

6 Matched Filter, Likelihood Ratio Filter und Prewhitening Filter

6.1 Übersicht

Das Matched Filter – ein an das erwartete Echosignal angepasstes Filter – nimmt in der kohärenten Verarbeitung von Radarsignalen eine zentrale Stellung ein. Man unterscheidet zwischen Filtern für den einzelnen Echopuls und solchen für eine Echopulsfolge. Innerhalb dieser beiden Gruppen wird wiederum nach weißem oder farbigem Störsignal unterschieden.

Nach Formulierung der Aufgabenstellung an ein Matched Filter – sie lässt sich aus dem *Neyman-Pearson-Test* der mathematischen Statistik ableiten – werden Impulsantwort und Übertragungsfunktion des Einzelpuls-Matched Filters bei weißem Störsignal abgeleitet. Als erwartete Signale lassen wir auch solche mit komplexen Zeitfunktionen zu, wie wir ihnen bei der Tiefpassverarbeitung („I/Q- oder Quadraturverarbeitung“) von Bandpasssignalen begegnen. Das Matched Filter ist einem Korrelator gleichwertig, der die Kreuzkorrelation zwischen dem Empfangssignal und dem Sendesignal berechnet.

Die Behandlung des Matched Filters für ein farbiges Störsignal zeigt, dass in diesem Falle die Impulsantwort nicht explizit angegeben werden kann, sondern nur in Form einer Integralgleichung. Das Filter lässt sich in ein Prewhitening-Filter zur Unterdrückung des farbigen Störsignals auf den Pegel des Rauschens und in ein nachfolgendes Matched Filter für das etwas geänderte Zielsignal aufspalten. Zum Beispiel sind alle MTI-Filter mehr oder weniger vollkommene Prewhitening Filter.

Von großer Bedeutung für Pulsdoppler- und MTD-Radare ist ein Filter zur unmittelbaren Optimierung der Zielentdeckung – das Matched Filter optimiert das Signal-zu-Rausch-Verhältnis – bei Empfang einer in ein farbiges Störsignal eingebetteten Pulsfolge. Sein Entwurf wird aus dem sogenannten Likelihood Ratio Test der statistischen Entscheidungstheorie abgeleitet. Deshalb wird ein solches Filter auch als Likelihood Ratio Filter bezeichnet. Es ist einerseits in Form eines FIR-Filters oder Transversalfilters realisierbar, andererseits durch eine FFT nur näherungsweise darstellbar. Es wird gezeigt, dass das Likelihood Ratio Filter – bei Gauß'scher Amplitudenverteilung des Störsignals – mit dem Matched Filter identisch ist.

Zum Schluss wird der Entwurf eines Prewhitening-Filters für eine Pulsfolge erläutert, das ebenfalls als FIR-Filter realisierbar ist. Seine Filtergewichte sind proportional der ersten Zeile oder Spalte der Kovarianzmatrix des Störsignals.

6.2 Matched Filter für Einzelpuls bei weißem Störsignal

Aufgabenstellung an ein Matched Filter

Die Aufgabe eines Matched Filters lässt sich aus der Arbeitsweise eines automatischen Zieldetektors ableiten (s. Bild 3.1). Bei ihm wird das Empfangssignal nach der Filterung durch das Matched Filter und anschließender Hüllkurvendetektion (=Bildung des Betrags der komplexen Umhüllenden) mit einer Schwelle verglichen. Ein Signal, das die Schwelle überschreitet, wird als Zielecho angesehen. Die Höhe der Schwelle bestimmt die Falschalarmwahrscheinlichkeit. Dieser Entdeckungsalgorithmus entspricht dem *Neyman-Pearson-Test* der Statistik (vgl. Abschnitt 3.2).

