{\gamma} (u^2 + |\nabla u|^2) d\sigma$. Un calcul élémentaire nous donne

$$K \leq C_2 e^{ks} (\delta + \sqrt{\delta}) \leq C_2 e^{ks} \sqrt{\delta} \text{ si } \delta \leq 1.$$

Ici C_2 est une constante positive dépendant de Γ_0 , M et des normes L^∞ des coefficients de P et k est une constante qui dépend de Γ . Par suite,

$$\int_{\Gamma_0} (u^2 + |\nabla u|^2) d\sigma \leq C_3 \min_{s \geq 1} \left(\frac{1}{s} + e^{ks} \sqrt{\delta} \right),$$

où C_3 est une constante positive dépendant de Γ_0 , M et des normes L^∞ des coefficients de P .

Nous vérifions aisément que le minimum est atteint en s_* tel

$$\sqrt{\delta} = \frac{e^{-ks_*}}{ks_*^2}.$$

Puisque $s \rightarrow \frac{e^{-ks}}{s}$ est décroissante, $s_* \geq 1$ si δ est assez petit. Il s'ensuit

$$\int_{\Gamma_0} (u^2 + |\nabla u|^2) d\sigma \leq C_1 \left(\frac{1}{s_*} + \frac{1}{ks_*^2} \right) \leq C_1 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \frac{1}{s_*}. \quad (2.195)$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} = ks_*^2 e^{ks_*} \leq 2ke^{(k+1)ks_*}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{s_*} \leq \frac{k+1}{\ln\left(\frac{1}{2k\sqrt{\delta}}\right)}. \quad (2.196)$$

L'estimation recherchée s'obtient par une combinaison de (2.195) et (2.196). \square

Pour faire ce paragraphe, nous nous sommes basé sur les articles de J. Cheng, M. Choulli et J. Lin [CCL], J. Cheng, M. Choulli et X. Yang [CCY], M. Choulli [Ch4]. Il existe d'autres résultats de stabilité obtenus grâce à des méthodes fondées sur des techniques de l'analyse complexe ; voir à ce sujet les articles de G. Alessandrini, L. Del Piero et L. Rondi [ADR], S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua et J. Leblond [CFJL].

2.5 Stabilité pour deux problèmes inverses géométriques : méthode utilisant la dérivation par rapport au domaine

Avant tout, nous donnons les définitions et les principaux résultats concernant la dérivation par rapport au domaine, que nous utiliserons dans ce paragraphe.

Notons $C^{1,b}$ l'ensemble des fonctions $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que W et ses dérivées partielles d'ordre 1 sont continues et bornées et soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ , que nous supposons de classe C^2 (pour simplifier).

Nous fixons $V \in C^{1,b}$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour $\Omega_t = (I + tV)\Omega$, si $u_t \in H^1(\Omega_t)$ est la solution variationnelle d'un problème aux limites posé sur Ω_t , nous notons

$$\dot{u}(\Omega)(V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_t \circ (I + tV) - u_0}{t} - \nabla u_0 \cdot V$$

Théorème 2.72. (1) (conditions aux limites de Dirichlet) Soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors $\dot{u}(\Omega)(V)$ existe dans $H^1(\Omega)$, $\dot{u}(\Omega)(V) \in H_\Delta(\Omega)$ et est la solution de

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \dot{u} = -(V \cdot \nu) \partial_\nu u, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

(2) (conditions aux limites de Neumann) Nous supposons que $\int_\Omega f = 0$. Soit $u \in H^2(\Omega)$ une solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors $\dot{u}(\Omega)(V)$ existe dans $H^1(\Omega)$, $\dot{u}(\Omega)(V) \in H_\Delta(\Omega)$ et est la solution de

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu \dot{u} = -(V \cdot \nu) \partial_\nu^2 u + \nabla_\tau u \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

(3) (conditions aux limites mixtes) Nous supposons que $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, avec γ_1 et γ_2 fermés et disjoints. Soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{sur } \gamma_1, \\ u = 0, & \text{sur } \gamma_2. \end{cases}$$

Alors $\dot{u}(\Omega)(V)$ existe dans $H^1(\Omega)$, $\dot{u}(\Omega)(V) \in H_\Delta(\Omega)$ et est la solution de

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu \dot{u} = -(V \cdot \nu) \partial_\nu^2 u + \nabla_\tau u \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \gamma_1, \\ \dot{u} = -(V \cdot \nu) \partial_\nu u, & \text{sur } \gamma_2. \end{cases}$$

Nous énonçons enfin un lemme qui nous sera bien utile dans la suite.

Lemme 2.73. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (resp. $H^1(\mathbb{R}^n)$) alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f \circ (I + tV) - f]|_{\Omega}}{t} = \nabla f \cdot V \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ (resp. } L^2(\Omega)).$$

Pour une démonstration du Théorème 2.72 et du Lemme 2.73, nous renvoyons à A. Henrot et M. Pierre [HP].

2.5.1 Identification d'un sous-domaine

Dans un matériau semi-conducteur, pour tester la résistance du contact entre le métal et le semi-conducteur, nous sommes amené à étudier le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + \chi_D u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.197)$$

où D est un sous-domaine de Ω , $\overline{D} \subset \Omega$ et χ_D est la fonction caractéristique de D .

Dans (2.197) la quantité importante est D . En dimension deux, elle représente l'interface entre le métal et le semi-conducteur. Nous revoyons le lecteur intéressé à W. H. Loh, S. E. Swirhun, T. A. Schereyer, R. M. Swanson et K. C. Saraswat [LS] pour plus de détails.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème d'identifier D à partir des mesures frontières

$$\partial_\nu u = g \text{ sur } \gamma, \gamma \subset \Gamma.$$

Dans tout ce sous-paragraphe, nous supposons que D est de classe C^1 et $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Sous ces hypothèses, nous déduisons du Théorème 1.26 que (2.197) admet une unique solution $u(D) \in H^2(\Omega)$. De plus, $u(D)$ est continue dans Ω (c'est la régularité intérieure; voir D. Gilbarg et N.S. Trudinger [GT] à ce sujet).

Nous fixons Ω_0 , un ouvert borné de \mathbb{R}^n tel que $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ et nous considérons le sous-espace fermé de $C^{1,b}$ donné par

$$X = \{V \in C^{1,b}; \text{ supp}(V) \subset \overline{\Omega_0}\}.$$

Soit Y le sous-espace quotient $Y = X/\mathcal{F}$, avec

$$\mathcal{F} = \{V \in X; V \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial D\}.$$

Y sera muni de sa norme (quotient) naturelle, notée $\|\cdot\|_Y$.

Nous nous donnons alors \mathcal{U} un voisinage ouvert de 0 dans Y pour lequel $D_V = (I + V)D$ est inclu dans un compact de Ω , pour tout $V \in \mathcal{U}$, et nous introduisons l'application

$$\theta : V \in \mathcal{U} \rightarrow \partial_\nu u(D_V)|_\gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma).$$

Ici $u(D_V) \in H^2(\Omega)$ est la solution du problème (2.197) dans lequel nous prenons D_V à la place de D .

Notre objectif dans ce sous-paragraphe est de démontrer le

Théorème 2.74. *Soit γ une partie fermée de Γ , d'intérieur non vide, et nous supposons que f est positive ou nulle et non constante. Alors θ est Gâteaux-différentiable en $V = 0$ et $\text{Ker}(\theta'(0)) = \{0\}$.*

Comme conséquence immédiate de ce théorème, nous avons

Corollaire 2.75. *Sous les hypothèses du Théorème 2.74, si $V \in X$ est tel que $V \cdot \nu \neq 0$ sur ∂D alors il existe deux constantes positives $\epsilon = \epsilon(V)$ et $C = C(V)$ telles que*

$$\|\partial_\nu u(D_{tV}) - \partial_\nu u(D)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \geq C|t|,$$

pour tout t , $|t| \leq \epsilon$.

Remarque. Puisque $|t| \geq K|D_{tV}\Delta D|$, où $K = K(V)$ est une constante positive, l'estimation dans dernier corollaire entraîne

$$|D_{tV}\Delta D| \leq \|\partial_\nu u(D_{tV}) - \partial_\nu u(D)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \quad |t| \leq \epsilon.$$

Preuve du Théorème 2.74. Nous donnons la démonstration en deux étapes.

Première étape. Nous montrons la Gâteaux-différentiabilité de θ en $V = 0$. À $V \in Y$ nous associons $\mu(D)(V) \in H^{-1}(\Omega)$ donné par

$$\langle \mu(D)(V), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = - \int_{\partial D} (V \cdot \nu) u(D) v, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Proposition 2.76. *θ est Gâteaux-différentiable en $V = 0$ et $\theta'(0)(V) = \partial_\nu \dot{u}(D)(V)|_\gamma$, où $\dot{u}(D)(V) \in H_0^1(\Omega)$ est la solution du problème aux limites*

$$\begin{cases} -\Delta \dot{u} + \chi_D \dot{u} = \mu(D)(V), & \text{dans } \Omega, \\ \dot{u} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.198)$$

Preuve. Fixons $V \in X$ et notons

$$V' = (\partial_{x_j} V_i), \quad J(t) = \det(I + tV'), \quad M(t) = (I + tV')^{-1}.$$

Soit I un intervalle autour de l'origine pour lequel $M(t)$ est bien définie et $J(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

Nous nous donnons $F_0 \in H^2(\Omega)$ telle que $F_0|_\Gamma = f$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\psi = 1$ dans un voisinage de Γ et $\text{supp}(\psi) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_0}$.

Nous posons, pour simplifier les notations $u_t = u(D_{tV})$. Si $F = \psi F_0$, $v_t = u_t - F$ et $G = -\Delta F$. Il est alors aisé de montrer que v_t est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta v + \chi_{D_{tV}} v = G, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Donc v_t est l'unique solution du problème variationnel

$$\int_{\Omega} \nabla v_t \cdot \nabla w dy + \int_{\Omega} \chi_{D_{tV}} v_t w dy = \int_{\Omega} G w dy, \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

Le changement de variable $y = (I + tV)x$ permet de déduire que $v(t) = v_t \circ (I + tV)$ est la solution du problème variationnel

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M(t) \nabla v(t) \cdot M(t) \nabla w J(t) dx + \int_{\Omega} \chi_{D_{tV}} v(t) w J(t) dx \\ = \int_{\Omega} G(t) w J(t) dx \quad w \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

où $G(t) = G \circ (I + tV)$.

En s'inspirant de la preuve du Théorème 2.72, nous montrons que l'application $t \rightarrow v(t) \in H_0^1(\Omega)$ est dérivable en $t = 0$, et

$$v'(0)(V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(0)}{t}$$

est la solution du problème variationnel

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v'(0)(V) \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} \chi_D v'(0)(V) w dx + \int_{\Omega} A(V) \nabla v(0) \cdot \nabla w dx \\ + \int_{\Omega} \chi_D v(0) w \text{div} V dx = \langle \text{div}(GV), w \rangle, \quad w \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

avec

$$A(V) = V' + (V')^t - \text{div} V.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} -\Delta v'(0) + \chi_D v'(0) - \text{div}(A \nabla v(0)) + \chi_D v(0) \text{div} V \\ = \text{div}(GV) \text{ dans } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.199)$$

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que dans $H^{-1}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} -\text{div}(A \nabla v(0)) + \chi_D v(0) \text{div} V = -\chi_D \nabla v(0) \cdot V - v(0) \nabla \chi_D \cdot V \\ + \text{div}(GV) + \Delta(\nabla v(0) \cdot V). \end{aligned} \quad (2.200)$$

(2.199) et (2.200) impliquent

$$\begin{aligned} & -\Delta(v'(0) - \nabla v(0) \cdot V) + \chi_D(v'(0) - \nabla v(0) \cdot V) \\ & = v(0)\nabla\chi_D \cdot V \text{ dans } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.201)$$

Mais,

$$\begin{aligned} \langle v(0)\nabla\chi_D \cdot V, w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= -\int_{\Omega} \chi_D \operatorname{div}(v(0)wV) dx = -\int_D \operatorname{div}(v(0)wV) dx \\ &= -\int_{\partial D} v(0)w(V \cdot \nu) d\sigma, \quad w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $v(0)\nabla\chi_D \cdot V = \mu(D)(V)$. Si $\dot{v}(D)(V) = v'(0)(V) - \nabla v(0) \cdot V$, nous déduisons de (2.201) que $\dot{v}(D)(V)$ satisfait

$$-\Delta\dot{v}(D)(V) + \chi_D\dot{v}(0)(V) = \mu(D)(V) \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

et comme V est nul dans un voisinage de Γ , $\dot{v}(D)(V) \in H_0^1(\Omega)$.

