

5 Funktionsrealisierung – Mechatronischer Elementarwandler

Hintergrund Die funktionelle Schnittstelle zwischen Informationsverarbeitung in Form elektrischer Signale und der mechanischen Struktur in Form von Kräften und Momenten bzw. Bewegungsgrößen ist für ein mechatronisches Produkt von zentraler Bedeutung. Die bidirektionale Energiewandlung zwischen elektrischer und mechanischer Energie schafft eine Schlüsselvoraussetzung für die Hauptproduktaufgabe „gezieltes Bewegen“. Die heute zur Verfügung stehenden vielfältigen physikalischen Wandlungsprinzipien erlauben zudem eine funktionell wie konstruktiv kompakte Integration in das mechatronische Produkt - *mechatronischer Wandler*. Für den Systementwurf ist neben dem Verständnis der Wandlungsprinzipien im Besonderen der Einfluss von Wandlerparametern auf das Übertragungsverhalten von Interesse.

Inhalt Kapitel 5 In diesem Kapitel werden anhand eines *generischen mechatronischen Elementarwandlers* allgemeine Gemeinsamkeiten in Bezug auf Leistungskopplung und Übertragungsverhalten unabhängig von konkret vorliegenden physikalischen Wandlungsphänomenen diskutiert: *Krafterzeugung, elektrische Eigenschaften, Kausalstrukturen und dynamische Verhaltensmodelle*. In diesem Sinne bildet dieser Elementarwandler die methodische Klammer und den Modellrahmen für die detaillierten Darstellungen von physikalischen Wandlerprinzipien in nachfolgenden Kapiteln. Ausgehend von einer energiebasierten Modellierung auf Basis der *EULER-LAGRANGE-Gleichungen* werden nichtlineare und linearisierte *konstitutive Wandlergleichungen* für einen verlustlosen unbeschalteten Wandler abgeleitet. Für den linearisierten Wandler wird eine spezielle *Vierpolparametrierung* als zentrale Beschreibungsbasis für nachfolgende *Modellerweiterungen* hinsichtlich elektrischer und mechanischer Beschaltung eingeführt (*Spannungs- vs. Stromquelle, verlustbehafteter Wandler, Starrkörper- vs. Mehrkörperlast*). Die vorliegenden Modelle erlauben eine allgemeine Diskussion *generischer Verhaltenseigenschaften* wie Eigenfrequenzen, Wandlersteifigkeiten, Übertragungsfunktionen, elektromechanischer Koppelfaktor, wobei höchstens eine wandlertypische Differenzierung in kapazitives oder induktives Verhalten nötig ist. Mit drei technisch bedeutsamen Anwendungsaspekten zur *Schwingungsdämpfung* (mechatronischer *Resonator*), zur *Energieerzeugung* (mechatronischer *Schwinggenerator*) und zum *Self-sensing* werden diese allgemeinen Modellbetrachtungen abgerundet. ■

5.1 Systemtechnische Einordnung

Mechatronische Wandler Systemtechnisch betrachtet stellen die Funktionen „erzeuge Kräfte / Momente“ und „messe Bewegungsgrößen“ die *Aktuatorik* bzw. *Sensorik* eines mechatronischen Systems dar (Abb. 5.1). Dabei werden Systemgrößen unterschiedlicher physikalischer Domänen kausal in Bezug gesetzt: *elektrische* Größen als Schnittstelle zur Informationsverarbeitung und *mechanische* Größen als Schnittstelle zur mechanischen Struktur. In diesem Sinne spricht man bei der gerätetechnischen Realisierung von einem *Wandler* (engl. *transducer*). Als Wandlungsprinzipien nutzt man verschiedene physikalische Phänomene: z.B. Elektrostatik, Piezoelektrizität, Elektromagnetismus (diese werden in den folgenden Kapiteln wegen Ihrer breiten Anwendung auch genauer diskutiert). Aufgrund der in der Regel hohen räumlichen und funktionellen Integrationsdichte werden solche Wandler im Folgenden als *mechatronische Wandler* bezeichnet.

Kausalstruktur Für beide Wandlungsaufgaben interessiert das Übertragungsverhalten in der aus Abb. 5.1 ersichtlichen Kausalrichtung. Häufig sind aufgrund kompakter Konstruktionsprinzipien die Wandlerelemente direkt in die mechanische Struktur integriert. Damit spielen neben den üblichen funktionalen Eigenschaften wie *Linearität*, *Dynamik* auch konstruktiv bedingte *Parameterabhängigkeiten* eine wichtige Rolle für die Verhaltensanalyse im geschlossenen Wirkungskreis.

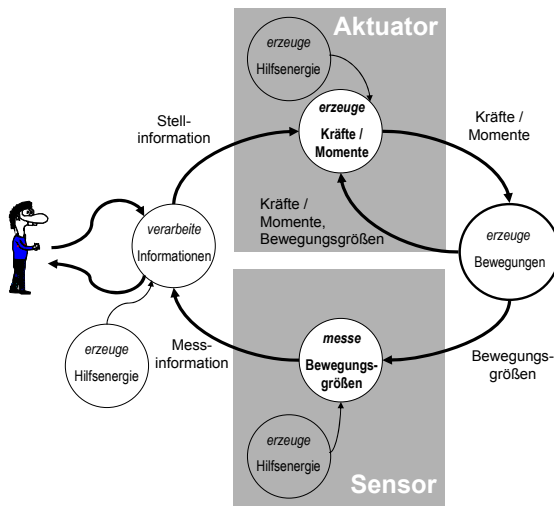


Abb. 5.1. Funktionelle Dekomposition eines mechatronischen Systems – *Mechatronische Wandler* zur Realisierung von Sensor- und Aktuatorfunktionen

Leistungsrückwirkung Da es sich bei der *Krafterzeugung* um eine Leistungswandlung *elektrisch* \rightarrow *mechanisch* und damit um eine Leistungskopplung zur mechanischen Struktur handelt, sind die bestehenden *Leistungsrückwirkungen* in die Wandlerverhaltensmodelle einzubeziehen (beachte Rückwirkung in Abb. 5.1). Ein aussagefähiges Verhaltensmodell eines Aktuators muss also stets die beschleunigte mechanische Last berücksichtigen. Für orientierende Untersuchungen kann man sich allerdings recht gut auf Einmassenmodelle beschränken, die für detaillierte Betrachtungen gegen Mehrkörpermodelle auszutauschen sind.

