

Klausur WS 2007/08

1. Aufgabe:

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{4x^2 - x}{2x}$ den Definitionsbereich D_f sowie die Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x) = \frac{0,5x^2 + 2}{e^{0,5x}}$.

c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2}$ mit den Ableitungen

$$f'(x) = -4 \cdot \frac{x-4}{(x-2)^3}, \quad f''(x) = 8 \cdot \frac{x-5}{(x-2)^4}, \quad f'''(x) = -24 \cdot \frac{x-6}{(x-2)^5}.$$

Bestimmen Sie die Extrema und Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

d) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i. $\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} \frac{1+x}{x-2},$

ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x)^2 - \ln x^2],$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{25 - x^2}.$

e) Gegeben ist die Funktion $f(x)$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ sowie den Ableitungen $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ und $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$.

i. Bestimmen Sie die Bereiche, in denen $f(x)$ streng monoton wachsend ist.

ii. Welches Krümmungsverhalten besitzt die Funktion $f(x)$?

f) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)$ unter Benutzung folgender Angaben:

i. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\},$

ii. Wendepunkt bei $(x_W, y_W) = (0, 0),$

iii. Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow -2, x < -2} f(x) \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2, x > -2} f(x) \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} f(x) \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2, x > 2} f(x) \rightarrow \infty.$$

2. Aufgabe:

a) Stellen Sie fest, ob die Funktion $f(x, y) = xy^2 - 16\sqrt{x^3y^3}$ homogen ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grad der Homogenität.

b) Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y)}$.

i. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x, y)$,

ii. Bestimmen Sie die Gleichung der Höhenlinie (= Indifferenzkurve) an die Funktion $z = f(x, y)$ zum Niveau $z_0 = 0$.

- c) Gegeben ist die Produktionsfunktion $f(x, y) = \sqrt{xy^2}$.
 Um wieviel Mengeneinheiten ändert sich der Output $z_0 = f(x_0, y_0)$, wenn man die Faktoreinsatzmengen in $(x_0, y_0) = (4, 2)$ um $dx = 2$ und $dy = -1$ erhöht?
 Berechnen Sie hierfür die
- Näherung mit Hilfe des totalen Differentials df ,
 - exakte Funktionsdifferenz Δf .
- d) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = \ln(xy^2)$ die partiellen Ableitungen erster Ordnung.
- e) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y)$ mit den partiellen Ableitungen $f_x = 3x$ und $f_y = -2a^3y$ mit $a \neq 0$ die stationären Punkte und stellen Sie fest, für welche Werte des Parameters a die Funktion an diesen Stellen ein Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt.
- f) Bestimmen Sie die möglichen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + 3y$ unter der Nebenbedingung $2xy = \frac{9}{2}$.

3. Aufgabe:

- a) Gegeben sind die Mengen
 $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{4, 6\}$, $D = \{5, 7\}$, $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.
 Bestimmen Sie jeweils
- $(C \cup D) \setminus A$,
 - $\overline{(A \cap D)}_M$,
 - $|B \times C \times D|$,
 - $(D \times D) \setminus (C \times D)$
- b) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:
- $\sqrt[n]{x^{2n+1}}$
 - $4^x \cdot 2^{x+1}$,
 - $\sqrt{\sqrt{x^2}}$.
- c) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\frac{3}{x} + 1 = \frac{4}{x^2}$.
- d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $-x < \frac{4-4x}{x}$
- e) Bestimmen Sie die Lösungen für folgende Gleichungen
- $e^{-x} \cdot e^{\sqrt{x}} = 1$,
 - $(\ln x)^2 = 1$.
- f) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x-3}.$$
- g) Stellen Sie fest, ob die Funktion $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$ umkehrbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktionen $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ an.

- h) Bestimmen Sie die Stammfunktion zur Funktion $f(x) = \frac{x}{3x^2 - 2}$.
- i) Berechnen Sie die Fläche, die von den Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen ist.

4. Aufgabe:

- a) Gegeben sind die Matrizen und Vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte und Summen – sofern sie existieren – oder begründen Sie, warum die entsprechenden Matrixoperationen nicht möglich sind.

- i. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$,
- ii. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}$,
- iii. $\mathbf{C} \cdot 2 \cdot \mathbf{x}$,
- iv. $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$.

- b) Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ sowie die $(m \times n)$ - Matrix $\mathbf{B}$.

Für welche Werte von m bzw. n gilt dann:

- i. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ist eine (6×2) - Matrix,
- ii. $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$ ist eine (2×3) - Matrix.

- c) Berechnen Sie die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ zu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ für $a \neq 0$.

- d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 &= 1 \\ ax_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ existiert keine Lösung?

- e) Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen möglichst einfach nach $\mathbf{x}$ auf!

- i. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}$
- ii. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})' = \mathbf{b}$.

Klausur WS 2007/08 - Lösung

1. Aufgabe:

a) $f(x) = \frac{4x^2 - x}{2x} :$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nullstellen:

$$f(x) = \frac{4x^2 - x}{2x} = 0 \Rightarrow 4x^2 - x = x(4x - 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}.$$

b) $f(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2}{e^{\frac{1}{2}x}} :$

Ableitung: $f'(x) = \frac{x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - (\frac{1}{2}x^2 + 2) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2}}{(e^{\frac{1}{2}x})^2} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{(e^{\frac{1}{2}x})^2} \cdot (x - \frac{1}{4}x^2 - 1).$

stationäre Punkte:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{4} \cdot 1}}{2 \cdot (-\frac{1}{4})} = \frac{-1 \pm 0}{-\frac{1}{2}} = 2.$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2} = \frac{x \cdot (3x - 8)}{(x-2)^2}, & f'(x) &= -4 \cdot \frac{x-4}{(x-2)^3}, \\ f''(x) &= 8 \cdot \frac{x-5}{(x-2)^4}, & f'''(x) &= -24 \cdot \frac{x-6}{(x-2)^5}. \end{aligned}$$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Extrema:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -4 \cdot \frac{x-4}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow x_0 = 4 \quad \text{stationärer Punkt} \\ f''(4) &= 8 \cdot \frac{4-5}{(4-2)^4} = -\frac{8}{2^4} = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{und} \\ y_0 &= f(4) = \frac{4 \cdot (12-8)}{(4-2)^2} = \frac{4 \cdot 4}{4} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt ein lokales Maximum in $(x_0, y_0) = (4, 4)$.

Wendepunkte:

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= 8 \cdot \frac{x-5}{(x-2)^4} = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \\ f'''(5) &= -24 \cdot \frac{5-6}{(5-2)^5} = \frac{-24 \cdot (-1)}{3^5} = \frac{24}{3^5} = \frac{8}{3^4} \neq 0 \quad \text{und} \\ y_1 &= f(5) = \frac{5 \cdot (15-8)}{(5-2)^2} = \frac{5 \cdot 7}{3^2} = \frac{35}{9} = 3.89 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt einen Wendepunkt in $(x_1, y_1) = (5, 3.89)$.

d) **Grenzwerte:**

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 2, x > 2} \frac{1+x}{x-2} \rightarrow \frac{1+2_+}{2_+-2} \rightarrow \frac{3}{0_+} \rightarrow \infty,$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x)^2 - \ln x^2] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x) \cdot (\ln x) - 2 \cdot \ln x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \cdot (\ln x - 2) \rightarrow \infty \cdot (\infty - 2) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{25 - x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{\frac{25}{x^2} - 1} = \frac{5}{0 - 1} = -5.$$

$$\text{e) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

$$\text{i. Monotonie: } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0.$$

$$\text{Wegen } x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1 \text{ gilt:}$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x+1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x > 3) \wedge (x > -1) & \Rightarrow x > 3 \\ (x < 3) \wedge (x < -1) & \Rightarrow x < -1 \end{cases}.$$

Es ist also $f(x)$ streng monoton wachsend in $] -\infty, -1[$ und $]3, \infty[$.

