

Komplexe Zahlen und Geometrie

Bei aller Eleganz hat die Einführung von homogenen Koordinaten zunächst einen (scheinbaren) Nachteil. Es ist nicht offensichtlich, wie sich mittels homogener Koordinaten metrische Begriffe wie *Abstand*, *Winkel*, *Senkrecht stehen*, *Kreise* etc. übersichtlich und einfach ausdrücken lassen. Tatsächlich führt der Weg von projektiver Geometrie zurück zur Metrik nur über das Gebiet der komplexen Zahlen. Hier wollen wir zunächst die Aussagekraft komplexer Zahlen im Bereich metrischer Bedingungen betrachten. Hieraus werden wir später konkrete (projektive) Kriterien zum Abprüfen metrischer Eigenschaften einer Konfiguration herleiten.

6.1 Komplexe Zahlen

Die historischen Ursprünge komplexer Zahlen liegen eigentlich im Lösen von Polynomgleichungen. Obwohl komplexe Zahlen auch schon beim Lösen quadratischer Gleichungen ein nützliches Hilfsmittel sind, traten sie historisch erstmalig beim Lösen kubischer Gleichungen auf. Dort ist ein Verstehen der Lösungsgesamtheit (auch der rein reellen Lösungen) nur durch Einführung von komplexen Zahlen möglich. Diese Beobachtung wurde erstmalig von *Girolamo Cardano* (1501-1576) systematisch durchgeführt, wenngleich er nicht der erste war, der über einen Lösungsweg für kubische Gleichungen verfügte.

Wir wollen uns die Rolle der komplexen Zahlen zunächst am Beispiel quadratischer Gleichungen verdeutlichen. Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erhält man nach der bekannten p, q -Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

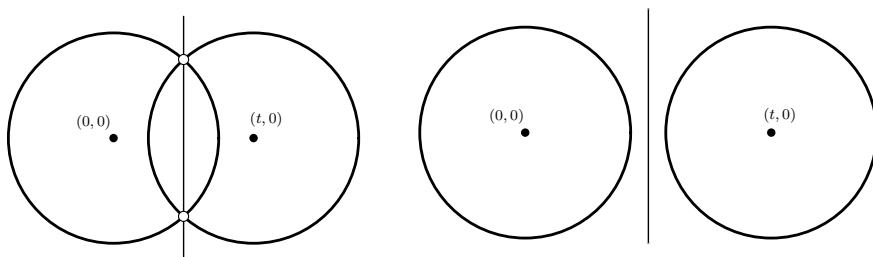


Abb. 6.1 Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte zweier Kreise ist immer reell, selbst wenn die Punkte komplex werden.

Reelle Lösungen existieren nur, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht-negativ ist. So hat z.B. die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung. Komplexe Zahlen erweitern nun den Bereich der reellen Zahlen durch Hinzunahme einer Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Die Zahl i ist quasi eine formale Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Natürlich hat die Zahl i keine Entsprechung auf der reellen Zahlengeraden, da das Produkt zweier reeller Zahlen immer positiv ist. Bis auf obige Regel erfolgt das Rechnen mit der *imaginären Einheit* i genauso wie mit jeder anderen Zahl. Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} ist nun die Menge aller Zahlen der Form $z = a + ib$, wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind. Die Wurzel einer negativen Zahl $-a$ ($a > 0$) ergibt sich als $\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}$. Hierbei ist die Mehrdeutigkeit des Ausdrucks $\pm i\sqrt{a}$ zu beachten. Es gibt zwei Zahlen, die mit sich selbst multipliziert die Zahl $-a$ ergeben.

Durch Hinzunahme der imaginären Einheit sind nun alle quadratischen Gleichungen formal lösbar geworden. So hat z.B. die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 13 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 2 + 3i$ und $x_2 = 2 - 3i$, wie man durch Einsetzen leicht nachrechnen kann.

$$(2 + 3i)(2 + 3i) - 4 \cdot (2 + 3i) + 13 = 4 + 12i + 9i^2 - 8 - 12i + 13 = 0$$

$$(2 - 3i)(2 - 3i) - 4 \cdot (2 - 3i) + 13 = 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13 = 0$$

Erstaunlicherweise hat man durch Einführung von komplexen Zahlen noch viel mehr gewonnen. *Im Bereich der komplexen Zahlen sind Polynomgleichungen beliebigen Grades immer lösbar.* Dies ist der berühmte “Fundamentalsatz der Algebra”. Der letztlich die überraschende Tatsache belegt, dass nur durch Erweiterung der Reellen Zahlen \mathbb{R} um die Lösung einer einzigen Gleichung $x^2 = -1$ und Hinzuziehen der üblichen Rechenregeln bereits alle Polynomgleichungen lösbar werden.

Aus der Tatsache, dass komplexe Zahlen beliebige Polynomgleichungen zu lösen vermögen, ergibt sich eine interessante Konsequenz für die Schnittverhältnisse in der Geometrie. Wir wollen uns dies am Beispiel von Kreisen

verdeutlichen. In den vorangegangenen Kapiteln haben wir unsere Geometrie derart erweitert, dass zwei beliebige verschiedene Geraden immer einen gemeinsamen Schnitt haben. Für Kegelschnitte (und insbesondere schon für Kreise) ist dies zunächst nicht notwendigerweise der Fall. Es ist einfach sich zwei Kreise vorzustellen, die keinen gemeinsamen Schnitt haben. An dieser Stelle kommen nun die komplexen Zahlen zur Hilfe. Sie helfen auch diese Situation in unsere Betrachtungen mit einzubeziehen.

Das Auffinden der Schnitte zweier Kreise ist nichts anderes als das Lösen einer quadratischen Gleichung. Dies kann man folgendermaßen einsehen: Wir betrachten im \mathbb{R}^2 eine Kreisgleichung. Diese hat die Form

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

oder ausmultipliziert und ein wenig umsortiert

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Wir können einen Kreis durch Angabe der Parameter $(a, b, c)^T$ charakterisieren. Angenommen wir haben zwei Kreise mit Parametern $(a_1, b_1, c_1)^T$ und $(a_2, b_2, c_2)^T$, die wir miteinander schneiden möchten. Ziehen wir die beiden zugehörigen Gleichungen voneinander ab, so heben sich die quadratischen Terme weg und wir erhalten die Geradengleichung.

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0.$$

Die Schnittpunkte der beiden Kreise müssen also auch auf dieser Geraden liegen. Sie hat die homogene¹ Koordinate $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)^T$. Schneiden dieser Geraden mit einem der beiden Kreise liefert die gesuchten Schnittpunkte. Scheiden einer Geraden mit einem Kreis entspricht aber dem Lösen einer quadratischen Gleichung und ist somit über den komplexen Zahlen immer durchführbar.