Bei *sensorischen* Funktionen soll ja definitionsgemäß die eigentliche Prozessgröße möglichst wenig durch den Messaufbau verfälscht werden. Die Bewegungsmessung erfolgt in der Regel über sensorinterne Testmassen, die mit der mechanischen Hauptstruktur starr (wenn möglich) oder elastisch (manchmal unvermeidbar) gekoppelt sind. Aufgrund der geringen Sensortestmasse existiert in solchen Fällen praktisch keine Leistungsrückwirkung auf die mechanische Struktur. Die zu messenden Bewegungsgrößen können dann als *rückwirkungsfreie Fußpunktanregungen* von Testmassen innerhalb des Sensors modelliert werden (beachte die unidirektionale Kausalstruktur für die Sensorfunktion in Abb. 5.1). Auf der lokalen Wandlerebene ist dann allerdings die Leistungsrückwirkung mit der *Sensortestmasse* sehr wohl zu berücksichtigen. Hier reichen aber in der Regel einfache Einmassenmodelle aus.

Mechatronischer Elementarwandler Unabhängig von den konkret vorliegenden physikalischen Wandlungsphänomenen lassen sich für das abstrakte Modell eines sogenannten *mechatronischen Elementarwandlers* allgemeine Eigenschaften in Bezug auf Leistungskopplung und Übertragungsverhalten formulieren:

- *Krafterzeugung* als Funktion von Geometrie, mechanischen Einflussgrößen und elektrischer Ansteuerung
- *Elektrische Eigenschaften* als Funktion von Geometrie und mechanischen Einflussgrößen
- *Kausalstrukturen* und *dynamische Verhaltensmodelle*.

In diesem Sinne bildet dieser Elementarwandler die methodische Klammer und den Modellrahmen für die detaillierten Darstellungen von physikalischen Wandlerprinzipien in den nachfolgenden Kapiteln. Um darstellerische Redundanzen zu vermeiden, wird in diesem Kapitel auf erläuternde physikalisch orientierte Beispiele verzichtet, diese können den weiteren Kapiteln entnommen werden. Das Hauptaugenmerk der folgenden Darstellungen ist also auf eine einheitliche formale Beschreibung und Notation als Referenz für die nachfolgenden Kapitel gerichtet.

5.2 Allgemeines Elementarwandlermodell

5.2.1 Systemkonfiguration

Für den Systementwurf interessiert das dynamische Wirkverhalten zwischen Anregungs- und Wirkgrößen eines Wandlers. In Abb. 5.2 ist eine verallgemeinerte Systemkonfiguration eines beschalteten mechatronischen Elementarwandlers mit *einem* mechanischen Freiheitsgrad dargestellt, womit sowohl *Aktuator*- als auch *Sensorfunktionen* modellierbar sind.

Mechanisch besteht der Wandler aus einem still stehenden Wandlerelement – *Ständer* – und einem parallel zur Wandlerkrafttrichtung bewegliches Wandlerelement – *Anker*. Der Ständer ist starr mit einer die resultierende Kraft aufnehmenden Basisstruktur verbunden. Der Anker ist an eine bewegliche massebehaftete Struktur – *Last* – angekoppelt. In Abb. 5.2 ist als Last stellvertretend ein *Starrkörper* mit der Masse m gezeichnet, für komplexere Gebilde denke man sich anstelle dessen ein *Mehrkörpersystem* (MKS) nach Kap. 4.

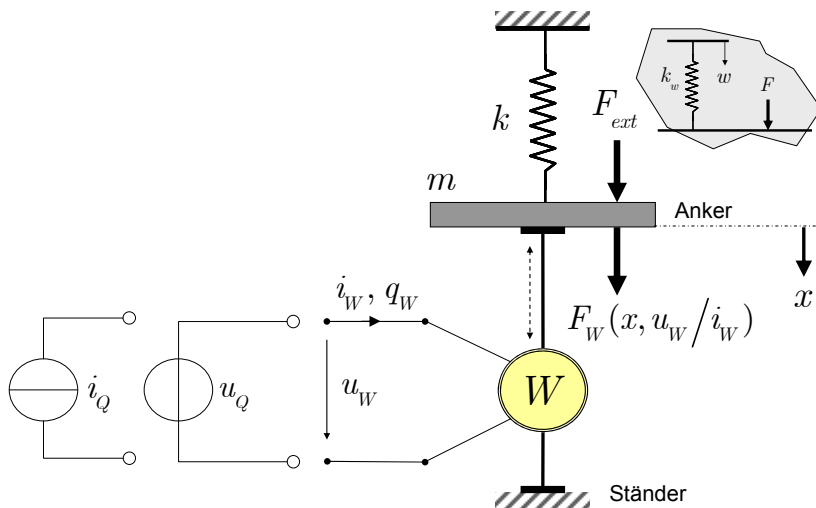


Abb. 5.2. Prinzipaufbau eines beschalteten mechatronischen Elementarwandlers W mit einem mechanischen Freiheitsgrad, elektrisch beschaltet mit Spannungs- oder Stromquelle, mechanisch beschaltet mit einem elastisch gefesselten Starrkörper und einer externen Kraftanregung (inertial bzw. relativ zu Fußpunkt)

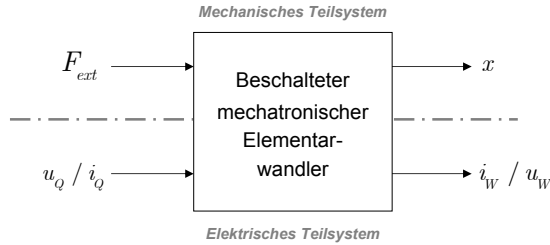


Abb. 5.3. Systemorientierte Kausalstruktur eines beschalteten mechatronischen Elementarwandlers

Zur Erzeugung der Wandlerkraft F_W wird elektrische *Hilfsenergie* in Form einer gesteuerten *Spannungsquelle* u_Q oder einer gesteuerten *Stromquelle* i_Q benötigt.

Vielfach ist aus physikalischen Gründen nur eine unipolare Krafterzeugung möglich, weshalb der Anker gefesselt werden muss. Dies geschieht in Abb. 5.2 durch eine *elastische Fesselung* mit der Steifigkeit k , für eine *ungefesselte* Masse ist $k = 0$ zu wählen.

Als mechanische Anregungsgröße wird eine verallgemeinerte externe *Kraftanregung* $F_{ext}(t)$ angenommen. Eine eingeprägte (rückwirkungsfreie) Fußpunktanregung $w(t)$ kann *elastisch* über $F_{ext} = k_w \cdot (w - x)$ oder *starr* mit $x(t) = w(t)$ entsprechend $k_w \rightarrow \infty$ modelliert werden.

Systemorientierte Kausalstrukturen Aus der Systemkonfiguration Abb. 5.2 lässt sich die in Abb. 5.3 gezeigte systemorientierte Kausalstruktur eines mechatronischen Elementarwandlers gewinnen. Als Anregungsgrößen sind die unabhängigen Größen der elektrische Hilfsenergiequelle $u_Q(t) / i_Q(t)$, sowie die mechanische Größe $F_{ext}(t)$ zu betrachten. Als Wirkgrößen sind die Ankerverschiebung $x(t)$ und die von der variablen Wandlergeometrie abhängigen elektrischen Leistungsgrößen Wandlerstrom $i_W(t)$ bzw. Wandlerspannung $u_W(t)$ von Interesse.