Damit ein Echosignal mit hoher Wahrscheinlichkeit die Schwelle überschreitet und gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit von Falschalarmen klein gehalten wird¹, muss das Filter zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 die momentane, positive oder negative Signalamplitude $g(t_0)$ maximieren und die momentane Amplitude des begleitenden Rauschens konstanter, spektraler Leistungsdichte („weißes“ Rauschen) minimieren. Da die momentane Rauschamplitude eine Zufallsgröße mit nichtdeterminiertem Verlauf darstellt, kann sie nur über eine Minimierung der effektiven Rauschspannung U_N klein gehalten werden. Um von der Polarität des momentanen Signals unabhängig zu werden, betrachten wir statt der Signalamplitude $g(t_0)$ ihr Quadrat $g^2(t_0)$. In der Signaltheorie ist das aber die momentane Signalspitzenleistung (an einem gedachten Lastwiderstand von $1\ \Omega$). Sinnvollerweise verwenden wir auch beim Rauschen das Quadrat der effektiven Rauschspannung, also die mittlere Rauschleistung N (an $1\ \Omega$). Dann ergibt sich als Aufgabenstellung an das Matched Filter: *es soll zu einem geeigneten Zeitpunkt t_0 das Verhältnis („Kontrast“) von momentaner Signalspitzenleistung zu mittlerer Rauschleistung maximieren.* Wenn wir auch komplexe Signale wie zum Beispiel komplexe Tiefpasssignale in unsere Überlegungen einbeziehen, müssen wir für die Signalspitzenleistung $g(t_0)g^*(t_0) = |g(t_0)|^2$ statt $g^2(t_0)$ schreiben. Damit erhalten wir folgende Forderung an das Matched Filter:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{sp}} = \frac{|g(t_0)|^2}{U_N^2} = \frac{|g(t_0)|^2}{N} \rightarrow \text{Maximum} \quad (6.1)$$

¹Bei einem Radar ist das Erreichen einer sehr kleinen Zahl von Falschalarmen genauso wichtig wie die eigentliche Zielentdeckung. So wird zum Beispiel ein Hinderniswarnradar für Boden- oder Luftfahrzeuge (Hubschrauber) vom Nutzer als ungeeignet angesehen werden, wenn zwar jedes Hindernis entdeckt wird, aber bei jeder Mission eine größere Zahl von Falschalarmen auftritt. Allerdings stellen rauschbedingte Falschalarme kein Problem dar, sondern Echos von störenden Objekten auf der Erdoberfläche oder in der Luft wie bspw. von Vögeln.

Der genaue Verlauf des Ausgangssignals des Matched Filters ist ohne Bedeutung. Das steht im Gegensatz zu anderen Bereichen der Nachrichtentechnik, wo am Empfängeranfang ein möglichst unverfälschtes Abbild des Sendesignals gewünscht wird. In der Radartechnik liegt uns jedoch nur daran, mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit eine Entdeckungsschwelle zu überschreiten (vgl. Bild 3.2), und sei es für ein beliebig kleines Zeitintervall.

Intuitiv erkennt man, dass man ein Filter anstreben müsste, das während des Signaleinlaufs die Signalenergie speichert, um sie, nachdem das gesamte Signal eingelaufen ist – nur so können wir von der gesamten Signalenergie Gebrauch machen – in Form eines sehr kurzen Impulses auszugeben, vgl. Bild 6.1. Die gesamte Signalenergie ist dann auf ein kleines Zeitintervall komprimiert. Das Matched Filter muss also eine Art Kompressionseffekt zeigen. Als Folge davon werden die *momentane* Leistung und damit die Amplitude sehr groß und die Entdeckungsschwelle wird mit hoher Wahrscheinlichkeit überschritten. Dabei haben wir unterstellt, dass beim Rauschen kein Kompressionseffekt auftritt.