Unter Einbeziehung komplexer Zahlen finden wir somit *immer* Schnittpunkte. Es kann lediglich passieren, dass deren Koordinaten komplex werden. Betrachten wir beispielsweise ganz konkret den Schnitt des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ mit dem um einen Wert $2t$ in x -Richtung verschobenen Kreis $(x - 2t)^2 + y^2 = 1$. Als Lösung erhält man die beiden Schnittpunkte mit homogenen Koordinaten

$$(t, \sqrt{1 - t^2}, 1)^T \quad \text{und} \quad (t, -\sqrt{1 - t^2}, 1)^T.$$

Wird t grösser als 1, so wird die y -Koordinate der Punkte komplex. Bemerkenswerterweise ist die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte immer reell, wie man durch Ausrechnen des Kreuzproduktes leicht nachrechnen kann. Wir erhalten

¹ Auch in diesem Kapitel werden wir Äquivalenzklassen und Repräsentanten gleich bezeichnen.

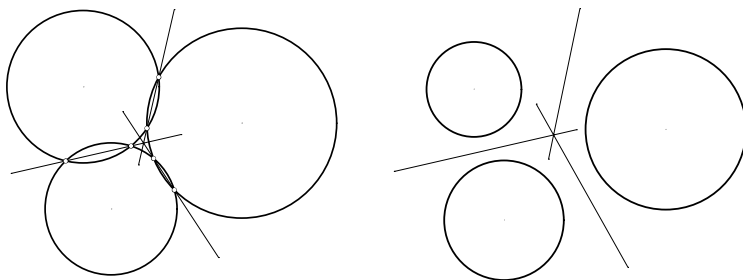


Abb. 6.2 : Gegeben seien drei Kreise. Für jedes Paar zieht man die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte. Die drei entstehenden Geraden sind reell und schneiden sich unabhängig davon, ob die Schnittpunkte reell oder komplex sind.

$$\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{1-t^2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{1-t^2} \\ 0 \\ -t\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} = \sqrt{1-t^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Der Vorfaktor, egal ob komplex oder reell, trägt nichts zur geometrischen Position der Geraden bei und wir erhalten genau die Mittelsenkrechte der beiden Kreismittelpunkte. Zwischenergebnisse können also komplex sein, obwohl davon abgeleitete Größen wieder reell werden können.

Mit dieser erweiterten Betrachtungsweise von Geometrie können wir abermals Sonderfälle (Kreise scheiden sich oder auch nicht) systematisch aus der Geometrie eliminieren und ein einheitliches algebraisches System schaffen. Als kleinen Vorgeschmack illustriert Abb. 6.2 (links) ein typisch Euklidisches Theorem, das auch noch seine Gültigkeit behält, wenn die Situation komplexe Zwischenergebnisse aufweist, wie in Abb. 6.2 (rechts) gezeigt.

6.2 Geometrie komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen der Form $a + ib$ können als Punkte in der Ebene aufgefasst werden (Abb. 6.3). Man trägt auf der x -Achse den Realteil a ab und auf der y -Achse den Imaginärteil b . Alternativ kann eine komplexe Zahl $z = a + ib$ auch durch ihren Winkel θ zur reellen Achse und ihren Abstand r zum Ursprung angegeben werden. Ein bemerkenswertes Resultat von Euler zeigt den Zusammenhang von komplexen Zahlen in Polarkoordinaten und der Exponentialfunktion auf. Es gilt

$$z = re^{i\theta}.$$

Die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen kann ebenso geometrisch interpretiert werden (Abb. 6.4). Addition einer komplexen Zahl zu einer

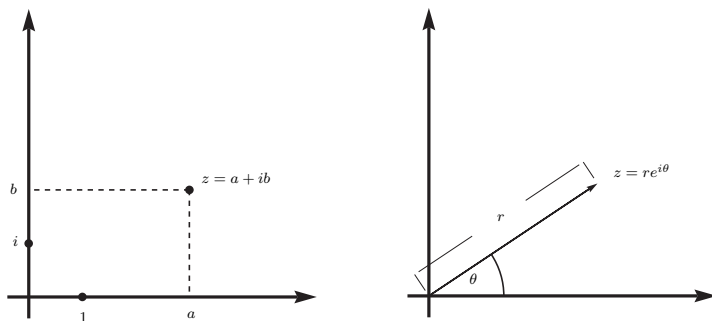


Abb. 6.3 Komplexe Zahlen als Vektoren und in Polarkoordinaten.

anderen entspricht einfach der Vektoraddition in der Ebene. Multiplikation zweier Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entspricht einer Drehstreckung, da

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

gilt. Die Längen der Zahlen multiplizieren sich, die Winkel addieren sich.

Eine weitere Grundoperation ist das *Konjugieren* komplexer Zahlen. Hierbei wird einfach der Imaginärteil einer Zahl negiert. Das konjugiert Komplexe der Zahl $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$. Geometrisch entspricht das Konjugieren einer Spiegelung an der reellen Achse (Abb. 6.5).

Man kann Konjugation gezielt einsetzen, um zu testen, ob eine Zahl rein reell oder rein imaginär ist. Dies folgt aus den folgenden beiden Relationen

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R}.$$

Wir wollen nun das Rechnen mit komplexen Zahlen dazu verwenden, geometrische Eigenschaften von Punkten in der komplexen Zahlenebene nachzuprüfen. Hierbei ist das Ziel, alle diese Tests zusammengesetzt aus den vier

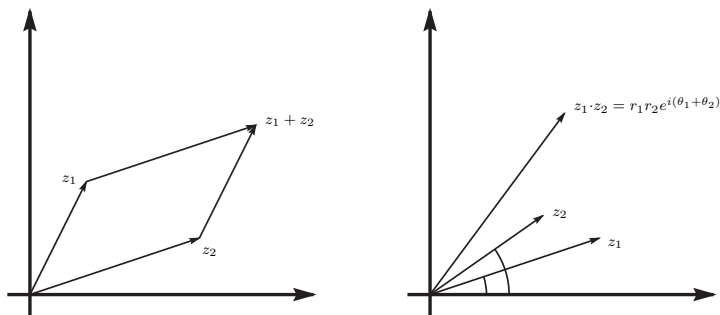


Abb. 6.4 Addition und Multiplikation komplexer Zahlen.

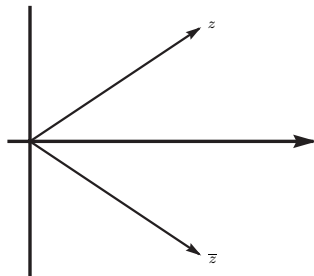


Abb. 6.5 Konjugation komplexer Zahlen.

Grundrechenarten, Konjugation und Gleichheit ausdrücken zu können, da dies uns später ermöglicht, die Tests als projektiv invariante Eigenschaften zu formulieren.