Wandler als Aktuator Wird der Wandler als *Kraftaktor* betrieben, dann stellen $u_Q(t) / i_Q(t)$ direkt die zeitvarianten Stelleingänge dar. Die Ankopplung an die zu bewegende mechanische Struktur muss rückwirkungsbehaftet als Starrkörper m oder gegebenenfalls als Mehrkörpersystem (s. Kap. 4) modelliert werden. Die externe Kraftanregung beschreibt betriebsabhängige Störeinflüsse. Als Wirkgröße interessiert die Bewegungsgröße $x(t)$ der mechanischen Last bzw. die abhängige Größe der Hilfsenergiequelle.

Wandler als Sensor Als Sensor ist der Wandler nach Abb. 5.2 in der Lage, über die auslenkungsabhängige Wandlergeometrie Kräfte $F_{ext}(t)$ bzw. Wegauslenkungen $x(t)$ abzubilden. Dies kann direkt über eine Spannungsmessung $u_W(t)$ bzw. Strommessung $i_W(t)$ erfolgen oder indirekt über eine Wegmessung $x(t)$. In diesen Fällen wird der Wandler an einem stationären elektrischen Arbeitspunkt $u_Q = U_0 = const.$ bzw. $i_Q = I_0 = const.$ betrieben. Als relevante Wandlermasse m ist dann lediglich die Ankermasse (z.B. Elektrode bei kapazitivem Wandler) zu berücksichtigen. Die Anregungsgrößen $F_{ext}(t)$ können vielfach über eine *rückwirkungsfreie* Einkopplung nach Abb. 5.2 modelliert werden.

Gesteuerte Hilfsenergiequellen Die Wandler benötigen auf elektrischer Seite in der Regel eine elektrische Hilfsenergiequelle. Im Aktuatorbetrieb wird darüber die für die mechanische Anregung nötige Leistung (klein bis sehr groß) bereitgestellt.

Tabelle 5.1. Gesteuerte elektrische Hilfsenergiequellen (ideal, verlustlos)

	Gesteuerte Spannungsquelle	Gesteuerte Stromquelle
Symbol Ideale Quelle		
Vierpol Ersatzschalt- bild		
Realisierungs- beispiel		

Im Sensorbetrieb wird der Wandler an einem stationären Arbeitspunkt bei in der Regel kleiner bis sehr kleiner Leistungsaufnahme betrieben. In Tabelle 5.1 sind Symbol, Vierpolersatzschaltbild und ein Realisierungsbeispiel für eine *gesteuerte Spannungsquelle* und eine *gesteuerte Stromquelle* angeführt. Der Steuereingang (Steuerspannung) u_E repräsentiert im Aktuatorbetrieb eine *leistungslose* Signalgröße (Stellsignal), im Sensorbetrieb kann darüber ein Arbeitspunkt eingestellt werden. In jedem Fall betrachtet man diese Quellen als ideal, d.h. *verlustlos*, im gegenteiligen Fall wird darauf gesondert hingewiesen.

Für die in diesem Kapitel folgenden Betrachtungen wird der Steuereingang u_E aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen und im Weiteren lediglich von (steuerbaren) Hilfsenergiequellen $u_Q(t)$, $i_Q(t)$ gesprochen.

5.2.2 Modellierungsansatz

Modellanforderungen Im Rahmen des Systementwurfes sind auf Modellebene im Besonderen folgende Aspekte von Bedeutung:

- *nichtlineares Großsignalverhalten* zum Erkennen von möglichen Betriebseinschränkungen (z.B. instabile Betriebsbereiche)
- *stabile Ruhelagen* zur Bestimmung von stationären Arbeitspunkten
- *Kleinsignalverhalten* im Zeit- und Frequenzbereich zur Charakterisierung des Übertragungsverhaltens und als Basis für Reglerentwurf und Verhaltensanalyse
- *strukturelle Transparenz* von Multidomänenphänomenen der Wandlungsprinzipien
- *transparente Zuordnung* von physikalisch / technischen Parametern zu Modellparametern.

Aus methodischer Sicht ist weiterhin ein *allgemeiner Modellierungsrahmen* wünschenswert, an dem sich konkrete physikalische Wandlungsprinzipien in einheitlicher Form diskutieren lassen.

Modellhierarchie Die Diskussion verschiedener Wandlungsprinzipien unter Nutzung bestimmter physikalischer Phänomene wird sich in den folgenden Kapiteln an der in Abb. 5.4 dargestellten *Modellhierarchie* orientieren. Dazu werden im vorliegenden Kapitel die *verallgemeinerbaren* Zusammenhänge als gemeinsames methodisches Gerüst an einem verallgemeinerten mechatronischen Elementarwandler nach Abb. 5.2 diskutiert.

Referenzkonfiguration Die grundlegenden Betrachtungen werden an einer *verlustlosen* Wandleranordnung mit einer einfachen, elastisch gefesselten Starrkörperlast geführt. Dies führt auf ein konservatives System, beinhaltet alle wesentlichen Multidomäneneigenschaften und erleichtert einen transparenten Zugang und überschaubare analytische Zusammenhänge zum Verständnis des Systemverhaltens. Realisierungsnahe Modellerweiterungen um dissipative Phänomene und Mehrkörperlasten werden am Ende dieses Kapitel vorgestellt.

Modellierungsmethoden Die Aufgaben des Systementwurfes erfordern die Darstellung unterschiedlicher Verhaltenseigenschaften eines physikalisch – technischen Systems. Die in Kap. 2 vorgestellten Modellierungsparadigmen und Modellformen sind als Methodenbaukasten für den Systementwurf zu sehen. Das hier vorgestellte Modellierungsvorgehen mag als *ein* Beispiel dienen, wie die individuellen Stärken der einzelnen Methoden in geschickter Weise für die Aufgaben des Systementwurfes genutzt werden können¹. Im Folgenden werden drei unterschiedliche Modellierungsansätze kombiniert.

Auf physikalischer Ebene wird eine *energiebasierte Modellierung* über *Energiefunktionen* genutzt und weiter über die *EULER-LAGRANGE-Gleichungen* ein grundlegendes nichtlineares Verhaltensmodell erzeugt.

Zur darstellerischen Stringenz der Kernfunktionalität des Wandlers wird ein *Mehrtormodell* in Form eines linearen *Vierpols* mit *konstitutiven Vierpolparametern* eingeführt.

