

Kapitel 2

Reelle Zahlen

Zu den *reellen Zahlen* zählen

- die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$
- die ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- die rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, m und $n \neq 0$ sind ganze Zahlen
- die irrationalen Zahlen (z.B. $\sqrt{2}, \pi, e$).

Definition: Absoluter Betrag (Def. 2.3, Kap. 2.1)

Der absolute Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x ist definiert durch $|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$.

2.1 Ungleichungen mit Beträgen

Aufgabe 2.1

Berechnen Sie alle reellen Zahlen x , für die gilt:

- $|x + 3| < 6$
- $|x + 7| < 4$
- $|x + 5| < 3$
- $|3 - x| > 6$
- $|x - 7| > 4$
- $|x - 5| > 3$
- $||x| - 3| < 6$
- $||x| - 7| < 4$
- $||x| - 5| < 3$
- $|x + 2| - x > 3$
- $|3 - x| < |x + 2|$
- $\frac{1}{x^2 - 9} < \frac{1}{15 - |2x|}$

- m) $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$
 n) $\frac{|2x-5|}{|x-6|} < 3$
 o) $\frac{|x^2-36|}{x+6} > |x+3| - 2x, \quad x \neq -6$

Lösung:

- a) 1. Fall: $x \geq -3 \Rightarrow x+3 < 6 \Leftrightarrow x < 3$
 2. Fall: $x < -3 \Rightarrow -x-3 < 6 \Leftrightarrow x > -9$
 Die Gesamtlösung besteht aus allen x mit $-9 < x < 3$.
- b) $|x+7| < 4 \Leftrightarrow |x-(-7)| < 4 \Leftrightarrow -7-4 < x < -7+4$
 $\Leftrightarrow -11 < x < -3$
- c) $|x+5| < 3 \Leftrightarrow |x-(-5)| < 3 \Leftrightarrow -8 < x < -2$
- d) 1. Fall: $x \leq 3 \Rightarrow 3-x > 6 \Leftrightarrow x < -3$
 2. Fall: $x > 3 \Rightarrow -3+x > 6 \Leftrightarrow x > 9$
 Die Gesamtlösung besteht aus allen x mit $x < -3$ oder $x > 9$.
- e) $|x-7| > 4 \Leftrightarrow x < 7-4 = 3$ oder $x > 7+4 = 11$
- f) $|x-5| > 3 \Leftrightarrow x < 2$ oder $x > 8$
- g) 1. Fall: $x < -3 \Rightarrow -x-3 < 6 \Leftrightarrow x > -9$
 2. Fall: $-3 \leq x < 0 \Rightarrow -(-x-3) < 6 \Leftrightarrow x < 3$
 3. Fall: $0 \leq x < 3 \Rightarrow -(x-3) < 6 \Leftrightarrow x > -3$
 4. Fall: $x \geq 3 \Rightarrow x-3 < 6 \Leftrightarrow x < 9$
 $\Leftrightarrow -9 < x < 9$
- h) $||x|-7| < 4 \Leftrightarrow 7-4 < |x| < 7+4 \Leftrightarrow 3 < |x| < 11$
 $\Leftrightarrow 3 < |x|$ und $|x| < 11$
 $\Leftrightarrow (x < -3$ oder $3 < x)$ und $(-11 < x < 11)$
 $\Leftrightarrow (-11 < x < -3)$ oder $(3 < x < 11)$
- i) $||x|-5| < 3 \Leftrightarrow 2 < |x| < 8$
 $\Leftrightarrow (x < -2$ oder $x > 2)$ und $(-8 < x < 8)$
 $\Leftrightarrow (-8 < x < -2)$ oder $(2 < x < 8)$
- j) 1. Fall: $x \geq -2 \Rightarrow x+2-x > 3 \Leftrightarrow 2 > 3$ Widerspruch!
 2. Fall: $x < -2 \Rightarrow -x-2-x > 3 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$
 $\Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$
- k) 1. Fall: $x < -2 \Rightarrow 3-x < -x-2 \Leftrightarrow 3 < -2$ Widerspruch!
 2. Fall:
- l) $-2 < x \leq 3 \Rightarrow 3-x < x+2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 3$
 3. Fall $x > 3 \Rightarrow -3+x < x+2 \Leftrightarrow -3 < 2 \Rightarrow x > 3$
 Die Gesamtlösung besteht aus allen x mit $x > \frac{1}{2}$.