Die einfachste nachprüfbare Eigenschaft ist die Gleichheit der (vom Nullpunkt aus gesehenen) Richtung zweier Punkte der komplexen Ebene. Haben zwei Punkte $A = r_A \cdot e^{i\theta_A}$ und $B = r_B \cdot e^{i\theta_B}$ die gleiche Richtung (also $\theta_A = \theta_B$), so ist deren Quotient $A/B = r_A/r_B \cdot e^{i(\theta_A - \theta_B)} = r_A/r_B \cdot e^{i(0)} = r_A/r_B$ eine reelle Zahl. Unter Ausnützung der Konjugation kann man dies auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\theta_A = \theta_B \iff A/B = \overline{A}/\overline{B}.$$

Die letzte Beobachtung kann man auch dazu benutzen, Kollinearität von drei Punkten A, B, C in der komplexen Ebene zu testen. Man überprüft einfach, ob die Differenzvektoren $B - A$ und $C - A$ in die gleiche Richtung zeigen. D.h.

$$A, B, C \text{ sind kollinear} \iff (B - A)/(C - A) \in \mathbb{R}.$$

Unter Verwendung von Konjugation gilt dann

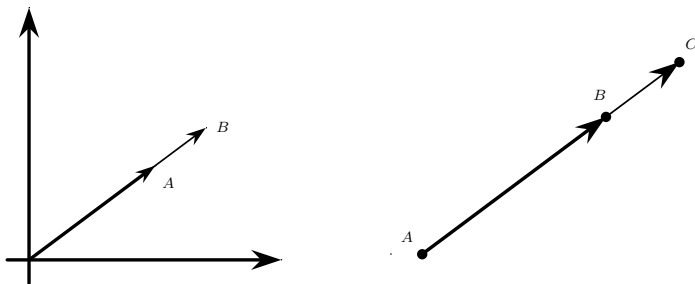


Abb. 6.6 Test auf Winkelgleichheit $A/B \in \mathbb{R}$ (links). Test auf Kollinearität $(B - A)/(C - A) \in \mathbb{R}$ (rechts).

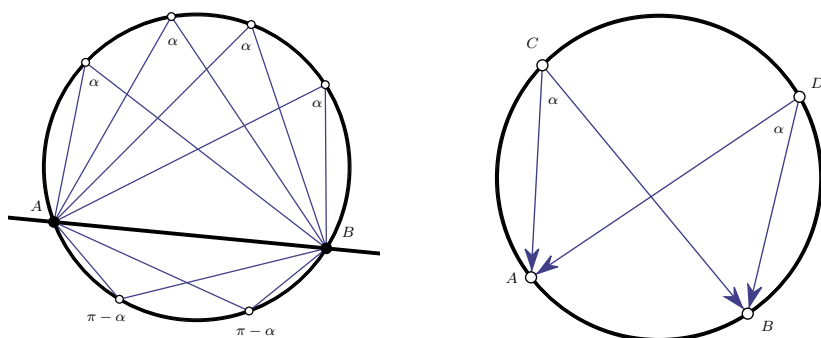


Abb. 6.7 Satz vom Fasskreisbogen.

$$A, B, C \text{ sind kollinear} \iff (B - A)/(C - A) = \overline{(B - A)} / \overline{(C - A)}.$$

Wir nähern uns nun dem ersten Hauptziel dieses Kapitels, dem Verhältnis von Kreisen, projektiver Geometrie und komplexen Zahlen. Unser nächstes Ziel ist es, einen Test zu formulieren, der nachprüft, ob vier Punkte in \mathbb{C} auf einem Kreis liegen oder nicht. Als Hilfswerkzeug benötigen wir hierzu den aus der Elementargeometrie (hoffentlich) bekannten

Satz vom Fasskreissbogen. *Sei K ein Kreis und seien A und B zwei Punkte auf K . Alle Kreispunkte auf derselben Seite der Verbindungsgeraden $\overline{A, B}$ von A und B "sehen" die Punkte A und B unter dem gleichen Winkel α . Alle Punkte auf der gegenüberliegenden Seite von $\overline{A, B}$ sehen die Punkte A und B unter dem Winkel $\pi - \alpha$. Umgekehrt liegen alle Punkte, die A und B unter dem Winkel α oder $\pi - \alpha$ sehen, auf K .*

Ein sehr bekannter Spezialfall dieses Satzes ist der *Satz des Thales*, der besagt, dass die Endpunkte eines Kreisdurchmessers mit allen Kreispunkten einen rechten Winkel bilden.

Wollen wir nun entscheiden, ob vier Punkte A, B, C und D aus \mathbb{C} auf einem gemeinsamen Kreis liegen, so können wir dies unter Zuhilfenahme des Satzes vom Fasskreisbogen auf den Vergleich zweier Winkel zurückführen. Liegen die Punkte C und D auf der gleichen Seite der Geraden $\overline{A, B}$, so müssen sie beide die Punkte A und B unter dem gleichen Winkel sehen. Die beiden zu vergleichenden Winkel erhält man als Winkel der komplexen Zahlen $(A - C)/(B - C)$ und $(A - D)/(B - D)$. Der Vergleich der Winkel lässt sich formulieren als

$$\frac{(A - C)}{(B - C)} \bigg/ \frac{(A - D)}{(B - D)} \in \mathbb{R}.$$

Der obige Ausdruck ist überraschenderweise nichts anderes als ein Doppelverhältnis in einer nicht projektiv dargestellten Form, bei der anstatt Repräsentanten von Punkten einer projektiven Geraden die Zahlen selbst eingetragen sind (vgl. S. 44). Unser nächstes Ziel wird es sein diese Relation vollständig *projektiv* zu interpretieren.

Zuvor noch eine wichtige Beobachtung. Es gibt noch einen weiteren Fall, bei dem das eben betrachtete Doppelverhältnis reell wird. Dies ist die Situation, wenn wir es im Satz vom Fasskreisbogen mit einem Winkel 0 oder π zu tun haben. Die vier Punkte A , B , C und D liegen dann auf einer Geraden. Eine solche Gerade kann man auch als Kreis mit unendlich großem Radius auffassen. Zusammenfassend erhalten wir

Satz 6.1. *Vier Punkte A , B , C und D in \mathbb{C} liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn das Doppelverhältnis $\frac{(A-C)}{(B-C)} / \frac{(A-D)}{(B-D)}$ reell ist.*

6.3 Die komplexe projektive Gerade

Die letzte Feststellung offenbart uns einen tiefen Zusammenhang zwischen der Geometrie der Kreise, projektiver Geometrie und der komplexen Zahlenebene. Die Tatsache, dass die Eigenschaft “Vier Punkte liegen auf einem Kreis” sich als projektive Invariante ausdrücken lässt, zeigt, dass Kreise “natürliche” Objekte komplexer projektiver Geometrie sind.

