
Vorwort

Die Mathematik gilt unbestritten als Schlüssel zu den modernen Hochtechnologien. Sie ist eine internationale Fachsprache und zeigt sich dem Eingeweihten als ewig junge Wissenschaft. Gerade heute erfreut sie sich besonderer Lebenskraft, weil Modellierung und Simulation längst unverzichtbarer Bestandteil der Forschung sind. Die stürmische Entwicklung führt aber zu immer höheren Anforderungen an die Studierenden einer technischen Wissenschaft, während gleichzeitig das Interesse der Allgemeinheit an der Mathematik kontinuierlich abnimmt. Dem möchte das vorliegende Buch mit seinen Anhängen im *Internet* begegnen und ein hilfreicher Begleiter sein auf dem schwierigen Weg von der rezeptiven zur produktiven Phase der Ausbildung.

Der Verfasser hat wiederholt einen dreisemestrigen Grundkurs *Höhere Mathematik* an der Universität Stuttgart gehalten und dabei versucht, mit Hilfe einer Reihe von „*Merkblättern*“ weiterführende Aspekte aufzuzeigen, zur Motivation des Lehrinhalts beizutragen, sowie Verbindungen zu den gleichzeitig stattfindenden Vorlesungen über Mechanik herzustellen. Daraus ist *ein* Teil des Buches im Lauf der Zeit sozusagen von selbst entstanden. Seiner ursprünglichen Zielsetzung entsprechend, werden verschiedene, voneinander unabhängige Themen von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad behandelt, die sich aber alle an der Mechanik orientieren.

Ein *anderer* Teil des Buches möchte eine Auswahl verständlicher und direkt umsetzbarer Vorlagen aus der Fülle mathematischer Ressourcen anbieten. Der Autor will hier seine Vorliebe für die NUMERISCHE MATHEMATIK nicht verhehlen und legt gerade deshalb Wert auf eine sorgfältige theoretische Vorbereitung. Beweise werden aber nur dort vorgeführt, wo sie für das Verständnis notwendig sind, andere sind auf den zum Buch gehörenden *Internetseiten* zu finden.

Insgesamt gliedert sich das Buch in vier Teile mit unterschiedlichem Umfang, wobei etwa das hervorragende Buch *Höhere Mathematik I,II* von MEYBERG und VACHENAUER als „Steilvorlage“ dienen kann:

- Zusammenfassung der Hilfsmittel für das weitere Vorgehen,
- allgemeine und besondere mathematische Methoden,
- Faszination Mechanik aus der Sicht eines Mathematikers,
- Abriss der Tensorrechnung (ein Muss für höhere Weihen).

Im Studium der Physik nimmt das reale Experiment seit jeher und auch im Zeitalter virtueller Welten einen breiten Raum ein, während in der Mathematik die Beschreibung eines numerischen Verfahrens in Wort und Schrift lange Zeit seine reale Vorführung ersetzen musste. Damit fehlte aber ein wichtiger Beitrag zum Verständnis, so wie etwa das Notenlesen ein schwacher Ersatz für das Klangerlebnis oder gar die eigene Intonierung ist. Diese Situation hat sich grundsätzlich geändert. Probleme, an die früher niemand zu denken wagte, können heute auf dem LAPTOP gelöst werden, und numerische Verfahren kann jeder selbst austesten. Um dieser Entwicklung Rechnung zu tragen, werden zu *allen* in diesem Buch behandelten numerischen Methoden Experimente angeboten. Bei anspruchsvolleren Fallstudien ist aber der Weg von der Formel zum Bild mit Hindernissen gepflastert und bedarf daher einer ausführlichen Anleitung. Insbesondere entfalten viele wohletablierte Algorithmen die von ihnen geforderte Leistung erst nach einem sorgfältigen *Parameter-Tuning*, das der Computer nicht übernehmen kann. Die gleichzeitige Behandlung von Theorie und Numerik verbietet aber allein aus Platzgründen, beiden Seiten in erschöpfender Weise gerecht zu werden und trotzdem das Ganze überschaubar zu halten. Um diesem Dilemma zu begegnen, hat der Autor viele Beweise und alle Algorithmen ins INTERNET ausgelagert. Dort steht eine umfangreiche Bibliothek von MATLAB®-Programmen zur Verfügung, die fortwährend ergänzt und erweitert wird. Die Entwicklungsumgebung MATLAB® gestattet es, Algorithmen von unnötigem Ballast befreit in einer übersichtlichen Form darzustellen, die oft aussagekräftiger ist als eine langatmige Beschreibung und – nebenbei gesagt – gnadenlos jeden Fehler aufdeckt. Diese Programme sollen nicht nur den *Spieltrieb* des Lesers und seine natürliche Neugier zum Verbündeten in der Präsentation des Stoffes machen sondern auch dem *Experiment* in der Mathematik als Weg zur Erkenntnis eine Lanze brechen. Im Extremfall kann der Anwender sogar *dem Algorithmus selbst* einen gewissen ästhetischen Reiz abgewinnen und damit dem Problem von einer ganz anderen Seite her beikommen.

