

Erich Ossa

Ergänzungen
zum Lehrbuch
Topologie

Vorwort

Die vorliegenden Ergänzungen setzen sich zusammen aus einigen Anhängen sowie Teilen von Kapitel 6 der ersten Auflage des Buches.

Die betroffenen Anhänge machen die ersten drei Abschnitte dieser Ergänzungen aus; sie enthalten Beweise, deren Kenntnis für das Verständnis der wesentlichen Inhalte des Buches nicht unbedingt erforderlich ist, obgleich die Resultate wichtig für die topologischen Anwendungen sind.

Das jetzige Kapitel 6 des Buches habe ich gegenüber der ersten Auflage dahingehend vereinfacht, dass ich auf gewisse technische Hilfsmittel aus der homologischen Algebra nun verzichtet habe. Es zeigt sich, dass die wichtigen topologischen Anwendungen auch ohne diese Hilfsmittel unter milden zusätzlichen Voraussetzungen, die meistens erfüllt sind, hergeleitet werden können. Allerdings stehen die mehr theoretischen Sätze wie Koeffizienten-Theorem und Künneth-Formel nun nicht mehr in der sonst in der Literatur üblichen Allgemeinheit zur Verfügung. Daher enthält der vierte Abschnitt dieser Ergänzungen eine kurze Einführung in die homologische Algebra und der fünfte Abschnitt die Herleitung der allgemeineren Koeffizienten- und Künneth-Theoreme.

Wuppertal, im Juli 2009

Erich Ossa

Inhaltsverzeichnis

1	Das Haarsche Maß	1
2	Der Satz von Eilenberg-Zilber	5
3	Endlich erzeugte abelsche Gruppen	11
4	Homologische Algebra	15
5	Koeffizienten- und Künneth-Theoreme	25

1 Das Haarsche Maß

In diesem Abschnitt wollen wir Satz 4.1.9 des Buches über die Existenz eines Haarschen Maßes auf einer kompakten topologischen Gruppe G beweisen.

Zur Erinnerung: $\mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ bezeichnet die Menge aller stetigen reell-wertigen Funktionen auf G . Für $f \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ ist $\|f\| := \sup_{x \in G} |f(x)|$. Für $f \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ und $g \in G$ sind die Funktionen $R_g f$ und $L_g f \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ definiert durch $R_g f(x) = f(xg)$ und $L_g f(x) = f(gx)$.

Wir konstruieren zunächst ein rechts-invariantes Haarsches Maßes auf G . Dieses ist eine lineare Abbildung \int_G von dem normierten Vektorraum $\mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ nach \mathbf{R} mit den Eigenschaften

1. $\int_G R_g f = \int_G f$ für jedes $g \in G$.
2. Für $f > 0$ ist $\int_G f > 0$.
3. Für konstantes f ist $\int_G f = f(1)$.

In einem zweiten Schritt werden wir dann zeigen, dass dieses Maß auch links-invariant sein muss.

Für $f \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ sei $\mathcal{R}(f)$ die Menge aller $R_g f$ für $g \in G$. Dann ist $\mathcal{R}(f)$ als Bild von G ein kompakter Teilraum von $\mathcal{C}(G; \mathbf{R})$. Wir bilden von den Elementen von $\mathcal{R}(f)$ nun Mittelwerte $\sum_i \lambda_i R_{g_i} f$ mit $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$. Es sei

$$\mathcal{K}(f) = \overline{\text{Kon}(\mathcal{R}(f))}$$

der topologische Abschluss der konvexen Hülle von $\mathcal{R}(f)$ in $\mathcal{C}(G; \mathbf{R})$.

Falls ein rechts-invariantes Haarsches Maß \int_G auf G existiert, muss für jedes $\varphi \in \mathcal{K}(f)$ der Wert $\int_G \varphi = \int_G f$ sein. Falls also $\mathcal{K}(f)$ eine konstante Funktion ψ enthält, ist $\psi(1) = \int_G f$. Wir werden zeigen, dass solch ein ψ existiert, womit dann die Existenz von \int_G mit Eigenschaft 1. und 3. nachgewiesen ist. Eigenschaft 2. ist bei dieser Konstruktion ebenfalls klar.

Dazu sei für ein $\varphi \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ die Schwankung von φ durch

$$\sigma(\varphi) := \max_{g \in G} \varphi(g) - \min_{g \in G} \varphi(g)$$

definiert; diese Definition ist sinnvoll wegen der Kompaktheit von G . Es ist weiter klar, dass $\sigma : \mathcal{C}(G; \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion ist. Für $\varphi \in \mathcal{K}(f)$ ist dabei $\sigma(\varphi) \leq \sigma(f)$. Wir suchen ein $\psi \in \mathcal{K}(f)$ mit $\sigma(\psi) = 0$.

Lemma 1.1

Ist $f \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ nicht konstant, so gibt es ein $\varphi \in \mathcal{K}(f)$ mit $\sigma(\varphi) < \sigma(f)$.

1 Das Haarsche Maß

Beweis: Es sei $\mu := \max_{g \in G} f(g)$ und o.B.d.A. $\min_{g \in G} f(g) = 0$. Seien $x \in G$ und $\varepsilon > 0$, so dass für y in einer Umgebung U von x die Ungleichung $f(y) < \mu - \varepsilon$ erfüllt ist. Dann gibt es endlich viele $g_i \in G$, $1 \leq i \leq m$, so dass G von den Mengen Ug_i^{-1} überdeckt wird. Ist nun $\varphi = \sum_i m^{-1} R_{g_i} f$, so gilt für jedes $y \in G$, dass $\varphi(y) \leq \mu - m^{-1}\varepsilon$ ist. Es folgt $\sigma(\varphi) \leq \sigma(f) - m^{-1}\varepsilon$. \square

Es reicht also zu zeigen, dass σ auf $\mathcal{K}(f)$ sein Minimum annimmt. Wir benötigen nun ein Kriterium dafür, dass eine Teilmenge von $\mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ kompakt ist.

Definition 1.2

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und \mathcal{H} eine Familie reeller Funktionen auf X . Dann heißt \mathcal{H} gleichgradig stetig in x , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt, so dass gilt:

$$\varphi \in \mathcal{H} \text{ und } y \in U \implies |\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

\mathcal{H} heißt gleichgradig stetig (auf X), wenn \mathcal{H} in jedem Punkt $x \in X$ gleichgradig stetig ist.

Der fundamentale Kompaktheits-Satz in diesem Zusammenhang ist nun

Satz 1.3 (Arzela-Ascoli)

Sei X ein kompakter topologischer Raum und $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ ein abgeschlossener Teilraum. Es sei \mathcal{H} gleichgradig stetig, und für jedes $x \in X$ sei $\{\varphi(x) \mid \varphi \in \mathcal{H}\} \subset \mathbf{R}$ beschränkt. Dann ist \mathcal{H} kompakt.

Wir werden diesen Satz am Schluss dieses Abschnitts beweisen. Zunächst verifizieren wir die Voraussetzungen für unsere Anwendung. Der erste Teil folgt dabei mit dem Standard-Beweis der Analysis für diese Situation:

Hilfssatz 1.4

$\mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ ist vollständiger metrischer Raum.

Interessanter ist die gleichgradige Stetigkeit. Hier spielt eine wesentliche Rolle, dass jede stetige Funktion auf G schon gleichmäßig stetig ist:

Hilfssatz 1.5

Sei $f \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U des Einselements in G , so dass gilt

$$x, y \in G \text{ und } y \in Ux \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beweis: Zunächst gibt es zu jedem $z \in G$ eine Umgebung V_z des Einselements mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ für $y \in V_z z$. Sei nun U_z eine Umgebung des Einselements mit $U_z U_z \subset V_z$. Ist dann $x \in U_z z$ und $y \in U_z x$, so folgt $x \in V_z z$ und $y \in U_z U_z z \subset V_z z$, also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wird nun G von endlich vielen Umgebungen $U_{z_i} z_i$ überdeckt, so ist $\bigcap_i U_{z_i}$ die gesuchte Umgebung U des Einselements. \square

Wir erhalten damit

Hilfssatz 1.6

$\mathcal{K}(f)$ ist gleichgradig stetig.

Beweis: Sei f gegeben und U eine Umgebung des Einselements wie in Hilfssatz 1.5. Offenbar hat dann U auch die Eigenschaft

$$x', y' \in G \text{ und } y' \in Ux' \implies |R_g f(x') - R_g f(y')| < \varepsilon ,$$

denn mit $x = x'g, y = y'g$ gilt $y \in Ux$. Bei Bildung von endlichen Konvex-Kombinationen bleibt die Abschätzung aber offensichtlich erhalten. \square

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{K}(f)$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli erfüllt. Es folgt die Kompaktheit von $\mathcal{K}(f)$ und damit die Existenz einer konstanten Funktion $\psi = \psi_f$ in $\mathcal{K}(f)$. Mit $\int_G f := \psi(1)$ ist ein rechts-invariantes Maß wohldefiniert.

Es ist jedoch noch nachzuweisen, dass \int_G linear ist. Zur Abkürzung sei $a_1 = \int_G f_1$ und $a_2 = \int_G f_2$ gesetzt. Dann gibt es zwei endliche Konvex-Kombinationen $\tilde{f}_1 = \sum_i \lambda_i R_{g_i} f_1$ und $\tilde{f}_2 = \sum_j \mu_j R_{h_j} f_2$, so dass \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 sich von den konstanten Funktionen a_1 und a_2 um weniger als ε unterscheiden. Es ist nun trivial nachzuprüfen, dass

$$\int_G \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j R_{g_i h_j} (f_1 + f_2)$$

sich von $a_1 + a_2$ ebenfalls um weniger als ε unterscheidet. Hieraus folgt aber die Gleichung $\int_G (f_1 + f_2) = \int_G f_1 + \int_G f_2$.

Um zu zeigen, dass das so konstruierte Integral auch links-invariant ist, betrachten wir die Abbildung L_g von $\mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ in sich. Sie bildet offenbar $\mathcal{K}(f)$ bijektiv auf $\mathcal{K}(L_g f)$ ab. Da das Bild einer konstanten Funktion wieder konstant ist, folgt unmittelbar die Behauptung.

Aufgabe 1.7

Für $f \in \mathcal{C}(G; \mathbf{R})$ sei f^- durch $f^-(g) = f(g^{-1})$ definiert. Dann gilt

$$\int_G f^- = \int_G f .$$

Hinweis: Die Zuordnung $f \mapsto \int_G f^-$ ist ein Haarsches Maß für G .

Es bleibt schließlich noch der Satz von Arzela-Ascoli zu beweisen. Sei also $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ abgeschlossen, gleichgradig stetig und beschränkt in dem im Satz formulierten Sinne.

Nach Satz 2.4.5 des Buchs genügt es zu zeigen, dass \mathcal{H} vollständig und total beschränkt ist. Dabei ist die Vollständigkeit trivial, da eine Cauchy-Folge in \mathcal{H} erstens wegen der Vollständigkeit von \mathbf{R} punktweise konvergiert, zweitens aber sogar gleichmäßig wegen der Definition der Metrik in $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$. Der entscheidende Punkt ist also, dass wir \mathcal{H} mit endlich vielen ε -Kugeln überdecken müssen.