Nous posons

$$\dot{u}(D)(V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_t \circ (I + tV) - u(0)}{t} - \nabla u(0) \cdot V.$$

Par le Lemme 2.73, nous savons que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F \circ (I + tV) - F}{t} - \nabla F \cdot V = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega),$$

et puisque $u_t = v_t + F$, nous concluons que $\dot{u}(D)(V) = \dot{v}(D)(V)$. En d'autres termes, $\dot{u}(D)(V)$ est la solution de (2.198).

Maintenant, comme $\Delta u_t = 0$ dans $\omega = \Omega \setminus \overline{\mathcal{D}_0}$, pour tout $t \in I$, $\dot{u}(D)(V)$ existe aussi dans $H_{\Delta}(\omega)$. Or $u_t = u_t \circ (I + tV)$ et $\nabla u_t \cdot V = 0$ dans ω . D'où, l'application

$$t \in I \rightarrow u_t \in H_{\Delta}(\omega)$$

est dérivable en $t = 0$ et sa dérivée en ce point est égale à $\dot{u}(D)(V)|_{\omega}$. Ceci et la continuité de l'opérateur de trace

$$w \in H_{\Delta}(\omega) \rightarrow \partial_{\nu} w|_{\gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$$

(voir le Théorème 1.20) nous montrent que θ a une dérivée directionnelle $\theta'(D)(V)$, dans la direction V , en 0 et $\theta'(0)(V) = \partial_{\nu} \dot{u}(D)(V)|_{\gamma}$.

Pour terminer la preuve, il nous reste à vérifier que l'application

$$V \in Y \rightarrow \theta'(0)(V) \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$$

définit un opérateur borné.

Nous utilisons d'abord le fait que $\Delta \dot{u}(D)(V) = 0$ dans ω , $V \in X$, pour avoir

$$\begin{aligned}\|\theta'(0)(V)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} &= \|\partial_\nu \dot{u}(D)(V)|_\gamma\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq C \|\dot{u}(D)(V)\|_{H^1(\omega)} \\ &\leq C \|\dot{u}(D)(V)\|_{H^1(\Omega)},\end{aligned}\tag{2.202}$$

pour une certaine constante positive C .

D'autre part, nous déduisons de la formulation variationnelle de (2.198) l'estimation

$$\|\dot{u}(D)(V)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|\mu(D)(V)\| \leq C_1 \|V \cdot \nu\|_{L^\infty(\partial D)},$$

où $C_0 = C_0(\Omega)$ et $C_1 = C_1(\Omega, D)$ sont deux constantes positives. En particulier,

$$\|\dot{u}(D)(V)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|(V + W) \cdot \nu\|_{L^\infty(\partial D)}, \quad W \in \mathcal{F}.$$

D'où

$$\|\dot{u}(D)(V)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|V\|_Y,$$

avec $C_2 = C_2(\Omega, D)$ une constante positive.

Cette inégalité, combinée avec (2.202), nous donne

$$\|\theta'(0)(V)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq C_3 \|V\|_Y,$$

pour une certaine constante $C_3 = C_3(\Omega, D)$.

Seconde étape. Nous montrons que $\text{Ker}(\theta'(0)) = \{0\}$.

Nous démontrons d'abord deux lemmes.

Lemme 2.77. *Nous supposons que f est comme dans le Théorème 2.74. C'est-à-dire que f positive ou nulle et non constante. Alors $u = u_0 > 0$ sur ∂D .*

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde. Nous supposons donc qu'il existe $x_0 \in \partial D$ tel que $u(x_0) = 0$. D'après le Théorème 1.35 (principe du maximum pour les solutions faibles), u est positive ou nulle. Nous pouvons donc appliquer le Théorème 1.36 (inégalité de Harnack). Nous obtenons

$$\sup_{B(x_0)} u \leq C \inf_{B(x_0)} u,$$

pour au moins une boule $B(x_0)$, où C est une constante qui dépend de $B(x_0)$. Donc u est nulle dans $B(x_0)$ car $\inf_{B(x_0)} u = u(x_0) = 0$. Par suite, u est nulle dans tout Ω par le Théorème 1.37 (unicité du prolongement). Mais ceci contredit le fait que $f = u|_F$ est non constante. \square

Lemme 2.78. *Si $\theta'(0)(V) = 0$ alors $\mu(D)(V) = 0$.*

Preuve. D'après la Proposition 2.76, $\theta'(0)(V) = 0$ signifie $\partial_\nu \dot{u}(D)(V)|_\gamma = 0$. Donc $\dot{u}_e = \dot{u}(D)(V)|_{\Omega \setminus \overline{D}}$ est telle que

$$\begin{cases} -\Delta \dot{u}_e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \dot{u}_e = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_\nu \dot{u}_e = 0, & \text{sur } \gamma, \end{cases}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mu(D)(V)$ est à support dans ∂D . Il en résulte que $\dot{u}_e = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{D}$ par le corollaire 1.38 (unicité du prolongement). Comme $\dot{u}(V) \in H_0^1(\Omega)$, nous concluons que $\dot{u}_i = \dot{u}(V)|_D$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta \dot{u}_i + \dot{u}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \dot{u}_i = 0, & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (2.203)$$

Il s'ensuit que $\dot{u}_i = 0$ dans D par l'unicité de la solution de (2.203) et donc $u'(V) = 0$ dans Ω . Par conséquence $\mu(D)(V) = 0$. \square

Pour compléter la preuve de $\text{Ker}(\theta'(0)) = \{0\}$, nous affirmons que $\theta'(0)(V) \neq 0$ si $V \notin \mathcal{F}$. Car sinon $\theta'(0)(V) = 0$ entraînerait $\mu(D)(V) = 0$ par le Lemme 2.78, ou de manière équivalente que $(V \cdot \nu)u = 0$ sur ∂D . Or $u(0) > 0$ sur ∂D par le Lemme 2.77. Donc $V \cdot \nu = 0$ sur ∂D . Mais ceci est en contradiction avec le fait que $V \notin \mathcal{F}$.

La preuve du Théorème 2.74 est donc complète. \square

Le résultat de ce paragraphe provient de M. Choulli [Ch2]. Signalons qu'il n'existe que très peu de résultats d'unicité concernant le problème que nous avons étudié ici. À notre connaissance, les seuls résultats sont ceux démontré dans le Problème 1 pour un D de géométrie quelconque, et ceux de K. Sungwhan [Sung], K. Sungwhan et M. Yamamoto [SuY] pour des D ayant une géométrie particulière.

2.5.2 Un problème de conductivité inverse

Comme ci-dessus, D est un sous-domaine de Ω tel que $\overline{D} \subset \Omega$. Nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \text{div}((1 + \chi_D)\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.204)$$

Rappelons ici que χ_D désigne la fonction caractéristique de D .

Le problème de conductivité inverse consiste à déterminer D à partir des mesures

$$\partial_\nu u = g, \text{ sur } \gamma \subset \Gamma.$$

Ce problème d'identification modélise par exemple la détection d'un objet, ayant une conductivité différente du milieu qui l'entoure, à partir de mesures frontières.

Dans ce sous-paragraphe nous supposons que Ω et D sont de classe $C^{2,\alpha}$ pour un certain α , $0 < \alpha < 1$, et que $f \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$. Sous ces hypothèses, nous savons par le Théorème 1.30 que (2.204) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\overline{D}) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega \setminus D})$.

Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $\overline{\tilde{\Omega}} \subset \Omega$. Nous fixons $V \in C^{1,b}$ tel que $\text{supp}(V) \subset \tilde{\Omega}$ et nous choisissons I un intervalle autour de l'origine pour lequel $D_t = (I + tV)D \subset \Omega_0$, pour tout $t \in I$, pour un certain ouvert Ω_0 , $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Nous notons alors u_t la solution de (2.204) quand nous remplaçons D par D_t . Pour simplifier les notations, nous posons $u = u_0$.

Nous démontrons dans ce sous-paragraphe le

Théorème 2.79. *Soit γ une partie fermée de Γ d'intérieur non vide. Nous supposons*

- a) *f est non constante,*
- b) *Σ_+ et Σ_- sont non vides, avec*

$$\Sigma_{\pm} = \{x \in \partial D; \pm V(x) \cdot \nu(x) > 0\},$$

- c) *il existe δ un ouvert de Σ_+ tel que $\text{dist}(\overline{\delta}, \overline{\Sigma_+ \setminus \delta} \cup \overline{\Sigma_-}) > 0^1$.*

Alors il existe deux constantes positives ϵ et C (dépendant de V) telles que

$$\|(\partial_\nu u_t - \partial_\nu u)|_\gamma\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \geq C|t|, \quad |t| \leq \epsilon.$$

En particulier,

$$\|(\partial_\nu u_t - \partial_\nu u)|_\gamma\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} \geq C|D_t V \Delta D|, \quad |t| \leq \epsilon.$$

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous montrons d'abord des résultats préliminaires. Nous commençons par le

Théorème 2.80. *Soit γ une partie fermée de Γ d'intérieur non vide. L'application*

$$\Phi_V : t \in I \rightarrow \partial_\nu u_t|_\gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$$

est alors dérivable en $t = 0$ et $\Phi'_V(0) = \partial_\nu \dot{u}|_\gamma$, où $\dot{u} \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème de transmission

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \Delta \dot{u}_e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \dot{u}_i - \dot{u}_e = (V \cdot \nu) \partial_\nu u_i, & \text{sur } \partial D, \\ 2\partial_\nu \dot{u}_i - \partial_\nu \dot{u}_e = (V \cdot \nu) \Delta_\tau u_i + \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D, \\ \dot{u}_e = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.205)$$

¹ Noter que nous pouvons aussi considérer γ comme partie de Σ_- .

Preuve. Nous donnons la démonstration en trois étapes. Nous rappelons les notations

$$V' = (\partial_{x_j} V_i), \quad J(t) = \det(I + tV'), \quad M(t) = (I + tV')^{-1}.$$

Réduisant I si nécessaire, nous pouvons toujours supposer que $M(t)$ est bien définie et que $J(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

Première étape. Soient $F_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que $F_0|_\Gamma = f$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\theta = 1$ dans un voisinage de Γ et $\text{supp}(\theta) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_0}$. Nous posons

$$F = \theta F_0, \quad v_t = u_t - F \quad \text{et} \quad g = -\Delta F.$$

Alors il est aisé de vérifier que v_t est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \text{div}((1 + \chi_{D_t})\nabla v) = g, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Lemme 2.81. Soit $v(t) = v_t \circ (I + tV)$. Alors

$$v' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(0)}{t}$$

existe dans $H_0^1(\Omega)$ et c'est l'unique solution du problème variationnel

$$\int_{\Omega} (1 + \chi_D) \nabla v' \cdot \nabla w = \langle \text{div}((1 + \chi_D)A \nabla v + \text{div}(gV)), w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad w \in H_0^1(\Omega),$$

où $v = v(0)$ et

$$A = V' + (V')^t - \text{div}(V).$$

Preuve. Clairement, v_t est la solution du problème variationnel

$$\int_{\Omega} (1 + \chi_{D_t}) \nabla v_t \cdot \nabla w dy = \int_{\Omega} g w dy, \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

Nous faisons le changement de variable $y = (I + tV)x$ pour aboutir à

$$\int_{\Omega} (1 + \chi_D) M(t) \nabla v(t) \cdot M(t) \nabla w J(t) = \int_{\Omega} g(t) w J(t), \quad w \in H_0^1(\Omega),$$

où $g(t) = g \circ (I + tV)$. En procédant comme pour le laplacien, nous pouvons montrer que $v' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v}{t}$ existe dans $H_0^1(\Omega)$ et que c'est l'unique solution du problème variationnel

$$\int_{\Omega} (1 + \chi_D) \nabla v' \cdot \nabla w = \langle \text{div}((1 + \chi_D)A \nabla v + \text{div}(gV)), w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

□

Si $\dot{v} = v' - \nabla v \cdot V$, nous utilisons

$$-\operatorname{div}((1 + \chi_D)\nabla v') = \operatorname{div}((1 + \chi_D)A\nabla v) + \operatorname{div}(gV), \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

pour conclure que \dot{v} vérifie

$$\begin{cases} \Delta \dot{v}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \Delta \dot{v}_e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \dot{v}_e = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.206)$$

Ici et dans ce qui suit, si w est une fonction définie sur Ω alors $w_i = w|_D$ et $w_e = w|_{\Omega \setminus \overline{D}}$.