$$\text{ii. Krümmung: } f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 1 \\ < 0 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ konvex in $]1, \infty[$ und f konkav in $] -\infty, 1[$.

f) **Zeichnung** der Funktion $f(x)$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

Wendepunkt bei $(x_W, y_W) = (0, 0)$,

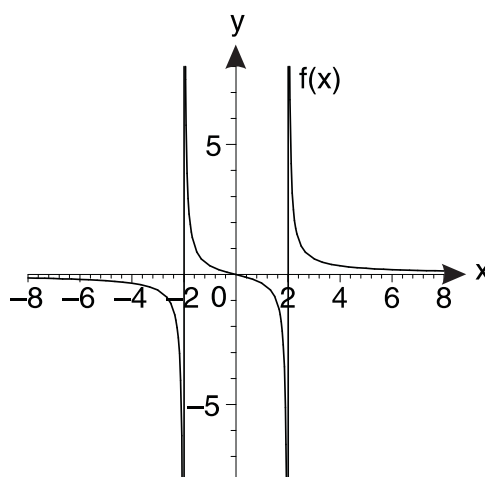
Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -2, x < -2} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2, x > -2} f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2, x > 2} f(x) \rightarrow \infty$$



2. Aufgabe:

a) **Homogenität:** $f(x, y) = xy^2 - 16\sqrt{x^3y^3}$:

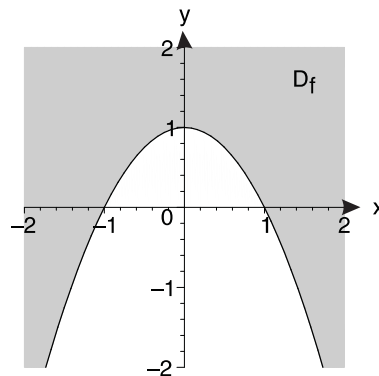
$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x) \cdot (\lambda y)^2 - 16\sqrt{(\lambda x)^3 \cdot (\lambda y)^3} = \lambda \cdot x \cdot \lambda^2 \cdot y^2 - 16\sqrt{\lambda^3 \cdot x^3 \cdot \lambda^3 \cdot y^3} = \\ &= \lambda^3 \cdot x \cdot y^2 - 16 \cdot \sqrt{\lambda^6 \cdot x^3 \cdot y^3} = \lambda^3 \cdot x \cdot y^2 - \lambda^3 \cdot 16 \cdot \sqrt{x^3 \cdot y^3} = \\ &= \lambda^3 \cdot f(x, y) \Rightarrow f \text{ ist homogen vom Grad } r = 3. \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y)}$:

i. **Definitionsbereich:**

Wegen $\ln(x^2 + y) \geq 0 \Rightarrow x^2 + y \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 - x^2$ gilt:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1 - x^2\}.$$



ii. **Höhenlinie** (= Indifferenzkurve) an $z = f(x, y)$ zum Niveau $z_0 = 0$:

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y)} = 0 \Rightarrow \ln(x^2 + y) = 0 \Rightarrow x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2.$$

c) $f(x, y) = \sqrt{x \cdot y^2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y$:

partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$f_x = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x}} \qquad f_y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\text{totales Differential: } df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x}} \cdot dx + \sqrt{x} \cdot dy.$$

Faktoreinsatzmengen $(x_0, y_0) = (4, 2)$, $dx = 2$, $dy = -1$:

i. **Näherung:**

$$df(x_0, y_0)(dx, dy) = df(4, 2)(2, -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4}} \cdot 2 + \sqrt{4} \cdot (-1) = 1 - 2 = -1.$$

ii. **exakte Funktionsdifferenz:**

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = f(4 + 2, 2 - 1) - f(4, 2) = \\ &= f(6, 1) - f(4, 2) = \sqrt{6 \cdot 1^2} - \sqrt{4 \cdot 2^2} = \sqrt{6} - \sqrt{16} = \sqrt{6} - 4 = -1,55. \end{aligned}$$

d) **partielle Ableitungen erster Ordnung** von $f(x, y) = \ln(x \cdot y^2)$

$$f_x = \frac{y^2}{x \cdot y^2} = \frac{1}{x}, \qquad f_y = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x \cdot y^2} = \frac{2}{y}.$$

e) **Extrema, Sattelpunkte:** $f_x = 3x$, $f_y = -2a^3y$ mit $a \neq 0$:

notwendige Bedingung:

$$(I) \quad f_x = 3x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$(II) \quad f_y = -2a^3y = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Es ergibt sich also der stationäre Punkt: $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

hinreichende Bedingung:

$$f_{xx} = 3, \quad f_{yy} = -2a^3, \quad f_{xy} = 0 :$$

Für $a < 0$ ist $-a^3 > 0$ und es gilt:

$$f_{xx} = 3 > 0, \quad f_{yy} = -2a^3 > 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 3 \cdot (-2a^3) - 0^2 = -6a^3 > 0$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ein lokales Minimum.

Für $a > 0$ ist $-a^3 < 0$ und es gilt:

$$f_{xx} = 3 > 0, \quad f_{yy} = -2a^3 < 0, \quad f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 3 \cdot (-2a^3) - 0^2 = -6a^3 < 0$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ einen Sattelpunkt.

f) **Extrema** von $z = f(x, y) = x^2 + 3y$

unter der **Nebenbedingung** $2xy = \frac{9}{2} \Rightarrow 2xy - \frac{9}{2} = 0$:

Lagrange-Funktion: $L(x, y, \lambda) = x^2 + 3y + \lambda \cdot (2xy - \frac{9}{2})$

notwendige Bedingung:

$$(I) \quad L_x = 2x + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{x}{y}$$

$$(II) \quad L_y = 3 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2x}$$

$$(III) \quad L_\lambda = 2xy - \frac{9}{2} = 0$$

$$(I) = (II) \text{ ergibt dann: } \frac{x}{y} = \frac{3}{2x} \Rightarrow y = \frac{2x^2}{3}.$$

Durch Einsetzen von $y = \frac{2x^2}{3}$ in (III) erhält man:

$$2x \cdot \frac{2x^2}{3} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot x^3 = \frac{9}{2} \Rightarrow x^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow f$ hat unter der NB möglicherweise ein Extremum in $(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

3. Aufgabe:

a) Mengen:

$$A = \{4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad C = \{4, 6\}, \quad D = \{5, 7\}, \quad M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}.$$

- i. $(C \cup D) \setminus A = \{4, 5, 6, 7\} \setminus \{4, 5, 6, 7\} = \emptyset,$
- ii. $(\overline{A \cap D})_M = M \setminus (A \cap D) = M \setminus \{5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\},$
- iii. $|B \times C \times D| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$
- iv. $(D \times D) \setminus (C \times D) = \{5, 7\} \times \{5, 7\} \setminus \{4, 6\} \times \{5, 7\} =$
 $= \{(5, 5), (5, 7), (7, 5), (7, 7)\} \setminus \{(4, 5), (6, 5), (4, 7), (6, 7)\} =$
 $= \{(5, 5), (5, 7), (7, 5), (7, 7)\} = D \times D.$

b) Vereinfachungen:

- i. $\sqrt[n]{x^{2n+1}} = x^{\frac{2n+1}{n}} = x^{2+\frac{1}{n}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{n}} = x^2 \cdot \sqrt[n]{x},$
- ii. $4^x \cdot 2^{x+1} = 4^x \cdot 2^x \cdot 2 = (4 \cdot 2)^x \cdot 2 = 2 \cdot 8^x,$
- iii. $\sqrt{\sqrt{x^2}} = ((x^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$

c) Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} + 1 &= \frac{4}{x^2} \Rightarrow \frac{3+x}{x} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow \frac{3x+x^2}{x^2} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow 3x+x^2=4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1. \end{aligned}$$

d) Ungleichung: $-x < \frac{4-4x}{x}$

1. Fall: $x > 0$

$$\begin{aligned} -x < \frac{4-4x}{x} \Big| \cdot x &\Rightarrow -x^2 < 4-4x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2-4x+4 = (x-2)^2 > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{L}_1 =]0, 2[\cup]2, \infty[. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < 0$

$$\begin{aligned} -x < \frac{4-4x}{x} \Big| \cdot x &\Rightarrow -x^2 > 4-4x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2-4x+4 = (x-2)^2 < 0 \text{ für kein } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]0, 2[\cup]2, \infty[.$

e) Gleichungen:

- i. $e^{-x} \cdot e^{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow e^{\sqrt{x}-x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} \cdot (1 - \sqrt{x}) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_0 = 0, x_1 = 1.$
- ii. $(\ln x)^2 = 1 \Rightarrow \ln x = \pm 1 \Rightarrow x_0 = e^1, x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

f) $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x-3}$

Definitionsbereich:

$\ln(x+2)$ existiert in $] -2, \infty[$ und $x-3 \neq 0 \Rightarrow D_f =] -2, \infty[\setminus \{3\}$.