Es sei im Vorgriff auf Kapitel 8 vorweggenommen, dass die Größe der Kompression, die das Matched Filter bewirken kann, vom *Zeit-Bandbreite-Produkt* des Signals abhängt. Ein einfacher, geträgerter Rechteckpuls hat – wie gleich noch gezeigt werden wird – ein Zeit-Bandbreite-Produkt von nur 1 und erfährt in seinem zugehörigen Matched Filter eine Kompression um ebenfalls den Faktor 1, wird also praktisch nicht komprimiert, aber trotzdem S/N-optimiert. Die Sendesignale von Pulskompressionsradaren haben dagegen Zeit-Bandbreite-Produkte von typisch $10 \dots 200$. Sie werden in ihrem zugehörigen Matched Filter, das dann Pulskompressionsfilter genannt wird, um den Wert des Zeit-Bandbreite-Produktes, also um den Faktor $10 \dots 200$ komprimiert, wobei ihre Amplituden um den gleichen Faktor anwachsen.

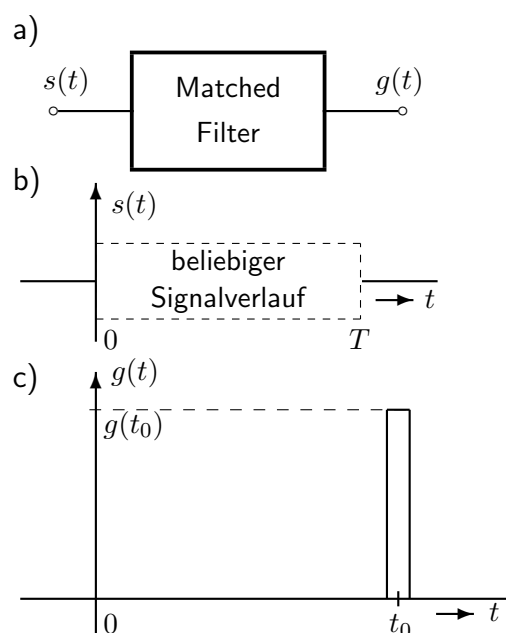


Bild 6.1 Idealisierte Aufgabenstellung an ein Matched Filter:

Wird dem Filter (a) als Eingangssignal $s(t)$ ein Signal endlicher Dauer T mit beliebigem Signalverlauf (b) zugeführt, so soll das Filter die gesamte Signalenergie sammeln und diese Energie in Form eines auf ein möglichst kurzes Zeitintervall komprimierten Pulses ausgeben (c). Das Signalmaximum soll nicht vor $t=t_0 \geq T$ auftreten, denn nur so können wir von der gesamten Signalenergie Gebrauch machen. Dann wird die Amplitude ein Maximum und die Entdeckungsschwelle am ehesten überschritten.

Impulsantwort und Übertragungsfunktion des Einzelpuls-Matched Filters bei weißem Störsignal

Nachfolgend werden der Betrag der Übertragungsfunktion $|H_m(f)|$, die Impulsantwort $h_m(t)$ und die vollständige Übertragungsfunktion $H_m(f)$ abgeleitet, und zwar mehr heuristisch, um die Arbeitsweise eines Matched Filters anschaulicher darstellen zu können, als dies mit einer formalen aber mathematisch exakten Ableitung möglich wäre. Letztere wird in Abschnitt 6.5 nachgeholt.

Bei den folgenden Ableitungen denken wir uns Sende- und Empfangssignal kohärent in den Tiefpassbereich abgemischt. Wir erhalten dann das einem Bandpass-Matched-Filter äquivalente Matched Filter im Tiefpassbereich. Diese Darstellung ist praxisnah, da Matched Filter meist im Tiefpassbereich eingesetzt werden.

Bei Betrachtung des Betrags $|S(f)|$ des beliebigen Sendesignalspektrums $S(f)$ von Bild 6.2c) erkennt man, dass das zugehörige Matched Filter unterhalb der Frequenz f_1 und oberhalb der Frequenz f_2 undurchlässig sein sollte, da in diesen Frequenzbereichen nur störende Rauschleistung durchgereicht würde. Im Frequenzintervall $[f_1; f_2]$ dagegen sollte das Filter umso durchlässiger sein, je größer dort der Betrag $|S(f)|$ des Signalspektrums ist. Intuitiv vermutet man, dass der Amplitudengang $|H_m(f)|$ des Filters dem Betrag $|S(f)|$ des Spektrums proportional sein sollte. Das führt zu der Beziehung

$$|H_m(f)| = c |S(f)| \quad (6.2)$$

Dabei ist c eine reelle, positive Konstante.