Seconde étape. Nous établissons les conditions de transmission satisfaites par \dot{v} .

Lemme 2.82.

$$\dot{v}_i - \dot{v}_e = (V \cdot \nu)\partial_\nu v_i, \text{ dans } D. \quad (2.207)$$

$$2\partial_\nu \dot{v}_i - \partial_\nu \dot{v}_e = (V \cdot \nu)\Delta_\tau v_i + \nabla_\tau v_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), \text{ dans } D. \quad (2.208)$$

Preuve de (2.207). Soit $\psi \in H^2(\Omega)$ telle que $\psi|_{\partial D} = v_i$ and $\psi|_{\partial \Omega} = 0$. En notant que $v_i = v_e$ sur ∂D , nous montrons sans peine que $w_i = v_i - \psi$ et $w_e = v_e - \psi$ sont les solutions respectives des problèmes aux limites

$$\begin{cases} -\Delta w_i = f_i, & \text{dans } D, \\ w_i = 0, & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta w_e = f_e, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ w_e = 0, & \text{sur } \partial(\Omega \setminus \overline{D}), \end{cases}$$

avec

$$f_i = \frac{g}{2} + \Delta \psi, \quad f_e = g + \Delta \psi.$$

D'après le Théorème 2.72, nous concluons que \dot{w}_i et \dot{w}_e sont les solutions respectives des problèmes aux limites

$$\begin{cases} -\Delta \dot{w}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \dot{w}_i = -(V \cdot \nu)\partial_\nu w_i, & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta \dot{w}_e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \dot{w}_e = -(V \cdot \nu)\partial_\nu w_e, & \text{sur } \partial D, \\ \dot{w}_e = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Or $\dot{\psi} = 0$ par le Lemme 2.73. Ceci, le fait que $2\partial_\nu v_i = \partial_\nu v_e$ sur ∂D et les conditions aux limites vérifiées par \dot{w}_i et \dot{w}_e entraînent alors (2.207). \square

Preuve de (2.208). Nous nous donnons $\rho \in H^2(\Omega)$ vérifiant

$$\partial_\nu \rho|_{\partial D} = 2\partial_\nu v_i|_{\partial D} = \partial_\nu v_e|_{\partial D} \text{ et } \rho|_\Gamma = 0.$$

Si

$$h_i = \frac{1}{2}(g + \Delta\rho) \text{ et } h_e = g + \Delta\rho,$$

alors un calcul simple nous montre que $y_i = v_i - \frac{\rho}{2}$ et $y_e = v_e - \rho$ sont les solutions respectives des problèmes aux limites

$$\begin{cases} -\Delta y_i = h_i, & \text{dans } D, \\ \partial_\nu y_i = 0, & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta y_e = h_e, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \partial_\nu y_e = 0, & \text{sur } \partial D, \\ y_e = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Il résulte du Théorème 2.72 que \dot{y}_i et \dot{y}_e vérifient

$$\begin{cases} -\Delta \dot{y}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \partial_\nu \dot{y}_i = -(V \cdot \nu) \partial_{\nu^2}^2 y_i + \nabla_\tau y_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta \dot{y}_e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \partial_\nu \dot{y}_e = -(V \cdot \nu) \partial_{\nu^2}^2 y_e + \nabla_\tau y_e \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D, \\ \dot{y}_e = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme $\dot{\rho} = 0$ (par le Lemme 2.73), nous déduisons des conditions aux limites pour \dot{y}_i et \dot{y}_e que

$$\begin{aligned} 2\partial_\nu \dot{v}_i - \partial_\nu \dot{v}_e &= -2(V \cdot \nu) \partial_{\nu^2}^2 v_i + (V \cdot \nu) \partial_{\nu^2}^2 v_e + 2\nabla_\tau v_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu) \\ &\quad - \nabla_\tau v_e \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), \text{ sur } \partial D. \end{aligned} \quad (2.209)$$

Mais

$$\begin{cases} 2\partial_{\nu^2}^2 v_i = \Delta v_i - \Delta_\tau v_i - H \partial_\nu v_i = -\frac{g}{2} - \Delta_\tau v_i - H \partial_\nu v_i, & \text{sur } \partial D, \\ \partial_{\nu^2}^2 v_e = -g - \Delta_\tau v_e - H \partial_\nu v_e, & \text{sur } \partial D, \\ \Delta_\tau v_i = \Delta_\tau v_e, & \text{sur } \partial D, \\ \nabla_\tau v_i = \nabla_\tau v_e, & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (2.210)$$

(2.208) découle alors d'une combinaison de (2.209) et (2.210). \square

Troisième étape. De (2.206) et du lemme précédent nous déduisons que \dot{v} est la solution du problème de transmission

$$\begin{cases} \Delta \dot{v}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \Delta \dot{v}_e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \dot{v}_i - \dot{v}_e = (V \cdot \nu) \partial_\nu v_i, & \text{sur } \partial D, \\ 2\partial_\nu \dot{v}_i - \partial_\nu \dot{v}_e = (V \cdot \nu) \Delta_\tau v_i + \nabla_\tau v_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D, \\ \dot{v}_e = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme $u = v + F$, $\text{supp}(F) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_0}$ et $\dot{F} = 0$, \dot{u} est solution du problème de transmission

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \Delta \dot{u}_e = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \dot{u}_i - \dot{u}_e = \partial_\nu u_i (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D, \\ 2\partial_\nu \dot{u}_i - \partial_\nu \dot{u}_e = (V \cdot \nu) \Delta_\tau u_i + \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D, \\ \dot{u}_e = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Lemme 2.83. *Soit Φ_V comme dans le Théorème 2.80. Alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_V(t) - \Phi_V(0)}{t} = \partial_\nu \dot{u}|_\gamma \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\gamma).$$

Preuve. D'après ce qui précède, nous savons déjà que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t) - u}{t}$ existe dans $H^1(\Omega)$ et que $\dot{u} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t) - u}{t} - \nabla u \cdot V$ est la solution du problème de transmission (2.205). Mais dans $\Omega \setminus \overline{\Omega_0}$, $V = 0$ et $u(t) = u_t$. D'où $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_t - u}{t} = \dot{u}$ dans $H^1(\Omega \setminus \overline{\Omega_0})$. Or $\Delta u_t = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{\Omega_0}$. Par suite, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_t - u}{t} = \dot{u}$ dans $H_\Delta(\Omega \setminus \overline{\Omega_0})$. Le résultat s'ensuit alors en utilisant la continuité de l'opérateur de trace $w \in H_\Delta(\Omega \setminus \overline{\Omega_0}) \rightarrow \partial_\nu w|_\gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ (voir le Théorème 1.20). \square

Nous venons donc d'achever la démonstration du Théorème 2.80. \square

Nous montrons maintenant le

Lemme 2.84. $\Phi'_V(0) = 0$ implique

$$\int_{\partial D} (V \cdot \nu) \nabla u_e \cdot \nabla w = 0, \text{ pour tout } w \in H^2(D) \text{ telle que } \Delta w = 0 \text{ dans } D.$$

Preuve. Si $\Phi'_V(0) = \partial_\nu \dot{u}_e|_\gamma = 0$ alors $\dot{u}_e = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{D}$ par le Corollaire 1.38 (unicité du prolongement). Mais \dot{u} est la solution du problème de transmission (2.205). Donc \dot{u}_i est solution du problème surdéterminé

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \dot{u}_i = (V \cdot \nu) \partial_\nu u_i, & \text{sur } \partial D, \\ 2\partial_\nu \dot{u}_i = (V \cdot \nu) \Delta_\tau u_i + \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Soit $w \in H^2(D)$ telle que $\Delta w = 0$ dans D . Une application de la formule de Green nous donne

$$0 = \int_D \Delta w \dot{u}_i dx = \int_{\partial D} (V \cdot \nu) \partial_\nu w \partial_\nu u_i d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial D} [(V \cdot \nu) \Delta_\tau u_i d\sigma + \nabla_\tau (V \cdot \nu) \cdot \nabla_\tau u_i] w d\sigma \quad (2.211)$$

Or d'après la formule d'intégration par parties du Théorème 1.24, nous avons

$$\int_{\partial D} (V \cdot \nu) w \Delta_\tau u_i d\sigma = - \int_{\partial D} \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau (w(V \cdot \nu)) d\sigma.$$

D'où,

$$\int_{\partial D} (V \cdot \nu) w \Delta_\tau u_i d\sigma + \int_{\partial D} w \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu) d\sigma = \int_{\partial D} (V \cdot \nu) \partial_\nu w \partial_\nu u_i d\sigma. \quad (2.212)$$

Vu (2.211) et (2.212), nous obtenons

$$\int_{\partial D} (V \cdot \nu) \partial_\nu w \partial_\nu u_i d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial D} (V \cdot \nu) \nabla_\tau w \nabla_\tau u_i d\sigma = 0.$$

Le résultat s'ensuit en utilisant $2\partial_\nu u_i = \partial_\nu u_e$ et $\nabla_\tau u_i = \nabla_\tau u_e$ sur ∂D . \square

Preuve du Théorème 2.79. D'après le théorème des accroissements finis, il suffit de démontrer que $\Phi'_V(0)$ ne s'annule pas. Nous raisonnons par l'absurde. Nous supposons alors que $\Phi'_V(0) = 0$. Dans la preuve du lemme précédent nous avons vu que ceci entraîne $\dot{u}_e = 0$ dans $\Omega \setminus \overline{D}$ et que \dot{u}_i est solution du problème surdéterminé

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}_i = 0, & \text{dans } D, \\ \dot{u}_i = (V \cdot \nu) \partial_\nu u_i, & \text{sur } \partial D, \\ 2\partial_\nu \dot{u}_i = (V \cdot \nu) \Delta_\tau u_i + \nabla_\tau u_i \cdot \nabla_\tau (V \cdot \nu), & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

D'autre part, de l'hypothèse c) nous déduisons que $\Sigma_0 = \{x \in \partial D; V(x) \cdot \nu(x) = 0\}$ est d'intérieur non vide. Comme $\dot{u}_i = \partial_\nu \dot{u}_i = 0$ sur Σ_0 , $\dot{u}_i = 0$ dans D par le Corollaire 1.38 (unicité du prolongement). Par suite,

$$\partial_\nu u_e = 2\partial_\nu u_i = 0 \text{ sur } \partial D \setminus \Sigma_0.$$

Nous utilisons encore une fois l'hypothèse c) pour conclure qu'il existe \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^n tel que

$$\overline{\delta} \subset \mathcal{O} \text{ et } \mathcal{O} \cap (\overline{\Sigma_+ \setminus \overline{\delta}} \cup \overline{\Sigma_-}) = \emptyset.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset \mathcal{O}$ et $\varphi = 1$ dans un voisinage de $\overline{\delta}$. Soit $w \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$ la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{dans } D, \\ w = \varphi u_e, & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Une application du lemme 2.84 nous donne

$$0 = \int_{\partial D \setminus \delta} (V \cdot \nu) \nabla_\tau w \cdot \nabla_\tau u_e d\sigma + \int_\delta |V \cdot \nu| |\nabla_\tau u_e|^2 d\sigma.$$

Or

$$\int_{\partial D \setminus \delta} (V \cdot \nu) \nabla_\tau w \cdot \nabla_\tau u_e d\sigma = \int_{(\Sigma_+ \cup \Sigma_-) \setminus \delta} (V \cdot \nu) \nabla_\tau w \cdot \nabla_\tau u_e d\sigma = 0,$$

car $w = 0$ sur $(\Sigma_+ \cup \Sigma_-) \setminus \delta$. D'où

$$\int_\delta |V \cdot \nu| |\nabla_\tau u_e|^2 d\sigma = 0.$$

C'est-à-dire $\nabla_\tau u_e = 0$ sur δ . Mais nous savons déjà que $\partial_\nu u_e = 0$ sur $\partial D \setminus \Sigma_0$. Par conséquent, $\nabla u_e = 0$ sur δ et u_e est constante sur δ . Donc u_e est constante dans $\Omega \setminus \overline{D}$ par le Corollaire 1.38 (unicité du prolongement). Or $u_e = f$ sur Γ et donc f est constante. Mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse a). \square

Nous avons utilisé M. Choulli [Ch3] pour préparer ce sous-paragraphe. Le Théorème 2.79 généralise les résultats antérieurs de H. Bellout et A. Friedman [BF], A. Friedman et B. Gustafsson [FG]. Pour le cas parabolique, voir H. Bellout [Bel].