Nullstellen:

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x-3} = 0 \Rightarrow \ln(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = 1 \Rightarrow x_0 = -1.$$

g) **Umkehrfunktion:** $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$, $D_f = [0, \infty[$, $W_f = [1, \infty[$.

Existenz von $f^{-1}(x)$:

$$f(x) = e^{2x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f'(x) = e^{2x^{\frac{1}{2}}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{2\sqrt{x}} > 0 \text{ für alle } x > 0$$

Wegen dieser Bedingung und der Definition der Monotonie gilt:

$f(x)$ streng monoton wachsend in $[0, \infty[$ und $f^{-1} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ existiert.

Konstruktion von $f^{-1}(x)$:

$$y = f(x) = e^{2\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\ln y}{2} \Rightarrow x = \frac{(\ln y)^2}{4}.$$

$$\text{Vertauschung von } x \text{ und } y \text{ ergibt: } y = f^{-1}(x) = \frac{(\ln x)^2}{4}.$$

h) **Stammfunktion** zu $f(x) = \frac{x}{3x^2 - 2}$:

$$\text{Wegen } \left(\frac{1}{6} \cdot \ln(3x^2 - 2) \right)' = \frac{1}{6} \cdot \frac{6x}{3x^2 - 2} = \frac{x}{3x^2 - 2} \text{ gilt:}$$

$$\int \frac{x}{3x^2 - 2} dx = \frac{1}{6} \cdot \ln |3x^2 - 2| + c.$$

i) **Fläche** F zwischen $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{x}$:

Schnittpunkte zwischen $f(x)$ und $g(x)$:

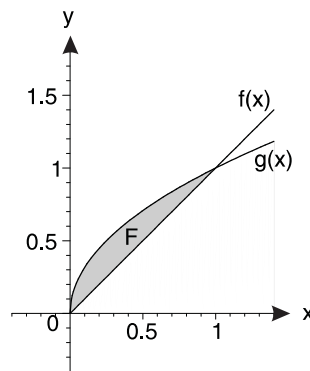
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

$$F_1 = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [1^2 - 0^2] = \frac{1}{2},$$

$$F_2 = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot (1 - 0) = \frac{2}{3}.$$

Flächendifferenz:

$$F = |F_1 - F_2| = \left| \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3-4}{6} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}.$$



4. Aufgabe:

a) **Matrixoperationen:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

i. $\underbrace{\mathbf{A} + \mathbf{B}}_{(2 \times 2) \quad (3 \times 2)}$ existiert nicht, da Zeilenzahl von $\mathbf{A} \neq$ Zeilenzahl von $\mathbf{B}$.

ii. $\underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}}_{(2 \times 2) \quad (2 \times 3) \quad (2 \times 3)}$ existiert nicht, da Spaltenzahl von $\mathbf{B}' \neq$ Zeilenzahl von $\mathbf{C}$.

iii. $\underbrace{\mathbf{C} \cdot 2\mathbf{x} = 2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}}_{(2 \times 3) \quad (3 \times 1)}$ existiert und ist eine (2×1) -Matrix mit

$$2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

iv. $\underbrace{\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}}_{(2 \times 3) \quad (3 \times 2)}$ existiert und ist eine (2×2) -Matrix mit

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -9 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ $(m \times n)$ -Matrix.

i. $\underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}_{(m \times n) (3 \times 2)}$ ist (6×2) -Matrix für $n = 3$ und $m = 6$.

ii. $\underbrace{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'}_{(2 \times 3) (n \times m)}$ ist (2×3) -Matrix für $n = 3$ und $m = 3$.

c) **Inverse Matrizen:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix} \text{ mit } a \neq 0, \det \mathbf{A} = a \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) **Gleichungssystem:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 &= 1 \\ ax_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{A}) = 16 - a^2.$$

Cramersche Regel:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{8 - 2a}{16 - a^2} = \frac{2 \cdot (4 - a)}{16 - a^2} = \frac{2}{4 + a},$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{4 - a}{16 - a^2} = \frac{1}{4 + a}.$$

Es ergibt sich also die Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4 + a} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Für $a = \pm 4$ existiert keine Lösung wegen $\det \mathbf{A} = 16 - a^2 = 0$.

e) **Matrizengleichungen:**

$$\begin{aligned} \text{i. } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{c} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})' &= \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})'' = \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}'. \end{aligned}$$

Klausur WS 2006/07

1. Aufgabe:

- a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x + \frac{x^2 - 3}{x - 1}$.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f sowie die Nullstellen.
- b) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = e^{1-2x^2}$ die Ableitung $f'(x)$ und die stationären Punkte.
- c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ mit den Ableitungen
$$f'(x) = \frac{x-2}{2(\sqrt{x-1})^3}, \quad f''(x) = -\frac{x-4}{4(\sqrt{x-1})^5} \quad \text{und} \quad f'''(x) = \frac{3x-18}{8(\sqrt{x-1})^7}.$$

Bestimmen Sie unter Beachtung des Definitionsbereichs die Koordinaten der Extrema und Wendepunkte.
- d) Gegeben ist die Funktion $f(x)$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und den Ableitungen
$$f'(x) = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2} \quad \text{sowie} \quad f''(x) = \frac{(x^2+1) \cdot e^x}{(x+1)^3}.$$

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen gilt:
i. $f(x)$ ist streng monoton fallend,
ii. $f(x)$ ist konkav.
- e) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
i. $\lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{2x-1}{x^2-1},$
ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x^2-1}},$
iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-1}{x-1}.$
- f) Gegeben ist die Gerade $G(x)$, die die x -Achse bei $x_0 = -2$ und die y -Achse bei $y_0 = 4$ schneidet. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Geraden und die Schnittpunkte mit der Funktion $f(x) = -x^2 + 8x + 11$.
- g) Zeichnen Sie den Graphen zu der Funktion $f(x)$, wenn folgende Angaben bekannt sind:
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\},$
 - Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{6}, \quad x_2 = \sqrt{6},$
 - Minimum bei $(x_3, y_3) = (0, 3),$
 - Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2,$
- $$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -2, x < -2} f(x) \rightarrow -\infty & \lim_{x \rightarrow -2, x > -2} f(x) \rightarrow \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2, x < 2} f(x) \rightarrow \infty & \lim_{x \rightarrow 2, x > 2} f(x) \rightarrow -\infty \end{array}$$

2. Aufgabe:

- a) Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y) + 2y$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion, und stellen Sie diesen grafisch dar.
- b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$ auf Homogenität.
- c) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{x + y^2}$ die partiellen Ableitungen erster Ordnung sowie die stationären Punkte.
- d) Bestimmen Sie die Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = 2xy + ax^2$ in Abhängigkeit vom Parameter a .
- e) Gegeben ist die Produktionsfunktion $f(x, y) = xy^2 + 3xy - 4$.
Um wieviel ME ändert sich der Output, wenn man die Faktoreinsatzmenge $(x_0, y_0) = (1, 1)$ um $dx = -2$ und $dy = -1$ erhöht. Untersuchen Sie dies mit Hilfe
- des totalen Differentials df ,
 - der exakten Funktionsdifferenz Δf .
- f) Bestimmen Sie die möglichen Extrema der Funktion $f(x, y) = x + 2y$ unter der Nebenbedingung $\ln(\sqrt{xy}) = 0$.
- g) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = e^{x^2 - y + 1}$ die Gleichung der Höhenlinie (= Indifferenzkurve) zum Niveau $z_0 = 2$.