Die vollständige Übertragungsfunktion $H_m(f)$ des Matched Filters erhalten wir wie folgt. Ist $h_m(t)$ seine Impulsantwort, so wird sein Ausgangssignal zum Zeitpunkt t_0 – als Antwort auf das durch Rauschen $n(t)$ verfälschte Echo $s(t)$ – durch ein Faltungsintegral beschrieben:

$$g(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) + n(t)] h_m(t_0 - t) dt \quad (6.3)$$

Bild 6.2 b) zeigt in der ersten Zeile das in den Tiefpassbereich abgemischte Sendesignal $s(t)$ und darunter das durch Rauschen gestörte Empfangssignal $s(t) + n(t)$. Der Einfachheit halber haben wir die Zielentfernung zu Null angenommen. In der letzten Gleichung nimmt die Impulsantwort in der Form $h_m(t_0 - t)$ die Rolle einer Bewertungsfunktion an, mit der alle Signalwerte des Eingangssignals im Zeitintervall $-\infty \leq t \leq t_0$ multipliziert und dann zum Ausgangssignal $g(t)$ aufaddiert werden. Wie sollte nun diese Bewertungsfunktion aussehen, damit möglichst nur Signal und wenig Rauschen vom Filter durchgereicht wird?

In Analogie zur Ableitung der Glchg. (6.2) erkennt man, dass die Bewertungsfunktion $h_m(t_0 - t)$ zu allen Zeiten gleich Null sein muss, zu denen das Signal $s(t)$ nicht existiert. Denn zu diesen Zeiten würde nur unnützes Rauschen bewertet und aufaddiert werden. Im Intervall $0 \leq t \leq \tau$ ist man dagegen intuitiv geneigt,