2.6 Détection de fissures

2.6.1 Applications quasi-conformes, fonctions courant et points critiques géométriques

Soient Ω un domaine du plan et $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ un difféomorphisme. Pour $z = x + iy$, s'il n'y a pas de confusion, nous identifierons $f(z)$ et $f(x, y)$. Il n'est pas difficile de vérifier que $J_f(z)$, le jacobien de f en z_0 , est donné par

$$J_f(z) = |\partial_z f(z)|^2 - |\partial_{\bar{z}} f(z)|^2, \quad z \in \Omega.$$

Comme $J_f(z)$ ne s'annule jamais sur Ω , nous pouvons définir la distorsion de f en z par

$$D_f(z) = \frac{|\partial_z f(z)|^2 + |\partial_{\bar{z}} f(z)|^2}{|\partial_z f(z)|^2 - |\partial_{\bar{z}} f(z)|^2}.$$

Nous définissons aussi la dilatation complexe de f en z comme suit

$$\mu_f(z) = \frac{\partial_{\bar{z}} f(z)}{\partial_z f(z)}.$$

Nous avons alors la relation

$$D_f = \frac{1 + |\mu_f|}{1 - |\mu_f|}.$$

Nous dirons que f est quasi-conforme si D_f est bornée sur Ω . f est dite k -quasi-conforme si $D_f \leq k$.

Clairement, f est 1-quasi-conforme si et seulement si elle est conforme.

Il est possible d'étendre la notion d'application quasi-conforme. Nous dirons que $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ un homéomorphisme qui préserve l'orientation est k -quasi-conforme si $f \in H_{loc}^1(\Omega)$ et si $D_f \leq k$ p.p. sur Ω .

Notons qu'une application $f \in H_{loc}^1(\Omega)$ qui satisfait à $D_f \leq k$ p.p. sur Ω est dite k -quasi-régulière.

Nous supposons maintenant que Ω est borné et simplement connexe. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice 2×2 symétrique, à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant, pour un certain $\lambda \in (0, 1]$,

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, z \in \Omega. \quad (2.213)$$

Nous considérons l'équation

$$\operatorname{div}(A \nabla u) = 0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.214)$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution de (2.214) et posons

$$\omega = -(a_{12}\partial_x u + a_{22}\partial_y u)dx + (a_{11}\partial_x u + a_{12}\partial_y u)dy.$$

Nous vérifions aisément que ω est une forme différentielle exacte. D'où, il existe $v \in H^1(\Omega)$ telle que $dv = \omega$. La fonction v s'appelle la fonction courant associée à u , et la relation $dv = \omega$ se met sous la forme

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \nabla u, \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (2.215)$$

Notons que v est unique à une constante additive près et que c'est une solution faible de l'équation

$$\operatorname{div}(B \nabla v) = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (2.216)$$

où $B = (\det A)^{-1} A^t$.

Soit $f = u + iv$. Alors l'équation (2.215) devient

$$\partial_{\bar{z}} f = \mu \partial_z f + \nu \overline{\partial_z f}, \text{ p.p. sur } \Omega, \quad (2.217)$$

avec

$$\mu = \frac{a_{22} - a_{11} - 2ia_{12}}{a_{11}a_{22} + a_{11} + a_{22} - a_{12}^2 + 1} \text{ et } \nu = \frac{1 - a_{11}a_{22} + a_{12}^2}{a_{11}a_{22} + a_{11} + a_{22} - a_{12}^2 + 1}.$$

Après un calcul fastidieux mais élémentaire, nous arrivons à montrer

$$|\mu| + |\nu| \leq k < 1, \quad (2.218)$$

où k est une constante qui ne dépend que de λ .

Nous résumons ceci dans la proposition suivante

Proposition 2.85. (i) Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution de (2.214). Alors il existe, à une constante additive près, une unique fonction $v \in H^1(\Omega)$ solution de (2.216). De plus $f = u + iv$ est solution de (2.217), où μ et ν sont deux fonctions mesurables et bornées qui vérifient (2.218).

(ii) D'autre part, si $f = u + iv$, $f \in H^1(\Omega)$ vérifie (2.217) avec μ et ν satisfaisant (2.218), alors il existe une matrice, 2×2 , A telle que u est une solution variationnelle de $\operatorname{div}(A \nabla u) = 0$ dans Ω et A vérifie (2.213), où λ dépend uniquement de k .

Dans (ii), la matrice A est explicitement donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{|1-\mu|^2 - |\nu|^2}{|1+\nu|^2 - |\mu|^2} & \frac{2\Im(\nu-\mu)}{|1+\nu|^2 - |\mu|^2} \\ \frac{-2\Im(\nu+\mu)}{|1+\nu|^2 - |\mu|^2} & \frac{|1+\mu|^2 - |\nu|^2}{|1+\nu|^2 - |\mu|^2} \end{pmatrix}. \quad (2.219)$$

Notons que si u est une fonction harmonique (c-à-d $A = I$), v n'est rien d'autre que la conjuguée harmonique de u . Dans ce cas $\mu = \nu = 0$ et, par suite, $\partial_{\bar{z}} f = 0$ dans Ω , par (2.215). En d'autres termes, f vérifie les conditions de Cauchy dans Ω . Elle est donc holomorphe dans Ω . Dans le cas général, nous vérifions sans peine que, grâce à (2.217), f est quasi-régulière. Un théorème de représentation de L. Bers et L. Nirenberg [BN] nous dit alors que, modulo un changement de variable quasi-conforme, f est holomorphe :

Théorème 2.86. *Soit D un sous domaine simplement connexe de la boule unité B . Si $f \in H^1(\Omega)$ vérifie (2.217) avec μ et ν satisfaisant (2.218). Alors il existe $\chi : B \rightarrow B$ une application quasi-conforme et F holomorphe sur $\chi(D)$ telles que*

$$f = F \circ \chi.$$

De plus, χ et χ^{-1} sont holdériennes :

$$|\chi(x) - \chi(y)|, |\chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad x, y \in B, \quad (2.220)$$

où C et α , $0 < \alpha < 1$, sont deux constantes qui ne dépendent que de k .

Le dernier théorème permet définir la notion de point critique géométrique. Un point $z \in \Omega$ est un point critique géométrique de u si $\chi(z)$ est un point critique (au sens usuel) de $h = \Re F$. Si z est un point critique géométrique de u , nous définissons l'indice géométrique de ∇u par

$$I(z, \nabla u) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_r(\chi(z))} d(\arg(\nabla h)),$$

où $\arg(\nabla h)$ désigne l'angle entre le vecteur ∇h et une direction fixée.

Pour le problème de détection de fissures, nous aurons besoin d'un résultat d'existence d'une fonction courant dans le domaine $\Omega \setminus \sigma$, où σ est une courbe simple lipschitzienne. Notons que $\Omega \setminus \sigma$ n'est plus simplement connexe. Il est doublement connexe. Nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \sigma, \\ A\nabla u \cdot \nu = 0, & \text{de chaque côté de } \sigma, \\ A\nabla u \cdot \nu = \psi, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.221)$$

Théorème 2.87. *Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution de (2.221) avec $\psi \in L^2(\Gamma)$, $\int_\Gamma \psi dx = 0$. Alors il existe, à une constante additive près, une unique fonction courant $v \in H^1(\Omega)$ associée à u . De plus v est une solution variationnelle du problème aux limites*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(B\nabla v) = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \sigma, \\ v = \text{constante}, & \text{sur } \sigma, \\ v = \Psi, & \text{sur } \Gamma, \\ \int_\Gamma B\nabla v \cdot \nu = 0, \end{cases} \quad (2.222)$$

avec $B = (\det A)^{-1} A^t$ et Ψ est une primitive de ψ , considérée comme fonction de l'abscisse curviligne.

Le reste de ce paragraphe est dédié à des estimations pour la solution de (2.217) et (2.218). Dans ce qui suit, Ω redevient un ouvert borné de \mathbb{R}^n . A cette fin nous introduisons une notion généralisant celle des fonctions sur-harmonique. A étant comme ci-dessus, nous notons L_A l'opérateur

$$L_A u = -\operatorname{div}(A\nabla u).$$

Définition 2.88. Une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite L_A -sur-harmonique si

- (i) u est semi-continue inférieurement,
 - (ii) $u \not\equiv +\infty$ dans toute composante connexe de Ω ,
 - (iii) pour tout ouvert D , $\overline{D} \subset \Omega$, et toute $v \in C^1(\overline{D})$ telle que $L_A v = 0$ au sens variationnel, si $u \geq v$ sur ∂D alors $u \geq v$ dans D .
- u sera dite L_A -sous-harmonique dans Ω si $-u$ L_A -sur-harmonique dans Ω .

Si E est une partie de Γ , nous désignons par U_E l'ensemble de toutes les fonctions u , L_A -sur-harmonique dans Ω , telles que $u \geq 0$ et $\liminf_{x \rightarrow y} u(x) \geq \chi_E(y)$, où χ_E est la fonction caractéristique de E .

Définition 2.89. Nous définissons la mesure L_A -harmonique de E par rapport à Ω comme étant la solution de Perron supérieure par rapport à χ_E , c'est-à-dire

$$\omega(z) = \omega(z, D, L_A; z) = \inf\{u(z); u \in U_E\}, \quad z \in \Omega.$$

Lemme 2.90. Soit $f \in H^1(\Omega)$ vérifiant (2.217) avec μ et ν satisfaisant (2.218). Alors il existe une matrice, 2×2 , \tilde{A} à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ qui vérifient (2.213), avec λ dépendant uniquement de k , telle que $\phi = \log |f|$ est $L_{\tilde{A}}$ -sur-harmonique.

Preuve. En un point $z \in \Omega$ où $f(z) \neq 0$, nous pouvons définir, dans un voisinage de z , $\psi = \log f$, où \log est une détermination quelconque du logarithme. Dans ce voisinage ψ vérifie l'équation

$$\partial_{\bar{z}}\psi = \mu\partial_z\psi + \tilde{\nu}\overline{\partial_z\psi},$$

où $\tilde{\nu} = \nu \frac{\bar{f}}{f}$ et donc $|\mu| + |\tilde{\nu}| \leq k < 1$. Soit \tilde{A} la matrice donnée par (2.219) avec $\tilde{\nu}$ à la place de ν . D'après la Proposition 2.85, $\phi = \ln |f| = \Re \log f$ vérifie localement

$$\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla\phi) = 0, \tag{2.223}$$

au sens variationnel.