Im Kontext mit einer konkreten externen elektrischen und mechanischen Beschaltung des Wandlers werden schließlich unter Zuhilfenahme der konstitutiven Vierpolparameter *signalbasierte lineare Zeit- und Frequenzbereichsmodelle* abgeleitet, die für die hier bevorzugten Ansätze für Reglerentwurf und Verhaltensanalyse einen optimalen Kompromiss zwischen Modelltransparenz und Handhabbarkeit bieten.

¹ Aus methodischer Sicht mag ein „durchgängiges“ Arbeiten in einer einzigen Modellwelt durchaus die höchste Form der Modellierungsästhetik sein. Dies ist jedoch meist mit Kompromissen und Klimmzügen verbunden. Aus der pragmatischen Sicht des Systementwurfes und der praktischen Erfahrung des Autors eröffnen sich jedoch durch ein geschicktes Spielen auf der „Methodenklaviatur“ deutlich transparentere Lösungszugänge für die vielfältigen Aufgaben des Systementwurfes. In diesem Sinne möge der geneigte Leser den hier vorgestellten Modellierungsansatz als einen wohlgemeinten Versuch für einen wohlklingenden „Methodenakkord“ sehen. Womit eben durchaus offen bleibt, dass auch andere Modellierungsansätze ebenso „wohlklingend“ sein mögen.

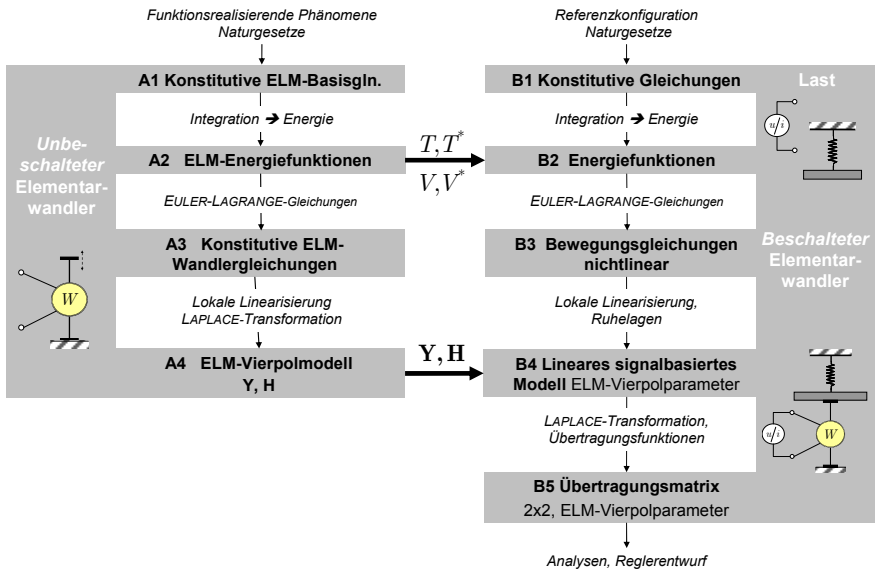


Abb. 5.4. Modellhierarchie *Mechatronischer Elementarwandler* für den Systementwurf (ELM = elektrisch-mechanisch)

Modellzweig A – Unbeschalteter Elementarwandler

Die *grundlegende Wandlerfunktionalität* wird an einem *unbeschalteten* – unbelasteten – *Wandlermodell* diskutiert (linker Modellzweig A in Abb. 5.4).

Konstitutive ELM-Basisgleichungen – A1 Als Ausgangspunkt dienen die *konstitutiven elektrisch-mechanischen (ELM) Basisgleichungen A)* zwischen Energie- und Leistungsgrößen der betrachteten physikalischen Domänen (elektrisch – mechanisch, s. Abb. 5.2). Es zeigt sich, dass hierfür ein *domänenunabhängiger* allgemeiner Ansatz existiert, sodass alle weiteren Betrachtungen weitgehend *generisch* geführt werden können.

ELM-Energiefunktionen – A2 Über formale Integration der konstitutiven ELM-Basisgleichungen A1 werden die *ELM-Energiefunktionen A2* in Form von Energie und Koenergie gewonnen und in der LAGRANGE-Funktion zusammengefasst. Diese können bequem in skalarer Form für einen beschalteten Wandler weiterverwendet werden (Schnittstelle zu Modellzweig B).

Konstitutive ELM-Wandlergleichungen – A3 Für den unbeschalteten Wandler bieten die ELM-Energiefunktionen die Basis zur formalen Berechnung der *Wandlerkräfte* mittels der *EULER-LAGRANGE-Gleichungen*. Als Nebenprodukt rekonstruiert man die als Ausgangspunkt definierten konstitutiven ELM-Basisgleichungen² A1. Die Modelle A3 formen die *nichtlinearen konstitutiven ELM-Wandlergleichungen* des *unbeschalteten Wandlers*³. Diese beschreiben die vollständige bidirektionale elektrisch-mechanische Kopplung des Wandlers, sie sind leistungserhaltend und besitzen eine noch unbestimmte Kausalstruktur.

ELM-Vierpolmodell – A4 Für eine kompakte Darstellung des Kleinsignalverhaltens werden die lokal linearisierten Gleichungen A3 in eine *Vierpoldarstellung* A4 transformiert. Dieses *ELM-Vierpolmodell* repräsentiert in allgemeiner Form die *linearen konstitutiven ELM-Wandlergleichungen* des *unbeschalteten Wandlers* für einen noch allgemein gehaltenen Arbeitspunkt. Die im Allgemeinen komplexen Matrizen \mathbf{Y}, \mathbf{H} repräsentieren dabei in kompakter Form das Wandlerverhalten und beschreiben weitgehend transparent die Verknüpfung mit den physikalischen Wandlerparametern (dies ist eine wichtige Eigenschaft für die Entwurfsoptimierung). Das ELM-Vierpolmodell ist leistungserhaltend und kann in geeigneter Form mit der externen Beschaltung kombiniert werden (Schnittstelle zu Modellzweig B).

Generische Eigenschaften Prinzipiell sind die vorgestellten Modellansätze ganz allgemein für abstrakte physikalische Modelle mit *konzentrierten Parametern* (engl. *lumped parameters*) gültig. Aus pragmatischer und didaktischer Sicht werden die detaillierten Betrachtungen auf *elektrisch lineare* sowie *mechanisch-elektrisch lineare* konstitutive Gleichungen beschränkt, d.h. Sättigung, Hysterese sind ausgeschlossen. Mit den gemachten Einschränkungen liefern jedoch die generischen Modelle aus Modellzweig A für die wichtigsten physikalischen Wandlungsprinzipien (elektrostatisch, elektrodynamisch, elektromagnetisch, piezoelektrisch, hydraulisch) sehr brauchbare und aussagefähige Verhaltensmodelle. Diese erhält man einfach dadurch, indem den Modellparametern aus Modellzweig A konkrete konstitutive ELM-Basisgleichungen A1 zugrunde gelegt werden.