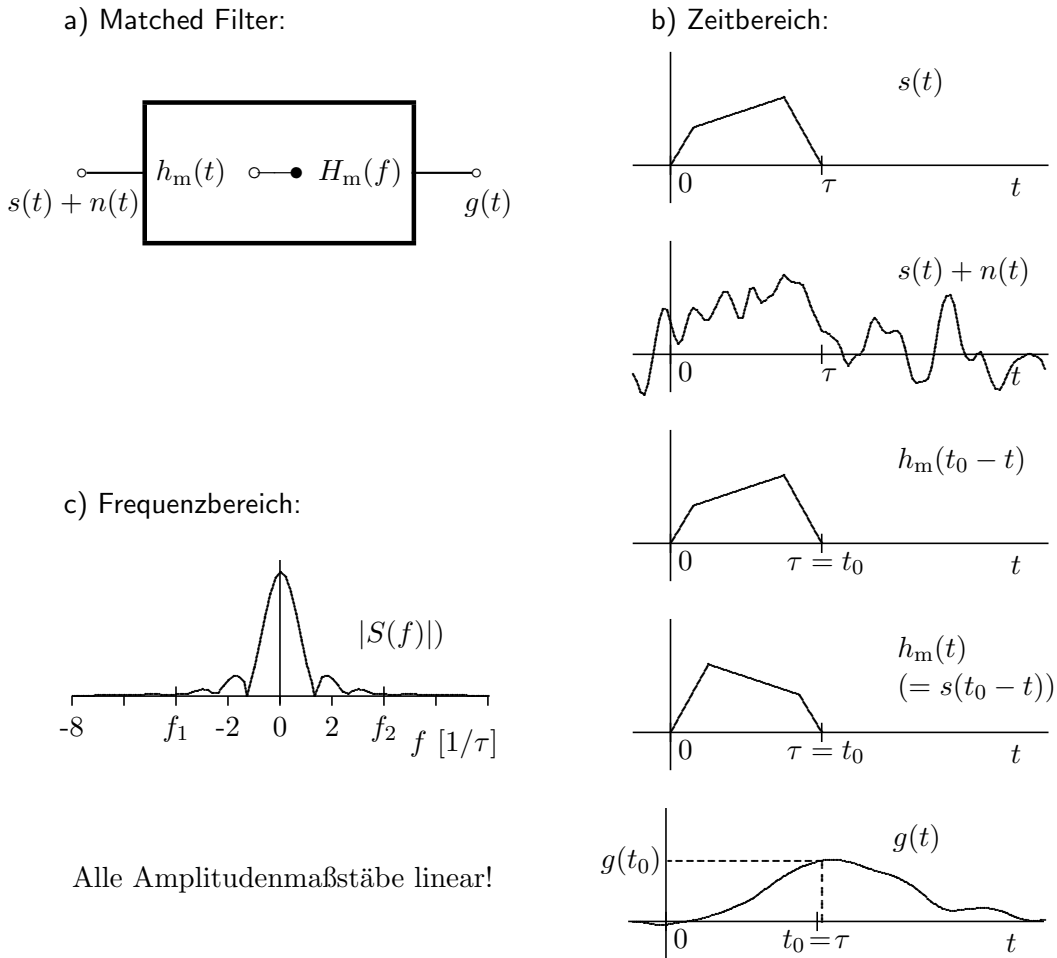


Bild 6.2 Zur Ableitung des Matched Filters im Zeit- und Frequenzbereich.

die Bewertungsfunktion proportional dem Signal $s(t)$ zu machen. Wir bekommen dann mit c als einer reellen, positiven Konstanten die dritte Zeile von oben in Bild 6.2 b):

$$h_m(t_0 - t) = c s(t) \quad (6.4)$$

und durch „Entspiegelung“ in der Zeile darunter $h_m(t) = c s(t_0 - t)$. In Abschnitt 6.5 wird gezeigt, dass für den allgemeinen Fall eines komplexen Signals $s(t)$ gilt:

$$h_m(t) = c s^*(t_0 - t) \quad (6.5)$$

Der frühestmögliche Zeitpunkt t_0 , zu dem das Signalmaximum am Ausgang verfügbar sein kann, entspricht dem Ende des Echsignals bei $t = t_0 = \tau$. Denn erst dann kann das Filter von der *gesamten* Signalenergie Gebrauch machen.

Nach Glchg. (6.5) ist die Impulsantwort des Matched Filters also gleich dem *zeitinversen oder gespiegelten, konjugiert komplexen Sendesignal, verschoben um t_0 in positiver Richtung*. In der untersten Zeile von Bild 6.2 b) ist das Ausgangssignal $g(t)$ gezeigt. Es steigt von $t=0$ bis $t=t_0=\tau$ an, erreicht dort seine maximale Amplitude (dieser Zeitpunkt kann durch Rauschen etwas verfälscht sein) und fällt dann wieder ab. Die Form des Ausgangssignals $g(t)$ ist von der des erwarteten Empfangssignals $s(t)$ sehr verschieden. Man erkennt auch, dass das im Signal $g(t)$ noch vorhandene Rauschen wesentlich schmalbandiger und in der Amplitude kleiner ist als das Eingangsrauschen $n(t)$. Darin kommt der S/N-Gewinn durch das Filter zum Ausdruck. Eine Entdeckungsschwelle könnte bei vorgegebener Falschalarmwahrscheinlichkeit beim Signal $g(t)$ viel niedriger gelegt werden als im ungefilterten Signal $s(t) + n(t)$, wodurch eine wesentlich höhere Entdeckungswahrscheinlichkeit erzielt wird.

Durch Fourier-Transformation der Glchg. (6.5) erhalten wir schließlich die Übertragungsfunktion des Filter zu (der Phasenfaktor $e^{-j2\pi ft_0}$ hat seine Ursache in der bei einem realisierbaren Filter erforderlichen Laufzeit von t_0)

$$H_m(f) = c S^*(f) e^{-j2\pi ft_0} \quad (6.6)$$

Das Matched Filter wird also durch das Sendesignal $s(t)$ und sein Spektrum $S(f)$ und damit durch das erwartete Empfangssignal vollständig beschrieben: es ist *an das Signal angepasst*, daher der Name *Matched Filter*.