Analog zur Situation über dem Körper \mathbb{R} und der Definition der reellen projektiven Geraden definieren wir die *komplexe projektive Gerade* als

$$\mathbb{CP}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)^T\}}{\mathbb{C}^*}.$$

Die Punkte von \mathbb{CP}^1 sind repräsentiert durch Vektoren $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{C}^2$, wobei wie immer Vektoren, die sich nur durch ein (komplexes) Vielfaches unterscheiden, miteinander identifiziert werden. Die ursprünglichen Punkte von \mathbb{C} werden durch *Homogenisierung* in \mathbb{CP}^1 eingebettet, indem wir dem Punkt $z \in \mathbb{C}$ den Punkt $(z, 1)^T \in \mathbb{CP}^1$ zuordnen. Durch diese Zuordnung bleibt nur ein einziger Punkt von \mathbb{CP}^1 nicht erfasst, der Punkt $(1, 0)^T$. Dieser Punkt (im Unendlichen) vervollständigt die normale komplexe Ebene zur komplexen projektiven Geraden. Wir werden diesen Punkt im Folgenden öfter mit ∞ abkürzen.

Anmerkung: Ein Wort der Vorsicht zum Sprachgebrauch: Wir sprechen zwar von der komplexen projektiven *Geraden*, dieses Objekt ist allerdings in Wirklichkeit (reell betrachtet) zweidimensional, da \mathbb{C} selbst bereits ein zweidimensionales Objekt ist.

Ähnlich zur Situation der reellen projektiven Ebene vervollständigen wir hier $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ durch Hinzunahme unendlich ferner Elemente zu einer randfreien

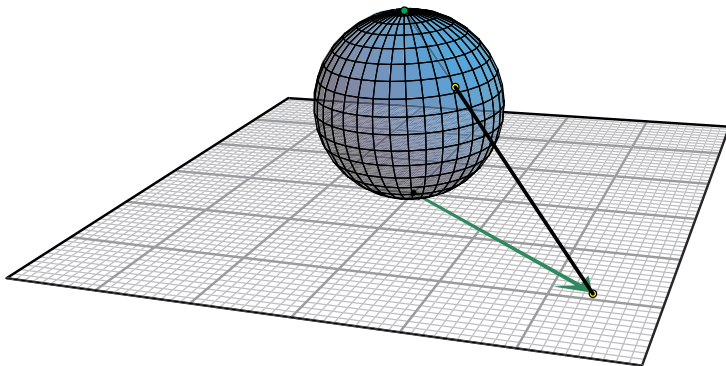


Abb. 6.8 Stereographische Projektion.

zweidimensionalen Fläche. Dennoch ist die Situation qualitativ gesehen eine andere. Im Fall der reellen projektiven Ebene nehmen wir eine ganze *Gerade im Unendlichen* mitsamt all ihrer darauf liegenden Punkte hinzu. Auf diese Weise erhalten wir eine (nicht-orientierbare) Fläche, die topologisch äquivalent zur Kugel mit Identifikation antipodaler Punkte ist.

Im Fall von \mathbb{CP}^1 nehmen wir zur Vervollständigung zu \mathbb{C} nur einen einzigen Punkt hinzu. Die resultierende Fläche ist dann orientierbar und topologisch äquivalent zur Kugel selbst, d.h.

$$\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx S^2.$$

Die Isomorphie von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und S^2 kann durch eine so genannte *stereographische Projektion* konkretisiert werden. Hierzu legt man eine Kugel tangential an die komplexe Zahlenebene und projiziert vom Nordpol der Kugel \mathbb{C} auf die Kugeloberfläche. Hierbei wird jeder Punkt von \mathbb{C} eindeutig einem Punkt von S^2 zugeordnet. Der einzige Punkt von S^2 der hierdurch nicht erfasst wird ist der Nordpol selbst. Die Bilder sehr großer komplexer Zahlen häufen sich jedoch um diesen Punkt, so dass wir diesen mit dem hinzugenommenen Punkt ∞ identifizieren können. Abb. 6.8 verdeutlicht die stereographische Projektion.

6.4 Transformationen in \mathbb{CP}^1

Genau wie auf der reellen projektiven Geraden (oder in der reellen projektiven Ebene), lassen sich in \mathbb{CP}^1 projektive Transformationen durch lineare Abbildungen auf den homogenen Koordinaten ausdrücken. Eine projektive Transformation eines Punktes $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{CP}^1$ hat also die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere lassen solche Transformationen analog zu unseren Überlegungen aus Kapitel 4 das Doppelverhältnis beliebiger vier Punkte A, B, C, D unverändert. Wir erhalten also

Satz 6.2. *Projektive Transformationen in \mathbb{CP}^1 führen Kreise und Geraden in Kreise und Geraden über.*

Beweis. Sei \mathcal{K} ein Kreis oder eine Gerade in \mathbb{CP}^1 und M die Matrix einer projektiven Transformation von \mathbb{CP}^1 . Wir müssen zeigen, dass das Bild von \mathcal{K} unter M wieder ein Kreis oder eine Gerade ist. Da Kreise durch drei Punkte eindeutig festgelegt sind, genügt es zu zeigen, dass die Bilder von vier Punkten A, B, C, D auf \mathcal{K} nach der Transformation wieder auf einem Kreis liegen. Da die vier Punkte auf einem Kreis liegen, ist deren Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ reell. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses unter projektiven Transformationen ist das Doppelverhältnis der Bilder ebenfalls reell. Also liegen die Bildpunkte wieder auf einem Kreis oder einer Geraden. \square

Da wir ja den Raum \mathbb{CP}^1 aus \mathbb{C} durch Hinzunahme eines einzigen Punktes gewonnen haben, liegt es nahe, sich zu verdeutlichen, was eine projektive Transformation τ_M mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eigentlich mit den ursprünglichen Punkten von \mathbb{C} macht. Wir können eine solche Abbildung in eine Hintereinanderschaltung von einer Homogenisierung $z \mapsto (z, 1)^T$, der eigentlichen Transformation τ_M und einer Dehomogenisierung $(z_1, z_2)^T \mapsto z_1/z_2$ zerlegen. Wir erhalten also insgesamt die Abbildung

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Dies sind die bekannten *Möbius-Transformationen* aus der Funktionentheorie, die uns bereits in Abschnitt 4.2 begegnet sind. Über \mathbb{C} erkennt man deren geometrische Struktur wesentlich klarer als über \mathbb{R} . Sie sind genau die Transformationen in \mathbb{C} , die Kreise und Geraden in Kreise und Geraden überführen. Abschließend wollen wir uns noch klarmachen, wie viele reelle Freiheitsgrade eine solche Möbius-Transformation eigentlich hat. Jede der komplexen Zahlen a, b, c und d hat genau zwei Freiheitsgrade. Bei der Transformation kommt es aber insgesamt auf ein komplexes Vielfaches dieser Zahlen nicht an, so dass wir insgesamt $8 - 2 = 6$ Freiheitsgrade erhalten.

6.5 Die Punkte I und J

Unsere bisherigen Betrachtungen haben uns gezeigt, dass wir die normale euklidische Ebene auf zweierlei verschiedene Arten zu projektiven Räumen vervollständigen können.