² Diese Eigenschaft kann man vorteilhaft zur Überprüfung der Berechnungen nutzen.

³ Wenn keine zusätzlichen Abhängigkeiten der Energie- und Leistungsgrößen mit Größen der *externen* Beschaltung existieren (z.B. nichtlineares elektrisches Verhalten (Hysterese), nichtkolloziertes Mehrkörpersystem als Last), könnte man auch direkt die Gleichungen (A3) nach (B3) transferieren.

Modellzweig B – Beschalteter Elementarwandler

Die für die *mechatronische Produktaufgabe* interessierende Wandlerfunktionalität – Interaktion zwischen bewegten mechanischen Strukturen und informationsverarbeitenden Funktionen über elektrische Schnittstellen – wird an einem *beschalteten* – elektrisch und mechanisch belasteten – *Wandlermodell* diskutiert (rechter Modellzweig B in Abb. 5.4). Das Vorgehen orientiert sich methodisch an dem Modellzweig A.

Referenzkonfiguration Die gewählte Referenzkonfiguration beschränkt sich aus pragmatischen didaktischen Gründen auf die in Abb. 5.2 angedeutete externe Beschaltung mit *verlustfreien Hilfsenergiequellen* (Spannung, Strom) und einer nicht dissipativen *elastischen Fesselung* einer *Starrkörperlast*.

Konstitutive Gleichungen – B1 Für die externe Beschaltung müssen ebenso die *physikalisch konstitutiven Beziehungen B1* definiert werden. Dies ist für die Referenzbeschaltung (verlustlose elektrische Hilfsenergiequelle, elastisch gefesselter Starrkörper) trivial. Für davon abweichende externe Komponenten sind die entsprechenden Beziehungen zu definieren.

Energiefunktionen – B2 Über formale Integration der konstitutiven Gleichungen B1 werden wiederum *Energiefunktionen B2* in Form von Energie und Koenergie gewonnen. Diese müssen um die ELM-Energiefunktionen A2 des unbeschalteten Wandlers ergänzt werden.

Bewegungsgleichungen – B3 Unter Nutzung der Gesamtenergiefunktionen $B1 + A2$ erhält man über die *EULER-LAGRANGE-Gleichungen* die *nichtlinearen Bewegungsgleichungen B3* des beschalteten Wandlers. Diese sind von fundamentaler Bedeutung, weil erst damit das vollständige Wandlerverhalten gemäß Abb. 5.3 definiert ist. Insbesondere kann man damit das *stationäre Verhalten* analysieren und meist vorhandene *instabile Arbeitsbereiche* ermitteln. Wenn vorhanden, stellen die durch B3 definierten stabilen *Ruhelagen* sinnvolle Arbeitspunkte für einen Wandlerbetrieb im Kleinsignalbereich dar.

Lineares signalbasiertes Modell mit ELM-Vierpolparametern – B4 Mit den aus den nichtlinearen Bewegungsgleichungen B3 ermittelten Ruhelagen lässt sich über eine lokale Linearisierung ein *lineares signalbasiertes Modell B4* erzeugen. Durch eine einfache Manipulation kann man die linearen konstitutiven ELM-Gleichungen des unbeschalteten Wandlers separieren und damit die ELM-Vierpolparameter A4 nutzbar machen. Bei einer direkten Nutzung des linearen signalbasierten Modells B4 für Zeitbe-

reichsanalysen sind bei komplexen Vierpolparametern kleinere Anpassungen nötig.

Übertragungsmatrix – B5 Über LAPLACE-Transformation des linearen signalbasierten Modells B4 erhält man die *Übertragungsmatrix B5* für die in Abb. 5.3 dargestellte (2x2) MIMO-Kausalstruktur. Durch die Nutzung der ELM-Vierpolparameter (A4) des unbeschalteten Wandlers ergibt sich eine äußerst transparente Korrespondenz zwischen *Übertragungseigenschaften* (Verstärkungen, Pole, Nullstellen) und *elektromechanischen* physikalisch orientierten Parametern (Steifigkeiten, wirksame Kapazitäten / Induktivitäten, Kopplungen, elektrische und mechanische Konfigurationsparameter). Die Übertragungsmatrix B5 dient damit als primäre Arbeitsbasis für alle weitergehenden Arbeitsschritte der Verhaltensanalyse, des Reglerentwurfes und der Systemoptimierung.

Generische Eigenschaften Alle Modellstufen im Modellzweig B liefern *generische Modelle* mit den verallgemeinerten Wandlerparametern aus Modellzweig A und den ebenfalls allgemein gehaltenen Modellparametern der Referenzkonfiguration. Damit sind die Modellergebnisse aus Modellzweig A und B bei Verwendung von *konkreten physikalischen* Parametern (konstitutive Gleichungen A1, B1) unmittelbar nutzbar.

Die vorgestellte Modellhierarchie und die genutzten Modellierungsmethoden stellen jedoch auch einen allgemeinen Rahmen für individuelle *Modellerweiterungen* dar. Wandlerseitige und lastseitige Erweiterungen können leicht auf der Ebene der konstitutiven Gleichungen A1, B1 eingebracht werden. Die formalen Rechenvorschriften können dann in äquivalenter Weise übernommen und angewandt werden.

5.3 Unbeschalteter Elementarwandler

5.3.1 Energiebasiertes Modell

Modellhierarchie Der Modellierung liegt die in Abb. 5.5 dargestellte Wandleranordnung ohne externe Quellen und Verbraucher zugrunde, d.h. elektrisch wie mechanisch unbeschaltet. Eine Übersicht über die Modellierungsschritte entsprechend einer Konkretisierung des Modellzweiges A in Abb. 5.4 ist in Abb. 5.6. dargestellt und wird in den nachfolgenden Abschnitten im Detail diskutiert.