Notons que nous pouvons définir $\phi = \ln |f|$ globalement comme une fonction de $H_{loc}^1(\tilde{\Omega})$, où $\tilde{\Omega} = \{z \in \Omega; f(z) \neq 0\}$. À l'aide d'une partition de l'unité, nous pouvons aisément démontrer que ϕ vérifie, au sens variationnel, (2.223) dans $\tilde{\Omega}$.

Nous savons que $\{z \in \Omega; f(z) = 0\}$ est constitué de points isolés et $\phi(z)$ converge vers $-\infty$ quand z tend vers un élément de cet ensemble. En utilisant ce fait et le principe du maximum, nous arrivons à montrer de manière assez simple que ϕ est $L_{\tilde{A}}$ -sur-harmonique. \square

Théorème 2.91. Soient E une partie de Ω et $f \in H^1(\Omega)$ une solution de (2.217), avec ν et μ vérifiant (2.216). Si $M = \sup |f|$ et, pour $\epsilon > 0$,

$$\limsup_{x \rightarrow y} |f(x)| \leq \epsilon, \quad y \in E, \quad (2.224)$$

alors

$$|f(z)| \leq M^{1-\omega(z)} \epsilon^{\omega(z)}, \quad z \in \Omega, \quad (2.225)$$

où $\omega = \omega(E, \Omega, L_{\tilde{A}})$ est la mesure $L_{\tilde{A}}$ -harmonique de E par rapport à Ω et \tilde{A} est comme dans le Lemme 2.90.

Preuve. Sans perte de généralité, nous supposons $0 < \epsilon < M$. D'après le dernier lemme, $\phi = \ln |f|$ est $L_{\tilde{A}}$ -sur-harmonique. D'autre part, il n'est difficile de voir que $\varphi = \frac{\phi - \ln M}{\ln \epsilon - \ln M}$ est dans l'ensemble U_E . D'où $\omega(z) \leq \varphi(z)$ et, par suite,

$$\phi(z) \leq (\ln \epsilon) \omega(z) + \ln M (1 - \omega(z)), \quad z \in \Omega,$$

ce qui entraîne le résultat recherché. \square

2.6.2 Stabilité de la détermination d'une fissure régulière

Nous introduisons d'abord les hypothèses dont nous aurons besoin pour énoncer le résultat de stabilité que nous nous proposons de démontrer dans ce sous-paragraphe.

(H1) Ω est un domaine borné, de frontière Γ , simplement connexe tel qu'il existe trois constantes L , δ et M pour lesquelles : (i) pour tout $z \in \Gamma$, $\Gamma \cap B(z, \delta)$ est un graphe lipschitzien de norme M ; (ii) $|\Gamma| \leq L$.

(H2) Une fissure σ dans Ω sera une courbe simple telle que : (i) la longueur de σ est inférieure ou égale à L ; (ii) $\text{dist}(\sigma, \Gamma) \geq \delta$; (iii) Si V_1 et V_2 sont les deux extrémités de σ , alors, pour $i = 1, 2$, $\sigma \cap B(V_i, \delta)$ est un demi-graphe Lipschitz de norme M ; en outre pour tout $z \in \sigma \setminus [B(V_1, \frac{\delta}{2}) \cup B(V_2, \frac{\delta}{2})]$, $\sigma \cap B(z, \frac{\delta}{2})$ est un graphe lipschitzien de norme M . Les constantes L , δ et M sont les mêmes qu'en **(H1)**.

Nous décomposons Γ en trois arcs simples γ_0 , γ_1 et γ_2 , dont les intersections, deux à deux, des intérieurs sont vides. Soit $N > 0$ et fixons trois fonctions η_0 , η_1 et η_2 dans $L^2(\Gamma)$ telles que pour $j = 0, 1, 2$,

$$\eta_j \geq 0, \quad \text{supp}(\eta_j) \subset \gamma_j, \quad \int_{\Gamma} \eta_j = 1, \quad \|\eta_j\|_{L^2(\Gamma)} \leq N.$$

Nous posons

$$\psi_1 = \eta_0 - \eta_1, \quad \psi_2 = \eta_0 - \eta_2. \quad (2.226)$$

Nous avons donc

$$\int_{\Gamma} \psi_j = 0, \quad \|\psi_j\|_{L^2(\Gamma)} \leq 2N, \quad j = 1, 2. \quad (2.227)$$

Pour $j = 1, 2$, Ψ_j désignera la primitive de ψ_j par rapport à la variable curviligne (Γ est orientée dans le sens direct). Bien entendu, Ψ_1 et Ψ_2 ne sont définies qu'à une constante additive près.

Désignons par d_Γ la distance sur Γ . En utilisant (H1), nous montrons aisément qu'il existe $M_1 = M_1(L, \delta, M)$ telle que, pour $z_0, z_1 \in \Gamma$,

$$d_\Gamma(z_0, z_1) \leq M_1 |z_0 - z_1|,$$

Il en résulte que Ψ_j , $j = 1, 2$, vérifie

$$|\Psi_j(z_0) - \Psi_j(z_1)| \leq 2Nd_\Gamma(z_0, z_1)^{\frac{1}{2}} \leq N_1 |z_0 - z_1|^{\frac{1}{2}}, \quad (2.228)$$

pour $z_0, z_1 \in \Gamma$, où $N_1 = 2NM_1^{\frac{1}{2}}$.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice 2×2 symétrique, à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ vérifiant, pour un certain $\lambda \in (0, 1]$,

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, z \in \Omega.$$

Pour $i = 1, 2$, nous notons $u_i \in H^1(\Omega \setminus \sigma)$ (resp. $u'_i \in H^1(\Omega \setminus \sigma')$) la solution variationnelle du problème aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A \nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \setminus \sigma, \\ A \nabla u \cdot \nu = 0, & \text{de chaque côté de } \sigma, \\ A \nabla u \cdot \nu = \psi, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.229)$$

quand $\psi = \psi_i$ (resp. et $\sigma = \sigma'$), ψ_i donnée par (2.226).

Rappelons que la distance de Hausdorff entre σ et σ' est donnée par

$$d_H(\sigma, \sigma') = \max\left\{\sup_{x \in \sigma'} \operatorname{dist}(x, \sigma), \sup_{x \in \sigma} \operatorname{dist}(x, \sigma')\right\}.$$

Nous énonçons maintenant le résultat que nous démontrons dans ce sous-paragraphe.

Théorème 2.92. *Soit $\Sigma \subset \Gamma$ un arc simple de longueur au moins égale à δ . Sous les hypothèses (H1) et (H2), si $\epsilon > 0$ est tel que*

$$\max_{i=1,2} \|u_i - u'_i\|_{L^\infty(\Sigma)} \leq \epsilon \quad (2.230)$$

alors

$$d_H(\sigma, \sigma') \leq \omega(\epsilon), \quad (2.231)$$

où $\omega(\epsilon)$ est une fonction positive sur $(0, +\infty)$ vérifiant

$$\omega(\epsilon) \leq K(\ln |\ln \epsilon|)^{-\alpha}, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{e}.$$

Ici K et α sont deux constantes positives dépendant uniquement des données.

Dans le reste de ce paragraphe, les notations et les hypothèses sont celles du dernier théorème. Soient a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Nous posons

$$u = au_1 + bu_2, \quad v = av_1 + bv_2, \quad (2.232)$$

$$\psi = a\psi_1 + b\psi_2, \quad \Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2. \quad (2.233)$$

Nous vérifions sans peine que u est la solution faible de (2.229) et que v est sa fonction courant. De la même manière, en remplaçant σ par σ' , nous définissons u' et v' .

Notons qu'il est plausible de s'attendre à ce que v soit continue à travers σ , grâce au fait que v vérifie une condition de Cauchy sur σ . Par contre, u n'a aucune raison d'être continue à travers σ . Afin de distinguer les limites de part et d'autre de σ , nous considérons σ comme une courbe fermée dégénérée : soit $\tilde{\sigma}$ la courbe abstraite simple obtenue en recollant deux à deux les extrémités de deux copies de σ . Notons $\tilde{\Omega}$ la sous-variété compact obtenue par un recollement "approprié" de $\overline{\Omega} \setminus \sigma$ et $\tilde{\sigma}^2$ et \tilde{d} la distance géodésique³ sur $\tilde{\Omega}$.

Dans ce qui suit C désigne une constante ou une fonction générique qui ne dépend que des données.

Un résultat important dans la preuve du Théorème 2.92 est donné par la

Proposition 2.93. *Soient u, v données par (2.232), (2.233) et $f = u + iv$. Alors*

a) v est hölderienne :

$$|v(z_1) - v(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^\beta, \quad z_1, z_2 \in \overline{\Omega}. \quad (2.234)$$

b) u vérifie l'estimation

$$|u(z_1) - u(z_2)| \leq C\tilde{d}(z_1, z_2)^\beta, \quad z_1, z_2 \in \tilde{\Omega}. \quad (2.235)$$

c) f est quasi-conforme sur $\Omega \setminus \sigma$.

Nous utilisons le (dont la preuve est donnée dans [Ro2])

Lemme 2.94. *Sous les hypothèses et les notations de la Proposition 2.93, nous avons la représentation*

$$f = F \circ \chi, \quad (2.236)$$

où $\chi : \Omega \setminus \sigma \rightarrow D$ est une application quasi-conforme satisfaisant

² Ω étant des deux côtés de σ , les points de $\tilde{\sigma}$ sont identifiés aux limites de suites d'un côté de Ω qui convergent vers un point de σ , à l'exception des extrémités. Ce procédé permet donc de compactifier $\overline{\Omega} \setminus \sigma$.

³ C'est-à-dire, $\tilde{d}(x, y)$ est l'infimum des longueurs de tous les chemins dans $\tilde{\Omega}$ joignant x à y .

$$|\chi(x) - \chi(y)| \leq C(\tilde{d}(x, y))^\alpha, \quad x, y \in \Omega \setminus \sigma \quad (2.237)$$

$$|\chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad x, y \in D, \quad (2.238)$$

$D = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ et $F = U + iV$ est holomorphe dans D . La constante α vérifie $0 < \alpha < 1$ et dépend seulement des données.

Preuve de la Proposition 2.93. a) Si χ et F sont comme dans le dernier lemme $V = v \circ \chi^{-1} = \Im F$ est alors la solution variationnelle du problème aux limites,

$$\begin{cases} \Delta V = 0, & \text{dans } B_2 \setminus \overline{B_1}, \\ V = \text{constante}, & \text{sur } \partial B_1, \\ V = \Psi \circ \chi^{-1}, & \text{sur } \partial B_2, \\ \int_{\partial B_2} \nabla V \cdot \nu = 0. \end{cases} \quad (2.239)$$

Les conditions aux bords dans le problème aux limites (2.239) sont les traces de fonctions de $H^1(B_2 \setminus \overline{B_1})$. Elles sont donc hölderiennes et par suite, d'après les résultats de régularité elliptique (voir par exemple D. Gilbarg et N.S. Trudinger [GT]), V satisfait une estimation hölderienne sur $\overline{B_2} \setminus B_1$, avec des constantes dépendantes uniquement des données. Ceci et (2.238) prouvent (2.234).

b) Puisque U est la conjuguée de $-V$, une utilisation locale du théorème de Privaloff (voir l'énoncé ci-dessous) montre que U est hölderienne dans \overline{D} . Mais $u = U \circ \chi$. D'où (2.235) est une conséquence de (2.237).

Théorème 2.95. (Privaloff) Soit $h = \lambda + i\nu$ une fonction holomorphe dans $|z| < 1$. Si λ est continue dans $|z| \leq 1$ et vérifie

$$|\lambda(z_1) - \lambda(z_2)| \leq K|z_1 - z_2|^\alpha, \quad |z_1| = |z_2| = 1,$$

pour une certaine constante K , alors

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq CK|z_1 - z_2|^\alpha, \quad |z_1|, |z_2| \leq 1.$$

Ici C est une constante qui ne dépend que de α .