Die Vervollständigung zur reellen projektiven Ebene ermöglichte es uns, auf elegante Weise mit Punkten und Geraden zu “rechnen”. Schnitte und Verbindungsgeraden ließen sich einfach als Kreuzprodukte der homogenen Koordinaten beschreiben. Sonderfälle wie parallele Geraden wurden weitestgehend mit denselben Methoden auflösbar. Auch die Beschreibung von Kegelschnitten wurde auf natürliche Weise möglich. Vollkommen verloren ging dabei allerdings die Betrachtung metrischer Verhältnisse.

Im Gegensatz dazu konnten durch die Vervollständigung der Ebene zur *komplexen* projektiven Geraden Kreise als natürliche Objekte herauskristallisiert werden. Da Kreise intrinsisch durch einen Abstandsbegriff definiert sind (Menge der Punkte mit konstantem Abstand zum Zentrum), liegt hierin der Schlüssel zu einer Betrachtung metrischer Verhältnisse. Allerdings geht in \mathbb{CP}^1 wiederum die einfache Berechnung von Verbindungsgeraden und Schnittpunkten vollkommen verloren.

Ziel dieses Abschnittes ist es nun, die beiden Systeme zu einem umfassenderen zu vereinigen, das einen Zugriff auf die Vorteile beider Welten erlaubt.

Erstaunlicherweise lässt sich diese Vereinigung der zwei “Welten” durch einfaches Hinzunehmen (bzw. Auszeichnen) zweier spezieller Elemente erreichen. Dies ist vergleichbar mit der speziellen Rolle der “Geraden im Unendlichen” zum Ausdrücken von Parallelität. Im Unterschied hierzu wird uns allerdings die jetzige Erweiterung die Einbeziehung der *vollständigen* euklidischen Geometrie in eine projektive Umgebung ermöglichen.

Die speziellen Elemente, die wir hinzunehmen müssen, sind zwei Punkte. Sie werden meistens mit I und J bezeichnet und haben die komplexen homogenen Koordinaten

$$I = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir zunächst zwei Punkte A und B der euklidischen Ebene mit Koordinaten $(a_1, a_2)^T$ und $(b_1, b_2)^T$. Wir interpretieren diese Punkte einerseits als Punkte $Z_A = a_1 + ia_2$ und $Z_B = b_1 + ib_2$ der komplexen Zahlenebene. Andererseits interpretieren wir die Punkte als homogenisierte Punkte $(a_1, a_2, 1)^T$ und $(b_1, b_2, 1)^T$ in der reellen projektiven Ebene. Betrachten wir nun die Determinante $[A, B, I]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
[A, B, I] &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -i \\ a_2 & b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= b_1 - ia_2 - a_1 + ib_2 \\
&= b_1 - a_1 + i(b_2 - a_2) \\
&= Z_B - Z_A.
\end{aligned}$$

Das heißt, wir können die für das Doppelverhältnis benötigten Differenzen komplexer Zahlen als Determinanten unter Verwendung von I ausdrücken. Das Doppelverhältnis, das die Eigenschaft beschreibt, dass A , B , C und D auf einem Kreis liegen, lässt sich nun darstellen als

$$\frac{[CAI][DBI]}{[DAI][CBI]}.$$

Wenn diese (im Allgemeinen komplexe) Zahl reell ist, liegen die vier Punkte auf einem Kreis/Gerade. Wir können den Test auf „Reell-Sein“ wieder durch Vergleich mit dem konjugiert Komplexen des Werts durchführen. Da aber J das konjugiert Komplexe von I ist, erhalten wir $[\overline{ABI}] = [ABJ]$. Somit lässt sich der Test, ob vier Punkte auf einem Kreis liegen, schreiben als

$$\frac{[CAI][DBI]}{[DAI][CBI]} = \frac{[CAJ][DBJ]}{[DAJ][CBJ]}.$$

Wir können durch Multiplikation mit den Nennern der Brüche diesen Test auch als projektiv invariante Eigenschaft eines Determinantenpolynoms schreiben. Wir erhalten

Satz 6.3. *Vier Punkte A , B , C und D in \mathbb{RP}^2 liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn*

$$[CAI][DBI][DAJ][CBJ] - [CAJ][DBJ][DAI][CBI] = 0.$$

Die obige Formel demonstriert, dass man die Eigenschaft der Kozirkularität unter Zuhilfenahme von I und J als *projektiv invariante Eigenschaft* ausdrücken kann. Die Formel aus dem letzten Satz ist uns bereits aus einem anderen Kontext bekannt. Es ist die Formel, die ausdrückt, dass sechs Punkte (in unserem Fall A , B , C , D , I , und J) gemeinsam auf einem Kegelschnitt liegen.

6.6 Kreise und I und J

Die Punkte I und J werden auch als die *imaginären Kreispunkte* bezeichnet. Sie stehen zu Kreisen in folgender ebenso einfachen wie verblüffenden Beziehungen.

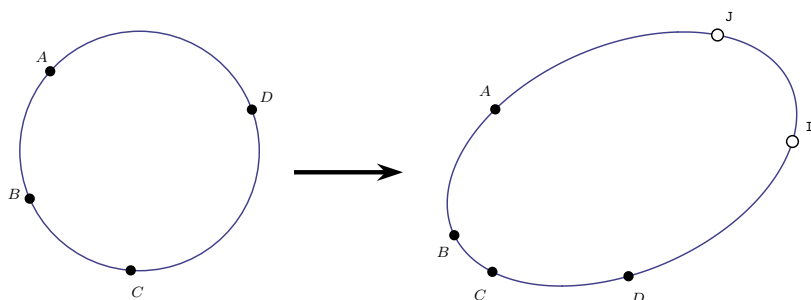


Abb. 6.9 Projektive Interpretation von Kozirkularität.

Alle Kreise verlaufen durch I und J.

Kreise sind genau die Kegelschnitte, die durch I und J verlaufen.

Dies folgt direkt aus der eben hergeleiteten Charakterisierung für Kozirkularität und der Tatsache, dass diese ausdrückt, dass A, B, C, D, I , und J auf einem Kegelschnitt liegen. Wir können uns diesen Fakt aber auch noch direkt an der einen Kreis definierenden quadratischen Gleichung klarmachen. Kreise sind genau die Kegelschnitte, deren quadratische Gleichung die Form

$$x^2 + y^2 + cz^2 + exz + fyz = 0$$

hat. Nun setzen wir I und J in diese Gleichung ein. Die letzten drei Terme fallen weg, da $z = 0$ ist. Die ersten beiden Terme $x^2 + y^2$ verschwinden wegen $i^2 = -1$. Die Beziehungen von I und J zu Kreisen sind mannigfaltig und werden uns im Folgenden noch mehrmals begegnen.