$$\text{m) } x^2 - 9 \neq 0 \iff x \neq \pm 3$$

$$15 - |2x| \neq 0 \iff |x| \neq \frac{15}{2} \iff x \neq \pm \frac{15}{2}$$

1. Fall:

$$|x| < 3 \text{ (d. h. } -3 < x < 3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 < 0 \text{ und } 15 - |2x| > 0$$

$$\Leftrightarrow 15 - |2x| > x^2 - 9 \Leftrightarrow 0 > x^2 + 2|x| + 1 - 25 \Leftrightarrow 25 > \underbrace{(|x| + 1)^2}_{> 0}$$

$$\Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$$

$$\Leftrightarrow (-3 < x < 3) \text{ und } (-4 < x < 4) \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

2. Fall:

$$|x| > 3 \text{ (d. h. } x < -3, 3 < x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 > 0$$

$$\text{Fall 2a: } 15 - |2x| > 0 \Leftrightarrow |x| < \frac{15}{2} \Leftrightarrow -\frac{15}{2} < x < \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 15 - |2x| < x^2 - 9 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 4 < |x|$$

$$\Leftrightarrow (x < -3 \text{ oder } 3 < x) \text{ und } (x < -4 \text{ oder } 4 < x) \text{ und } (-\frac{15}{2} < x < \frac{15}{2})$$

$$\Leftrightarrow (-\frac{15}{2} < x < -4) \text{ oder } (4 < x < \frac{15}{2})$$

$$\text{Fall 2b: } 15 - |2x| < 0 \Leftrightarrow \frac{15}{2} < |x| \text{ (} x < -\frac{15}{2} \text{ oder } \frac{15}{2} < x)$$

$$\Rightarrow 15 - |2x| > x^2 - 9 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow |x| < 4 \Rightarrow \text{Es gibt keine Lösung.}$$

\Rightarrow Die Gesamtlösung besteht aus allen x mit $-\frac{15}{2} < x < -4$ oder $-3 < x < 3$
oder $4 < x < \frac{15}{2}$.

n) $|x - 2| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $1 + |x - 1| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|} \Leftrightarrow 1 + |x-1| > |x-2| \Leftrightarrow (1 + |x-1|)^2 > (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2|x-1| + (x^2 - 2x + 1) > x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2|x-1| > 2 - 2x \Leftrightarrow |x-1| > 1 - x \Leftrightarrow |1-x| > 1-x$$

$$\Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

\Rightarrow Die Lösung besteht aus allen x mit $x > 1$ außer $x = 2$.

$$\text{o) } x \neq 6: \frac{|2x-5|}{|x-6|} < 3 \Leftrightarrow |2x-5| < 3|x-6|$$

$$\text{1. Fall: } x < \frac{5}{2} \Rightarrow |2x-5| = 5-2x$$

$$|x-6| = 6-x$$

$$\text{Also } |2x-5| < 3|x-6| \Leftrightarrow 5-2x < 3(6-x)$$

$$\Leftrightarrow 5-2x < 18-3x$$

$$\Leftrightarrow x < 13$$

$$\Rightarrow x < \frac{5}{2}$$

$$2. \text{ Fall: } \frac{5}{2} \leq x < 6 \Rightarrow |2x-5| = 2x-5$$

$$\begin{aligned} \text{Also } |2x-5| < 3|x-6| &\Leftrightarrow |x-6| = 6-x \\ &\Leftrightarrow 2x-5 < 3(6-x) \\ &\Leftrightarrow 2x-5 < 18-3x \\ &\Leftrightarrow 5x < 23 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{23}{5} \\ &\Rightarrow \frac{5}{2} \leq x < \frac{23}{5} \end{aligned}$$

$$3. \text{ Fall: } x > 6 \Rightarrow |2x-5| = 2x-5$$

$$\begin{aligned} \text{Also } |2x-5| < 3|x-6| &\Leftrightarrow |x-6| = x-6 \\ &\Leftrightarrow 2x-5 < 3x-18 \\ &\Rightarrow x > 13 \end{aligned}$$

Insgesamt also $x < \frac{23}{5}$ oder $x > 13$.

$$p) \frac{|x^2-36|}{x+6} > |x+3| - 2x, \quad x \neq -6$$

Fallunterscheidung:

$$x^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+6) \geq 0 \Rightarrow x \leq -6 \text{ oder } x \geq 6$$

$$x^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+6) < 0 \Rightarrow -6 < x < 6$$

$$\frac{x+3 \geq 0}{x+3 < 0} \Leftrightarrow \frac{x \geq -3}{x < -3}$$

1. Fall: $x \leq -6$

$$\Rightarrow x^2 - 36 \geq 0, \quad x+3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-6)(x+6)}{x+6} > -x-3-2x$$

$$\Leftrightarrow x-6 > -x-3-2x$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$$

\Rightarrow keine Lösung.