Das Signal-Rausch-Verhältnis am Matched Filter-Ausgang

Bei Vernachlässigung des Rauschens erhält man das Ausgangssignal $g(t_0)$ des Matched Filters zum Zeitpunkt t_0 durch eine Fourier-Rücktransformation zu

$$g(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(f) S(f) e^{j2\pi ft_0} df = c \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (6.7)$$

$N_0 = kT_{\text{sys}}$ (s. Glchg. (2.57)) ist definiert als die konstante, spektrale Rauschleistungsdichte im positiven Frequenzbereich. Dann gilt für die Ausgangs-Rauschleistung, unter Benutzung der Gleichungen (6.6), (A.150) und (A.168),

$$N = N_0 \int_0^{\infty} |H_m(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_m(f)|^2 df = c^2 \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (6.8)$$

Also wird das maximal erreichbare Verhältnis von Signalspitzenleistung $S_{\text{sp}} = |g(t_0)|^2$ zu mittlerer Rauschleistung N am Filter-Ausgang:

$$\left(\frac{S_{\text{sp}}}{N}\right) = \frac{|g(t_0)|^2}{N} = \frac{2}{c^2 N_0} \frac{\left|c \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df} = \frac{2E}{N_0}$$

Dabei ist $E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$ die Signalenergie. Das maximale $(S/N)_{\text{sp}}$ und damit die Entdeckbarkeit eines Zieles hängen also *nicht etwa von der Signalform, Signaldauer oder der Signalbandbreite ab, sondern nur von der Signalenergie und der Rauschleistungsdichte N_0* .

Da in der Radartechnik aber die Signalleistung beim S/N als $S = |g(t_0)|^2/2$ definiert ist, folgt aus der letzten Beziehung für das Matched Filter

$$\left(\frac{S_{\text{sp}}}{N}\right) = 2 \frac{S}{N} = 2 \frac{E}{N_0} \quad \text{und damit} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{MF-Ausg.}} = \frac{E}{N_0} \quad (6.9)$$

Das am Ausgang eines Matched Filters vorhandene S/N ist also gleich der dem Empfänger zugeführten Energie, dividiert durch die Rauschleistungsdichte $N_0 = \text{const } kT_{\text{sys}}$. Die Glchg. (6.9) dient bei Simulationen der Ermittlung bzw. Verifikation des S/N an beliebigen Punkten der Verarbeitungskette, notwendig bspw. bei Monte Carlo-Simulationen zur Bestimmung von S/N-Verlusten.

6.3 Beispiele für Einzelpuls-Matched Filter

Ideales Matched Filter für den Rechteckpuls

Sehr häufig wird ein Matched Filter für einen Sendepuls mit Rechteck-Umhüllen benötigt. Das Filter wird im allg. nach der I/Q-Umsetzung – also im Tiefpassbereich – eingesetzt, wie in Bild 5.10 gezeigt. Bild 6.3 a) zeigt das eigentliche Sendesignal, einen trägerfrequenten Rechteckpuls, und in Zeile b) das in den Tiefpassbereich abgemischte Sendesignal, nämlich einen bei $t=0$ beginnenden Rechteckpuls der Dauer τ . Darunter ist in c) die Impulsantwort des Matched Filters aufgetragen. Wegen der Symmetrie des Sendesignals ist sie mit diesem identisch. In Zeile d) ist das Ausgangssignal dargestellt, ein Dreieckpuls der doppelten Dauer 2τ des Sendepulses. Die letzte Zeile zeigt den sinc-förmigen Amplitudengang des Matched Filters.