Die eben benutzte Methode zur Herleitung der Charakterisierung von Kozirkularität als projektive Invariante kann auch noch auf viele andere geometrische Eigenschaften angewendet werden. Wir wollen uns dies noch an zwei Beispielen verdeutlichen.

Orthogonalität

Wann bilden zwei Punkte B und C von einem Punkt A aus gesehen einen rechten Winkel? Mittels komplexer Zahlen kann man diese Eigenschaft ausdrücken als

$$\frac{(B - A)}{(C - A)} \in i\mathbb{R}.$$

Schreiben wir nun die Differenzen als Determinanten unter Verwendung des Punktes I , ergibt sich

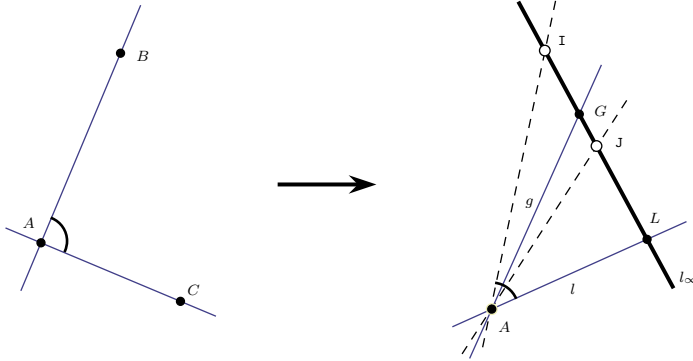


Abb. 6.10 Projektive Interpretation von senkrecht stehen.

$$\frac{[AB\mathbf{I}]}{[AC\mathbf{I}]} \in i\mathbb{R}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{[AB\mathbf{I}]}{[AC\mathbf{I}]} = -\frac{[AB\mathbf{J}]}{[AC\mathbf{J}]} \quad \text{bzw.} \quad \frac{[AB\mathbf{I}][AC\mathbf{J}]}{[AC\mathbf{I}][AB\mathbf{J}]} = -1.$$

Der letzte Ausdruck ist wieder ein Doppelverhältnis. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Punktepaare $\{B, C\}$ und $\{I, J\}$ von A aus gesehen in harmonischer Lage sind.

Senkrechte Geraden

Wir können die letzte Überlegung benutzen um zu charakterisieren, wann zwei Geraden in unserer Standardeinbettung des \mathbb{RP}^2 auf die $z = 1$ Ebene senkrecht aufeinander stehen. Seien g und l die beiden Geraden und l_∞ die Ferngerade. Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte $G = g \wedge l_\infty$ und $L = l \wedge l_\infty$. Alle vier Punkte G, L, I und J liegen auf der Ferngeraden. Wir erhalten nun

Satz 6.4. *g und l sind genau dann orthogonal, wenn $(G, L; I, J) = -1$.*

Beweis. Sei A der Schnittpunkt von g und l . B sei in weiterer Hilfspunkt auf g und C ein weiterer Hilfspunkt auf l . Nach den Überlegungen im vorigem Abschnitt stehen die Geraden senkrecht g.d.w.

$$\frac{[AB\mathbf{I}][AC\mathbf{J}]}{[AC\mathbf{I}][AB\mathbf{J}]} = -1.$$

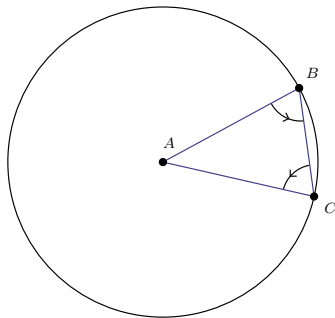


Abb. 6.11 Projektive Interpretation gleicher Entfernung.

Dies ist aber genau das Doppelverhältnis von B, C, I, J von A aus gesehen. Nach Lemma 4.9 gilt aber $(B, C; I, J)_A = (G, L; I, J)$. \square

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass es sich bei dieser Charakterisierung von Orthogonalität um einen Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes handelt, der es gestattet den Winkel zwischen zwei Geraden zu bestimmen.

Gleiche Entfernung

Abschließend wollen wir die Invariante für die Eigenschaft, dass zwei Punkte B und C gleich weit von einem dritten Punkt A entfernt sind, herleiten. Ist dies der Fall, so bildet die Differenz $A - B$ zu $C - B$ den gleichen Winkel wie $B - C$ zu $A - C$. Es gilt dann also

$$\frac{A - B}{C - B} \bigg/ \frac{B - C}{A - C} \in \mathbb{R}.$$

Wie vorher schreiben wir diese Formel zunächst um als

$$\frac{[BAI]}{[BCI]} \bigg/ \frac{[CBI]}{[CAI]} \in \mathbb{R}.$$

Als projektive Invariante ergibt sich nach obigem Verfahren

$$[BAI][CAI][BCJ]^2 - [BAJ][CAJ][BCI]^2 = 0. \quad (6.1)$$

Auch für diese Charakterisierung werden wir im Folgenden sehen, dass es möglich ist, noch viel allgemeiner eine Entfernungsmessung (und nicht nur einen Entfernungsvergleich) durch rein projektive Operationen unter Zuhilfenahme von I und J durchzuführen.

6.7 Exkurs: Die Ästhetik von Möbius-Transformationen

Wir haben in Abschnitt 6.4 Möbius-Transformationen als die projektiven Transformationen in \mathbb{CP}^1 kennen gelernt. Diese Transformationen hatten insbesondere die Eigenschaft, dass sie Kreise² wieder in Kreise überführen. Ferner erhalten sie (wie man nicht allzuschwer zeigen kann) den Schnittwinkel zweier Kreise. Insbesondere erhalten sie auch die Eigenschaft zweier Kreise tangential zu sein. Angenommen eine Möbius-Transformation τ bildet einen Kreis \mathcal{K} auf einen Kreis $\tau(\mathcal{K})$ ab, der tangential an \mathcal{K} liegt. Dann ist automatisch auch $\tau(\tau(\mathcal{K}))$ tangential an $\tau(\mathcal{K})$, und $\tau(\tau(\tau(\mathcal{K})))$ tangential an $\tau(\tau(\mathcal{K}))$, usw.. Man erhält also eine Kette tangentialer Kreise. Umgekehrt bilden die Kreisketten, die aus \mathcal{K} durch die Umkehrabbildung τ^{-1} entstehen, ebenso eine Kette tangentialer Kreise. Wir bezeichnen mit $\tau^n(\mathcal{K})$ die n -fach iterierte Anwendung von τ auf \mathcal{K} . Negative n stehen hierbei für die n -fach iterierte Anwendung der Umkehrabbildung. Die Menge $\{\tau^n(\mathcal{K}) : n \in \mathbb{N}\}$ stellt den Orbit eines Kreises in der von τ erzeugten Gruppe dar. Je nach Wahl von τ und \mathcal{K} stellen sich qualitativ sehr unterschiedliche Bilder ein. Abbildung 6.12 zeigt eine recht typische Situation, wenn \mathcal{K} so gewählt ist, dass eine Kette von tangentialen Kreisen entsteht (für gegebenes τ ist dies immer möglich, indem man den Kreisradius des Startkreises \mathcal{K} geeignet wählt).