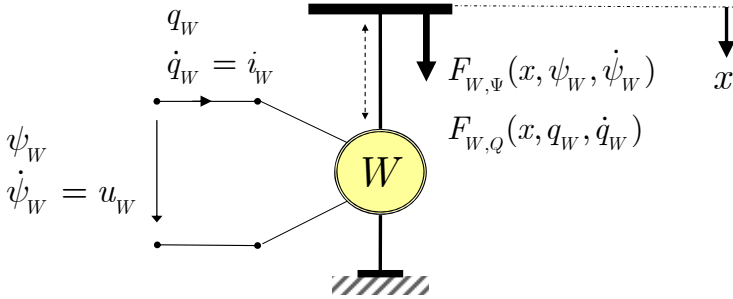


Abb. 5.5. Unbeschalteter mechatronischer Elementarwandler – Prinzipaufbau

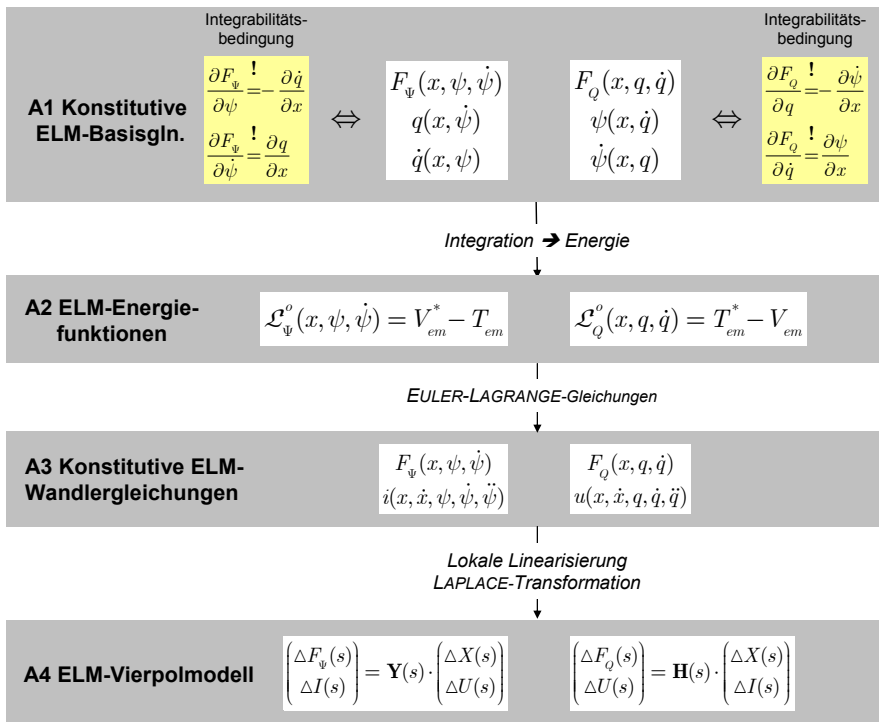


Abb. 5.6. Modellhierarchie für den unbeschalteten mechatronischen Elementarwandler (vgl. Modellzweig A in Abb. 5.4; Index W wurde hier aus Übersichtlichkeitsgründen weggelassen)

Konservatives System Die in Abb. 5.5 dargestellte Wandleranordnung des elektrisch wie mechanisch unbeschalteten Elementarwandlers enthält keine dissipativen Elemente, das betrachtete physikalische System ist also ein *konservatives* System.

Mechanisches Teilsystem Das mechanische Teilsystem sei durch einen masselosen Ständer charakterisiert und enthalte keine eigenen kinetischen Energiespeicher (träge Massen). Gegebenenfalls sei ein wandlerinterner potenzieller Energiespeicher (Feder, z.B. bei Festkörperwandlern) vorhanden.

Mechanische Koordinaten Zur energiebasierten Modellierung werden geeignete generalisierte Koordinaten benötigt, welche die in Abschn. 2.3.1 definierten Eigenschaften erfüllen müssen. Entsprechend den dort gemachten Ausführungen wählt man naheliegend die *Ankerposition* x als generalisierte Koordinate.

Elektrisches Teilsystem Das elektrische Teilsystem sei bezüglich der elektrisch-mechanischen Kraftherzeugung durch lediglich *einen elektrischen Energiespeicher* charakterisiert⁴, d.h. Speicherung entweder über elektrisches Feld (kapazitives Verhalten) *oder* Speicherung über magnetisches Feld (induktives Verhalten).

Generalisierte elektrische Koordinaten Für das *elektrische* Teilsystem stehen prinzipiell zwei Kandidaten für generalisierten Koordinaten zur Verfügung: die beiden konjugierten generalisierten Energievariablen *Ladung* q_w und *Flussverkettung* ψ_w . Zudem sind unterschiedliche Möglichkeiten der Ansteuerung mittels einer *spannungsgesteuerten* Spannungsquelle u_Q oder einer *stromgesteuerten* Spannungsquelle i_Q zu beachten. Da man die Beschreibungsformen beliebig kombinieren kann, hat man also die Qual der Wahl von insgesamt vier Möglichkeiten. In welcher Weise diese günstig im Sinne der in diesem Buch verfolgten Ziele zu kombinieren sind, wird nachfolgend begründet.

⁴ Dies bedeutet keine Einschränkung der hier betrachteten Klasse technischer Wandler. Unter der Annahme von *quasistationären elektromagnetischen* Feldern (zeitliche Änderung hinreichend klein gegenüber räumlichen Ausbreitungserscheinungen im Beobachtungszeitraum) kann die Wechselwirkung elektromagnetischer Felder räumlich lokal konzentriert betrachtet werden (Modell mit konzentrierten Parametern): (a) *elektrische* Felder, wo im Vergleich zu anderen Stellen eine besonders hohe elektrische Energiedichte erreicht wird (z.B. zwischen zwei durch ein Dielektrikum getrennten Elektroden) oder (b) *magnetische* Felder, wo im Vergleich zu anderen Stellen eine besonders hohe magnetische Energiedichte erreicht wird (z.B. in einer Spule mit vielen Windungen). Diese Einschränkung erlaubt eine sehr transparente Darstellung fundamentaler Wandlereigenschaften. Bei realen Wandlern immer vorhandene zusätzliche parasitäre Energiespeicher bzw. dissipative Elemente werden in nachfolgenden Abschnitten gesondert betrachtet.

Elektrische Koordinaten Die beiden elektrischen Koordinaten

- *Ladung* q_W [Coulomb, C = As]
- *Verketteter Fluss* ψ_W [Weber, Wb = Vs]

stellen *konjugierte Energievariablen* im Sinne des in Abschn. 2.3.1 definierten axiomatischen Gebäudes dar (Abb. 5.7b).

Damit gelten die *definitorischen* differenziellen Beziehungen

$$u_W := \dot{\psi}_W, \quad i_W := \dot{q}_W \quad (5.1)$$

zwischen den Energievariablen und den *konjugierten Leistungsvariablen*

- Spannung $u_W = \dot{\psi}_W$ [Volt, V]
- Strom $i_W = \dot{q}_W$ [Ampere, A].

Konstitutive ELM-Basisgleichungen Die konstitutiven Gleichungen beschreiben allgemein den funktionellen Zusammenhang zwischen Energie- und Leistungsvariablen. Damit werden die einem konkreten Wandler zugrunde liegenden fundamentalen physikalischen Eigenschaften abgebildet. Diese werden durch *Naturgesetzmäßigkeiten* beschrieben und sie sind die einzigen frei wählbaren Beziehungen in dem in Abb. 5.7 definierten axiomatischen Gebäude.