3. Aufgabe:

- a) Gegeben sind die Mengen

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{4, 5, 6, 8\}, \quad C = \{(a, b), (c, 1)\}, \quad D = \{6, 8\}.$$

Bestimmen Sie jeweils:

- $(A \setminus B) \times C$,
 - $\overline{D}_A$,
 - $|\overline{D}_B \times C|$.
- b) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:
- $\left(\frac{(x^n)^2}{x^{2n+2}} \right)^{\frac{1}{2}}$,
 - $\ln \left(\frac{(x^n)^2}{x^{2n-4}} \right)^{\frac{1}{2}}$.
- c) Geben Sie die Lösungen folgender Gleichungen an:
- $\ln \sqrt{x} - \ln x - \ln 9 = 0$,
 - $\frac{e^{\sqrt{-x}+x}}{e^{x+4}} = 1$.
- d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung $\frac{1-x}{4+x^2} < \frac{1}{3-x}$.

e) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i. $\int_0^1 \frac{1}{2} e^{-3x} dx,$

ii. $\int_0^1 \frac{x}{4-2x^2} dx.$

f) Berechnen Sie die Fläche F , die von den Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $g(x) = -x^2 + 5$ eingeschlossen wird.

g) Stellen Sie fest, ob die Funktion $f(x) = \ln(e^{2x} + 1)$ eine Umkehrfunktion besitzt, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

4. Aufgabe:

a) Gegeben sind die Matrizen und Vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Matrixoperationen oder begründen Sie, warum diese nicht möglich sind:

i. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$

ii. $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}',$

iii. $\mathbf{d}' \cdot \mathbf{A},$

iv. $\mathbf{A} + \mathbf{B}',$

v. $\det(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{B}.$

b) Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ a & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -18 \\ 3 & -22 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen die Inversen oder begründen Sie, warum keine Inverse existiert:

i. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$

ii. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 16 & -28 \end{pmatrix},$

iii. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems. Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert keine Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 4x_1 & + & 2ax_2 & = & 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \end{array}.$$

e) Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen möglichst einfach nach $\mathbf{X}$ auf:

i. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$

ii. $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{B}^{-1})' \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}^{-1}.$

Klausur WS 2006/07 - Lösung

1. Aufgabe:

a) $f(x) = x + \frac{x^2 - 3}{x - 1} :$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ wegen $x - 1 \neq 0$.

Nullstellen:

$$f(x) = x + \frac{x^2 - 3}{x - 1} = \frac{x(x - 1) + x^2 - 3}{x - 1} = \frac{x^2 - x + x^2 - 3}{x - 1} = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 1} = 0.$$

Als Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 - x - 3 = 0$ ergeben sich dann die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ und } x_2 = -\frac{4}{4} = -1.$$

b) $f(x) = e^{1-2x^2} :$

Ableitung: $f'(x) = e^{1-2x^2} \cdot (-4x) = -4xe^{1-2x^2}$

stationäre Punkte: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ wegen $e^{1-2x^2} > 0$.

c)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}, \quad f'(x) = \frac{x-2}{2(\sqrt{x-1})^3},$$

$$f''(x) = -\frac{x-4}{4(\sqrt{x-1})^5}, \quad f'''(x) = \frac{3x-18}{8(\sqrt{x-1})^7}.$$

Definitionsbereich: $D_f =]1, \infty[$ wegen $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.

Extrema:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-2}{2(\sqrt{x-1})^3} = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \text{ stationärer Punkt} \\ f''(2) &= -\frac{2-4}{4(\sqrt{2-1})^5} = \frac{2}{4(\sqrt{1})^5} = \frac{2}{4} = 2 > 0 \text{ und} \\ y_0 &= f(2) = \frac{2}{\sqrt{2-1}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt ein lokales Minimum in $(x_0, y_0) = (2, 2)$.

Wendepunkte:

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= -\frac{x-4}{4(\sqrt{x-1})^5} = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \\ f'''(4) &= \frac{3 \cdot 4 - 18}{8(\sqrt{4-1})^7} = -\frac{6}{8(\sqrt{3})^7} \neq 0 \text{ und} \\ y_1 &= f(4) = \frac{4}{\sqrt{4-1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.31 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt einen Wendepunkt in $(x_1, y_1) = (4, 2.31)$.

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot e^x}{(x+1)^3}.$

i. **Monotonie:** $f'(x) = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2} < 0 \Rightarrow x < 0$.

Wegen $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist dann $f(x)$ streng monoton fallend in $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[$.

ii. **Krümmung:** $f''(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot e^x}{(x + 1)^3} < 0 \Rightarrow (x + 1)^3 < 0 \Rightarrow x < -1$
 $\Rightarrow f$ konkav in $] -\infty, -1[$.

e) **Grenzwerte:**

i. $\lim_{x \rightarrow -1, x > -1} \frac{2x - 1}{x^2 - 1} \rightarrow \frac{2 \cdot (-1_+) - 1}{(-1_+)^2 - 1} \rightarrow \frac{-3}{1_- - 1} \rightarrow \frac{-3}{0_-} \rightarrow \infty,$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x^2 - 1}} \rightarrow e^{\frac{1}{\infty - 1}} \rightarrow e^0 = 1,$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow \infty.$

f) **Gerade** $G(x)$ schneidet x -Achse bei $x_0 = -2$ und y -Achse bei $y_1 = 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_0, y_0) = (-2, 0)$ und $(x_1, y_1) = (0, 4).$

$$G(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) = 0 + \frac{4 - 0}{0 - (-2)}(x - (-2)) = \frac{4}{2}(x + 2) = 2(x + 2) = 2x + 4.$$

Schnittpunkte von $G(x) = 2x + 4$ und $f(x) = -x^2 + 8x + 11$:

$$2x + 4 = -x^2 + 8x + 11 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} \Rightarrow x_1 = 7, \quad x_2 = -1.$$

Die Gerade $G(x)$ und die Funktion $f(x)$ besitzen also Schnittpunkte bei $(7, 18)$ und $(-1, 2).$

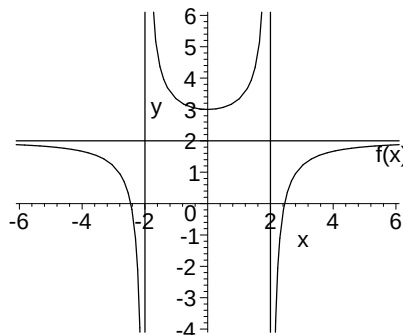
g) **Zeichnung** der Funktion $f(x)$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 2\},$

Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{6}, \quad x_2 = \sqrt{6},$ Minimum bei $(x_3, y_3) = (0, 3),$

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2,$

$$\lim_{x \rightarrow -2, x < -2} f(x) \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -2, x > -2} f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} f(x) \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2, x > 2} f(x) \rightarrow -\infty$$

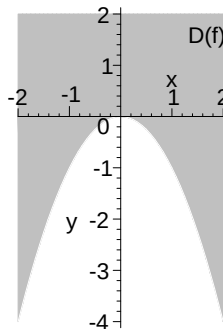


2. Aufgabe:

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y) + 2y :$

Definitionsbereich:

Wegen $x^2 + y > 0 \Rightarrow y > -x^2$ gilt: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x^2\}$.



b) **Homogenität:** $f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2} :$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{\lambda x}{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} \cdot \frac{x}{x^2 - y^2} = \lambda^{-1} \cdot f(x, y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ homogen vom Grad $r = -1$.