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von \mathcal{H} und der Kompaktheit von X gibt es endlich viele Punkte $x_i \in X$ und Umgebungen U_i von x_i mit $X = U_1 \cup \dots \cup U_m$, so dass

1 Das Haarsche Maß

$|f(x_i) - f(y)| < \varepsilon'$ ist für alle $y \in U_i$ und $f \in \mathcal{H}$. Da die Menge $W_i = \{f(x_i) \mid f \in \mathcal{H}\}$ der Funktionswerte an der Stelle x_i eine beschränkte Teilmenge von \mathbf{R} ist, gibt es endlich viele reelle Zahlen $e(i, j)$, deren ε' -Umgebungen diese Menge W_i ganz überdecken. Zu $f \in \mathcal{H}$ gibt es also ein Tupel $J = (j_1, \dots, j_m)$ von Indizes mit $|f(x_i) - e(i, j_i)| < \varepsilon'$; es sei \mathcal{H}_J die Menge aller $f \in \mathcal{H}$, die diese Bedingung erfüllen. Dann wird \mathcal{H} von den endlich vielen Mengen \mathcal{H}_J überdeckt. Es ist nun trivial nachzuprüfen, dass für jedes y in X gilt

$$f, g \in \mathcal{H}_J \implies |f(y) - g(y)| < 4\varepsilon'.$$

Mit $\varepsilon = 4\varepsilon'$ ist also jedes \mathcal{H}_J ganz in einer ε -Kugel enthalten, und \mathcal{H} wird von endlich vielen solcher Kugeln überdeckt.

Zum Schluss sei noch angemerkt, dass ein nur rechts-invariantes Maß sogar auf jeder lokal-kompakten topologischen Gruppe existiert; es ist dann allerdings nicht notwendig auch links-invariant. Es schadet übrigens nichts, bei der Diskussion Haarscher Maße die Gruppe G von vornherein als Hausdorff-Raum vorauszusetzen: Ist G nicht hausdorffsch, so existiert ein Normalteiler $K \subset G$, so dass jede stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ über den hausdorffschen Quotienten G/K faktorisiert.

2 Der Satz von Eilenberg-Zilber

Sei zunächst \mathbf{C} eine beliebige Kategorie. Sei $\partial^+ \mathbf{Ab}$ die Kategorie der Kettenkomplexe, die in nicht-negativen Dimensionen konzentriert sind.

Wir betrachten Funktoren $F_*, G_* : \mathbf{C} \rightarrow \partial^+ \mathbf{Ab}$. Dann sind $F_n, G_n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ Funktoren von \mathbf{C} in die Kategorie der abelschen Gruppen. Eine natürliche Transformation φ_* von F_* nach G_* besteht aus natürlichen Transformationen φ_n von F_n nach G_n , für die gilt $\partial_n^G \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \partial_n^F$. Sei ψ_* eine weitere natürliche Transformation von F_* nach G_* . Eine natürliche Ketten-Homotopie von φ_* nach ψ_* ist dann eine Familie von natürlichen Transformationen D_n von F_n nach G_{n+1} , so dass gilt

$$\partial_{n+1}^G \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n^F = \varphi_n - \psi_n .$$

Es ist klar, dass natürliche Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation für natürliche Transformationen von F_* nach G_* definiert; es sei

$$\pi(F_*, G_*)$$

die Menge der Äquivalenz-Klassen.

Unser Ziel ist es, $\pi(F_*, G_*)$ in der folgenden Situation zu bestimmen: $\mathbf{C} = \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ ist die Kategorie der Paare von topologischen Räumen und F_*, G_* sind die Funktoren $S_*(X \times Y)$ beziehungsweise $S_*(X) \otimes S_*(Y)$.

Wir kehren zu der allgemeinen Situation zurück, nehmen dabei aber an, dass F_*, G_* Voraussetzungen erfüllen, die analog zum Fundamentallemma der homologischen Algebra sind: Ist F_* "frei" und G_* "azyklisch", so wird $\pi(F_*, G_*)$ "durch $\text{Hom}(H_0(F_*), H_0(G_*))$ bestimmt". Die in Anführungszeichen stehenden Begriffe sollen nun präzisiert werden.

Wir nennen F_n frei, wenn es Objekte $M_{n,j} \in \mathbf{C}$, $j \in I_n$, gibt und Elemente $u_{n,j} \in F_n(M_{n,j})$, so dass für jedes $X \in \mathbf{C}$ die Elemente

$$F_n(f)(u_{n,j}) \in F_n(X) \text{ für } f : M_{n,j} \rightarrow X$$

eine Basis von $F_n(X)$ bilden. Man nennt die $M_{n,j}$ auch die Modelle für F .

Ist dann $\varphi : F_n \rightarrow G_n$ eine natürliche Transformation, so ist φ durch die Werte

$$\varphi(u_{n,j}) \in G_n(M_{n,j})$$

eindeutig bestimmt: Ist $x \in F_n(X)$, so ist $x = \sum \lambda_{i,j} F_n(f_{i,j})(u_{n,j})$ für geeignete $\lambda_{i,j} \in \mathbf{Z}$ und $f_{i,j} : M_{n,j} \rightarrow X$; es wird dann $\varphi(x) = \sum \lambda_{i,j} G_n(f_{i,j})\varphi(u_{n,j})$ wegen der Natürlichkeit von φ .

Wir setzen voraus, dass jedes F_n im obigen Sinne frei ist. Dann ist eine natürliche Transformation $\varphi_* : F_* \rightarrow G_*$ eindeutig bestimmt durch die Werte

$$\varphi_n(u_{n,j}) \in G_n(M_{n,j}) ;$$

2 Der Satz von Eilenberg-Zilber

allerdings können diese nun nicht mehr beliebig vorgegeben werden, sondern müssen der Verträglichkeitsbedingung $d_n^G \varphi_n = \varphi_{n-1} d_n^F$ genügen. Für G_* setzen wir nun voraus, dass gilt:

$$H_i(G_*(M_{n,j})) = 0 \text{ für } i > 0 .$$

Sei $\mathbf{M} \subset \mathbf{C}$ die Unterkategorie, die als Objekte die $M_{n,j}$ hat und zwischen zwei Objekten die gleichen Morphismen-Mengen wie \mathbf{C} . Sei $i : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{C}$ der Inklusions-Funktor. Sei $H_0^{\mathbf{M}}(F_*, G_*)$ die Menge der natürlichen Transformation von $H_0 \circ F_* \circ i$ in $H_0 \circ G_* \circ i$. Dann gilt:

Satz 2.1 (Azyklische Modelle)

Unter den obigen Voraussetzungen ist die kanonische Abbildung

$$\pi(F_*, G_*) \rightarrow H_0^{\mathbf{M}}(F_*, G_*)$$

bijektiv.

Wir beweisen zunächst die Surjektivität. Sei

$$\varphi : H_0 \circ F_* \circ i \rightarrow H_0 \circ G_* \circ i$$

eine natürliche Transformation und $v_{0,j} \in G_0(M_{0,j})$ ein Repräsentant der Homologie-Klasse $\varphi[u_{0,j}] \in H_0(F_*(M_{0,j}))$. Wir setzen

$$\varphi_0(u_{0,j}) = v_{0,j} ;$$

nach den obigen Überlegungen definiert dies eine natürliche Transformation

$$\varphi_0 : F_0 \rightarrow G_0$$

mit der Eigenschaft

$$\varphi[x] = [\varphi_0 x] \text{ für } x \in F_0(X) .$$

Wir nehmen induktiv nun an, dass natürliche Transformationen

$$\varphi_i : F_i \rightarrow G_i \text{ für } 0 \leq i < n$$

definiert sind mit $d_i^G \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ d_i^F$ für $i > 0$. Betrachte $\varphi_{n-1}(d_n^F u_{n,j}) \in G_{n-1}(M_{n,j})$; ist $n = 1$, so repräsentiert dieses Element in $H_0(G_*(M_{1,j}))$ die Homologiekategorie $\varphi[d_1^F u_{1,j}] = \varphi(0) = 0$, ist aber $n > 1$, so ist nach Induktions-Voraussetzung $d_{n-1}^G \varphi_{n-1}(d_n^F u_{n,j}) = \varphi_{n-2}(d_{n-1}^F d_n^F u_{n,j}) = 0$. In jedem Fall gibt es ein $v_{n,j} \in G_n(M_{n,j})$ mit

$$d_n^G v_{n,j} = \varphi_{n-1} d_n^F u_{n,j} .$$

Wir setzen

$$\varphi_n(u_{n,j}) = v_{n,j} .$$

Dies definiert eine natürliche Transformation

$$\varphi_n : F_n \rightarrow G_n$$

mit der Eigenschaft $d_n^G \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n^F$.

Damit ist die Surjektivität von $\pi(F_*, G_*) \rightarrow H_0^{\mathbf{M}}(F_*, G_*)$ bewiesen. Es bleibt noch die Injektivität zu zeigen.

Seien also $\varphi_*, \psi_* : F_* \rightarrow G_*$ natürliche Transformationen, so dass gilt

$$(\varphi_0)_* = (\psi_0)_* : H_0(F_*(M_{n,j})) \rightarrow H_0(G_*(M_{n,j})) .$$

Dann ist insbesondere

$$\varphi_0(u_{0,j}) - \psi_0(u_{0,j}) = d_1^G w_{1,j}$$

für ein $w_{1,j} \in G_1(M_{0,1})$. Mit

$$D_0(u_{0,j}) = w_{1,j}$$

erhalten wir eine natürliche Transformation $D_0 : F_0 \rightarrow G_1$ mit $d_1^G \circ D_0 = \varphi_0 - \psi_0$.

Seien nun

$$D_n : F_n \rightarrow G_{n+1}$$

mit $d_{i+1}^G \circ D_i + D_{i-1} \circ d_i^F = \varphi_i - \psi_i$ für $0 \leq i < n$ gegeben (mit $D_{-1} = 0$), wobei $n > 0$ ist. Betrachte

$$\bar{u}_{n,j} = (\varphi_n - \psi_n - D_{n-1} \circ d_n^F)(u_{n,j}) \in G_n(M_{n,j})$$

.

Wegen

$$\begin{aligned} (d_n^G \circ D_{n-1}) \circ d_n^F &= (\varphi_{n-1} - \psi_{n-1} - D_{n-2} \circ d_{n-1}^F) \circ d_n^F \\ &= (\varphi_{n-1} - \psi_{n-1}) \circ d_n^F \end{aligned}$$

wird

$$d_n^G \circ (\varphi_n - \psi_n - D_{n-1} \circ d_n^F) = 0 .$$

Daher ist $\bar{u}_{n,j}$ ein Zyklus, also wegen $H_n(G_*(M_{n,j})) = 0$ ein Rand:

$$\bar{u}_{n,j} = d_{n+1}^G w_{n,j} \quad \text{mit } w_{n,j} \in G_{n+1}(M_{n,j}) .$$

Dann definiert $D_n(u_{n,j}) = w_{n,j}$ eine natürliche Transformation $D_n : F_n \rightarrow G_{n+1}$ mit der Eigenschaft: $d_{n+1}^G \circ D_n = \varphi_n - \psi_n - D_{n-1} \circ d_n^F$.

Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

Wir kommen nun zu der Anwendung auf den Satz von Eilenberg-Zilber.