2. Fall: $-6 < x < -3$

$$\Rightarrow x^2 - 36 < 0, \quad x+3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-(x-6)(x+6)}{x+6} > -x-3-2x$$

$$\Leftrightarrow -x+6 > -x-3-2x$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2} < x < -3$$

3. Fall: $-3 \leq x < 6$

$$\Rightarrow x^2 - 36 < 0, \quad x+3 \geq 0$$

$$\Rightarrow -x+6 > x+3-2x$$

$$\Leftrightarrow 6 > 3$$

$$\Rightarrow -3 \leq x < 6$$

$$\begin{aligned}
4. \text{ Fall: } & x \geq 6 \\
\Rightarrow & x^2 - 36 \geq 0, x + 3 \geq 0 \\
\Rightarrow & x - 6 > x + 3 - 2x \\
\Leftrightarrow & x > \frac{9}{2} \\
\Rightarrow & x \geq 6
\end{aligned}$$

Die Gesamtlösung besteht aus allen x mit $-\frac{9}{2} < x < -3$ oder $-3 \leq x < 6$ oder $x \geq 6$
 \Rightarrow aus allen x mit $x > -\frac{9}{2}$.

Aufgabe 2.2

Sei a eine beliebige feste Zahl. Finden Sie alle Zahlen x , so dass

$$\left| \frac{x-a}{x+a} \right| < 1.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{|x-a|}{|x+a|} < 1 &\Leftrightarrow |x-a| < |x+a| \quad \Leftrightarrow \quad -|x+a| < x-a < |x+a| \quad (*) \\
&\quad \quad \quad \uparrow \\
&\quad \quad \quad (|r| < b, b > 0 \Leftrightarrow -b < r < b)
\end{aligned}$$

$$1. \text{ Fall: } x+a > 0 \Leftrightarrow |x+a| = x+a$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} -(x+a) < x-a < x+a \Leftrightarrow \begin{cases} -x-a < x-a \\ \text{und} \\ x-a < x+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x < x \Leftrightarrow 0 < x \\ \text{und} \\ -a < a \Leftrightarrow 0 < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ für } a > 0.$$

$$2. \text{ Fall: } x+a < 0 \Leftrightarrow |x+a| = -(x+a)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(*)}{\Rightarrow} -(-(x+a)) < x-a < -(x+a) \Leftrightarrow x+a < x-a < -x-a \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+a < x-a \Leftrightarrow 2a < 0 \Leftrightarrow a < 0 \\ \text{und} \\ x-a < -x-a \Leftrightarrow x < -x \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x < 0 \text{ für } a < 0.$$

Aufgabe 2.3

Es seien x, y beliebige reelle Zahlen. Beweisen Sie:

- a) $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
 b) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung**)
 i) ohne Hilfe von (a)
 ii) mit Hilfe von (a).

Lösung:

a) (\Rightarrow)

$$|x| \leq |y| \stackrel{\cdot|x|}{\Rightarrow} |x|^2 \leq |x||y| \text{ und } |x||y| \leq |y|^2$$

$$|x|^2 = x^2, |y|^2 = y^2 \quad x^2 \leq |x||y| \leq y^2, \text{ also } x^2 \leq y^2$$

(\Leftarrow)

$$x^2 \leq y^2 \Rightarrow |x|^2 \leq |y|^2 \stackrel{|x|, |y| \geq 0}{\Rightarrow} |x| \leq |y|$$

b) i)

$$1. \text{ Fall : } x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow (|x| = x, |y| = y \text{ und } x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y)$$

$$\Rightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y| \quad \text{„Gleichheit“}$$

$$2. \text{ Fall : } x < 0, y < 0 \Rightarrow (|x| = -x, |y| = -y \text{ und } x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = -(x + y))$$

$$\Rightarrow |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y| \quad \text{„Gleichheit“}$$

$$3. \text{ Fall : } x \geq 0, y < 0 \Rightarrow |x| = x, |y| = -y$$

$$\stackrel{x+y > 0}{\Rightarrow} |x + y| = x + y = |x| - (-y) = |x| - |y| < |x| + |y|$$

oder:

$$\stackrel{x+y < 0}{\Rightarrow} |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = -|x| + |y| < |x| + |y|$$