c) $f(x, y) = \frac{x}{x + y^2} :$

partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$f_x = \frac{1 \cdot (x + y^2) - x \cdot 1}{(x + y^2)^2} = \frac{x + y^2 - x}{(x + y^2)^2} = \frac{y^2}{(x + y^2)^2} \Rightarrow y_0 = 0,$$

$$f_y = \frac{0 \cdot (x + y^2) - x \cdot 2y}{(x + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x + y^2)^2} = 0 \Rightarrow x_0 \text{ beliebig.}$$

Die Funktion $f(x, y)$ besitzt also unendlich viele stationäre Punkte $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$.

d) **Extrema, Sattelpunkte:** $f(x, y) = 2xy + ax^2$ mit $a \in \mathbb{R} :$

notwendige Bedingung:

$$(I) \quad f_x = 2y + 2ax = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

$$(II) \quad f_y = 2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Es ergibt sich also der stationäre Punkt: $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

hinreichende Bedingung:

$$\left. \begin{aligned} f_{xx} &= 2a, & f_{yy} &= 0, & f_{xy} &= 2 : \\ f_{xx}(0, 0) &= 2a, & f_{yy}(0, 0) &= 0, & f_{xy}(0, 0) &= 2, \\ f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 &= 2a \cdot 0 - 2^2 = -4 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ einen Sattelpunkt für alle $a \in \mathbb{R}$.

e) $f(x, y) = xy^2 + 3xy - 4, \quad f_x = y^2 + 3y, \quad f_y = 2xy + 3x :$

totales Differential: $df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy = (y^2 + 3y) \cdot dx + (2xy + 3x) \cdot dy.$

Faktoreinsatzmengen $(x_0, y_0) = (1, 1), \quad dx = -2, \quad dy = -1 :$

i. **Näherung:**

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0)(dx, dy) &= df(1, 1)(-2, -1) = (1 + 3) \cdot (-2) + (2 \cdot 1 \cdot 1 + 3) \cdot (-1) = \\ &= 4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) = -13. \end{aligned}$$

ii. **exakte Funktionsdifferenz:**

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = f(1 - 2, 1 - 1) - f(1, 1) = \\ &= f(-1, 0) - f(1, 1) = [(-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 0 - 4] - [1 + 3 - 4] = -4. \end{aligned}$$

f) **Extrema** von $f(x, y) = x + 2y$

unter der **Nebenbedingung** $\ln(\sqrt{xy}) = 0 \Rightarrow \sqrt{xy} = 1 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow xy - 1 = 0$:

Lagrange-Funktion: $L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda \cdot (xy - 1)$

notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} (I) \quad L_x &= 1 + \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{y} \\ (II) \quad L_y &= 2 + \lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{x} \\ (III) \quad L_\lambda &= xy - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$(I) = (II) \text{ ergibt dann: } \frac{1}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Durch Einsetzen von $y = \frac{x}{2}$ in (III) erhält man:

$$x \cdot \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \text{ und } y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\Rightarrow f$ hat unter der NB möglicherweise ein Extremum in

$$(x_1, y_1) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ und } (x_2, y_2) = (-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Die Punkte $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sind keine Lösungen, da die Nebenbedingung nicht erfüllt ist.

g) **Höhenlinie** (= Isoquante) an die Funktion $f(x, y) = e^{x^2 - y + 1}$ zum Niveau $z_0 = 2$:

$$e^{x^2 - y + 1} = 2 \Rightarrow x^2 - y + 1 = \ln 2 \Rightarrow y = x^2 + 1 - \ln 2.$$

3. Aufgabe:

a) **Mengen:** $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 8\}$, $C = \{(a, b), (c, 1)\}$, $D = \{6, 8\}$.

- i. $(A \setminus B) \times C = \{2, 10\} \times \{(a, b), (c, 1)\} = \{(2, a, b), (2, c, 1), (10, a, b), (10, c, 1)\}$,
- ii. $\overline{D}_A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \setminus \{6, 8\} = \{2, 4, 10\}$, da $D \subset A$,
- iii. $|\overline{D}_B \times C| = 2 \cdot 2 = 4$ wegen $D_B = B \setminus D = \{4, 5\}$.

b) **Vereinfachungen:**

- i. $\left(\frac{(x^n)^2}{x^{2n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^{2n}}{x^{2n} \cdot x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (x^{-2})^{\frac{1}{2}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$,
- ii. $\ln\left(\frac{(x^n)^2}{x^{2n-4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^{2n}}{x^{2n} \cdot x^{-4}}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{x^{-4}} = \frac{1}{2} \ln x^4 = \frac{4}{2} \ln x = 2 \ln x$.

c) **Gleichungen:**

- i. $\ln \sqrt{x} - \ln x - \ln 9 = 0 \Rightarrow \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln x = \ln 9 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln x - \ln x = \ln 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln x = \ln 9 \Rightarrow \ln x = -2 \ln 9 = \ln 9^{-2} \Rightarrow x = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$,
- ii. $\frac{e^{\sqrt{-x}+x}}{e^{x+4}} = 1 \Rightarrow e^{\sqrt{-x}+x} = e^{x+4} \Rightarrow \sqrt{-x} + x = x + 4 \Rightarrow -x = 16 \Rightarrow x_0 = -16$.

d) **Ungleichung:** $\frac{1-x}{4+x^2} < \frac{1}{3-x} \Rightarrow 1-x < \frac{4+x^2}{3-x}$ wegen $4+x^2 > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{1. Fall: } 3-x > 0 \Rightarrow x < 3 : \\ 1-x < \frac{4+x^2}{3-x} \mid \cdot (3-x) > 0 \Rightarrow (1-x)(3-x) < 4+x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3-4x+x^2 < 4+x^2 \Rightarrow 4x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsmenge } \mathbb{L}_1 =]-\frac{1}{4}, 3[.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{2. Fall: } 3-x < 0 \Rightarrow x > 3 : \\ 1-x < \frac{4+x^2}{3-x} \mid \cdot (3-x) < 0 \Rightarrow (1-x)(3-x) > 4+x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3-4x+x^2 > 4+x^2 \Rightarrow 4x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsmenge } \mathbb{L}_2 = \emptyset.$$

$$\text{Es ergibt sich also die Lösungsmenge } \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\frac{1}{4}, 3[.$$

e) **Integrale:**

$$\begin{aligned} \text{i. } \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-3x} dx &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot e^{-3x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} e^{-3x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} (e^{-3} - e^0) = \\ &= -\frac{1}{6} (e^{-3} - 1) = \frac{1}{6} (1 - e^{-3}) = 0,158. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \int_0^1 \frac{x}{4-2x^2} dx &= -\frac{1}{4} \ln(4-2x^2) \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} [\ln(4-2) - \ln(4-0)] = \\ &= -\frac{1}{4} (\ln 2 - \ln 4) = \frac{1}{4} (\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{4} \ln \frac{4}{2} = \frac{1}{4} \ln 2 = 0,173. \end{aligned}$$

f) **Fläche** F zwischen $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $g(x) = -x^2 + 5$:

Schnittpunkte zwischen $f(x)$ und $g(x)$:

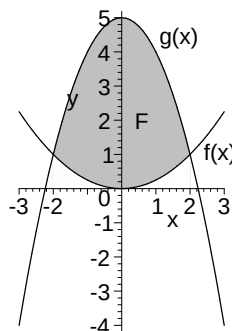
$$\frac{1}{4}x^2 = -x^2 + 5 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2.$$

$$F_1 = \int_{-2}^2 \frac{1}{4}x^2 dx = \left. \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^2 = \frac{1}{12}[2^3 - (-2)^3] = \frac{1}{12}[8 - (-8)] = \frac{1}{12}16 = \frac{4}{3}.$$

$$F_2 = \int_{-2}^2 (-x^2 + 5) dx = \left. \left(-\frac{x^3}{3} + 5x\right) \right|_{-2}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 10\right) - \left(-\left(-\frac{8}{3}\right) - 10\right) = -\frac{8}{3} + 10 - \frac{8}{3} + 10 = -\frac{16}{3} + 20.$$