Sei $\mathbf{C} = \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ die Kategorie der Paare von topologischen Räumen. Sei

$$F_*(X, Y) = S_*(X \times Y) \quad \text{und} \quad G_*(X, Y) = S_*(X) \otimes S_*(Y) .$$

Wir wählen $I_n = \{0\}$, $M_{n,0} = (\Delta^n, \Delta^n)$ und definieren

$$u_{n,0} : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n$$

als die Diagonal-Abbildung. Wegen

$$\text{Mor}_{\mathbf{C}}(M_{n,0}, (X, Y)) = \mathcal{S}_n(X) \times \mathcal{S}_n(Y)$$

2 Der Satz von Eilenberg-Zilber

ist dann tatsächlich F_* frei; offensichtlich ist G_* azyklisch. Da $H_0 \circ F_* \circ i$ und $H_0 \circ G_* \circ i$ die konstanten Funktoren $M_{n,0} \mapsto \mathbf{Z}$ und $f \mapsto \text{id}_{\mathbf{Z}}$ sind, ist $H_0^{\mathbf{M}}(F_*, G_*) \cong \mathbf{Z}$.

Sei wieder $\mathbf{C} = \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$ wie oben, aber $F_*(X, Y) = S_*(X) \otimes S_*(Y)$ und $G_*(X, Y) = S_*(X \times Y)$. Wir wählen nun $I_n = \{p \mid 0 \leq p \leq n\}$,

$$M_{n,p} = (\Delta^p, \Delta^{n-p}), \quad 0 \leq p \leq n,$$

und $u_{n,p} = \text{id}_{\Delta^p} \otimes \text{id}_{\Delta^{n-p}} \in F_*(M_{n,p})$.

Wegen $\text{Mor}_{\mathbf{C}}(M_{n,p}, (X, Y)) = \mathcal{S}_p(X) \times \mathcal{S}_{n-p}(Y)$ ist tatsächlich F_* frei; die Azyklizität von G_* ist wieder klar. Der Rest des Arguments verläuft ebenso wie oben.

Wir haben damit erhalten:

Satz 2.2 (Satz von Eilenberg-Zilber)

Es gibt natürliche, bis auf Ketten-Homotopie eindeutig bestimmte Ketten-Homomorphismen

$$\varphi : S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X \times Y) \quad \text{und} \quad \psi : S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y),$$

die in Dimension 0 mit der identischen Abbildung $S_0(X) \otimes S_0(Y) = S_0(X \times Y)$ übereinstimmen. Ferner gibt es natürliche Ketten-Homotopien

$$\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_{S_*(X) \otimes S_*(Y)} \quad \text{und} \quad \varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{S_*(X \times Y)}.$$

Im Buch haben wir in Definition 6.4.2 die Alexander-Whitney-Abbildung als explizite Abbildung

$$AW : S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y)$$

definiert. Wir wollen nun explizit eine inverse Ketten-Homotopieäquivalenz

$$SH : S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X \times Y)$$

konstruieren.

Dazu betrachten wir in der symmetrischen Gruppe S_{p+q} die Teilmenge $M_{p,q}$ aller (p, q) -Mischungen; dabei heißt ein $\mu \in S_{p+q}$ eine (p, q) -Mischung, wenn die Einschränkungen μ' von μ auf $\{1, \dots, p\}$ und μ'' von μ auf $\{p+1, \dots, p+q\}$ beide streng monotone Abbildungen nach $\{1, \dots, p+q\}$ sind. Dann ist μ durch die Teilmengen

$$\mu'(\{1, \dots, p\}), \quad \mu''(\{p+1, \dots, p+q\}) \subset \{1, \dots, p+q\}$$

eindeutig bestimmt. Das Signum einer (p, q) -Mischung μ ist $(-1)^t$ mit der einfachen Formel

$$\begin{aligned} t &= \#\{ (i, j) \mid 1 \leq i < j \leq p+q \mid \mu(j) < \mu(i) \} \\ &= \#\{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q \mid \mu(j) < \mu(i) \} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} (\mu(i) - i). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Anzahl aller (p, q) -Mischungen ist offenbar $\#M_{p,q} = \binom{p+q}{p}$. Eine (p, q) -Mischung $\mu \in M_{p,q}$ definiert eine Abbildung

$$\bar{\mu} : \Delta^{p+q} \rightarrow \Delta^p \times \Delta^q$$

durch $\bar{\mu}(e_0) = (e_0, e_0)$ und

$$\bar{\mu}(e_i) = (e_j, e_k) \implies \bar{\mu}(e_{i+1}) = \begin{cases} (e_{j+1}, e_k) & , \quad \text{falls } \mu^{-1}(i+1) \leq p \\ (e_j, e_{k+1}) & , \quad \text{falls } \mu^{-1}(i+1) > p . \end{cases}$$

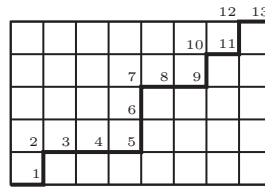


Abbildung 2.1: Eine (p, q) -Mischung

Die Abbildung $\bar{\mu}$ wird am besten wie in der Skizze durch einen Kantenweg auf einem Quadratgitter in der Ebene veranschaulicht: Man beginnt bei $(0, 0)$ und geht im i -ten Schritt entlang der horizontalen Kante, wenn $i \in \mu\{1, \dots, p\}$ ist, und sonst entlang der vertikalen Kante. In diesem Bild ist die Zahl t aus Formel (2.1) die Anzahl der Einheits-Quadrate in dem Rechteck $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$, welche unterhalb des Kantenwegs liegen, also gerade die Fläche unterhalb des Kantenwegs.

Definition 2.3

Die Shuffle-Abbildung

$$SH : S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X \times Y)$$

ist der Homomorphismus, der auf $\sigma \otimes \tau$ (für $\sigma \in S_p(X)$, $\tau \in S_q(Y)$) den Wert

$$SH(\sigma \otimes \tau) = \sum_{\mu \in M_{p,q}} \text{sign}(\mu) \cdot ((\sigma \times \tau) \circ \bar{\mu})$$

annimmt.

Manchmal wird SH auch die Eilenberg-MacLane-Abbildung genannt.

Lemma 2.4

Die Shuffle-Abbildung ist ein natürlicher Ketten-Homomorphismus.

Beweis: Wieder ist nur die Verträglichkeit mit den Rand-Operatoren zu zeigen.

Wir bezeichnen für $\mu \in M_{p,q}$ und $\sigma \in S_p(X)$, $\tau \in S_q(Y)$ mit $SH_\mu(\sigma, \tau)$ das singuläre Simplex $(\sigma \times \tau) \circ \bar{\mu}$. Die Berechnung von $\partial_k SH_\mu(\sigma, \tau)$ soll durch den zu μ gehörenden Kantenweg erläutert werden. Wie oben sei t die Fläche unter diesem Weg.

2 Der Satz von Eilenberg-Zilber

∂_k entspricht dem Weglassen des k -ten Eckpunktes p_k auf dem Kantenweg. Dieser Eckpunkt habe die Koordinaten (x, y) . Es ist also $k = x + y$. Wir haben drei Fälle zu unterscheiden. (Der Sonderfall ∂_8 in der Abbildung wird unten als Punkt 3 erläutert).

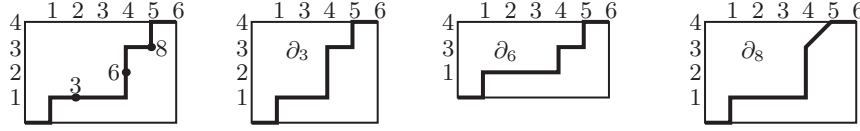


Abbildung 2.2: Ränder von (p, q) -Mischungen

1.: Der Kantenweg verläuft sowohl von p_{k-1} nach p_k wie von p_k nach p_{k+1} horizontal. Dann ist $\partial_k SH_\mu(\sigma, \tau)$ von der Form $SH_h(\partial_x \sigma, \tau)$, wobei $h \in M_{p-1, q}$ zu dem Kantenweg gehört, der aus dem Kantenweg zu μ entsteht, indem alle Punkte mit horizontaler Koordinate $\geq x$ um eine Einheit nach links verschoben werden. Die Fläche unterhalb h ist daher $t_h = t - y$, denn bei der Verschiebung werden genau y Einheits-Quadrate weggelassen. Es ist dann

$$(-1)^k \text{sign}(\mu) \partial_k SH_\mu(\sigma, \tau) = (-1)^x \text{sign}(h) SH_h(\partial_x \sigma, \tau)$$

wegen $k + t \equiv x + t_h \pmod{2}$.

2.: Der Kantenweg verläuft sowohl von p_{k-1} nach p_k wie von p_k nach p_{k+1} vertikal. Dann ist $\partial_k SH_\mu(\sigma, \tau)$ von der Form $SH_v(\sigma, \partial_y \tau)$, wobei $v \in M_{p, q-1}$ zu dem Kantenweg gehört, der aus dem Kantenweg zu μ entsteht, indem alle Punkte mit vertikaler Koordinate $\geq y$ um eine Einheit nach unten verschoben werden. Die Fläche unterhalb v ist daher $t_v = t - p + x$, denn bei der Verschiebung werden $p - x$ Einheits-Quadrate weggelassen. Es ist dann

$$(-1)^k \text{sign}(\mu) \partial_k SH_\mu(\sigma, \tau) = (-1)^{p+y} \text{sign}(v) SH_v(\sigma, \partial_y \tau)$$

wegen $k + t \equiv p + y + t_v \pmod{2}$.

3.: Der Kantenweg verläuft vor und hinter p_k in verschiedenen Richtungen. Verbinden wir p_{k-1} und p_{k+1} durch eine Strecke, so läuft diese diagonal durch ein Einheits-Quadrat Q . Dann ist aber

$$(-1)^k \text{sign}(\mu) \partial_k SH_\mu(\sigma, \tau) = -(-1)^k \text{sign}(\bar{\mu}) \partial_k SH_{\bar{\mu}}(\sigma, \tau),$$

wobei $\bar{\mu} \in M_{p, q}$ zu dem Kantenweg gehört, der um die andere Seite des Quadrats Q herumläuft. Die Beiträge von $\partial_k SH_\mu(\sigma, \tau)$ und $\partial_k SH_{\bar{\mu}}(\sigma, \tau)$ zum Gesamt-Rand von $SH(\sigma \otimes \tau)$ heben sich also gegeneinander weg. \square

Es ist klar, dass AW und SH in Dimension 0 mit der identischen Abbildung übereinstimmen. Da sie natürliche Ketten-Homomorphismen sind, folgt aus dem Satz von Eilenberg-Zilber:

Satz 2.5

AW und SH sind zueinander inverse Ketten-Homotopieäquivalenzen.

3 Endlich erzeugte abelsche Gruppen

In diesem Anhang soll vor allem der Hauptsatz über die Struktur endlich erzeugter abelscher Gruppen bereitgestellt werden. Dies ist der Spezialfall des im Buch zitierten Satzes A.1.3 für den Ring $R = \mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen.

Der Ring \mathbf{Z} ist ein Hauptideal-Ring. Ein Ideal $M \subset \mathbf{Z}$ wird von dem größten gemeinsamen Teiler d aller Elemente von M erzeugt. Ist $M \neq 0$, so ist d gleichzeitig das kleinste positive Element von M .

Wir werden zeigen:

Satz 3.1 (Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen)

Sei A ein endlich erzeugter \mathbf{Z} -Modul. Dann gibt es natürliche Zahlen λ_k , so dass A isomorph ist zu einer endlichen direkten Summe $\bigoplus_k \mathbf{Z}/\lambda_k \mathbf{Z}$.