Le lecteur trouvera une démonstration de ce théorème dans [BJS].

c) La preuve repose sur deux lemmes.

Lemme 2.96. u et v n'ont pas de points critiques géométriques dans $\Omega \setminus \sigma$ et ont exactement deux points critiques géométriques distincts, d'indice 1, sur $\tilde{\sigma}$.

La preuve est assez technique et fait référence à divers résultats intermédiaires. Nous renvoyons le lecteur à A. Alessandrini et L. Rondi [AR] et ses références pour de plus amples détails.

Soient $m = \min_\Gamma \Psi$, $M = \max_\Gamma \Psi$ et $c = v|_\sigma$. Notons que, d'après le principe du maximum, $m < c < M$.

Lemme 2.97. *Pour tout $t \in (m, M)$, $t \neq c$, la ligne de niveau $\{z \in \Omega \setminus \sigma; v(z) = t\}$ est composée d'une courbe simple γ_t joignant les deux composantes connexes de $\{z \in \Gamma; \Psi(t) = t\}$.*

La ligne de niveau $\{z \in \Omega \setminus \sigma; v(z) = c\}$ est composée de deux courbes simples γ_c^1 et γ_c^2 , chacune joignant σ à l'une des deux composantes connexes $\{z \in \Gamma; \Psi(t) = c\}$. De plus les deux extrémités de γ_c^1 et γ_c^2 dans $\tilde{\sigma}$ sont les deux points critiques, distincts, de v sur $\tilde{\sigma}$.

Preuve. v étant continue (voir Proposition 2.93 a)), un simple argument de connexité permet de déduire que, pour tout $t \in (m, M)$, les extrémités de $\{z \in \Omega \setminus \sigma; v(z) = t\}$ dans $\Gamma \cup \tilde{\sigma}$ appartiennent à $\{z \in \Gamma; \Psi(t) = t\}$ si $t \neq c$, et à $\{z \in \Gamma; \Psi(t) = t\} \cup \tilde{\sigma}$ si $t = c$.

Soient $t \neq c$ et $z_0 \in \Omega \setminus \sigma$ tel que $v(z_0) = t$. Par le Lemme 2.96, v n'a pas de points critiques géométriques dans $\Omega \setminus \sigma$. Par suite, d'après le principe du maximum, la composante connexe γ_t de $\{z \in \Omega \setminus \sigma; v(z) = t\}$ contenant z_0 est une courbe simple ayant des extrémités dans Γ . De nouveau, le principe du maximum permet de conclure que $v \neq t$ en dehors de γ_t . Les mêmes arguments s'appliquent pour le cas $t = c$. Nous trouvons qu'il existe deux courbes simples γ_c^1 et γ_c^2 dans $\Omega \setminus \sigma$, chacune joignant σ à l'une des deux composantes connexes de $\{z \in \Gamma; \Psi(t) = c\}$. Ces deux courbes déconnectent $\Omega \setminus \sigma$ et, par le principe du maximum, elles constituent une partition de $\{z \in \Omega \setminus \sigma; v(z) = c\}$. Pour terminer, nous notons que les extrémités de $\{z \in \Omega \setminus \sigma; v(z) = c\}$ dans $\tilde{\sigma}$ sont exactement les deux points critiques de v sur $\tilde{\sigma}$. \square

Pour montrer c), il nous suffit de vérifier que f est une bijection de $\Omega \setminus \sigma$ sur $f(\Omega \setminus \sigma)$. Nous utilisons les notations précédentes. Soient $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ les deux courbes simples qui forment $\tilde{\sigma} \setminus \{P_1, P_2\}$, où P_1 et P_2 sont les deux points critiques de u sur $\tilde{\sigma}$. En utilisant le fait que u n'a pas de points critiques géométriques dans $\Omega \setminus \sigma$, nous déduisons que u est strictement croissante le long des courbes $\gamma_c^1 \cup \gamma_c^2 \cup \tilde{\sigma}_i$, $i = 1, 2$. De même pour $t \in (m, M)$, $t \neq c$, u est strictement croissante le long de γ_t . Par suite, pour tout $\zeta = s + it \in f(\Omega \setminus \sigma)$, il existe un unique $z \in \Omega \setminus \sigma$ tel que $u(z) = t$ et $v(z) = s$. \square

Nous normalisons maintenant v et v' de telle sorte qu'elles aient la même valeur Ψ sur Γ . Nous introduisons

$$\Phi : \Omega \setminus (\sigma \cup \sigma') \rightarrow \mathbb{C} : \Phi = W + iZ = u - u' + i(v - v').$$

Par hypothèse Z est identiquement nulle et $|W| \leq \sqrt{2}\epsilon$ sur Σ . D'autre part, de a) et b) de la Proposition 2.93, nous déduisons que Φ est bornée :

$$|\Phi| \leq C, \quad z \in \Omega \setminus (\sigma \cup \sigma').$$

De plus Z est hölderienne sur $\overline{\Omega}$. Par conséquence, Φ satisfait au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}}\Phi = \mu\partial_z\Phi + \nu\overline{\partial_z\Phi}, & \text{dans } \Omega \setminus (\sigma \cup \sigma'), \\ |\Phi| \leq \sqrt{2}\epsilon, & \text{sur } \Sigma, \\ \Im\Phi = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $|\mu| + |\nu| \leq k < 1$.

Proposition 2.98. *Z vérifie l'estimation*

$$|Z(z)| \leq \eta(\epsilon), \quad z \in \overline{\Omega}, \quad (2.240)$$

où η est une fonction positive, définie sur $(0, +\infty)$, qui satisfait à

$$\eta(\epsilon) \leq C(\ln |\ln \epsilon|)^{-\gamma} \epsilon, \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{e}, \quad (2.241)$$

où γ est une constante positive qui ne dépend que des données.

Nous donnons les grandes lignes de la preuve de cette proposition un peu plus loin.

Nous obtenons le Théorème 2.92 comme conséquence de la dernière proposition et de celle que nous énonçons maintenant.

Proposition 2.99. *Sous les hypothèses du Théorème 2.92, à l'exception de (2.230), pour un choix approprié des constantes a et b, l'estimation*

$$\max_{i=1,2} \|v_i - v'_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \eta$$

entraîne

$$d_H(\sigma, \sigma') \leq C\eta^\kappa,$$

avec κ une constante positive ne dépendant que des données.

Preuve. D'après le Lemme 2.94, nous avons

$$f = F \circ \chi,$$

où $F = U + iV$ est une fonction holomorphe dans $D = B_2 \setminus \overline{B_1}$.

Notons $D_d = B_{2-d} \setminus \overline{B_{1+d}}$, $d > 0$. Nous utilisons le

Lemme 2.100. *Nous avons l'estimation*

$$|F'(z)| \geq C(d)|z - \zeta_1||z - \zeta_2|, \quad \text{pour tout } z \in D_d, \quad (2.242)$$

où ζ_1 et ζ_2 sont les images par χ est deux points critiques de u .

Preuve. F étant hölderienne dans D^4 , $|F| \leq C$ dans D . D'après (2.228), il existe d_1 assez petit pour lequel

⁴ En fait c'est une extension de F , encore notée F , qui est hölderienne. Cette extension est donnée par

$$F(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + 2ic, \quad z \in B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}},$$

$$c = v|_\sigma = V|_{\partial B_1}.$$

$$\operatorname{osc}_{\partial D_d} V \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ pour tout } 0 < d \leq d_1. \quad (2.243)$$

Nous utilisons les intégrales de Cauchy qui expriment F' en fonction de F et le fait que $|F| \leq C$ dans D pour conclure

$$|F'| \leq \frac{C}{d} \text{ pour tout } z \in D_{\frac{d}{2}}. \quad (2.244)$$

Posons $\phi = \ln \frac{|F'|}{|z-\zeta_1||z-\zeta_2|}$. ϕ est alors harmonique dans D et donc, d'après le Théorème 1.36 (inégalité de Harnack) appliquée à $M - \phi$, avec $M = \sup_{D_{\frac{d}{2}}} \phi$, nous déduisons

$$\sup_{D_d} (M - \phi) \leq c \inf_{D_d} (M - \phi),$$

où c dépend seulement de R et d . D'où

$$\inf_{D_d} \phi \geq M - c(M - \sup_{D_d} \phi). \quad (2.245)$$

Nous avons $\operatorname{osc}_{\partial D_d} V \leq C \max_{D_d} |F'|$ et donc

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq C \max_{D_d} |F'| \leq C \max_{D_d} e^\phi \leq C e^{\max_{D_d} \phi}$$

par (2.243). Ceci entraîne alors

$$\max_{D_d} \phi \geq C, \text{ pour tout } 0 < d \leq d_1.$$

Par suite,

$$M \geq C, \text{ pour tout } 0 < d \leq d_1. \quad (2.246)$$

D'autre part, comme $|z - \zeta_i| \geq d$ si $z \in D_d$, nous déduisons de (2.244)

$$\phi(z) \leq C \ln\left(\frac{1}{d}\right), \quad z \in D_d \text{ et } 0 < d \leq d_1.$$

Par conséquence,

$$M - \sup_{D_d} \phi = \sup_{D_{\frac{d}{2}}} \phi - \sup_{D_d} \phi \leq C \ln\left(\frac{1}{d}\right), \quad 0 < d \leq d_1. \quad (2.247)$$

Finalement, (2.245), (2.246) et (2.247) nous donnent

$$\inf_{D_d} \phi \geq C(d).$$

D'où le résultat. \square

Maintenant, quitte à intervertir les rôles de σ et σ' , nous pouvons toujours supposer qu'il existe $z_0 \in \sigma' \setminus \sigma$ tel que $p = \operatorname{dist}(z_0, \sigma) = d_H(\sigma, \sigma') > 0$. Par hypothèse, il existe une constante C_0 , ne dépendant que des données, telle que

$$B_{\frac{p}{C_0}}(z_0) \subset \Omega_{\frac{\delta}{2}} \setminus \sigma,$$

et, pour tout $r \leq \frac{p}{2C_0}$, il existe $z_1 \in \sigma'$ tel que $|z_1 - z_0| = r$.

Si α_1 est la constante de Hölder de χ^{-1} , alors nous montrons facilement que, pour tout $w \in \chi(B_{\frac{p}{C_0}}(z_0))$, $\text{dist}(w, \partial B_R) \geq C_1 \delta^{\frac{1}{\alpha_1}}$. De même, en utilisant le fait que χ et χ^{-1} sont hölderiennes, nous trouvons qu'il existe des constantes E_0, E_1, α_2 et α_3 telles que $B_{E_0 p^{\alpha_2}}(z_0) \subset B_{\frac{p}{2C_0}}(z_0)$ et $\chi(B_{E_0 p^{\alpha_2}}(z_0))$ est contenue dans une boule B centrée en $\chi(z_0)$ telle que pour tout $w \in B$, nous avons $\text{dist}(w, \partial B_1) \geq E_1 p^{\alpha_3}$.