Jedes Bild und jede Grafik kann vom Leser selbst erzeugt werden, wenn er sich die entsprechenden Programme herunterlädt.

Im *ersten* Kapitel wird das mathematische Rüstzeug bereitgestellt. Es werden die später verwendeten Begriffe erklärt und einige Themen aus den Grundvorlesungen wiederholt und aufbereitet.

Das *zweite* Kapitel behandelt in knapper Form klassische Aufgabenstellungen aus der numerischen Mathematik insbesondere Anfangs- und Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialsysteme.

Im *dritten* und *vierten* Kapitel wird der Optimierung und ihrer Schwester im Kontinuum, der Kontrolltheorie, etwas mehr Platz eingeräumt. Viele Fragestellungen in den technischen Disziplinen wie in den Wirtschaftswissenschaften führen auf ganz natürliche Weise zu einem Extremalproblem mit Zwangsbedingungen. Oft ist auch die Formulierung als Optimierungsproblem der letzte Ausweg, wenn sich ein Problem der numerischen Approximation auf herkömmliche Weise verweigert. Im Übrigen gehorcht die Optimierung unter Nebenbedingungen ganz eigenen Gesetzmäßigkeiten, die sich durch die ganze Theoretische Mechanik verfolgen lassen. In der Kontrolltheorie gehen *Variationsrechnung* und LAGRANGE-Theorie eine fruchtbare Symbiose ein. Konkrete Probleme werden nach einer Diskretisierung mit den behandelten diskreten Optimierungsverfahren numerisch gelöst.

Im *fünften* Kapitel wird der Versuch unternommen, Verzweigungstheorie und Pfadverfolgung dem praktisch orientierten Anwender verständlich zu machen. Grundsätzlich geht es dabei um die Aufgabe, nichttriviale Lösungen eines Systems zu berechnen, wenn diese *gleichzeitig* neben der trivialen Lösung existieren, wie etwa beim klassischen Eigenwertproblem. Die besprochenen Methoden erschließen den Zugang zu neuen und teilweise exotischen Lösungstypen, die unter den üblichen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen unerreichbar bleiben. Für die numerische Approximation hat hier die triviale Lösung eine fast unwiderstehliche Anziehungskraft, die es zu überwinden gilt. Die präsentierten numerischen Verfahren werden an Hand einiger Benchmarkprobleme aus der Literatur auf ihre Tauglichkeit getestet.

Die Kapitel *sechs* und *sieben* behandeln bekannte Probleme aus dem Grundstudium der Mechanik wie Planetenbahnen, Dreikörperproblem, Kreiseltheorie, Stab- und Balkenwerke. Auch hier wird besonderer Wert auf eine *Visualisierung* gelegt, die der Leser selbst nachvollziehen kann.

Kapitel *acht* stellt die Grundlagen der Kontinuumstheorie für die spätere Anwendung bereit, damit der Leser das Entstehen der Differentialsysteme wie etwa der POISSON-Gleichung und der NAVIER-STOKES-Gleichungen aus den Erhaltungssätzen selbst nachvollziehen kann.

Im *neunten* Kapitel werden Probleme der Kontinuumsmechanik für feste Körper und für *inkompressible* Flüssigkeiten numerisch realisiert. Zunächst wird die Finite-Element-Methode im Allgemeinen behandelt, mit ihrer Implementierung über die Methode der Grundmatrizen und die Methode der Formfunktionen. Anschließend werden einige besondere Exemplare aus der faszinierenden Gattung der finiten Elemente im Einzelnen vorgestellt. Für die numerische Behandlung der NAVIER-STOKES-Gleichungen wird vorwiegend die STROMFUNKTION-WIRBEL-FORM mit einfachsten Dreieckelementen gewählt, die zwar einerseits höhere Anforderungen an die Glattheit der Lösung stellt, aber andererseits einen leichteren Zugang zu verwandten Problemen wie Konvektion und Massentransport erlaubt (und im Übrigen nicht so schlecht

ist wie ihr Ruf). Für weitere Erläuterungen steht auch hier eine exemplarische Auswahl von Algorithmen im INTERNET zur Verfügung.