Im Prinzip kann jeder der gezeigten Kreise als Startpunkt der Iteration angesehen werden, das Bild bleibt das gleiche. Die Möbius-Transformation wird durch eine 2×2 -Matrix dargestellt und hat somit i.A. zwei Fixpunkte. Fallen diese nicht zusammen (was durchaus passieren kann), so bildet der eine davon einen *anziehenden Fixpunkt* (zu ihm zieht τ hin) und der andere einen

² Wir betrachten wieder Geraden als Kreise mit unendlich großem Radius.

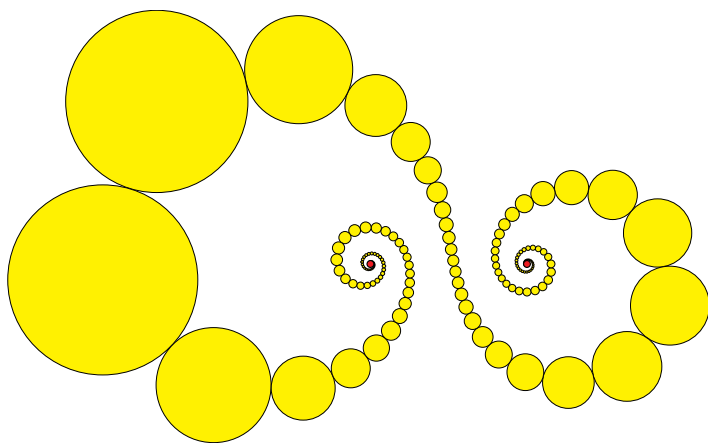
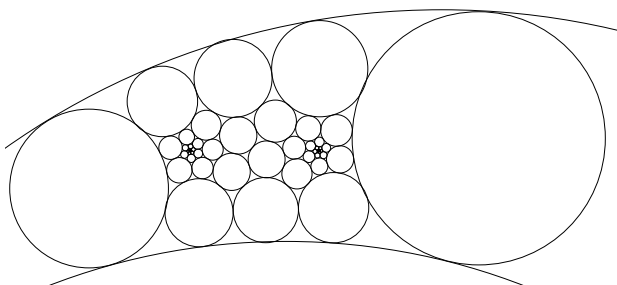


Abb. 6.12 Der Orbit eines Kreises in einer von einer Möbius-Transformation erzeugten Gruppe.

abstoßenden Fixpunkt (zu ihm zieht τ^{-1} hin). Legt man durch eine geeignete Ähnlichkeitstransformation, die ja nichts an der prinzipiellen Optik des Bildes ändert, die beiden Fixpunkte auf -1 und 1 in der \mathbb{C} -Ebene, so verbleibt noch ein komplexer Freiheitsgrad, der die Struktur der Möbius-Transformation festlegt. Diese hat dann im Prinzip eine rotatorische Komponente (wie sehr rotiere ich in jedem Schritt um die Fixpunkte) und eine Verschiebekomponente (wie sehr bewege ich mich in jedem Schritt von einem Fixpunkt weg und auf den anderen zu). Die Überlagerung beider Bewegungen ergibt das typischerweise spiralförmige Bild, das wir in unserer Kreiskette wahrnehmen. Experten sprechen in diesem Fall von einem *loxodromischen Transformati-onstyp*.

Durch gezielte Wahl (nach Festlegen der Fixpunkte) des noch freien komplexen Parameters kann sogar erreicht werden, dass die Kreise einer Kette sich noch mehrmals gegenseitig berühren. Hierbei kann, analog zur regulären hexagonalen Kreispackung der Ebene, jeder Kreis bis zu sechs Nachbarn berühren. Die folgende Abbildung zeigt eine solche Situation. Sie ist in gewisser Weise das “komplex projektive Äquivalent zu einer Bienenwabe”.



Kann man über die prinzipiellen Möglichkeiten der iterierten Anwendung *einer* Möbius-Transformation schöne wissenschaftliche Artikel schreiben, so kann man über die iterierte Anwendung *zweier* Möbius-Transformationen ganze Bücher verfassen³. Wir wollen die Thematik hier nur andeuten. Da iterierte Transformationen zweier Möbius-Transformationen μ und τ (man wende auf alle möglichen Arten die beiden Operationen auf ein Objekt an) i.A. recht schnell zu unübersichtlichen Bildern führen können, beschränkt man sich hier oftmals auf so genannte *Grenzpunktmengen*. Hierzu betrachtet man einen Startpunkt P und bildet auf alle möglichen Arten unendlich lange Sequenzen aus μ , μ^{-1} , τ und τ^{-1} . Wegen der starken Fixpunkteigenschaften gibt es viele konkrete Situationen, in denen jede solcher unendlicher Folgen gegen einen Fixpunkt konvergiert. Diese führen zu interessanten Bildern, die meistens einen berauschend fraktalen Charakter haben.

Wir wollen dies an einem Beispiel nachvollziehen. Die Möbius-Transformationen sind so reichhaltig, dass sie auch alle einfachen Skalierungen um einen

³ Dies ist tatsächlich geschehen. Dem Leser sei an dieser Stelle das wunderschöne Buch [MSW] empfohlen.

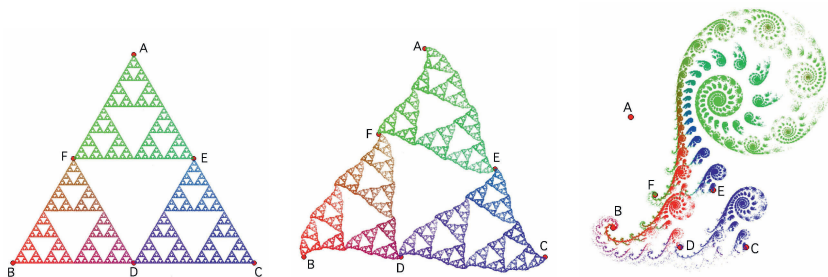


Abb. 6.13 Metamorphosen eines Sierpinski Dreiecks.

Punkt herum enthalten. Wir starten in einer Situation, in der wir die Grenzpunktmengen dreier einfacher Stauchungen um den Faktor 2 betrachten. Ein bekanntes Beispiel ist das so genannte Sierpinski Dreieck (Abbildung 6.13 links). Dies entsteht folgendermaßen: Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck und drei Abbildungen μ , τ , η , die das Dreieck um einen Faktor zwei verkleinert in jeweils einer seiner Ecken abbilden. Betrachtet man alle unendliche Folgen der Hintereinanderausführung solcher Abbildungen ergeben sich als Bilder deren Fixpunktmengen, die in Abbildung 6.13 links gezeigten Grenzpunktmengen. Die Figur ist (bis auf die gezeigte Einfärbung) selbstähnlich bezüglich jeder der drei Abbildungen – d.h. man findet drei um den Faktor 2 verkleinerte Kopien des Sierpinski Dreiecks in den Ecken des Dreiecks wieder.