Zeit-Bandbreite-Produkt des Rechteckpulses:

Im Zusammenhang mit der Frage nach dem Kompressionseffekt des Einzelpuls-Matched Filters für den Rechteckpuls ist dessen Zeit-Bandbreite-Produkt von

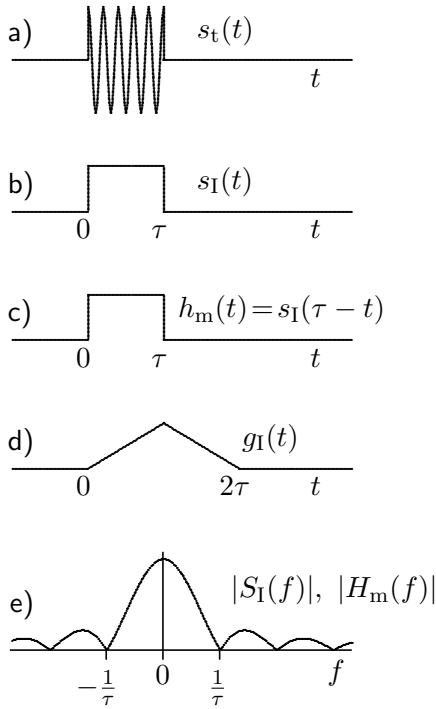


Bild 6.3 Ideales Matched Filter für den Rechteckpuls im Videobereich:

- a) Sendesignal $s_t(t)$.
- b) Empfangssignal $s_I(t)$ im I-Kanal (ohne Rauschen)
- c) Impulsantwort $h_m(t)$ des Matched Filters im I-Kanal.
- d) Ausgangssignal $g_I(t)$ des Matched Filters im I-Kanal.
- e) Empfangsspektr. bzw. Übertr.-Funktion im I-Kanal (Mittenfrequenz $f=0$).
(Beim Sendespektrum $|S_t(f)|$ ist die Mittenfrequenz $f=f_t$).

Interesse. Zur Definition einer effektiven Signalbandbreite B_n – die übliche 3 dB-Bandbreite ist hier wenig geeignet – rufen wir uns in Erinnerung, dass die Energie E eines Signals mit dem Spektrum $S(f)$ gleich $\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$ ist, also gleich der Fläche unter der Kurve $|S(f)|^2$. Wir definieren als effektive Bandbreite die Breite B_n eines Rechtecks, dessen Höhe gleich dem quadrierten Maximum des Betragsspektrums $|S(f)|_{\max}^2$ und dessen Fläche $B_n |S(f)|_{\max}^2$ gleich der Energie E des Signals ist. Bei Tiefpasssignalen ist oft $|S(f)|_{\max}^2 = |S(0)|^2$. Dann wird die effektive Signal-Bandbreite

$$B_n = \frac{1}{|S(0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (6.10)$$

Ersetzt man das Spektrum $S(f)$ durch eine Übertragungsfunktion $H(f)$, so erhält man die effektive Bandbreite eines Filters. Sie ist mit der in Glchg. (2.2) definierten Rauschbandbreite B_n identisch. Bei einem Bandpasssignal oder -filter mit der Mittenfrequenz f_m ersetzt man die Bezugshäufigkeit $f=0$ durch f_m und damit $|S(0)|$ durch $|S(f_m)|$. Die so definierte Bandbreite eines Rechteckpulses der Dauer τ mit dem Spektrum $S(f) = \tau \text{sinc}(\tau f)$ wird $B_n = 1/\tau$, vgl.dazu Glchg. (2.47). Damit wird das

$$\text{Zeit-Bandbreite-Produkt des Rechteckpulses} = \tau \cdot B_n = 1 \quad (6.11)$$

Das in Bild 6.3 d) gezeigte Ausgangssignal des Matched Filters zeigt eine Halbwertsdauer von τ . Das Filter maximiert zwar das S/N auf einen Wert von $S/N = E/N_0$, erzielt aber beim Rechteckpuls wegen $B\tau = 1$ keine Kompression.

Praxiswissen Radar und Radarsignalverarbeitung

Ludloff, A.K.

2009, X, 514 S., Hardcover

ISBN: 978-3-8348-0597-3