Soit $z_1 \in \sigma' \cap \partial B_{E_0 p^{\alpha_2}}(z_0)$, nous avons

$$|f(z_0) - f(z_1)| = |F(\chi_0(z_0)) - F(\chi_0(z_1))|.$$

Comme $|\chi(z_0) - \chi(z_1)| \geq E_2 p^\alpha$, nous avons d'après le dernier lemme

$$|F(\chi_0(z_0)) - F(\chi_0(z_1))| \geq C_2 p^{\alpha_5}. \quad (2.248)$$

Nous choisissons a et b telles que

$$au_1(z_0) + bu_2(z_0) = au_1(z_1) + bu_2(z_1).$$

C'est-à-dire

$$u(z_0) = u(z_1). \quad (2.249)$$

Par (2.248), f vérifie l'estimation

$$C_2 p^{\alpha_5} \leq |f(z_0) - f(z_1)|, \quad (2.250)$$

et, par (2.249), $|f(z_0) - f(z_1)| = |v(z_0) - v(z_1)|$. Comme $z_0, z_1 \in \sigma'$, $v'(z_0) = v'(z_1)$. Par suite,

$$|f(z_0) - f(z_1)| \leq 2\eta. \quad (2.251)$$

D'une combinaison de (2.250) et (2.251) nous tirons

$$p = d_H(\sigma, \sigma') \leq C_3 \eta^{\frac{\beta}{5}},$$

ce qui achève la démonstration. \square

Preuve de la Proposition 2.98. (les grandes lignes) Nous introduisons dans un premier temps la notion de h -tube. Si $z_0 \in \Sigma$, soit l la bissectrice d'un secteur angulaire S , de sommet z_0 et dont l'angle d'ouverture dépend de M seulement. Des hypothèses faites sur Γ , nous déduisons que $\text{dist}(z, \Gamma) \geq \tilde{M}|z - z_0|$, pour tout $z \in l$, où $\tilde{M} < 1$ est une constante qui ne dépend que de M .

Soit γ une courbe régulière, contenue dans $\Omega \setminus (\sigma \cup \sigma')$, d'extrémité $z_0 \in \sigma$ telle que γ coïncide avec l pour une longueur au moins égale à h . Donc les points de $\gamma \setminus l$ sont à une distance de Γ supérieur ou égale à $\tilde{M}h$. Pour une

telle courbe, nous lui associons un h -tube, notée γ_h , comme étant l'ensemble des points $z \in \Omega$ tels que $\text{dist}(z, \gamma) < h$.

Un point est dit h -accessible s'il appartient à la fermeture d'un h -tube contenu dans $\Omega \setminus (\sigma \cup \sigma')$. L'ensemble des points h -accessibles est noté G_h .

Nous appliquons le Théorème 2.91 pour l'intérieur des domaines γ_h pour avoir, avec $\omega = \omega(\Sigma \cap \partial\gamma_h, \gamma_h, \mathcal{L}_A)$,

$$|\Phi(z)| \leq C^{1-\omega(z)}(\sqrt{2}\epsilon)^{\omega(z)}, \quad z \in \gamma_h$$

et donc

$$|Z(z)| \leq C\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\omega(z)}, \quad z \in \gamma_h.$$

Un point technique important, qui est essentiellement fondé sur l'inégalité de Harnack, consiste à trouver une minoration de ω (voir la preuve du lemme 3.7 de [Al1]). Plus précisément, nous obtenons : si $h_0 > 0$, il existe D , qui ne dépend que des données et de h_0 , telle que pour tout $0 < h \leq h_0$,

$$|Z(z)| \leq C_0\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\exp(-\frac{D}{h^2})}, \quad z \in G_h. \quad (2.252)$$

Nous allons étendre cette estimation à $\overline{\Omega}$. Si β est la constante de Hölder de v et v' , nous posons

$$\eta(h) = h^\beta + \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\exp(-\frac{D}{h^2})}. \quad (2.253)$$

Notons $c = v|_\sigma$ et $c' = v'|_\sigma$ et fixons $0 < h < h_0 = \frac{L}{4}$. Supposons dans un premier temps que $G_h \neq \overline{G}$, où G est la composante connexe de $\overline{\Omega} \setminus (\sigma \cup \sigma')$ contenant Γ . Alors, il existe (d'après le Lemme 3.6 de [Al1]) $w \in G_h \cap \sigma$ et $w' \in G_h \cap \sigma'$ tels que $|w - w'| \leq 2h$. Nous avons

$$|c - c'| = |v(w) - v'(w')| \leq |v(w) - v(w')| + |Z(w')|.$$

Ceci et (2.252) impliquent

$$|c - c'| \leq C\eta(h). \quad (2.254)$$

Soit $Q_h = \Omega \setminus G_h$. Comme $v - c'$ vérifie la même équation que v sur $Q_h \setminus \sigma$, le principe du maximum nous donne

$$\begin{aligned} \max_{Q_h} |v - c'| &\leq \max_\sigma |v - c'| + \max_{\partial Q_h} |v - c'| \\ &\leq |c - c'| + \max_{\partial Q_h} |v - c'|. \end{aligned}$$

Notons que $\partial Q_h \subset \partial G_h$ et que pour tout $z \in \partial Q_h$, soit $\text{dist}(z, \sigma) \leq h$, ou bien $\text{dist}(z, \sigma') \leq h$ (car sinon z serait un point de l'intérieur de G_h). Dans chacun des cas, nous avons

$$|v(z) - c'| \leq C(h_0)h^\beta + |c - c'|, \quad \text{pour tout } z \in \partial Q_h.$$

Nous en déduisons

$$\max_{Q_h} |v - c'| \leq C(h_0)h^\beta + 2|c - c'|.$$

De manière similaire, nous avons aussi

$$\max_{Q_h} |v' - c| \leq C(h_0)h^\beta + 2|c - c'|.$$

Par conséquence

$$\max_{Q_h} |Z| \leq 2C(h_0)h^\beta + 5|c - c'|.$$

Cette estimation et (2.254) entraînent

$$\max_{\overline{\Omega}} |Z| \leq C\eta(h). \quad (2.255)$$

Cette estimation est encore valable quand $G_h = \overline{G}$. En effet, si $Q = \Omega \setminus G$ est vide, alors (2.255) est une conséquence immédiate de (2.252). Sinon, Q est non vide et dans ce cas ∂Q est composé d'arcs dans σ et σ' . Puisque σ et σ' sont simples, il existe au moins $z_0 \in \sigma \cap \sigma' \cap \partial Q$. De la même manière que nous l'avons fait plus haut avec v et v' , nous montrons

$$|c - c'| \leq C\eta(h).$$

De même, comme ci-dessus, nous déduisons de cette estimation

$$\max_{\partial Q \cap \sigma} |v' - c|, \max_{\partial Q \cap \sigma'} |v - c'| \leq C\eta(h).$$

En utilisant le fait que $v' - c$ (resp. $v - c'$) vérifie la même équation que v' (resp. v) sur $Q \setminus \sigma'$ (resp. $Q \setminus \sigma$), le principe du maximum et (2.255), nous trouvons

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} |Z| &\leq \max_{\overline{G}} |Z| + \max_{\overline{Q}} |Z| \\ &\leq \max_{\overline{G}} |Z| + \max_{\overline{Q}} |v' - c| + \max_{\overline{Q}} |v - c'| + |c - c'| \\ &\leq C\eta(h). \end{aligned}$$

Pour terminer nous allons minimiser dans $\eta(h)$ dans (2.255) par rapport à h . Nous posons

$$h(\epsilon) = \left(\frac{2D}{\ln \ln \frac{C}{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si ϵ est assez petit, $0 < \epsilon < \epsilon_1$, $h(\epsilon) \leq h_0$. Nous obtenons, en faisant $h = h(\epsilon)$ dans (2.255),

$$\max_{\overline{\Omega}} |Z| \leq C_1 \left[\left(\ln \ln \frac{C}{\epsilon} \right)^{-\frac{\beta}{2}} + \exp \left(- \left(\ln \frac{C}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right].$$

Or le second terme du membre de droite est d'ordre plus élevé quand $\epsilon \rightarrow 0$. D'où

$$\max_{\overline{\Omega}} |Z| \leq C_2 \left(\ln \ln \frac{C}{\epsilon} \right)^{-\frac{\beta}{2}},$$

ce qui termine la preuve. \square

Ce sous-paragraphe est préparé à partir de [AR]. Le lecteur trouvera une généralisation aux cas d'un nombre fini de fissures dans la thèse de L. Rondi [Ro1]. Le module de continuité, qui est de type log-log, dans le Théorème 2.92 n'est pas optimal dans le cas d'une fissure qui a une régularité meilleure que Lipschitz. L. Rondi a établi dans [Ro2] un résultat de stabilité avec un module de continuité de type log, pour une fissure (ou un nombre fini de fissures) de classe $C^{1,\alpha}$.

2.6.3 Points conductifs et points de capacité

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Comme dans [BB], pour $F \subset \overline{\Omega}$, nous définissons

$$H_{cond,F}^1(\Omega) = \overline{\{u \in H^1(\Omega); \text{ il existe } \epsilon > 0, \nabla u = 0 \text{ p.p. dans } F^\epsilon \cap \Omega\}}^{H^1(\Omega)},$$

où, pour $\epsilon > 0$, $F^\epsilon = \cup_{x \in F} B_\epsilon(x)$.

Soit U un ouvert de Ω . Nous dirons que $x \in \partial U$ est conductif pour U si pour tout $r > 0$ et pour toute fonction $\varphi \in C(\overline{U}) \cap H_{cond,\partial U \cap B_r(x)}^1(\Omega)$

$$\liminf_{y \in \partial U, y \rightarrow x} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x)|}{|y - x|} = 0.$$

Lemme 2.101. *Soient K un compact de Ω tel que $\Omega \setminus K$ est connexe. Alors pour tout $x \in \partial(\Omega \setminus K)$, pour lequel il existe un continuum de diamètre positif U_x tel que $x \in U_x \subset K$, est un point conductif pour $\Omega \setminus K$.*

Ce lemme nous dit qu'en particulier, si K est un continuum de diamètre positif alors tout point de $\partial(\Omega \setminus K)$ est conductif. Aussi, si K est un compact ayant un nombre fini de composantes connexes, alors $\Omega \setminus K$ est conductif quasi-partout en les points de sa frontière (à l'exception de ces points isolés).

Nous donnons l'exemple d'un point non conductif quand $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Si

$$K = \{(0, 0)\} \cup \left(\cup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \times \left[0, \frac{1}{n} \right] \right) \right),$$

alors $(0, 0)$ n'est pas un point conductif pour $\Omega \setminus K$ (voir [BB] pour une preuve).

Rappelons que la capacité d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\text{cap}(E) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \varphi|^2 + |u|^2; \varphi \in \mathcal{U}_E \right\},$$

où \mathcal{U}_E est l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \geq 1$ dans un voisinage de E .

Soit K un compact de Ω . Un point $x \in K$ est un point de capacité pour K si pour tout $r > 0$, $\text{cap}(B_r(x) \cap K) > 0$.

Nous avons

Lemme 2.102. K^* , l'ensemble des points de capacités d'un compact K , est compact et $\text{cap}(K \setminus K^*) = 0$.

Il existe des points conductifs qui ne sont pas contenus dans un continuum de capacité positive. En voici un exemple : soient $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$ et

$$K = \{(0, 0)\} \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} \left(\{b_n\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right] \right) \right),$$

où, $b_n = \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$. Nous pouvons démontrer (voir [BB] pour les détails) que $(0, 0)$ est un point conductif de $\Omega \setminus K$ qui n'est pas contenu dans un continuum de K de capacité positive.

2.6.4 Unicité de la détermination de fissures irrégulières

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . Nous posons

$$\mathcal{L}^{1,2}(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega); \nabla \varphi \in L^2(\Omega)^2\}$$

et nous introduisons la relation d'équivalence

$$\varphi \mathcal{R} \phi \text{ si } \int_{\Omega} |\nabla(\varphi - \phi)|^2 dx = 0.$$

Nous définissons l'espace de Deny-Lions $L^{1,2}(\Omega) = \mathcal{L}^{1,2}(\Omega)/\mathcal{R}$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\varphi, \phi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \phi dx.$$

Si Ω est un ouvert de frontière lipschitzienne, $L^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Mais il peut arriver, pour un Ω non régulier, que $H^1(\Omega)$ soit inclus strictement dans $L^{1,2}(\Omega)$.

Pour $K \subset \Omega$ compact, nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \setminus K, \\ \partial_{\nu} u = 0, & \text{sur } \partial K, \\ \partial_{\nu} u = \psi, & \text{sur } \Gamma = \partial \Omega, \end{cases} \quad (2.256)$$

où $\psi \in L^2(\Gamma)$ vérifie $\int_{\Omega} \psi = 0$.