Da es etwas “mühevoll” ist, alle dieser unendlichen Folgen zu berechnen und deren Fixpunkte zu bestimmen, gibt es einen einfachen Trick, wie man diese Bilder approximativ auch anders erzeugen kann. Man betrachtet hierzu ein so genanntes *iteriertes Funktionensystem*. Man beginnt mit einem beliebigen Startpunkt, iteriert den mit einer Zufallsfolge der betrachteten Transformationen. Dies geschieht beispielsweise durch folgenden Algorithmus.

```

p = 0;
wiederhole 1000000 mal {
     $\alpha$  = eine zufällig ausgewählte Abbildung aus  $\{\mu, \tau, \eta\}$ ;
    p =  $\alpha(p)$ ;
male p;
}
```

Am Besten verwirft man hierbei die ersten 1000 Punkte, da diese noch nicht sehr nahe an der Fixpunktmenge liegen. Die Bilder in Abbildung 6.13 sind auf diese Weise entstanden. Wir realisieren nun die drei Transformationen jeweils durch eine Möbius-Transformation. Diese kann man jeweils dadurch angeben, dass man zwei Punktetripel angibt, die aufeinander abgebildet werden sollen. In unserem Beispiel sind die Transformationen vollständig beschrieben durch die Punktetripel

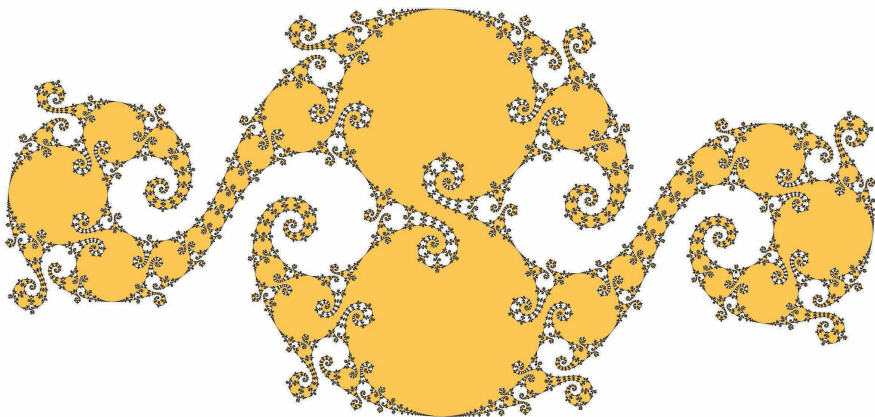


Abb. 6.14 Grenzpunktmenge einer Schottky Gruppe.

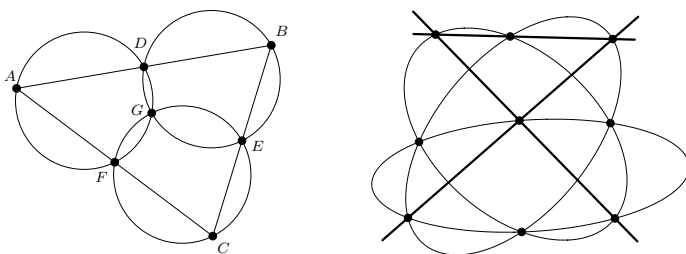
$$(A, B, C) \mapsto (A, E, F), (A, B, C) \mapsto (D, B, F), (A, B, C) \mapsto (D, E, C).$$

Behält man nun die Abbildungsvorschriften bei, verändert jedoch die Position der Punkte, so ergeben sich (unter anderem) die weiteren in Abbildung 6.13 gezeigten Bilder als Grenzpunktmenge.

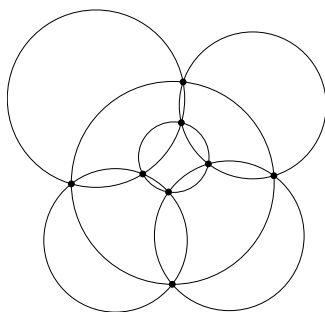
Die entstehenden Strukturen sind extrem reichhaltig und stecken für spezielle Wahlen der Parameter voller Überraschungen. Das 412-seitige Buch [MSW] beschäftigt sich fast ausschließlich mit Grenzpunktmenge zweier Möbius-Transformationen und ihrer Inversen, die zudem noch bestimmten einschränkenden Forderungen unterliegen, so genannter Schottky Gruppen, die den Parameterraum der Gebilde letztlich auf zwei komplexe Parameter reduzieren. In diesem Fall bilden die Grenzpunktmenge Strukturen aus, die zwar unendlich fein fraktal verschachtelt sind, aber sich dennoch in einem Strich komplett zeichnen lassen, also homöomorph zu einem Kreis sind. Stellvertretend sei hier nur eine der Grenzpunktmenge aus Indras Pearls wiedergegeben, bei der das Innere des fraktal “ausgebeulten” Kreises zur Verdeutlichung eingefärbt wurde.

Übungsaufgaben

1. Weisen Sie explizit nach, dass Gleichung (6.1) auf Seite 85 tatsächlich eine projektive Invariante ist.
2. Welcher Punkt aus \mathbb{CP}^1 liegt auf allen Geraden?
3. Unten auf der linken Seite ist die Zeichnung eines geometrischen Satzes gegeben. Wenn Sie diesen Satz so interpretieren, dass die drei Kreise zu Kegelschnitten werden, könnten Sie die andere Zeichnung erhalten. Ordnen Sie in dieser Zeichnung den eingezeichneten Punkten sinnvoll die Bezeichnungen der ursprünglichen Zeichnung zu. Geben Sie ebenso den noch verbleibenden Punkten eine geometrisch sinnvolle Interpretation.



4. Betrachten Sie noch einmal die Zeichnung des geometrischen Satzes aus der vorhergehenden Aufgabe. Wenn Sie diesen Satz diesmal so interpretieren, dass die drei Geraden zu Kreisen werden, könnten Sie die nachstehende Zeichnung erhalten. Ordnen Sie in dieser Zeichnung den eingezeichneten Punkten sinnvoll die Bezeichnungen der ursprünglichen Zeichnung zu. Geben Sie ebenso dem letzten noch verbleibenden Punkt eine geometrisch sinnvolle Interpretation.



5. Für $j \in \{1, 2, 3\}$ seien A_j, B_j Punkte aus \mathbb{CP}^1 . Dann gibt es eine projektive Transformation τ_M derart, dass $\tau(A_j) = B_j$ für $j \in \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie τ_M für den Fall, dass

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zusätzlich die Fixpunkte von τ_M in \mathbb{CP}^1 .

Geometriekalküle

Richter-Gebert, J.; Orendt, T.

2009, XI, 224 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-02529-7