Flächendifferenz:

$$F = |F_1 - F_2| = \left| \frac{4}{3} - \left(-\frac{16}{3} + 20\right) \right| = \left| \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 20 \right| = \left| \frac{20}{3} - 20 \right| = 20 - \frac{20}{3} = \frac{60 - 20}{3} = \frac{40}{3} = 13,3.$$



g) **Umkehrfunktion** von $f(x) = \ln(e^{2x} + 1)$:

$D_f = \mathbb{R}$ wegen $e^{2x} + 1 > 0$

$W_f =]0, \infty[$ wegen $e^{2x} + 1 > 1 \Rightarrow f(x) = \ln(e^{2x} + 1) > 0$

Existenz von $f^{-1}(x)$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} > 0 \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend in } D_f = \mathbb{R}.$$

Konstruktion von $f^{-1}(x)$:

$$y = f(x) = \ln(e^{2x} + 1) \Rightarrow e^y = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x} = e^y - 1 \Rightarrow 2x = \ln(e^y - 1) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(e^y - 1).$$

Vertauschung von x und y ergibt:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(e^x - 1) \text{ mit } D_{f^{-1}} =]0, \infty[\text{ und } W_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

4. Aufgabe:

a) Matrixoperationen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

i. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existiert und ist eine (3×3) -Matrix:

$$\underbrace{(3 \times 2) \quad (2 \times 3)}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 16 \\ 16 & 15 & -6 \\ 7 & -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

ii. $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}'$ existiert nicht, da Spaltenzahl von $\mathbf{C} \neq$ Zeilenzahl von $\mathbf{B}'$.

$$\underbrace{(2 \times 2) \quad (3 \times 2)}$$

iii. $\mathbf{d}' \cdot \mathbf{A}$ existiert und ist eine (1×2) -Matrix

$$\underbrace{(1 \times 3) \quad (3 \times 2)}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv. $\mathbf{A} + \mathbf{B}'$ existiert und ist eine (3×2) -Matrix

$$\underbrace{(3 \times 2) \quad (3 \times 2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -8 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{v. } \det(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) Matrizengleichung: } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ a & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 4b+2 \\ 8a-21 & ab-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -18 \\ 3 & -22 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b+2 = -18 \Rightarrow 4b = -20 \Rightarrow b = -5 \\ 8a-21 = 3 \Rightarrow 8a = 24 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$ab-7 = 3 \cdot (-5) - 7 = -22 \Rightarrow \text{Lösung: } a = 3, \quad b = -5.$$

c) Inverse Matrizen:

$$\text{i. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \text{ ist keine } (n \times n)\text{-Matrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \text{ existiert nicht.}$$

$$\text{ii. } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 16 & -28 \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{B}) = (-4) \cdot (-28) - 7 \cdot 16 = 112 - 112 = 0 \Rightarrow \text{existiert nicht.}$$

$$\text{iii. } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{C}) = 15 - 14 = 1 \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} \text{ existiert mit}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) **Gleichungssystem:**

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 & + & 2ax_2 = 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 = 0 \end{array} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{A}) = 12 + 2a.$$

Cramersche Regel:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{9}{12 + 2a},$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})} = \frac{3}{12 + 2a}.$$

Es ergibt sich also die Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12 + 2a} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ für alle $a \neq -6$.

e) **Matrizengleichungen:**

$$\begin{aligned} \text{i. } & \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}} \cdot \mathbf{X} \cdot \underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}} \cdot \underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } & \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{B}^{-1})' \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{X} \cdot \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{E} = \underbrace{(\mathbf{B}')^{-1} \cdot \mathbf{B}'} \cdot \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{X} \cdot \underbrace{\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}} = \underbrace{\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}} \Rightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Klausur WS 2005/06

1. Aufgabe:

- a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + x$.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f sowie die Nullstellen von $f(x)$.
- b) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(2x^2 - 1)$ die stationären Punkte unter Beachtung des Definitionsbereichs.
- c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{(x-3)^2}$ mit den Ableitungen
 $f'(x) = -\frac{x+1}{(x-3)^3}$, $f''(x) = \frac{2x+6}{(x-3)^4}$ und $f'''(x) = -\frac{6x+30}{(x-3)^5}$.
Bestimmen Sie unter Beachtung des Definitionsbereichs D_f die Extrema und Wendepunkte.
- d) Gegeben sei die Funktion $f(x)$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
sowie den Ableitungen $f'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x^2-1})^3}$ und $f''(x) = \frac{3x}{(\sqrt{x^2-1})^5}$.
Bestimmen Sie jeweils die Bereiche in denen gilt:
i. $f(x)$ ist streng monoton fallend,
ii. $f(x)$ ist konkav .
- e) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$,
ii. $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \ln(x^2 - 1)$,
iii. $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{x}{x^2 - 1}$.
- f) Zeichnen Sie die Funktion $f(x)$ unter Benutzung folgender Angaben:
i. $D_f = \mathbb{R}$,
ii. Nullstelle $x_0 = -2$,
iii. Minimum bei $(x_1, y_1) = (-1, -e)$,
iv. Wendepunkt bei: $(x_2, y_2) = (0, -2)$,
v. Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- g) Gegeben sei die Gerade $G(x)$, die die Steigung $m = -2$ besitzt und durch den Punkt $P(3, 0)$ verläuft.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 6$.

2. Aufgabe:

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f der Funktion $f(x, y) = \sqrt{-x \cdot y} + 3x$ und zeichnen Sie diesen.
- b) Stellen Sie fest, ob die Funktion $f(x, y) = x^3y^2 + \sqrt{xy} \cdot y^4$ homogen ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grad der Homogenität.
- c) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{y} \cdot (1 - x)^3$ die partiellen Ableitungen erster Ordnung.
- d) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y)$ mit den partiellen Ableitungen $f_x = -y^2 + 4$ und $f_y = 2(1 - x)y$ die stationären Punkte und stellen Sie fest, ob die Funktion an diesen Stellen ein Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt.
- e) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = \ln y^3 + 2x$ das totale Differential df , und berechnen Sie für den Übergang vom Punkt $(x_0, y_0) = (3, 3)$ zum Punkt $(x_1, y_1) = (2, 4)$ die
 - i. Näherung mit Hilfe des totalen Differentials df ,
 - ii. exakte Funktionsdifferenz Δf .
- f) Bestimmen Sie die möglichen Extrema der Funktion $f(x, y) = 2x^2y$ unter der Nebenbedingung $x + 4y = 20$.

3. Aufgabe:

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.
- b) Schreiben Sie die Funktion $f(x) = |2x + 3|$ in betragsfreier Form und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $f(x) = 3$.
- c) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{a^{2n}}{a^{n+1}}$ so weit wie möglich.
- d) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $x^{-1,5} = 2$.
- e) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.
- f) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichungen
 - i. $\ln \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x-1} - \ln \frac{2}{x} = 0$,
 - ii. $e^{\sqrt{x}} = a$.
- g) Berechnen Sie die Integrale:
 - i. $\int \frac{2x+3}{x^2} dx$
 - ii. $\int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx$.
- h) Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3\}$, $M = \{1, \dots, 10\}$. Bestimmen Sie daraus:

- i. $(A \cup B) \setminus C$,
- ii. $(A \times B) \cap (B \times C)$,
- iii. $|\overline{(B \cup C)}_M|$.

4. Aufgabe:

a) Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte bzw. Differenzen oder begründen Sie, warum die entsprechenden Matrixoperationen nicht möglich sind.

- i. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,
- ii. $\mathbf{C} - 2\mathbf{A}$,
- iii. $2\mathbf{B}' - \mathbf{A}$,
- iv. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

b) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sowie die $(m \times n)$ - Matrix $\mathbf{B}$.