Den Fall $x < 0, y \geq 0$ beweist man wie Fall 3.

$$\text{ii) } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

$$\stackrel{(a)}{\Rightarrow} |x + y| \leq ||x| + |y|| = |x| + |y|.$$

Aufgabe 2.4

Man zeige, dass für alle $x \neq 0$ gilt: $|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$

Lösung:

$$0 \leq (|x| - 1)^2 = |x|^2 - 2|x| + 1$$

$$\Rightarrow 2|x| \leq |x|^2 + 1$$

$$|x| > 0, \text{ da } x \neq 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{|x|}(2|x|) \leq \frac{1}{|x|}(|x|^2 + 1) = |x| + \frac{1}{|x|}.$$

2.2 Ungleichungen ohne Beträge

Aufgabe 2.5

Berechnen Sie alle reellen Zahlen x , für die gilt:

- a) $3x - 8 \leq 9 + 5x$
- b) $2x - 17 \leq 13 + 6x$
- c) $4x - 5 \leq 8 + 7x$
- d) $-2x^2 + 14x - 20 > 0$
- e) $3(x - 2) < x(x - 2)$
- f) $2(x + 1) < x(x + 1)$
- g) $(2 - x) < 2x(2 - x)$
- h) $x^2 - 7 < 3(x - 1)$
- i) $x^2 + 1 < 5(x - 1)$
- j) $\frac{9x - 14}{x - 2} - \frac{5}{x + 1} > 9$
- k) $\frac{2x - 8}{x - 3} - \frac{4}{x + 2} > 5$

Lösung:

- a) $3x - 8 \leq 9 + 5x$
 $-17 \leq 2x$
 $x \geq -\frac{17}{2}$
- b) $2x - 17 \leq 13 + 6x \Leftrightarrow -4x \leq 30 \Leftrightarrow x \geq -\frac{30}{4} = -\frac{15}{2}$
 $\Rightarrow x \geq -\frac{15}{2}$
- c) $4x - 5 \leq 8 + 7x \Leftrightarrow -3x \leq 13 \Leftrightarrow x \geq -\frac{13}{3}$
- d) $-2x^2 + 14x - 20 > 0 \stackrel{:(-2)}{\Leftrightarrow} x^2 - 7x + 10 < 0$
 Nullstellen des Polynoms:
 $x^2 - 7x + 10 = 0$
 $\Leftrightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 5$
 $\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$
 $\Rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 2) < 0 \tag{1}$

Sei $x_1 := 2, x_2 := 5$:

- i) $x \leq x_1 \Rightarrow (x - x_1) \leq 0$ und $(x - x_2) < 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ (keine Lsg. laut (1))
- ii) $x \geq x_2 \Rightarrow (x - x_2) \geq 0$ und $(x - x_1) > 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ (keine Lsg. laut (1))
- iii) $x_1 < x < x_2 \Rightarrow (x - x_1) > 0$ und $(x - x_2) < 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) < 0$

Die Gesamtlösung: $2 < x < 5$

e) 1. Lösungsmöglichkeit

$$3(x-2) < x(x-2)$$

$$\Rightarrow 3x - 6 < x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

Nullstellen der Parabel: $x_1 = 3 \quad x_2 = 2$

\Rightarrow Die Lösung besteht aus allen x mit $x < 2$ oder $x > 3$

2. Lösungsmöglichkeit

1. Fall: $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$3(x-2) < x(x-2) \quad | : (x-2) \text{ mit } x-2 < 0$$

$$\Rightarrow 3 > x$$

$$x < 2 \text{ und } x < 3 \Rightarrow x < 2$$

2. Fall: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$3(x-2) < x(x-2) \quad | : (x-2) \text{ mit } x-2 > 0$$

$$\Rightarrow 3 < x$$

$$x > 2 \text{ und } x > 3 \Rightarrow x > 3$$

3. Fall: $x = 2$

$$3(x-2) < x(x-2) \Rightarrow 0 < 0 \text{ Widerspruch!} \Rightarrow x = 2 \text{ ist keine Lösung}$$

\Rightarrow Die Lösung besteht aus allen x mit $x < 2$ oder $x > 3$

f) Lösen durch Fallunterscheidung

1. Fall: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$$2(x+1) < x(x+1) \Leftrightarrow 2 < x$$

\Rightarrow Die Lösung im 1. Fall besteht aus allen x mit $x > 2$.