Wir zerlegen A zunächst in einen Torsions-Anteil und einen torsionsfreien Anteil.

Definition 3.2

Sei A eine abelsche Gruppe. Die Torsions-Untergruppe von A ist

$$\text{Tors}(A) = \{ a \in A \mid na = 0 \text{ für ein } n \in \mathbf{Z} - \{0\} \} .$$

A heißt torsionsfrei, wenn $\text{Tors}(A) = 0$ ist.

Es ist klar, dass die Torsions-Untergruppe $\text{Tors}(A)$ eindeutig bestimmt ist und dass die Quotientengruppe $A/\text{Tors}(A)$ torsionsfrei ist.

Lemma 3.3

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit n Erzeugenden. Ist A torsionsfrei, so ist A sogar frei mit einer Basis von höchstens n Elementen.

Beweis: Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein minimales Erzeugenden-System für A . Wir führen den Beweis durch Induktion über n , wobei der Fall $n = 1$ klar ist.

Sei also $n > 1$ und

$$B := \{ a \in A \mid \lambda a = \mu b_n \text{ für geeignete } \lambda, \mu \in \mathbf{Z} - \{0\} \} .$$

Eine leichte Überlegung zeigt, dass $C := A/B$ torsionsfrei ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist C also eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe.

Sei nun $a \in B$ und $\lambda a = \mu b_n$ mit $\lambda \neq 0$. Wir setzen $\phi(b) := \lambda^{-1}\mu \in \mathbf{Q}$. Dann ist klar, dass $\phi(b)$ unabhängig von der Auswahl von λ und μ ist, und dass

$$\phi : B \rightarrow \mathbf{Q}$$

3 Endlich erzeugte abelsche Gruppen

ein Monomorphismus abelscher Gruppen ist. Es ist also $B \cong \mathbf{Z}$. Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$$

ergibt sich nun $A \cong B \oplus C$ und damit die Behauptung. \square

Korollar 3.4

Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $F := A/\text{Tors}(A)$. Dann ist F eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und

$$A \cong \text{Tors}(A) \oplus F.$$

Der Rang von F wird auch als Rang von A bezeichnet.

Es genügt daher, den obigen Satz 3.1 für Torsionsgruppen zu beweisen. Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 3.5 (Chinesischer Rest-Satz)

Hat $n \in \mathbf{N}$ die Primfaktor-Zerlegung $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, so ist

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/p_1^{k_1}\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}/p_r^{k_r}\mathbf{Z}.$$

Beweis: Zu zwei ganzen Zahlen a, b gibt es nach dem Euklidschen Algorithmus zwei ganze Zahlen α und β , so dass $d = \alpha a + \beta b$ der größte gemeinsame Teiler von a und b ist. Induktiv gibt es eine entsprechende Darstellung für den größten gemeinsamen Teiler endlich vieler gegebener Zahlen.

Habe nun n die obige Primfaktor-Zerlegung und sei $n_i = n/p_i^{k_i}$. Da der größte gemeinsame Teiler von n_1, \dots, n_r gleich 1 ist, gibt es ganze Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit $\sum_i \lambda_i n_i = 1$. Man definiert nun $\varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p_1^{k_1}\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}/p_r^{k_r}\mathbf{Z}$ durch $\varphi(x) = (x\lambda_1, \dots, x\lambda_r)$ und $\psi : \mathbf{Z}/p_1^{k_1}\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}/p_r^{k_r}\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ durch $\psi(x_1, \dots, x_r) = \sum_i x_i n_i$. Es ist trivial nachzuprüfen, dass φ und ψ wohldefiniert und zueinander invers sind. \square

Der gewünschte Satz ergibt sich nun leicht durch Induktion über die Ordnung von A aus dem folgenden Lemma.

Lemma 3.6

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Sei $b \in A$ ein Element maximaler Ordnung m und $B \subset A$ die von b erzeugte Untergruppe. Dann gibt es eine Untergruppe $C \subset A$ mit

$$A \cong B \oplus C.$$

Beweis: Für $A = B$ ist nichts zu beweisen. Wir verwenden Induktion über die Ordnung von A .

Sei $a \in A - B$ ein Element minimaler Ordnung k . Sei p ein Primteiler von k . Aus dem Chinesischen Rest-Satz und der Maximalität von m folgt, dass p ein Teiler von m ist.

Wegen der Minimalität von k ist $pa \in B$, also $pa = \lambda b$ für ein $\lambda \in \mathbf{Z}$. Wegen der Maximalität von m muss $\lambda = p\lambda'$ sein für ein $\lambda' \in \mathbf{Z}$. Sei $d := a - \lambda'b$ und D die von d erzeugte Untergruppe; dann hat D die Ordnung p und es ist $B \cap D = 0$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat $(B + D)/D \subset A/D$ ein Komplement; dieses ist von der Gestalt C/D für eine Untergruppe C von A mit $D \subset C$. Es folgt, dass C ein Komplement von B in A ist. \square

Korollar 3.7

Eine endliche abelsche Gruppe A hat eine Zerlegung

$$A \cong \mathbf{Z}/m_1\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}/m_s\mathbf{Z},$$

wobei die m_i natürliche Zahlen > 1 sind mit der Eigenschaft, dass m_i ein Teiler von m_{i-1} ist. Die sogenannten Torsions-Koeffizienten m_1, \dots, m_s sind durch diese Bedingung eindeutig bestimmt.

Beweis: Nach dem Chinesischen Rest-Satz ist

$$A \cong \bigoplus_j \mathbf{Z}/p_j^{k_{j,1}} \oplus \dots \mathbf{Z}/p_j^{k_{j,s}},$$

wobei $p_1 < \dots < p_t$ Primzahlen sind und für jedes j die Ungleichungen $k_{j,1} \geq \dots \geq k_{j,s} \geq 0$ gelten. Dann muss $m_i = \prod_j p_j^{k_{j,i}}$ sein. \square

Es folgt, dass eine endlich erzeugte abelsche Gruppe A bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist durch den Rang r und durch die Torsions-Koeffizienten m_1, \dots, m_k der Torsions-Untergruppe $\text{Tors}(A)$.

Um die obigen Ergebnisse auf Hauptidealringe zu übertragen, muss zunächst die Teilbarkeitslehre in Hauptidealringen entwickelt werden. Dazu sei z.B. auf das im Haupttext zitierte Buch von Ribenboim verwiesen.

4 Homologische Algebra

Im Abschnitt 6.1 des Buches hatten wir exakte Funktoren zwischen Kategorien von Moduln betrachtet. Hier wollen wir nun diese Untersuchungen vertiefen. Es ist klar, dass es genügt, als Ziel-Kategorie die Kategorie **Ab** der \mathbf{Z} -Moduln zu nehmen. Wir formulieren daher im folgenden unsere Überlegungen für Funktoren in die Kategorie der abelschen Gruppen. Sie gelten dann natürlich auch für Funktoren in Kategorien von Moduln, da wir diese als Unter-Kategorien der Kategorie der abelschen Gruppen ansehen können.

Sei R ein fest gewählter kommutativer Ring mit Einselement. Unser Interesse gilt insbesondere den Funktoren $\text{Hom}_R(-, -)$ und $- \otimes_R -$, wobei wir im folgenden oft den Index R weglassen werden, wenn klar ist, welcher Ring R gemeint ist. Bekanntschaft mit dem Tensor-Produkt setzen wir hier voraus; eine kurze Einführung findet sich in Anhang A.1.3 des Buchs.

Der Hom-Funktor ist in keiner seiner Variablen exakt, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen. Als erstes wenden wir auf die exakte Sequenz von \mathbf{Z} -Moduln $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/2 \rightarrow 0$ den Funktor $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2, -)$ an. Die induzierte Sequenz ist nicht exakt, da $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}) = 0$ ist, aber $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}/2) \cong \mathbf{Z}/2$ nicht. Als zweites Beispiel betrachten wir die Sequenz $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$. Wenden wir nun $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Z})$ an, so erhalten wir wieder keine exakte Sequenz, da $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) = 0$ ist, aber $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ nicht.

Die Funktoren $\text{Hom}_R(M, -)$ und $\text{Hom}_R(-, N)$ sind jedoch beide links-exakt in dem im folgenden Satz beschriebenen Sinn. Der Satz selbst ist lediglich eine triviale Umformulierung der Definitionen von Kokern und Kern.

Satz 4.1

1. Sei $M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \rightarrow 0$ exakt. Dann ist die induzierte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M_3, N) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(M_2, N) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}(M_1, N)$$

ebenfalls exakt.

2. Sei $0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2 \xrightarrow{\beta} N_3$ exakt. Dann ist die induzierte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N_1) \xrightarrow{\alpha_*} \text{Hom}(M, N_2) \xrightarrow{\beta_*} \text{Hom}(M, N_3)$$

ebenfalls exakt.

Das Tensorprodukt dagegen ist rechts-exakt:

4 Homologische Algebra

Satz 4.2

Sei $M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \rightarrow 0$ exakt. Dann ist auch die induzierte Sequenz

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{\alpha \otimes \text{id}} M_2 \otimes N \xrightarrow{\beta \otimes \text{id}} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Für jeden Modul T ist die induzierte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3 \otimes N, T) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}_R(M_2 \otimes N, T) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}_R(M_1 \otimes N, T) \quad (4.1)$$

exakt nach dem vorangehenden Satz 4.1, denn sie entsteht durch Anwenden des Funktors $\text{Hom}_R(-, \text{Hom}_R(N, T))$ auf die Sequenz $M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \rightarrow 0$.

Sei zunächst $T = \text{Coker}(\beta \otimes \text{id})$ und $\pi : M_3 \otimes N \rightarrow T$ die Projektion. Dann ist $\beta^* \pi = 0$, wegen der Exaktheit von (4.1) also $\pi = 0$. Das bedeutet aber gerade, dass $\beta \otimes \text{id}$ surjektiv ist.

Nun wählen wir $T = \text{Cokern}(\alpha \otimes \text{id})$ und $\pi : M_2 \otimes N \rightarrow T$ als Projektion. Es ist $\alpha^* \pi = 0$, wegen der Exaktheit von (4.1) also $\pi = \beta^* \varphi$ für ein $\varphi \in \text{Hom}_R(M_3 \otimes N, T)$. Wegen $(\beta \otimes \text{id}) \circ (\alpha \otimes \text{id}) = 0$ faktorisiert $\beta \otimes \text{id}$ durch π und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & M_2 \otimes N & & \\ & \swarrow \pi & \downarrow \beta \otimes \text{id} & \searrow \pi & \\ T & \xrightarrow[\bar{\beta}]{} & M_3 \otimes N & \xrightarrow[\varphi]{} & T \end{array}$$

Da π und $\beta \otimes \text{id}$ surjektiv sind, müssen $\bar{\beta}$ und φ inverse Isomorphismen sein. Die Isomorphie von $\bar{\beta}$ ist gerade die behauptete Exaktheit bei $M_2 \otimes N$. \square

Der letzte Satz kann oft dazu benutzt werden, Tensorprodukte zu berechnen. Wegen der kanonischen Isomorphismen

$$R \otimes_R N \cong N \quad \text{und} \quad (\bigoplus_i M_i) \otimes_R N \cong \bigoplus_i (M_i \otimes_R N)$$

ist das Tensorprodukt eines freien Moduls mit N einfach eine direkte Summe von Kopien von N , indiziert durch die Basis des freien Moduls. Sind nun M_1, M_2 frei und ist $M_3 \cong \text{Kokern}(\alpha : M_1 \rightarrow M_2)$, so wird $M_3 \otimes N \cong \text{Kokern}(\alpha \otimes \text{id}_N)$. Zum Beispiel erhalten wir so (für $k \in \mathbf{Z}$)

$$\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} N \cong N/(kN) .$$

Das Tensor-Produkt ist zwar rechts-exakt, aber nicht links-exakt. Tensorieren mit $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ über \mathbf{Z} führt die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ wegen $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = 0$ und $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ in eine nicht-exakte Sequenz über.