De manière tout à fait standard (formulation variationnelle et application du théorème de Lax-Milgram), il n'est difficile de démontrer que (2.257) admet une unique solution $u_{\psi,K} \in L^{1,2}(\Omega \setminus K)$, qui est solution du problème de minimisation

$$\min_{\varphi \in L^{1,2}(\Omega \setminus K)} \left[\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Gamma} \varphi \psi \right].$$

D'après une version un peu plus général du Théorème 2.87 (voir [BrV] ou [ADiV]), $u_{\psi,\bar{K}^\epsilon}$ admet une fonction courant associée. Ceci et la

Proposition 2.103. $\nabla u_{\psi,\bar{K}^\epsilon} \chi_{\Omega \setminus \bar{K}^\epsilon} \rightarrow \nabla u_{\psi,K} \chi_{\Omega \setminus K}$ dans $L^2(\Omega)^2$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

impliquent que $u_{\psi,K}$ admet une fonction courant associée (qui est en l'occurrence une conjuguée harmonique), que nous notons $v_{\psi,K}$ (une démonstration de la Proposition 2.103 est donnée dans [BB]), avec Ψ une primitive de ψ , considérée comme fonction de l'abscisse curviligne. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $v_{\psi,K}$ est solution du problème de minimisation

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2; \varphi \in H_{\text{cond},K}(\Omega), \varphi = \Psi \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Nous énonçons maintenant le résultat principal de ce sous-paragraphe. Nous supposons que ψ_1 et ψ_2 sont comme dans le sous-paragraphe 2.6.2 : nous décomposons Γ en trois arcs simples γ_0 , γ_1 et γ_2 , dont les intersections, deux à deux, des intérieurs sont vides. Fixons trois fonctions η_0 , η_1 et η_2 dans $L^2(\Gamma)$ telles que, pour $j = 0, 1, 2$,

$$\eta_j \geq 0, \text{ supp}(\eta_j) \subset \gamma_j$$

et posons

$$\psi_1 = \eta_0 - \eta_1, \psi_2 = \eta_0 - \eta_2.$$

Nous avons donc

$$\int_{\partial\Omega} \psi_j = 0, j = 1, 2.$$

Pour $j = 1, 2$, Ψ_j désignera une primitive de ψ_j par rapport à la variable curviligne (noter que Ψ_1 et Ψ_2 ne sont définies qu'à une constante additive près).

Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous posons

$$u_i = u_{\psi_i,K}, \tilde{u}_i = u_{\psi_i,\tilde{K}}, v_i = v_{\psi_i,K} \text{ et } \tilde{v}_i = v_{\psi_i,\tilde{K}} \quad i = 1, 2.$$

Théorème 2.104. Soient K et \tilde{K} deux compacts de Ω tels que $\Omega \setminus K$ et $\Omega \setminus \tilde{K}$ sont connexes. Supposons que $u_{\psi_i,K} = u_{\psi_i,\tilde{K}}$ sur Γ , $j = 1, 2$ et que $\Omega \setminus K$, $\Omega \setminus \tilde{K}$ sont conductifs q.p. sur leur frontière. Alors $K = \tilde{K}$ q.p..

Preuve. Nous raisonnons par l'absurde. Plus précisément, nous montrons que si $K \neq \tilde{K}$ alors il existe deux réels α et β , avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, tels que $f = \alpha(u_1 + iv_1) + \beta(u_2 + iv_2)$ admet un point critique géométrique dans $\Omega \setminus K$. Mais vu les hypothèses faites sur les ψ_i , ceci est en contradiction avec le fait que f n'a pas de points critiques dans $\Omega \setminus K^5$.

Soit G la composante connexe de $\Omega \setminus (K \cup \tilde{K})$ telle que $\partial G \supset \partial \Omega$. D'après le Corollaire 1.38 (l'unicité du prolongement), $u_j = \tilde{u}_j$, $j = 1, 2$ sur G .

Maintenant, la difficulté est de propager l'information de G à $\Omega \setminus (K \cup \tilde{K})$.

Supposons que $\Omega \setminus K \neq \Omega \setminus \tilde{K}$, par exemple $\Omega \setminus K \not\subset \Omega \setminus \tilde{K}$. Il existe alors $x \in \Omega \setminus K$ tel que $x \notin \Omega \setminus \tilde{K}$, c'est-à-dire $x \in \tilde{K}$ et $x \in \Omega \setminus K$. Comme $\Omega \setminus K$ est connexe et Γ est régulier, il existe une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega} \setminus K$ telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma((0, 1)) \subset \Omega$ et $\gamma(1) \in \Gamma$. Soit $x_0 = \gamma(t_0)$, où

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in \tilde{K}\}.$$

Clairement $x_0 \in \partial \tilde{K} \cap \partial G$. Puisque $x_0 \notin K$, il existe $B_r(x_0)$ telle que $B_r(x_0) \cap K = \emptyset$.

Pour poursuivre la preuve, nous avons besoin du

Lemme 2.105. *Pour tout $\delta > 0$, G a un point conducteur sur $\partial G \cap \partial B_\delta(x_0)$.*

Nous donnons la preuve de ce lemme après celle du Théorème 2.104.

Soit $x^* \in \partial G \cap B_r(x_0)$ un point conducteur donné par le dernier lemme. Quitte à faire une translation par une constante, nous pouvons supposer que $u_j(x_0) = v_j(x_0) = 0$, $j = 1, 2$. La fonction $|\tilde{v}_1| + |\tilde{v}_2|$ appartient à $H^1_{\text{cond}, \tilde{K}}(\Omega)$ et est égale à $|v_1| + |v_2|$ dans Ω . Cette dernière étant continue dans un voisinage de x^* , nous pouvons appliquer la propriété de conductivité de $|v_1| + |v_2|$ en x^* . Il existe donc (x_n) une suite de points de ∂G qui converge vers x^* et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|v_1(x_n)| + |v_2(x_n)|}{|x_n - x^*|} = 0.$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_j(x_n)}{|x_n - x^*|} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.257)$$

Pour chaque n , nous choisissons α_n et β_n telles que $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$ et

$$\alpha_n u_1(x_n) + \beta_n u_2(x_n) = 0. \quad (2.258)$$

⁵ La démonstration de ce fait est comme suit : on montre d'abord que f n'a pas de points critiques sur $\Omega \setminus K^\epsilon$. Ensuite un résultat de continuité des points critiques (Proposition 2.6 de [AM2]) permet d'affirmer que f n'a pas de points critiques dans $\Omega \setminus K$.

En extrayant si nécessaire une sous-suite, nous supposons que α_n et β_n convergent respectivement vers α^* et β^* . Posons

$$f_n = \alpha_n(u_1 + iv_1) + \beta_n(u_2 + iv_2)$$

et

$$f^* = \alpha^*(u_1 + iv_1) + \beta^*(u_2 + iv_2).$$

De (2.257) et (2.258), nous tirons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x_n) - f_n(x^*)}{|x_n - x^*|} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^*(x_n) - f^*(x^*)}{|x_n - x^*|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x_n) - f_n(x^*)}{|x_n - x^*|} \\ &= -\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n - \alpha^*) \frac{u_1(x_n) + iv_1(x^*)}{|x_n - x^*|} \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n - \beta^*) \frac{u_2(x_n) + iv_2(x^*)}{|x_n - x^*|} = 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n - \alpha^*) \frac{u_1(x_n) + iv_1(x^*)}{|x_n - x^*|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n - \beta^*) \frac{u_2(x_n) + iv_2(x^*)}{|x_n - x^*|} = 0$$

car $u_j + iv_j$, $j = 1, 2$, est holomorphe dans un voisinage de x^* (noter que $(u_j + iv_j)(x_0) = 0$, $j = 1, 2$). En d'autres termes, f^* admet en x^* un point critique géométrique, ce qui termine la preuve. \square

Preuve du Lemme 2.105. Pour $\epsilon > 0$, soit V_ϵ un ouvert polygonal tel que

$$\tilde{K}^{\frac{\epsilon}{2}} \subset V_\epsilon \subset \tilde{K}^\epsilon.$$

Soit U_ϵ la composante connexe de V_ϵ contenant x_0 . Choisissons alors une suite (ϵ_n) convergeant vers 0 telle que $\epsilon_{n+1} < \frac{\epsilon_n}{2}$. Donc $U_{\epsilon_{n+1}} \subset U_{\epsilon_n}$.

Nous considérons séparément les cas (a) $\text{diam}(U_\epsilon) \rightarrow 0$ et (b) $\text{diam}(U_\epsilon) \rightarrow \eta > 0$.

Pour le cas (a), nous avons $U_{\epsilon_n} \subset B_{\frac{\epsilon_n}{2}}$ pour n assez grand. Soit A_n la composante connexe de $\Omega \setminus \overline{U_{\epsilon_n}}$ telle que $\Gamma \subset \partial A_n$, et $P_n = \partial A_n \setminus \Gamma$. P_n est donc une courbe de Jordan polygonale qui sépare Ω en deux régions. Notons que $P_n \subset \Omega \setminus (K \cup \tilde{K})$ car $P_n \cap K = \emptyset$ ($P_n \subset \overline{B_{\frac{\epsilon_n}{2}}}(x_0)$) et $P_n \cap \tilde{K} = \emptyset$ ($P_n \subset \partial U_{\epsilon_n}$ et $d(\partial U_{\epsilon_n}, \tilde{K}) = \frac{\epsilon_n}{2}$). Comme P_n intersecte γ et que γ est dans G , la connexité de G implique que P_n est entièrement dans G . Par suite, pour ρ assez petit, nous avons

$$G \cap B_\rho(x_0) = (\Omega \setminus \tilde{K}) \cap B_\rho(x_0)$$

et

$$\partial G \cap B_\rho(x_0) = \partial(\Omega \setminus \tilde{K}) \cap B_\rho(x_0).$$

Si x_0 est lui même un point conducteur, la preuve est terminée. Sinon, x_0 étant un point de capacité pour ∂G (voir [Bu]) et puisque l'ensemble des points de ∂G qui ne sont pas conductifs est de capacité zéro par hypothèse, $\partial G \cap B_\rho(x_0)$ contient un point conducteur (noter que, localement, ∂G coïncide avec $\partial(\Omega \setminus \tilde{K})$).

Pour le cas (b), puisque $\text{diam}(U_\epsilon) \rightarrow \eta > 0$, $\cap_n U_{\epsilon_n} = C$, où C est un continuum tel que $x_0 \in C \subset \tilde{K}$ et $\text{diam}(C) = \eta$. Pour $0 < \rho < \frac{\eta}{2}$, nous avons alors $C \cap \partial B_\rho(x_0) \neq \emptyset$. Soit de nouveau A_n la composante connexe de $\Omega \setminus \overline{U}_{\epsilon_n}$ telle que $\partial\Omega \subset \partial A_n$, et $P_n = \partial A_n \setminus \partial\Omega$. Donc P_n est une courbe de jordan polygonale vérifiant $P_n \cap \tilde{K} = \emptyset$. Soit $z_n = \gamma(t_n)$, avec

$$t_n = \min\{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in P_n\}.$$

La suite (z_n) est bien définie et converge vers x_0 .

Comme l'intérieur de P_n contient le continuum C , que $P_n \cap \tilde{K} = \emptyset$ et que $(P_n \cap B_\rho(x_0)) \cap K = \emptyset$, il existe F_n , une composante connexe de P_n , passant par z_n , contenue dans G et qui coupe $\partial B_\rho(x_0)$ au moins en deux points. Au sens de la distance de Hausdorff, F_n converge vers un continuum F qui contient x_0 et est contenue dans la frontière de G . D'après le Lemme 2.101, x_0 est un point conducteur pour G . \square

Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et
paraboliques

Choulli, M.

2009, XXII, 252 p., Softcover

ISBN: 978-3-642-02459-7