Die konstitutiven Gleichungen beschreiben dabei sowohl die wandlerin-terne Fähigkeit zur Speicherung von Energie (mechanisch, elektrisch / magnetisch) als auch die interne Verkopplung des Energieaustausches (elektrisch – mechanisch).

Formal lauten also die *konstitutiven ELM-Basisgleichungen* in unterschiedlicher Koordinatendarstellung (PSI-Koordinaten, Q-Koordinaten, vgl. auch Abb. 5.7)

$$\begin{array}{|l} F_{W,\Psi} = F_{W,\Psi}(x, \psi_W, \dot{\psi}_W) \\ q_W = q_W(x, \dot{\psi}_W) \text{ kapazitiv} \\ \dot{q}_W = \dot{q}_W(x, \psi_W) \text{ induktiv} \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{|l} F_{W,Q} = F_{W,Q}(x, q_W, \dot{q}_W) \\ \psi_W = \psi_W(x, \dot{q}_W) \text{ induktiv} \\ \dot{\psi}_W = \dot{\psi}_W(x, q_W) \text{ kapazitiv} \end{array} \quad (5.2)$$

Die Gleichungen (5.2) in den beiden Koordinatendarstellungen sind äquivalent und sind je nach bevorzugter Darstellung eines physikalischen Phänomens in der einen oder anderen Form zu verwenden.

Man beachte auch, dass nicht in jedem Falle alle Gleichungen gegeben sein müssen. Aufgrund der Annahme eines *konservativen Systems* reicht beispielsweise *eine* elektrische konstitutive Basisgleichung zur vollständigen Funktionsbeschreibung aus, falls keine wandlerin-ternen potenziellen

mechanischen Energiespeicher vorhanden sind. Die passende konstitutive Beziehung für die Wandlerkraft kann dann nämlich systematisch rekonstruiert werden, wie im Folgenden gezeigt wird.

Aus diesem Grund werden die konstitutiven Gleichungen (5.2) in diesem Buch als sogenannte *Basisgleichungen* bezeichnet, weil sie bestimmte physikalische Phänomene beschreiben. Im Gegensatz dazu werden die vollständig rekonstruierten konstitutiven Gleichungen als konstitutive *Wandlergleichungen* bezeichnet, weil damit das gesamte Wandlerverhalten beschrieben wird.

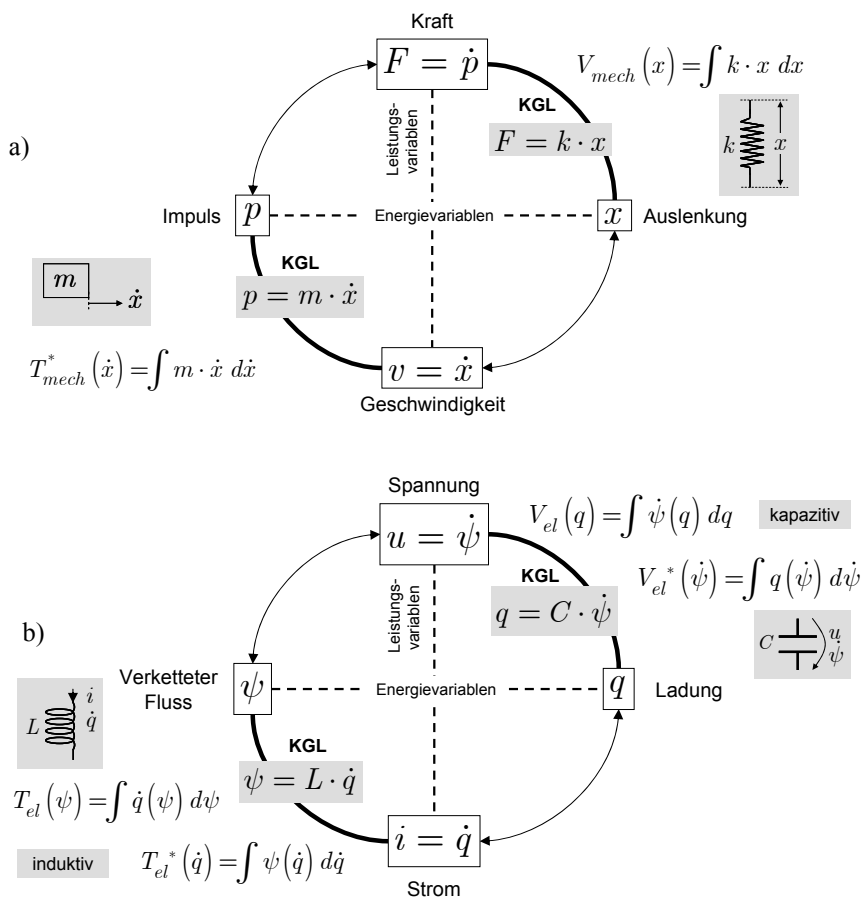


Abb. 5.7. Generalisierte Koordinaten: a) *mechanische* Energie- und Leistungsvariablen mit linearen mechanischen konstitutiven Gleichungen, b) *elektrische* Energie- und Leistungsvariablen mit elektrisch linearen konstitutiven Gleichungen (KGL = konstitutive Gleichungen)

In Tabelle 5.2 sind für einige praktisch wichtige Fälle Beispiele für konstitutive *ELM-Basisgleichungen* aufgeführt. In der Tat wird in vielen Fällen durch Naturgesetze bzw. empirisch ermittelte Zusammenhänge lediglich das elektrische konstitutive Verhalten beschrieben.

Elektrisch lineares Verhalten Als Konkretisierung von Beziehung (5.2) sei für das elektrische Teilsystem ein *elektrisch lineares Verhalten* angenommen, d.h. die *elektrisch konstitutiven* Beziehungen lauten

$$\boxed{q_W(x, \dot{\psi}_W) := C(x) \cdot \dot{\psi}_W} \quad \boxed{\psi_W(x, \dot{q}_W) := L(x) \cdot \dot{q}_W} \quad (5.3)$$

wobei $C(x)$, $L(x)$ im Allgemeinen *nichtlineare* Funktionen der Ankerposition x sind (Tabelle 5.2 Typ A und B, vgl. auch Abb. 5.7b).

Die linke Gleichung (5.3) beschreibt elektrisch *kapazitives* Wandlerverhalten (Kopplung über elektrisches Feld) mit der Wandlerkapazität $C(x)$ [Farad, $F=C/V$], wogegen die rechte Gleichung (5.3) elektrisch *induktives* Wandlerverhalten (Kopplung über magnetisches Feld) mit der Wandlerinduktivität $L(x)$ [Henry, Wb/A] beschreibt. Die konstitutiven geometrischen Eigenschaften $C(x)$, $L(x)$ des Wandlers lassen sich entweder analytisch (Feldberechnung) oder experimentell bestimmen und werden für die weiteren Betrachtungen als gegeben vorausgesetzt.