Definition 4.3

Ein R -Modul M heißt

1. projektiv, falls der Funktor $\text{Hom}_R(M, -)$ exakt ist,
2. injektiv, falls der Funktor $\text{Hom}_R(-, M)$ exakt ist,
3. flach, falls der Funktor $M \otimes_R -$ exakt ist.

Für uns werden projektive Moduln besonders wichtig sein. Ein R -Modul P ist genau dann projektiv, wenn zu jedem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakter Zeile eine kommutative Ergänzung $F : P \rightarrow M$ mit $f = \alpha \circ F$ existiert. Eine wichtige Charakterisierung ist die folgende:

Lemma 4.4

Ein R -Modul M ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand eines freien R -Moduls ist. Jeder projektive R -Modul ist flach.

Beweis: Es ist klar, dass jeder freie Modul projektiv ist und dass jeder direkte Summand eines projektiven Moduls selbst wieder projektiv ist. Ebenso ist klar, dass jeder freie Modul flach ist und dass jeder direkte Summand eines flachen Moduls selbst wieder flach ist.

Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass jeder projektive Modul P direkter Summand eines freien Moduls ist. Sei dazu F ein freier Modul und $\varphi : F \rightarrow P$ ein Epimorphismus. Zum Beispiel können wir F mit Basis $\{e_m \mid m \in P\}$ wählen und φ durch $\varphi(e_m) = m$ definieren. Da

$$F \xrightarrow{\varphi} P \rightarrow 0$$

exakt ist, faktorisiert die Identität von P durch F , das heißt P ist direkter Summand von F . \square

Eine der wesentlichen Ideen der homologischen Algebra ist es, beliebige Moduln durch projektive Moduln zu approximieren.

Definition 4.5

Sei M ein R -Modul. Eine projektive Auflösung von M besteht aus einem nicht-negativen Kettenkomplex (P_*, d_*) und einem Homomorphismus $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$, so dass gilt:

1. $H_n(P_*, d_*) = 0$ für $n > 0$,
2. es ist $\varepsilon \circ d_1 = 0$ und ε induziert einen Isomorphismus $\varepsilon_* : H_0(P_*, d_*) \xrightarrow{\cong} M$,
3. jeder Modul P_n ist projektiv.

Die ersten beiden Bedingungen lassen sich auch dahingehend formulieren, dass die Sequenz

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \xleftarrow{d_1} P_1 \leftarrow \dots \leftarrow P_{n-1} \xleftarrow{d_n} P_n \leftarrow \dots$$

4 Homologische Algebra

exakt ist. Einen Spezialfall projektiver Auflösungen bilden freie Auflösungen, bei denen verlangt wird, dass jeder Modul P_n sogar frei ist.

Satz 4.6

Jeder R -Modul M hat eine freie Auflösung.

Beweis: Wir konstruieren induktiv exakte Sequenzen

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \leftarrow \dots \leftarrow P_n \leftarrow M_{n+1} \leftarrow 0$$

mit freien Moduln P_0, \dots, P_n . Für den Induktionsschritt wählen wir einen freien Modul P_{n+1} , so dass $0 \leftarrow M_{n+1} \leftarrow P_{n+1} \leftarrow M_{n+2} \leftarrow 0$ exakt ist. Wir können zum Beispiel P_{n+1} als freien Modul mit Basis $\{e_m \mid m \in M_{n+1}\}$ nehmen und die Abbildung $P_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$ durch $e_m \mapsto m$ definieren. \square

Der folgende Satz bildet das Fundament der homologischen Algebra. Er beinhaltet, dass sich die Konstruktion von Auflösungen auf Homomorphismen von Moduln erweitern lässt.

Satz 4.7 (Hauptlemma der homologischen Algebra)

Sei (P_*, d_*, ε) eine projektive Auflösung von M und $(P'_*, d'_*, \varepsilon')$ eine projektive Auflösung von M' . Sei $f : M \rightarrow M'$ ein Homomorphismus von R -Moduln. Dann existiert ein bis auf Ketten-Homotopie eindeutig bestimmter Homomorphismus $F_* : (P_*, d_*) \rightarrow (P'_*, d'_*)$ von Kettenkomplexen, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\varepsilon_*} & H_0(P_*, d_*) \\ \downarrow f & & \downarrow H_0(f) \\ M' & \xleftarrow{\varepsilon'_*} & H_0(P'_*, d'_*) \end{array}$$

kommutiert.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Existenz, indem wir die gesuchten Homomorphismen F_n durch Induktion über n konstruieren.

Da $\varepsilon : P'_0 \rightarrow M'$ surjektiv und P_0 projektiv ist, faktorisiert der Homomorphismus $f \circ \varepsilon : P'_0 \rightarrow M$ durch eine Abbildung $F_0 : P_0 \rightarrow P'_0$. Dann gilt $\varepsilon' \circ F_0 \circ d_1 = f \circ \varepsilon \circ d_1 = 0$, so dass $F_0 \circ d_1$ eine Abbildung von P_1 nach $\text{Kern}(\varepsilon') = \text{Bild}(d'_1)$ ist. Da P_1 projektiv ist, existiert eine Faktorisierung von $F_0 \circ d_1$ durch $F_1 : P_1 \rightarrow P'_1$ mit $d'_1 \circ F_1 = F_0 \circ d_1$.

Der allgemeine Fall geht ganz genauso: Sei $n > 1$ und F_{n-1} schon konstruiert mit $d'_{n-1} \circ F_{n-1} = F_{n-2} \circ d_{n-1}$. Dann gilt

$$d'_{n-1} \circ F_{n-1} \circ d_n = F_{n-2} \circ d_{n-1} \circ d_n = 0,$$

so dass $F_{n-1} \circ d_n$ eine Abbildung von P_n nach $\text{Kern}(d'_{n-1}) = \text{Bild}(d'_n)$ ist. Da P_n projektiv ist, existiert eine Faktorisierung von $F_{n-1} \circ d_n$ durch $F_n : P_n \rightarrow P'_n$ mit $d'_n \circ F_n = F_{n-1} \circ d_n$. Die Existenz der Abbildungen F_n ist damit bewiesen.

Seien nun F_* und \tilde{F}_* Homomorphismen von (P_*, d_*) nach (P'_*, d'_*) , die in der nullten Homologie die Abbildung f induzieren. Für die Eindeutigkeit haben wir Homomorphismen $D_n : P_n \rightarrow P'_{n+1}$ zu finden mit

$$d'_{n+1} \circ D_n + D_{n-1} \circ d_n = F_n - \tilde{F}_n.$$

Wir konstruieren die D_n wieder durch Induktion über n . Zunächst induziert $F_0 - \tilde{F}_0$ die Nullabbildung in Homologie und bildet also P_0 nach $\text{Kern}(\varepsilon') = \text{Bild}(d'_1)$ ab. Da P_0 projektiv ist, gibt es also ein $D_0 : P_0 \rightarrow P'_1$ mit $d'_1 \circ D_0 = F_0 - \tilde{F}_0$. Sei nun $n > 0$ und D_{n-1} schon konstruiert mit $d'_n \circ D_{n-1} + D_{n-2} \circ d_{n-1} = F_{n-1} - \tilde{F}_{n-1}$. Dann gilt

$$d'_n \circ D_{n-1} \circ d_n = (F_{n-1} - \tilde{F}_{n-1}) \circ d_n - D_{n-2} \circ d_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ (F_n - \tilde{F}_n) ,$$

so dass $D_{n-1} \circ d_n - (F_n - \tilde{F}_n)$ eine Abbildung von P_n nach $\text{Kern}(d'_n) = \text{Bild}(d'_{n+1})$ ist. Da P_n projektiv ist, existiert eine Faktorisierung dieser Abbildung durch $D_n : P_n \rightarrow P'_{n+1}$ mit $d'_{n+1} \circ D_n = D_{n-1} \circ d_n - (F_n - \tilde{F}_n)$. Damit ist alles bewiesen. \square

Der Ring der ganzen Zahlen spielt in der algebraischen Topologie eine besondere Rolle, da der singuläre Komplex immer schon über \mathbf{Z} definiert ist. Wir merken daher noch an, dass über diesem Ring stets projektive Auflösungen einer Länge ≤ 1 existieren. Dies gilt allgemeiner für Hauptidealringe; der betreffende Satz wird im Buch als Satz A.1.2 bewiesen.

Wir benötigen an einer späteren Stelle noch die folgende Präzisierung des obigen Resultats:

Satz 4.8

Sei $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ exakt. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz projektiver Auflösungen

$$0 \rightarrow (P'_*, d'_*, \varepsilon') \xrightarrow{i_*} (P_*, d_*, \varepsilon) \xrightarrow{j_*} (P''_*, d''_*, \varepsilon'') \rightarrow 0$$

mit $\varepsilon'' j_0 = \beta \varepsilon$ und $\varepsilon i_0 = \alpha \varepsilon'$.

Beweis: Seien (P'_*, d'_*) , (P''_*, d''_*) beliebige Auflösungen von M' beziehungsweise M'' . Wir setzen $P_n := P'_n \oplus P''_n$. Sei $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$ durch $\varepsilon|_{P'_0} = \alpha \varepsilon'$ und $\beta \circ (\varepsilon|_{P''_0}) = \varepsilon''$ definiert; sei ebenso $d_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ definiert durch $d_n|_{P'_n} = \text{in}_1 \circ d'_n$ und $\text{pr}_2 \circ d_n|_{P''_n} = d''_n$. Man verifiziert leicht, dass bei geeigneter Wahl von $\text{pr}_1 \circ d_n|_{P''_n} : P''_n \rightarrow P'_{n-1}$ die Folge der d_n zusammen mit ε einen Kettenkomplex bildet, d. h. dass $\varepsilon \circ d_0 = 0$ und $d_{n-1} \circ d_n = 0$ erreicht wird.

Mit $i = \text{in}_1$ und $j = \text{pr}_2$ haben wir dann eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow (P'_*, d'_*) \xrightarrow{i_*} (P_*, d_*) \xrightarrow{j_*} (P''_*, d''_*) \rightarrow 0 .$$

Aus der langen exakten Homologiesequenz folgt nun $H_n(P_*, d_*) = 0$ für $n > 0$. Weiter folgt schließlich aus dem 5-Lemma, dass ε einen Isomorphismus von $H_0(P_*, d_*)$ nach M induziert. \square

Sei nun $R\text{-Res}$ die Kategorie der projektiven Auflösungen über R , das heißt der projektiven nicht-negativen Kettenkomplexe (P_*, d_*) mit $H_n(P_*, d_*) = 0$ für $n > 0$. Sei $R\text{-Res}_h$ die Homotopiekategorie von $R\text{-Res}$ mit den gleichen Objekten, aber Ketten-Homotopie-Klassen von Ketten-Homomorphismen als Morphismen. Dann ist die nullte Homologie

4 Homologische Algebra

ein Funktor

$$H_0 : R\text{-}\mathbf{Res}_h \rightarrow R\text{-}\mathbf{Mod} .$$

Dieser Funktor hat nach den vorigen Sätzen die folgenden Eigenschaften:

1. er ist bijektiv auf Morphismen-Mengen,
2. jedes Objekt von $R\text{-}\mathbf{Mod}$ liegt bis auf Isomorphie im Bild von H_0 .