Für welche Werte von m bzw. n gilt dann:

- i. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}'$ ist eine (3×1) - Matrix,
- ii. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist eine (2×3) - Matrix.

c) Berechnen Sie - falls möglich - für die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

die Inversen $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ und $\mathbf{C}^{-1}$.

d) Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $\det \begin{pmatrix} 3 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 7$.

e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & ax_2 = 0 \\ ax_1 & + & 3x_2 = 2 \end{array}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ existiert eine Lösung?

f) Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen möglichst einfach nach $\mathbf{X}$ auf!

- i. $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{E})^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}$,
- ii. $\mathbf{X} + (\mathbf{X} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{B} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})'$.

Klausur WS 2005/06 - Lösung

1. Aufgabe:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + x :$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ wegen $x-1 \neq 0$.

Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} + x = 0 \Rightarrow \frac{x+1+x(x-1)}{x-1} = \frac{x+1+x^2-x}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{es existieren keine Nullstellen.}$$

b) $f(x) = \ln(2x^2 - 1) :$

Wegen $2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow 2x^2 > 1 \Rightarrow x^2 > \frac{1}{2}$ gilt: $D_f =]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$ $f'(x) =$

$$\frac{4x}{2x^2-1} = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \notin D_f \Rightarrow \text{keine stationären Punkte.}$$

c) $f(x) = \frac{x-1}{(x-3)^2}, \quad f'(x) = -\frac{x+1}{(x-3)^3},$
 $f''(x) = \frac{2x+6}{(x-3)^4}, \quad f'''(x) = -\frac{6x+30}{(x-3)^5}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} :$

Extremwerte:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x+1}{(x-3)^3} = 0 \Rightarrow x_S = -1 \text{ stationärer Punkt} \\ f''(-1) &= \frac{-2+6}{(-4)^4} = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} > 0 \text{ und} \\ y_S = f(-1) &= \frac{-1-1}{(-4)^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt ein lokales Minimum in $(x_S, y_S) = (-1, -\frac{1}{8})$.

Wendepunkte:

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= \frac{2x+6}{(x-3)^4} = 0 \Rightarrow x_w = -3 \\ f'''(-3) &= -\frac{-18+30}{(-6)^5} = -\frac{12}{(-6)^5} \neq 0 \text{ und} \\ y_w = f(-3) &= \frac{-3-1}{(-6)^2} = \frac{-4}{(-6)^2} = -\frac{4}{36} = -\frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt einen Wendepunkt in $(x_w, y_w) = (-3, -\frac{1}{9})$.

d) $f'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x^2-1})^3}, \quad f''(x) = \frac{3x}{(\sqrt{x^2-1})^5},$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1] =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[.$$

Wegen $\sqrt{x^2-1} > 0$ für alle $x \in D_f$ gilt dann:

i. **Monotonie:** $f'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x^2-1})^3} < 0 \Rightarrow$

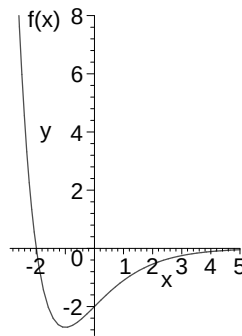
$\Rightarrow f$ streng monoton fallend in $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

ii. **Krümmung:** $f''(x) = \frac{3x}{(\sqrt{x^2-1})^5} < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ konkav in $] -\infty, -1[$.

e) **Grenzwerte:**

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2,$
 ii. $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \ln(x^2-1) \rightarrow \ln((1_+)^2-1) \rightarrow \ln(0_+) \rightarrow -\infty,$
 iii. $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \frac{1_-}{(1_-)^2-1} \rightarrow \frac{1}{1_- - 1} \rightarrow \frac{1}{0_-} \rightarrow -\infty.$

f) **Zeichnung** der Funktion $f(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$, Nullstelle: $x_0 = -2$,
 Minimum in $(x_1, y_1) = (-1, -e)$, Wendepunkt in $(x_2, y_2) = (0, -2)$,
 Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.



g) **Gerade** $G(x)$ durch den Punkt $(x_0, y_0) = (3, 0)$ mit der Steigung $m = -2$:

$$G(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) = 0 - 2(x - 3) = -2x + 6$$

wegen $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -2.$

Schnittpunkte von $G(x) = -2x + 6$ und $f(x) = -x^2 + 2x + 6$:

$$\begin{aligned} -2x + 6 &= -x^2 + 2x + 6 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \cdot (x - 4) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0, & y_0 = 0 + 6 = 6 \\ x_1 = 4, & y_1 = -8 + 6 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Gerade $G(x)$ und die Funktion $f(x)$ besitzen also Schnittpunkte bei $(0, 6)$ und $(4, -2)$.

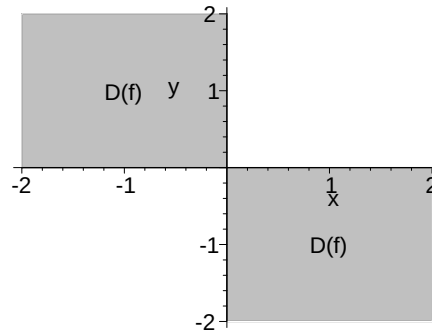
2. Aufgabe:

a) $f(x, y) = \sqrt{-xy} + 3x :$

Definitionsbereich:

Wegen $-xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (x \geq 0) \wedge (y \leq 0) \\ (x \leq 0) \wedge (y \geq 0) \end{cases}$ gilt:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0) \wedge (y \leq 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leq 0) \wedge (y \geq 0)\}.$$



b) **Homogenität:** $f(x, y) = x^3y^2 + \sqrt{xy} \cdot y^4 :$

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 \cdot (\lambda y)^2 + (\lambda x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\lambda y)^{\frac{1}{2}} \cdot (\lambda y)^4 = \\ &= \lambda^3 x^3 \lambda^2 y^2 + \lambda^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \lambda^4 y^4 = \lambda^5 x^3 y^2 + \lambda^5 \sqrt{xy} \cdot y^4 = \\ &= \lambda^5 \cdot f(x, y) \Rightarrow f \text{ homogen vom Grad } r = 5. \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = \sqrt{y} \cdot (1 - x)^3 = y^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - x)^3 :$

partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$f_x = y^{\frac{1}{2}} \cdot 3(1 - x)^2(-1) = -3\sqrt{y} \cdot (1 - x)^2,$$

$$f_y = (1 - x)^3 \cdot \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1 - x)^3}{2\sqrt{y}}.$$

d) $f_x = -y^2 + 4, \quad f_y = 2(1 - x) \cdot y :$

stationäre Punkte:

$$(I) \quad f_x = -y^2 + 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = -2$$

$$(II) \quad f_y = 2(1 - x) \cdot y = 0$$

Durch Einsetzen von (I) in (II) erhält man $x = 1$.