Alternativ zu Gl. (5.3) sei auch die spezielle konstitutive Beziehung

$$\boxed{\psi_W(x, \dot{q}_W) = \psi_W(x) := g_\psi(x)} \quad (5.4)$$

betrachtet (Tabelle 5.2 Typ C). Mit Gl. (5.4) wird beispielsweise die elektrodynamische *LORENTZ-Kraft* modelliert. Beachtenswerterweise beschreibt Gl. (5.4) keine Energiespeicherung, sondern eine reine verlustfreie Energiewandlung.

In allen betrachteten Fällen Typ A,B,C ist eine Spezifikation des Wandlerverhaltens rein über die elektrischen konstitutiven Beziehungen Gln. (5.3), (5.4) ausreichend. Die fehlende Kraftbeziehung kann daraus eindeutig rekonstruiert werden.

Elektrisch-mechanisch lineares Verhalten Falls im Wandler auch inhärente potenzielle mechanische Energiespeicher vorhanden sind, dann muss auch die mechanische konstitutive Beziehung⁵ spezifiziert werden. Als

⁵ Zumindest der Anteil, der die mechanische Energiespeicherung beschreibt, da dieser nicht in der elektrischen Koppelbeziehung abgebildet ist.

praktisch wichtiger Fall sei eine sowohl *mechanisch* wie *elektrisch lineare* Beziehung betrachtet, z.B. elektrisch kapazitives Verhalten in elektrischen PSI-Koordinaten

$$\begin{aligned} F_{W,\Psi}(x, \dot{\psi}_W) &= a \cdot x + b \cdot \dot{\psi}_W \\ q_W(x, \dot{\psi}_W) &= b \cdot x + c \cdot \dot{\psi}_W \end{aligned} \quad (5.5)$$

Durch Gl. (5.5) werden typischerweise *Festkörperwandler* (z.B. *Piezowandler*) im linearen Arbeitsbereich beschrieben. Die aussteuerungsunabhängigen Koeffizienten a, c beschreiben die mechanische bzw. elektrische Speicherfähigkeit wogegen der Koeffizient b den elektromechanischen Energieaustausch beschreibt. Die Symmetrie der beiden Gleichungen bezüglich der Kopplung b ist im Übrigen für konservative Systeme zwingend, wie noch zu zeigen ist.

Die zu Gl. (5.5) äquivalente Darstellung in Q-Koordinaten entnimmt man der rechten Spalte in Tabelle 5.2 Typ D.

Elektrisch-mechanisch polynomiales Verhalten Eine praktisch sehr interessante Modellerweiterung gegenüber dem ELM linearen Verhalten bietet sich durch eine *polynomiale* Beschreibung der konstitutiven Gleichungen an, wie in Tabelle 5.2 mit dem Typ E angedeutet. Ein solches Modell kann man sich beispielsweise durch experimentelle Modellbildung für Großsignalverhalten an einem Festkörperwandler entstanden denken, d.h. eine nichtlineare Modellerweiterung gegenüber Gl. (5.5).

Mit Polynomen 2. Ordnung in den Variablen $x, \dot{\psi}$ liefert beispielsweise der Ansatz

$$\begin{aligned} F_{\Psi} &= a_0 + a_1 x + \mathbf{c}_1 \dot{\psi} + \mathbf{c}_2 x \dot{\psi} + a_2 \frac{x^2}{2} + \mathbf{c}_3 \frac{\dot{\psi}^2}{2} \\ q &= b_0 + \mathbf{c}_1 x + b_1 \dot{\psi} + \mathbf{c}_3 x \dot{\psi} + \mathbf{c}_2 \frac{x^2}{2} + b_2 \frac{\dot{\psi}^2}{2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

einen Satz *konsistenter konstitutiver* Gleichungen für $F_{W,\Psi}(x, \dot{\psi})$ und $q_W(x, \dot{\psi})$ bei *kapazitivem* Wandlerverhalten. Auch hier ist die Symmetrie in Gl. (5.6) bezüglich der Kopplungsfaktoren $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ unter der Annahme eines konservativen Systems zwingend und bei einer eventuellen Approximation von Messreihen zu beachten⁶.

⁶ Bei hinreichend genau ermittelten Parametern der elektrischen konstitutiven Gleichung wäre es also ausreichend, die mechanischen Parameter a_0, a_1, a_2 messtechnisch zu ermitteln.

Tabelle 5.2. Beispiele für konstitutive ELM-Basisgleichungen

Typ	PSI-Koordinaten (x, ψ)	Q-Koordinaten (x, q)
A. Elektrisch linear kapazitiv	$q = C(x) \cdot \dot{\psi}$	$\dot{\psi} = \frac{1}{C(x)} \cdot q$
B. Elektrisch linear induktiv	$\dot{q} = \frac{1}{L(x)} \cdot \psi$	$\psi = L(x) \cdot \dot{q}$
C. Elektrisch linear induktiv, ohne Speicher	---	$\psi = g(x)$
D. Elektrisch- mechanisch linear, kapazitiv	$F_{\psi} = a \cdot x + b \cdot \dot{\psi}$ $q = b \cdot x + c \cdot \dot{\psi}$	$F_q = \left(a - \frac{b^2}{c} \right) \cdot x + \frac{b}{c} q$ $\dot{\psi} = -\frac{b}{c} x + \frac{1}{c} q$
E. Elektrisch- mechanisch polynomial ⁷	- kapazitiv - $F_{\psi} = \text{polynom}_F(x, \dot{\psi}; N)$ $q = \text{polynom}_q(x, \dot{\psi}; N)$	- induktiv - $F_q = \text{polynom}_F(x, \dot{q}; N)$ $\psi = \text{polynom}_{\psi}(x, \dot{q}; N)$

Verketteter Fluss vs. Elektrische Spannung Auf den ersten Blick mag die Verwendung des verketteten Flusses als eine generalisierte Koordinate etwas befremdlich erscheinen. Üblicherweise nutzt man diese Größe nur in Verbindung mit magnetischen Feldern. Was bedeutet diese Größe in Verbindung mit einem kapazitiven Speicher? Warum verwendet man nicht die elektrische Spannung als generalisierte Koordinate?

Aus Abb. 5.7b erkennt man, dass sich über die definitorischen Beziehungen für einen kapazitiven Energiespeicher C eine direkte Beziehung zum verketteten Fluss ψ in Form dessen zeitlichen Differenzials $\dot{\psi}$ her-

⁷ $\text{polynom}(x, y; N)$... Polynom vom Grad N in den Variablen x, y



<http://www.springer.com/978-3-540-78876-8>

Systementwurf mechatronischer Systeme

Methoden – Modelle – Konzepte

Janschek, K.

2010, XIX, 842 S., Hardcover

ISBN: 978-3-540-78876-8