Solch einen Funktor nennt man eine Äquivalenz von Kategorien. Eine andere Formulierung der obigen Sätze ist also, dass die Kategorie der R -Moduln und die Homotopie-Kategorie der projektiven Auflösungen äquivalent zueinander sind. Für das folgende wäre es eigentlich zweckmäßiger, direkt in der Homotopie-Kategorie der projektiven Auflösungen zu arbeiten. Wir sehen davon ab, da die Kategorie der Auflösungen selber der Anschauung leichter zugänglich ist.

Wir wollen nun projektive Auflösungen benutzen, um die Abweichung des Tensorprodukts \otimes von der Exaktheit zu studieren. Sei für jedes M eine projektive Auflösung $P_*(M)$ von M gewählt.

Definition 4.9

Für R -Moduln M, N sei

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) := H_n(P_*(M) \otimes_R N, d_* \otimes_R \mathrm{id}_N) .$$

Nach dem Hauptlemma (Satz 4.7) gibt es zu jeder beliebigen projektiven Auflösung P_* von M einen *kanonischen* Isomorphismus

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong H_n(P_* \otimes_R N, d_* \otimes_R \mathrm{id}_N) .$$

Insbesondere ist die obige Definition also *nicht abhängig* von der Wahl der Auflösung $P_*(M)$, jedenfalls nur bis auf kanonische Isomorphie. Dennoch ist es für die Definition erforderlich, zumindest in Gedanken eine solche Wahl getroffen zu haben!

Einige Eigenschaften dieser Definition liegen nun auf der Hand:

Satz 4.10

1. $\mathrm{Tor}_n^R(-, -)$ ist ein Funktor $R\text{-}\mathbf{Mod} \times R\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$, der in jeder Variablen additiv ist.
2. Es gibt eine natürliche Äquivalenz

$$\mathrm{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N .$$

3. Ist M oder N flach, so ist

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = \begin{cases} M \otimes_R N & , \quad n = 0 , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Beweis: 1.: ist klar.

2.: ist gerade die Rechts-Exaktheit des Tensor-Produkts.

3.: Das Tensorieren mit einem flachen Modul ist ein exakter Funktor. Ist also N flach und P_* eine projektive Auflösung von M , so ist $H_n(P_* \otimes N) \cong H_n(P_*) \otimes N$ Null für $n > 0$, da P_* bei P_n exakt ist. \square

Als Beispiel betrachten wir den Fall $R = \mathbf{Z}$. Es genügt, als Moduln M zyklische Moduln zu nehmen. Ist $M = \mathbf{Z}$, so ist M flach und es wird

$$\mathrm{Tor}_n(M, N) = \begin{cases} \mathbf{Z} \otimes N \cong N & , \quad n = 0 , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Sei nun $M = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$. Dann ist

$$0 \leftarrow M \leftarrow \mathbf{Z} \xleftarrow{k} \mathbf{Z} \leftarrow 0$$

eine freie Auflösung von M über \mathbf{Z} . Es folgt, wie schon auf Seite 16 erwähnt,

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}, N) = N/kN \cong \mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \otimes N .$$

Weiter erhalten wir

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}, N) = \{n \in N \mid kn = 0\} .$$

Dagegen ist nach Satz A.1.2 des Buchs für alle \mathbf{Z} -Moduln

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{Z}}(M, N) = 0 \text{ für } n \geq 2 ,$$

denn ist P_0 ein freier Modul und $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$ surjektiv, so ist $P_1 := \mathrm{Kern}(\varepsilon)$ wieder frei und

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

eine freie Auflösung von M .

Als weiteres Beispiel betrachten wir die folgende projektive Auflösung von \mathbf{Q} über \mathbf{Z} :

$$0 \leftarrow \mathbf{Q} \xleftarrow{\varepsilon} \bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{Z} \cdot b_n \xleftarrow{d} \bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{Z} \cdot r_n \leftarrow 0$$

mit $\varepsilon(b_n) = \frac{1}{n!}$ und $d(r_n) = b_n - (n+1)b_{n+1}$. Der \mathbf{Z} -Modul \mathbf{Q} ist zwar torsionsfrei, aber nicht frei. Wir erhalten jedoch

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}, M) = \{ (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mid x_n \in M, \ x_n = 0 \text{ für } n \gg 0, \ x_n = (n+1)x_{n+1} \} ,$$

so dass $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}, M) = 0$ folgt. Aus dem nächsten Satz ergibt sich damit, dass \mathbf{Q} ein flacher \mathbf{Z} -Modul ist.

Satz 4.11

Sei $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ exakt. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M, N') \rightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M, N) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M, N'') \rightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M, N') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, N'') \rightarrow M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N'' \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

4 Homologische Algebra

Beweis: Sei (P_*, d_*) eine projektive Auflösung von M . Dann ist jedes P_i insbesondere flach und

$$0 \rightarrow (P_*, d_*) \otimes N' \rightarrow (P_*, d_*) \otimes N \rightarrow (P_*, d_*) \otimes N'' \rightarrow 0$$

wird eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Die gesuchte Sequenz ist die zugehörige lange exakte Homologie-Sequenz. Die Natürlichkeit in Abhängigkeit von der Sequenz $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ ist klar; die Natürlichkeit in der Variablen M folgt unmittelbar aus dem Hauptlemma 4.7 der homologischen Algebra. \square

Satz 4.12

Es gibt eine kanonische natürliche Isomorphie

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N, M) .$$

Beweis: Wir zeigen dies durch Induktion über n , wobei der Fall $n = 0$ gerade die Kommutativität des Tensor-Produkts ist.

Sei (P_*, d_*) eine projektive Auflösung von N und $N' = \mathrm{Bild}(d_1 : P_1 \rightarrow P_0)$. Die P_i mit $i \geq 1$ bilden dann offenbar eine projektive Auflösung von N' . Durch Vergleich der Komplexe $(P_n \otimes M, d_n \otimes 1)_{n \geq 0}$ und $(P_n \otimes M, d_n \otimes 1)_{n \geq 1}$ erhalten wir

$$\mathrm{Tor}_n^R(N, M) = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N', M) & , \quad n > 1 , \\ \mathrm{Kern}(N' \otimes_R M \rightarrow P_0 \otimes_R M) & , \quad n = 1 ; \end{cases}$$

für $n > 1$ ist dies klar und für $n = 1$ ist $\mathrm{Tor}_1^R(N, M)$ der Kern der induzierten Abbildung von $\mathrm{Kern}(P_1 \otimes M \rightarrow P_0 \otimes M)$ nach $P_0 \otimes M$.

Andererseits ist $0 \leftarrow M \leftarrow P_0 \leftarrow N' \leftarrow 0$ eine exakte Sequenz. Aus deren langer Tor-Sequenz von Satz 4.11 erhalten wir wegen der Projektivität der P_i

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = \begin{cases} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M, N') & , \quad n > 1 , \\ \mathrm{Kern}(M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R P_0) & , \quad n = 1 . \end{cases}$$

Die natürlichen Isomorphismen $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(M, N') \cong \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N', M)$ (und für $n = 1$ noch $M \otimes_R P_0 \cong P_0 \otimes_R M$) induzieren nun den Isomorphismus $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$. \square

Damit sind unsere Überlegungen über den Funktor Tor erst einmal beendet. Abschließend wollen wir noch die analogen Untersuchungen für den Hom -Funktor darstellen. Da die Argumente für diesen Fall fast wörtlich dieselben sind wie für das Tensor-Produkt, führen wir die Beweise nicht noch einmal in allen Details durch.

Sei (P_*, d_*^P) ein Kettenkomplex über R . Setzen wir

$$C_{-n} := \mathrm{Hom}_R(P_n, N) ,$$

so definiert

$$d_{-n} := \mathrm{Hom}_R(d_{n+1}^P, \mathrm{id}_N) : C_{-n} \rightarrow C_{-n-1}$$

einen Kettenkomplex (C_*, d_*) , den wir kurz mit $\text{Hom}_R(P_*, N)$ bezeichnen. Schreiben wir noch $d^n = d_{-n}$, so ist dies also der Kettenkomplex

$$\dots \xrightarrow{d^{n-2}} \text{Hom}_R(P_{n-1}, N) \xrightarrow{d^{n-1}} \text{Hom}_R(P_n, N) \xrightarrow{d^n} \text{Hom}_R(P_{n+1}, N) \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

Definition 4.13

Für eine projektive Auflösung $P_*(M)$ von M sei

$$\text{Ext}_R^n(M, N) := H_{-n}(\text{Hom}_R(P_*(M), N)) .$$

Wie oben folgt, dass dieser Modul bis auf kanonische Isomorphie unabhängig von der Wahl der Auflösung ist.

Als Beispiel betrachten wir wieder den Fall $R = \mathbf{Z}$ abelscher Gruppen. Wie oben wird

$$\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^i(\mathbf{Z}, N) \cong \begin{cases} N & , \quad i = 0 , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

und

$$\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^i(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}, N) \cong \begin{cases} \{ n \in N \mid kn = 0 \} & , \quad i = 0 , \\ N/kN & , \quad i = 1 , \\ 0 & , \quad i > 1 . \end{cases}$$

Für zyklische abelsche Gruppen M ist also $\text{Ext}_{\mathbf{Z}}^i(M, N) \cong \text{Tor}_i^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, N)$; es folgt, dass dies auch für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen M gilt.

Es wird keine Überraschung sein, dass Ext ganz ähnliche Eigenschaften hat wie Tor:

Satz 4.14

Es gilt:

1. $\text{Ext}_R^n(-, -)$ ist ein Funktor $R\text{-}\mathbf{Mod}^{op} \times R\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$, der in jeder Variablen additiv ist.
2. Es gibt eine natürliche Äquivalenz

$$\text{Ext}_R^0(M, N) \cong \text{Hom}_R(M, N) .$$

3. Ist M projektiv oder N injektiv, so ist

$$\text{Ext}_R^n(M, N) = \begin{cases} \text{Hom}_R(M, N) & , \quad n = 0 , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Die Beweise sind ganz analog zu denen für das Tensor-Produkt. Es sei hierbei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich die Additivität nur auf *endliche* direkte Summen bezieht.

Auch für den folgenden Satz können wir einfach den Beweis zur langen exakten Tor-Sequenz zitieren:

4 Homologische Algebra

Satz 4.15

Sei $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ exakt. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N') \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N'') \rightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M, N') \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M, N') \rightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M, N) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M, N'') \rightarrow \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Für den Tor-Funktor liefert eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ wegen der Symmetrie aus Satz 4.12 auch eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \operatorname{Tor}_n^R(N', M) \rightarrow \operatorname{Tor}_n^R(N, M) \rightarrow \operatorname{Tor}_n^R(N'', M) \rightarrow \dots$$

Um eine solche Sequenz auch für Ext zu erhalten, können wir die kurze exakte Sequenz von Auflösungen nach Satz 4.8 benutzen:

Satz 4.16

Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ exakt. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M'', N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M', N) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M'', N) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M'', N) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M, N) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M', N) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M'', N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Für weitere Information zu Tor und Ext müssen wir auf Lehrbücher der homologischen Algebra verweisen. Welche Rolle sie in der Homologietheorie topologischer Räume spielen, wird in Abschnitt 5 erläutert werden.