Jeder lebt mit mindestens zwei Koordinatensystemen, dem absoluten und seinem eigenen, dem relativen; andere kommen ständig hinzu. Das *Hin- und Herwandern* zwischen einzelnen Koordinatensystemen muss mathematisch beschrieben werden und führt zur Tensorrechnung und Differentialgeometrie. Im *zehnten* Kapitel wird eine Einführung in diese Disziplinen gegeben mit Anwendung der dualen Paarung von Vektorräumen.

Das *elfte* Kapitel schließlich enthält neben einem modellhaften Beispiel aus der Gasdynamik und drei Beispielen von Mehrkörperproblemen einen Abschnitt über rollende Scheiben und Zahnräder mit numerischer Implementierung auf der entsprechenden Internetseite.

Viele innovative Impulse für die NUMERISCHEN MATHEMATIK sind ursprünglich den Ingenieurwissenschaften zu verdanken. Der Verfasser hofft, dass mit seinem Buch das Interesse an der numerischen Komponente technischer und physikalischer Problemstellungen gefördert und der Leser zum eigenen *Experimentieren* angeregt wird. Das Buch ist thematisch stark gegliedert, und die einzelnen Teile sind so weit wie möglich in sich geschlossen dargestellt, damit es im Rahmen seiner Möglichkeiten auch als *Nachschlagewerk* dienen kann und die Fülle des Stoffes überschaubar bleibt. Insgesamt soll es eine *Brücke* vom Grundstudium zu den Anforderungen im Hauptstudium schlagen, die dem Leser den Weg zur „Upper Class“ in der Community ebnet.

Die präsentierten finiten Elemente für statische Probleme sind zum großen Teil MATLAB®-Versionen von FORTRAN-Programmen aus den Büchern von H. R. SCHWARZ. Wegen ihrer Zuverlässigkeit waren sie bei der Entwicklung und beim Test weiterer Elemente eine große Hilfe und sollen auf diese Weise auch der MATLAB®-Gemeinde zugänglich gemacht werden.

Herrn THEODOR ACKBAROW danke ich für das sorgfältige Lesen des Manuskripts und viele wertvolle Verbesserungsvorschläge.

WARNUNG: Mit wachsender Experimentierfreude wird der Leser feststellen, dass jedes numerische Verfahren durch ein geeignetes Beispiel ausgehebelt werden kann. Bei vielen Aufgabenstellungen wie etwa nichtkonvexen Optimierungsproblemen ist die Konvergenz nicht gesichert und daher äußerste Vorsicht geboten; auch bei Bifurkationsproblemen läuft die Iteration schnell in unsinnige Bereiche oder landet wieder bei Null; bei Finite-Element-Methoden sind spektakuläre Unfälle bekannt. Deswegen ist in allen Fällen eine sorgfältige Prüfung der Ergebnisse notwendig.

Stuttgart, Dezember 2005

Eckart W. Gekeler

Vorwort zur zweiten Auflage

In der zweiten Auflage wurden einige Ergänzungen und Verbesserungen vorgenommen, die man auch in der englischen Auflage des Buches findet. Zwei neue Abschnitte kamen hinzu, einer über *Beulung einer kreisförmigen Platte* als Anwendungsbeispiel der Bifurkationstheorie und ein anderer über *Quaternionen* als notwendige Ergänzung zum Abschnitt über drehende Bezugssysteme. Auch findet man verschiedentlich zusätzliche Beispiele in den einzelnen Kapiteln. Das fünfte Kapitel über Bifurkationstheorie wurde teilweise neu geschrieben, andere Teile dieses Kapitels wurden in die „Supplements“ verlegt. Der Hardwareentwicklung in den letzten fünf Jahren wurde im Kapitel über finite Elemente Rechnung getragen. NAVIER-STOKES-Probleme werden jetzt in der *direkten* Geschwindigkeits-Druck-Form gelöst und nicht mehr in der indirekten Stromfunktion-Wirbel-Form. Dadurch vereinfacht sich die Modellbildung erheblich, und ein Rechner mit vier GigaByte Hauptspeicher ist den erhöhten Speicherplatzanforderungen sicher gewachsen, wenn man etwas Geduld aufbringt und keine allzu hohen Ansprüche an die Visualisierung stellt.

Reutlingen, Juni 2010

Eckart W. Gekeler

Mathematische Methoden zur Mechanik
Ein Handbuch mit MATLAB®-Experimenten
Gekeler, E.W.
2010, XVIII, 645 S. 217 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-14252-9