Es ergeben sich also die stationären Punkte: $(x_1, y_1) = (1, 2)$ und $(x_2, y_2) = (1, -2)$.

partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 2(1 - x), \quad f_{xy} = -2y :$$

Extrema, Sattelpunkte:

stationärer Punkt $(x_1, y_1) = (1, 2) :$

$$\left. \begin{aligned} f_{xx}(1, 2) &= 0, & f_{yy}(1, 2) &= 0, & f_{xy}(1, 2) &= -4, \\ f_{xx}(1, 2) \cdot f_{yy}(1, 2) - (f_{xy}(1, 2))^2 &= 0 \cdot 0 - (-4)^2 = -16 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $(x_1, y_1) = (1, 2)$ einen Sattelpunkt.

stationärer Punkt $(x_2, y_2) = (1, -2) :$

$$\left. \begin{array}{l} f_{xx}(1, -2) = 0, \quad f_{yy}(1, -2) = 0, \quad f_{xy}(1, -2) = 4, \\ f_{xx}(1, -2) \cdot f_{yy}(1, -2) - (f_{xy}(1, -2))^2 = 0 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $(x_2, y_2) = (1, -2)$ einen Sattelpunkt.

e) $f(x, y) = \ln y^3 + 2x, \quad f_x = 2, \quad f_y = \frac{3y^2}{y^3} = \frac{3}{y} :$

totales Differential: $df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy = 2 \cdot dx + \frac{3}{y} \cdot dy.$

Übergang von $(x_0, y_0) = (3, 3)$ zu $(x_1, y_1) = (2, 4) \Rightarrow dx = -1, \quad dy = 1.$

i. **Näherung:** $df(x_0, y_0)(dx, dy) = df(3, 3)(-1, 1) = 2 \cdot (-1) + \frac{3}{3} \cdot 1 = -2 + 1 = -1.$

ii. **exakte Funktionsdifferenz:**

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = f(2, 4) - f(3, 3) = \\ &= [\ln 4^3 + 2 \cdot 2] - [\ln 3^3 + 2 \cdot 3] = 3 \ln 4 + 4 - 3 \ln 3 - 6 = \\ &= 3(\ln 4 - \ln 3) - 2 = -1,137. \end{aligned}$$

f) **Extrema von** $f(x, y) = 2x^2y$

unter der Nebenbedingung $x + 4y = 20 \Rightarrow x + 4y - 20 = 0 :$

Lagrange-Funktion: $L(x, y, \lambda) = 2x^2y + \lambda \cdot (x + 4y - 20).$

notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} (I) \quad L_x &= 4xy + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -4xy \\ (II) \quad L_y &= 2x^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{x^2}{2} \\ (III) \quad L_\lambda &= x + 4y - 20 = 0 \end{aligned}$$

$(I) = (II)$ ergibt dann: $4xy = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{8x} = \frac{x}{8}$ für $x \neq 0$.

Durch Einsetzen von $y = \frac{x}{8}$ in (III) erhält man:

$$x + \frac{4x}{8} = 20 \Rightarrow x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x = 20 \Rightarrow x_0 = \frac{40}{3}, \quad y_0 = \frac{40}{3 \cdot 8} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow f$ hat unter der NB möglicherweise ein Extremum in $(x_0, y_0) = (\frac{40}{3}, \frac{5}{3}).$

Durch Einsetzen von $x_1 = 0$ in (III) erhält man:

$$0 + 4y - 20 = 0 \Rightarrow 4y = 20 \Rightarrow y_1 = 5$$

$\Rightarrow f$ hat unter der NB möglicherweise ein Extremum in $(x_1, y_1) = (0, 5).$

3. Aufgabe:

a) **Ungleichung:** $x^2 - 3x + 2 \leq 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (x \leq 2) \wedge (x \geq 1) & \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \\ (x \geq 2) \wedge (x \leq 1) & \Rightarrow \emptyset \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsmenge: } \mathbb{L} = [1, 2].$$

b) **Betragsgleichung:** $f(x) = |2x + 3| = 3$

$$f(x) = |2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3 & \text{für } 2x + 3 \geq 0 \\ -2x - 3 & \text{für } 2x + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 & \text{für } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x - 3 & \text{für } x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ Fall } x \geq -\frac{3}{2} : 2x + 3 = 3 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ 2. \text{ Fall } x < -\frac{3}{2} : -2x - 3 = 3 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x_1 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsmenge: } \mathbb{L} = \{-3, 0\}.$$

c) **Vereinfachung:** $\frac{a^{2n}}{a^{n+1}} = a^{2n} \cdot a^{-n-1} = a^{2n-n-1} = a^{n-1}.$

d) **Gleichung:**

$$x^{-1.5} = x^{-\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow (x^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right\}.$$

e) **Definitionsbereich** von $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$:

$$\left. \begin{array}{l} \ln(x+1) \text{ ist definiert für } x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ \ln x \text{ ist definiert für } x > 0 \text{ und } \ln x = 0 \text{ für } x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f =]0, \infty[\setminus \{1\}.$$

f) **Gleichungen:**

$$\text{i. } \ln \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x-1} - \ln \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 1 - \ln x + \ln 1 - \ln(x-1) - \ln 2 + \ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(x-1) = -\ln 2 \Rightarrow e^{\ln(x-1)} = e^{-\ln 2} = (e^{\ln 2})^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{ii. } e^{\sqrt{x}} = a \Rightarrow \ln e^{\sqrt{x}} = \ln a \Rightarrow \sqrt{x} = \ln a \Rightarrow x_0 = (\ln a)^2.$$

g) **Integrale:**

i.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3}{x^2} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int x^{-2} dx = \\ &= 2 \ln x + 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 2 \ln x - \frac{3}{x} + c. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx &= [e^x - e^{-x}(-1)] \Big|_0^2 = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = e^2 + e^{-2} - (e^0 + e^0) = \\ &= e^2 + e^{-2} - 2 = 5,524. \end{aligned}$$

h) **Mengen:**

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{1, 3\}, \quad M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

i. $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3\} = \{2\},$

ii. $(A \times B) \cap (B \times C) =$
 $= \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\} \cap \{(1, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\} =$
 $= \{(1, 1), (2, 1)\},$

iii. $\overline{(B \cup C)}_M = M \setminus (B \cup C) = \{1, \dots, 10\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\overline{(B \cup C)}_M| = 7.$

4. Aufgabe:

a) **Matrizenoperationen:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} :$$

i. $\underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}_{(2 \times 3) (3 \times 2)}$ existiert und ist eine (2×2) -Matrix:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

ii. $\underbrace{\mathbf{C} - 2\mathbf{A}}_{(2 \times 2) (2 \times 3)}$ existiert nicht, da Spaltenzahl von $\mathbf{C} \neq$ Spaltenzahl von $\mathbf{A}$.

iii. $\underbrace{2\mathbf{B}' - \mathbf{A}}_{(2 \times 3) (2 \times 3)}$ existiert und ist eine (2×3) -Matrix.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{B}' - \mathbf{A} &= 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

iv. $\underbrace{\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}_{(3 \times 2) (2 \times 2)}$ existiert und ist eine (3×2) -Matrix.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 6 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathbf{A}$ (3×2) -Matrix, $\mathbf{B}$ $(m \times n)$ -Matrix:

- i. $\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B}' \end{pmatrix}}_{(3 \times 2) \quad (n \times m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' \end{pmatrix}_{(3 \times 1)} \quad \text{für } m = 1, n = 2,$
- ii. $\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & - & \mathbf{B} \end{pmatrix}}_{(2 \times 3) \quad (m \times n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} \end{pmatrix}_{(2 \times 3)} \quad \text{für } m = 2, n = 3.$

c) **Inverse Matrix:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 8 - 5 = 3 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \text{ existiert mit}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{B} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} \text{ existiert nicht,}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist } (3 \times 2)\text{-Matrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} \text{ existiert nicht,}$$

da Zeilenzahl von $\mathbf{C} \neq$ Spaltenzahl von $\mathbf{C}$.

d) **Determinante:** $\det \begin{pmatrix} 3 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 7 :$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 3 + a^2 = 7 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a_{1,2} = \pm 2.$$

e) **Cramersche Regel:**

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & ax_2 = 0 \\ ax_1 & + & 3x_2 = 2 \end{array} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ a & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 6 + a^2.$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{A}} = \frac{2a}{6 + a^2},$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{A}} = \frac{4}{6 + a^2}.$$

Es ergibt sich also die Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6 + a^2} \begin{pmatrix} 2a \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$

f) **Matrizengleichungen:**

$$\begin{aligned} \text{i. } & (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{X} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{X} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } & \mathbf{X} + (\mathbf{X} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})' \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}' \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{D}' \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{D}' - \mathbf{B} \text{ wegen } \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \text{ und } \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{D}'. \end{aligned}$$

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler kompakt
Kurz und verständlich mit vielen einfachen Beispielen
Pfuff, F.

2009, IV, 168 S., Softcover

ISBN: 978-3-8348-0711-3