5 Koeffizienten- und Künneth-Theoreme

In Abschnitt 6.2 des Buches hatten wir Koeffizienten-Theoreme für Homologie hergeleitet unter der Voraussetzung, dass der betrachtete Kettenkomplex aus lauter freien R -Moduln bestand. Hier wollen wir nun einen allgemeineren Satz entwickeln, der mit wesentlich schwächeren Voraussetzungen auskommt. Es sei (K_*, d_*) ein Kettenkomplex über R .

Satz 5.1 (Universelles Koeffizienten-Theorem)

Für jedes n seien $Z_n(K)$ und $B_n(K)$ flache R -Moduln. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(K_*) \otimes M \xrightarrow{\kappa} H_n(K_*; M) \rightarrow \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(K_*), M) \rightarrow 0 .$$

Ist jedes $B_n(K)$ projektiv, so spaltet diese Sequenz.

Beweis: Wir tensorieren die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow Z_n(K) \rightarrow K_n \rightarrow B_{n-1}(K) \rightarrow 0$ mit M . Da $B_{n-1}(K)$ flach ist, ist $\operatorname{Tor}_1^R(B_{n-1}(K), M) = 0$, und die Sequenz

$$0 \rightarrow Z_n(K) \otimes M \rightarrow K_n \otimes M \rightarrow B_{n-1}(K) \otimes M \rightarrow 0$$

ist exakt. Wir betrachten $Z_*(K)$ und $B_*(K)$ als Unterkomplexe von K_* , so dass sie mit dem trivialen Randoperator versehen sind. Damit wird die obige exakte Sequenz zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow Z_*(K) \otimes M \rightarrow K_* \otimes M \rightarrow B_{*-1}(K) \otimes M \rightarrow 0 , \quad (5.1)$$

wobei die beiden äußeren Komplexe wieder das Differential Null haben, also mit ihrer Homologie übereinstimmen. Als induzierte lange exakte Homologie-Sequenz erhalten wir daher eine Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} Z_n(K) \otimes M \rightarrow H_n(K; M) \rightarrow B_{n-1}(K) \otimes M \xrightarrow{\partial_*} \dots \quad (5.2)$$

mit $\partial_* : B_n(K) \otimes M \rightarrow Z_n(K) \otimes M$. Dabei ist ∂_* der Randoperator von (5.1): zu einem Element $d_{n+1}(k) \otimes m \in B_n(K) \otimes M$ finden wir erst das Urbild $k \otimes m \in K_{n+1} \otimes M$ und bilden dann den Rand $d_{n+1}(k) \otimes m$ als Element von $Z_n(K) \otimes M$. Es ist also ∂_* gerade durch die Inklusion $B_n(K) \hookrightarrow Z_n(K)$ induziert. Da diese ja den Kokern $H_n(K)$ hat, wird wegen der Rechts-Exaktheit des Tensor-Produkts

$$\operatorname{Kokern} (\partial_* : B_n(K) \otimes M \rightarrow Z_n(K) \otimes M) = H_n(K) \otimes M .$$

Andererseits wird, da $\operatorname{Tor}_1^R(Z_{n-1}(K); M)$ nach Voraussetzung verschwindet,

$$\operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(K), M) \cong \operatorname{Kern} (\partial_* : B_{n-1}(K) \otimes M \rightarrow Z_{n-1}(K) \otimes M) . \quad (5.3)$$

5 Koeffizienten- und Künneth-Theoreme

Aus der langen exakten Sequenz (5.2) erhalten wir damit die gewünschte kurze exakte Sequenz.

Ist $B_{n-1}(K)$ projektiv, so lässt $d_n : K_n \rightarrow B_{n-1}$ eine Spaltung $s_n : B_{n-1}(K) \rightarrow K_n$ zu mit $d_n \circ s_n = \text{id}$. Liegt nun $x \in B_{n-1}(K) \otimes M$ im Kern von $B_{n-1}(K) \otimes M \rightarrow Z_{n-1}(K) \otimes M$, so ist $d_n(s_n \otimes 1)(x)$ als Bild von x in $K_{n-1} \otimes M$ gleich Null. Wir erhalten daher ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Tor}_1^R(H_{n-1}(K), M) & \xrightarrow{(5.3)} & B_{n-1}(K) \otimes M & \rightarrow & Z_{n-1}(K_* \otimes M) \\ \downarrow \widetilde{s_n} & & \downarrow s_n \otimes 1 & & \downarrow \\ Z_n(K_* \otimes M) & \longrightarrow & K_n \otimes M & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1}(K_* \otimes M) \\ \downarrow & & & & \\ H_n(K_*; M) & & & & \end{array}$$

Die Abbildung $\widetilde{s_n}$ existiert, da $s_n \otimes 1$ das Bild von $\text{Tor}_1^R(H_{n-1}(K), M)$ in den Kern von d_n abbildet. Nach Definition der exakten Sequenz (5.2) ist dann der erhaltene Homomorphismus $\text{Tor}_1^R(H_{n-1}(K), M) \rightarrow H_n(K_*; M)$ die behauptete Spaltung. \square

Die Voraussetzungen des Satzes sind für den singulären Kettenkomplex $S_*(X, A; R)$ eines Raumpaars (X, A) immer erfüllt, sobald der Ring R ein Hauptidealring ist. Denn da $S_n(X, A; R)$ freier R -Modul ist, sind dann auch die Untermoduln $Z_n(X, A; R)$ und $B_n(X, A; R)$ frei über R . Wir erhalten also

Satz 5.2 (Universelles Koeffizienten-Theorem)

Sei R ein Hauptidealring, M ein R -Modul. Dann gibt es auf der Kategorie der Raumpaare eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(X, A; R) \otimes_R M \xrightarrow{\kappa} H_n(X, A; M) \rightarrow \text{Tor}_1^R(H_{n-1}(X, A; R), M) \rightarrow 0.$$

Diese Sequenz spaltet.

Man beachte aber, dass die Spaltung im allgemeinen nicht natürlich ist.

In den meisten Fällen wird man das universelle Koeffizienten-Theorem benutzen, um die Beziehungen der ganzzahligen Homologie (oder Kohomologie) zur Homologie mit Koeffizienten in \mathbf{Q} oder \mathbf{F}_p zu untersuchen. Es gibt aber auch Situationen, in denen sich aus der geometrischen Situation die Verwendung ganz anderer Koeffizienten-Ringe anbietet. Wir wollen im folgenden hierfür ein umfangreicheres Beispiel durchführen.

Es sei $\pi : X \rightarrow Y = X/G$ eine normale k -blättrige Überlagerung mit zyklischer Gruppe $G = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ von Decktransformationen. Wir nehmen an, dass Y ein endliches Polyeder ist; sei (Y, \mathfrak{Y}) eine Triangulierung. Dann ist jedes Simplex von \mathfrak{Y} trivial überlagert und wir erhalten eine induzierte Triangulierung (X, \mathfrak{X}) auf X . Das erzeugende Element T von $G = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ operiert als simpliziale Abbildung $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ mit $T^k = \text{id}$, wobei kein Element von \mathfrak{X} durch T in sich selbst überführt wird.

Als konkretes Beispiel hierzu betrachte man etwa den Fall $X = \mathbf{S}^n$ mit $T(x) = -x$ (und $k = 2$); es ist $Y = X/G = \mathbf{RP}^n$.

Sei nun $t = T_\# : C_*(\mathfrak{X}) \rightarrow C_*(\mathfrak{X})$ die induzierte Abbildung. Sie macht $C_*(\mathfrak{X})$ zu einem

Modul über dem Ring

$$R := \mathbf{Z}[t]/(t^k - 1) .$$

Lemma 5.3

Unter den obigen Voraussetzungen ist $C_*(\mathfrak{X})$ ein freier R -Modul und π induziert einen Ketten-Isomorphismus

$$\pi_* : C_*(\mathfrak{X}) \otimes_R \mathbf{Z} \rightarrow C_*(\mathfrak{Y}) .$$

Hierbei ist \mathbf{Z} ein R -Modul durch $tx = x$ für jedes $x \in \mathbf{Z}$.

Beweis: Für jedes $\sigma \in \mathfrak{Y}$ sei ein Simplex $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{X}$ gewählt mit $\pi(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Dann ist

$$\mathfrak{X} = \{T^i \tilde{\sigma} \mid \sigma \in \mathfrak{Y}, 0 \leq i < k\} ,$$

und $C_*(\mathfrak{X})$ ist der freie R -Modul mit Basis $\{\tilde{\sigma} \mid \sigma \in \mathfrak{Y}\}$. Da $R \otimes_R \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$ ist, wird $C_*(\mathfrak{X}) \otimes_R \mathbf{Z}$ freier \mathbf{Z} -Modul mit Basis $\{\tilde{\sigma} \otimes 1 \mid \sigma \in \mathfrak{Y}\}$. Wegen $\pi(T^i \tilde{\sigma}) = \sigma$ folgt nun, dass π_* den gewünschten Isomorphismus induziert. Dass π_* mit dem Randoperator verträglich ist, ist klar. \square

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir die erste Behauptung des folgenden Satzes.

Satz 5.4

Unter den obigen Voraussetzungen ist

$$H_n(Y) \cong H_n(C_*(\mathfrak{X}) \otimes_R \mathbf{Z}) .$$

Ist $\tilde{H}_n(X; \mathbf{Z}) = 0$ für $n < N$, so gilt

$$H_n(Y) \cong \text{Tor}_n^R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \text{ für } 0 \leq n < N .$$

Beweis: Nur der Zusatz ist noch zu zeigen. Aber in Dimensionen $\leq N$ ist $C_*(\mathfrak{X})$ eine R -freie Auflösung von $\mathbf{Z} = H_0(\mathfrak{X})$, das heißt, es gibt eine R -freie Auflösung (P_*, d_*) von \mathbf{Z} , die in Dimensionen $\leq N$ mit $C_*(\mathfrak{X})$ übereinstimmt. Es wird also in Dimensionen $n < N$

$$H_n(C_*(\mathfrak{X}) \otimes_R \mathbf{Z}) \cong H_n(P_* \otimes_R \mathbf{Z}) = \text{Tor}_n^R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) . \quad \square$$

Es bleibt $\text{Tor}_n^R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ zu berechnen. Sei $N = 1 + t + \dots + t^{k-1} \in R$ und $D = (t - 1) \in R$. Offenbar gilt $DN = 0$.

Lemma 5.5

Der Kettenkomplex

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{D} R \xleftarrow{N} R \xleftarrow{D} R \xleftarrow{N} \dots \leftarrow R \xleftarrow{D} R \xleftarrow{N} \dots$$

ist eine freie Auflösung des R -Moduls \mathbf{Z} . Es ist

$$\text{Tor}_n^R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & , \quad n = 0 , \\ \mathbf{Z}/k\mathbf{Z} & , \quad n > 0 \text{ ungerade} , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

5 Koeffizienten- und Künneth-Theoreme

Beweis: Sei $x = \sum_{i=1}^k a_i t^i \in R$ mit $a_i \in \mathbf{Z}$. Es ist $d_{2n+1}(x) = \sum_{i=1}^k (a_{i-1} - a_i) t^i$, wobei wegen $t^k = t^0 = 1$ noch $a_k = a_0$ gesetzt werde. Es ist also $d_{2n+1}(x) = 0$ genau dann, wenn $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = a$ ist, also $x = Na$. Für $n > 0$ wird $d_{2n}(x) = (\sum_{i=0}^{k-1} a_i)N$. Ist also $d_{2n}x = 0$, so folgt $\sum_{i=0}^{k-1} a_i = 0$. Es wird dann

$$x = \sum_{i=1}^k a_i (t^i - 1) = (t - 1) \sum_{i=1}^k a_i (1 + t + \dots + t^{i-1}) .$$

Damit ist $H_n(P_*) = 0$ für $n > 0$ nachgewiesen. Wegen $t^i = 1 + (t^i - 1)$ und $(t^i - 1) \in \text{Bild}(d_1)$ ist klar, dass $H_0(P_*) = \mathbf{Z}$ ist. \square

Als Anwendung kann man hiermit noch einmal die Homologie der reellen projektiven Räume berechnen; die Durchführung sei als Übungsaufgabe empfohlen.

Das Koeffizienten-Theorem 5.2 lässt sich leicht zu einem Künneth-Theorem verallgemeinern:

Satz 5.6 (Künneth-Formel)

Seien (K_*, d_*^K) und (L_*, d_*^L) Kettenkomplexe über R , so dass die Untermoduln $Z_n(K_*)$ und $B_n(K_*)$ von K_n für jedes n projektive R -Moduln sind. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(K_*) \otimes H_q(L_*) &\xrightarrow{\kappa} H_n(K_* \otimes L_*) \rightarrow \\ &\rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^R(H_p(K_*), H_q(L_*)) \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Diese Sequenz spaltet.

Beweis: Es werde $B_*(K_*)$ und $Z_*(K_*)$ jeweils als Unterkomplex von K_* aufgefasst mit trivialem Randoperator. Dann ist

$$H_n(B_*(K_*) \otimes L_*) = \bigoplus_{p+q=n} B_p(K_*) \otimes H_q(L_*)$$

und

$$H_n(Z_*(K_*) \otimes L_*) = \bigoplus_{p+q=n} Z_p(K_*) \otimes H_q(L_*) .$$

Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow Z_*(K_*) \otimes L_* \rightarrow K_* \otimes L_* \rightarrow B_{*-1}(K_*) \otimes L_* \rightarrow 0 .$$

Ferner ist $0 \rightarrow B_n(K_*) \rightarrow Z_n(K_*) \rightarrow H_n(K_*) \rightarrow 0$ eine projektive Auflösung von $H_n(K_*)$. Damit erhalten wir aus der langen exakten Homologie-Sequenz zu der obigen kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen wie im Beweis des Koeffizienten-Theorems 5.1 die gewünschte Künneth-Sequenz.

Die Spaltung ergibt sich wieder aus der Spaltung $B_{*-1}(K_*) \rightarrow K_*$ mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 5.1. \square

Als Folgerung erhalten wir das folgende Künneth-Theorem für Raumpaare:

Satz 5.7 (Künneth-Formel)

Sei R ein Hauptidealring. Dann gibt es auf der Kategorie der Raumpaare eine natürliche exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X; R) \otimes_R H_q(Y; R) \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y; R) \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^R(H_p(X; R), H_q(Y; R)) \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Diese Sequenz spaltet.

Wir wollen nun noch analoge Sätze für die Kohomologie herleiten. Wir übertragen dazu die Überlegungen für $H_*(K_* \otimes_R M)$ auf die Untersuchung des Kokettenkomplexes $H^*(\text{Hom}_R(K_*, M))$.

Wir kehren zurück zu der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow Z_*(K_*) \rightarrow K_* \rightarrow B_{*-1}(K_*) \rightarrow 0 .$$

Wenn jedes $B_n(K)$ projektiv ist, spaltet diese Sequenz. Nach Anwenden von $\text{Hom}_R(-; M)$ erhalten wir also eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen. Zu dieser gehört eine lange exakte Kohomologie-Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Hom}(Z_{n-1}(K_*), M) \xrightarrow{\delta_{n-1}^*} \text{Hom}(B_{n-1}(K_*), M) \rightarrow H^n(K_*, M) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Hom}(Z_n(K_*), M) \xrightarrow{\delta_n^*} \text{Hom}(B_n(K_*), M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Hierbei ist δ_n^* , wie man leicht nachprüft, der von der Inklusion $B_n(K_*) \hookrightarrow Z_n(K_*)$ induzierte Homomorphismus. Aus dieser langen exakten Sequenz gewinnen wir nun eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Kokern}(\delta_n^*) \rightarrow H^{n+1}(K_*, M) \rightarrow \text{Kern}(\delta_{n+1}^*) \rightarrow 0 . \quad (5.4)$$

Wenden wir auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B_n(K_*) \rightarrow Z_n(K_*) \rightarrow H_n(K_*) \rightarrow 0$$

den Funktor $\text{Hom}(-, M)$ an, so erhalten wir (wegen der Projektivität von B_n) Isomorphismen

$$\text{Kern}(\delta_n^*) \cong \text{Hom}_R(H_n(K_*), M) \text{ und } \text{Kokern}(\delta_n^*) \cong \text{Ext}_R^1(H_n(K_*), M) .$$

Die Sequenz (5.4) stellt sich aber sogar als spaltend heraus: Sei $\sigma : K_n \rightarrow Z_n(K_*)$ eine Spaltung der Sequenz

$$0 \rightarrow Z_n(K_*) \rightarrow K_n \rightarrow B_{n-1}(K_*) \rightarrow 0 .$$

5 Koeffizienten- und Künneth-Theoreme

Dann induziert σ einen Homomorphismus

$$\sigma^* : \text{Hom}(Z_n(K_*)/B_n(K_*), M) \rightarrow \text{Hom}(K_n/B_n(K_*), M) = Z^n(\text{Hom}(K_*, M)) .$$

Wir haben erhalten

Satz 5.8 (Koeffizienten-Theorem für Kohomologie)

Es sei R ein Hauptidealring und (K_*, d_*) ein Kettenkomplex über R , so dass $Z_n(K_*)$ und $B_n(K_*)$ für jedes n projektive R -Moduln sind. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(K_*), M) \rightarrow H^n(K_*, M) \xrightarrow{\kappa} \text{Hom}(H_n(K_*), M) \rightarrow 0 .$$

Diese Sequenz spaltet.

Wir notieren wieder ausdrücklich das unmittelbare Korollar für Raumpaare (X, Y) :

Satz 5.9 (Koeffizienten-Theorem für Kohomologie)

Es sei R ein Hauptidealring, M ein R -Modul. Dann gibt es auf der Kategorie der Raumpaare eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(X, A; R), M) \rightarrow H^n(X, A; M) \xrightarrow{\kappa} \text{Hom}_R(H_n(X, A; R), M) \rightarrow 0 .$$

Diese Sequenz spaltet.

Wir benötigen schließlich noch eine Form des Künneth-Theorems für Kohomologie. Die Voraussetzungen müssen etwas restriktiver sein als beim Künneth-Theorem in Homologie. Als Koeffizienten-Modul wird hier der Grundring R genommen.

Satz 5.10 (Künneth-Theorem für Kohomologie)

Sei $(X \times B, A \times Y)$ ausschneidendes Paar in $X \times Y$. Sei R ein Hauptidealring, und sei $H_n(X, A; R)$ für alle n ein endlich erzeugter R -Modul. Dann gibt es eine natürliche exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) &\xrightarrow{\times} H^n((X, A) \times (Y, B)) \rightarrow \\ &\rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}_1(H^p(X, A), H^q(Y, B)) \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Diese Sequenz spaltet.

Beweis: Dies ist ein Künneth-Theorem für das Tensor-Produkt

$$S^*(X, A; R) \otimes S^*(Y, B; R) .$$

Allerdings muss dieser Komplex erst noch modifiziert werden, um das frühere Künneth-Theorem für Kettenkomplexe anwenden zu können. Wir werden gleich zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen $S_*(X, A; R)$ kettenhomotopieäquivalent ist zu einem Kettenkomplex C_* über R , für den jedes C_n ein endlich erzeugter freier R -Modul ist. Dann ist $S^*(X, A; R)$ kettenhomotopieäquivalent zu $\text{Hom}(C_*, R)$. Aber dieser Kokettenkomplex ist

nun in jeder Dimension frei und endlich erzeugt, so dass wir auf $\text{Hom}(C_*, R) \otimes S^*(Y, B; R)$ unser altes Künneth-Theorem anwenden können.

Zur Konstruktion von C_* definieren wir induktiv die Kettengruppen C_n . Wir wählen einen endlich erzeugten Untermodul C_n von $S_n(X, A)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $C_n \cap Z_n(X, A) \xrightarrow{[\]} H_n(X, A)$ ist surjektiv,
2. $\text{Bild}(C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}) = \text{Kern}(C_{n-1} \cap Z_{n-1}(X, A) \xrightarrow{[\]} H_{n-1}(X, A))$.

Ist C_{n-1} gegeben, so wählt man als Erzeugende für C_n zunächst endlich viele Zyklen, um die erste Bedingung zu erfüllen, und nimmt schließlich endlich viele weitere Erzeugende für die zweite Bedingung hinzu.

Die Einschränkung von d_n auf C_n macht dann C_* zu einem Kettenkomplex mit $H_n(C_*) = H_n(X, A)$. Da C_n und $S_n(X, A)$ freie R -Moduln sind, ist die Inklusion $C_* \rightarrow S_*(X, A)$ eine Ketten-Homotopieäquivalenz. \square

Ein wichtiger Spezialfall des Künneth-Theorems ist

Korollar 5.11

Sei $(X \times B, A \times Y)$ ausschneidendes Paar in $X \times Y$. Sei R ein Hauptidealring und sei für jedes n die Homologie $H_n(X, A; R)$ ein endlich erzeugter projektiver R -Modul. Dann ist

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X, A; R) \otimes H^q(Y, B; R) \xrightarrow{\times} H^n((X, A) \times (Y, B), R)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Da die Homologie-Gruppen von (X, A) endlich erzeugte projektive R -Moduln sind, ist auch

$$H^p(X, A; R) \cong \text{Hom}_R(H_p(X, A; R), R)$$

projektiv, also insbesondere flach. \square

Als Anwendung des Koeffizienten-Theorems können wir zum Beispiel mit Hilfe von Korollar 5.8.15 des Buches die ganzzahlige Kohomologie von \mathbf{RP}^n bestimmen:

Satz 5.12

Für $n > 0$ ist

$$H^k(\mathbf{RP}^{2n-1}; \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & , \quad k \in \{0, 2n-1\} , \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & , \quad k = 2i \text{ mit } 0 < i < n , \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$H^k(\mathbf{RP}^{2n}; \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & , \quad k = 0 , \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & , \quad k = 2i \text{ mit } 0 < i \leq n , \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Topologie

Eine anschauliche Einführung in die geometrischen und
algebraischen Grundlagen

Ossa, E.

2009, X, 276 S., Softcover

ISBN: 978-3-8348-0874-5