2. Fall: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$2(x+1) < x(x+1) \Leftrightarrow 0 < 0$$

\Rightarrow Keine Lösung.

3. Fall: $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$$2(x+1) < x(x+1) \Leftrightarrow 2 > x$$

\Rightarrow Die Lösung im 3. Fall besteht aus allen x mit $x < -1$.

\Rightarrow Die Gesamtlösung besteht aus allen x mit $x < -1$ oder $x > 2$.

g) $(2-x) < 2x(2-x)$

$$-2x^2 + 5x - 2 > 0$$

Nullstellen der Parabel: $x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{2}$

\Rightarrow Die Lösung besteht aus allen x mit $\frac{1}{2} < x < 2$.

h) $x^2 - 7 < 3(x-1)$

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

Nullstellen der Parabel: $x_1 = -1 \quad x_2 = 4$

\Rightarrow Die Lösung besteht aus allen x mit $-1 < x < 4$.

i) $x^2 + 1 < 5(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$
 $\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$
 $(x - 3)(x - 2) < 0$
 $\Leftrightarrow 2 < x < 3$

j) $\frac{9x - 14}{x - 2} - \frac{5}{x + 1} > 9$
 $\Leftrightarrow \frac{9x - 14}{x - 2} - \frac{5}{x + 1} - 9 > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(9x - 14)(x + 1) - 5(x - 2) - 9(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(x + 1)(9x - 14 - 9(x - 2)) - 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{4(x + 1) - 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-x + 14}{(x - 2)(x + 1)} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x - 14}{(x - 2)(x + 1)} < 0$

	$-\infty$	-1	2	14	∞
$x + 1$		-	+	+	+
$x - 2$		-	-	+	+
$x - 14$		-	-	-	+

$\Rightarrow x < -1$ oder $2 < x < 14$

k) $\frac{2x - 8}{x - 3} - \frac{4}{x + 2} - 5 > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(2x - 8)(x + 2) - 4(x - 3) - 5(x - 3)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-3x^2 - 3x + 26}{(x + 2)(x - 3)} > 0$

Nullstellen des Zählers: $x_1 = \frac{-(\sqrt{321} + 3)}{6} \approx -3,48$
 $x_2 = \frac{\sqrt{321} - 3}{6} \approx 2,48$

Nullstellen des Nenners: $x_3 = -2$ $x_4 = 3$

Die Gesamtlösung besteht aus allen x mit $\frac{-(\sqrt{321} + 3)}{6} < x < -2$

oder $\frac{\sqrt{321} - 3}{6} < x < 3$.

Aufgabe 2.6

Beweisen Sie für reelle, positive Zahlen a, b :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0 \quad | \cdot \underbrace{\sqrt{ab}}_{>0} \\ \Leftrightarrow & a\sqrt{a} - a\sqrt{b} + b\sqrt{b} - b\sqrt{a} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a\sqrt{a} - b\sqrt{a} - (a\sqrt{b} - b\sqrt{b}) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{a}(a-b) - \sqrt{b}(a-b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0 \\ \text{1. Fall: } & a > b \quad \underbrace{(a-b)}_{>0} \underbrace{(\sqrt{a} - \sqrt{b})}_{>0} \geq 0 \\ \text{2. Fall: } & a < b \quad \underbrace{(a-b)}_{<0} \underbrace{(\sqrt{a} - \sqrt{b})}_{<0} \geq 0 \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{>0} \\ \text{3. Fall: } & a = b \quad 0 \geq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.7

Zeigen Sie, dass für alle $a \leq b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a + c &\leq b + c && \text{für } c \in \mathbb{R} \\ ac &\leq bc && \text{für } c > 0 \\ \frac{a}{c} &\leq \frac{b}{c} && \text{für } c > 0 \\ ac &\geq bc && \text{für } c < 0 \\ \frac{1}{a} &\geq \frac{1}{b} && \text{für } a \neq 0 \neq b \text{ und } a \cdot b > 0 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (1) a \leq b &\Leftrightarrow b - a \geq 0 \Leftrightarrow b - a + (c - c) \geq 0 \Leftrightarrow (b + c) - (a + c) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a + c \leq b + c \end{aligned}$$

$$(2) a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \stackrel{c > 0}{\Leftrightarrow} c(b - a) \geq 0 \Leftrightarrow cb - ca \geq 0 \\ \Leftrightarrow ca \leq cb \Leftrightarrow ac \leq bc$$

$$(3) a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \stackrel{c > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{c}(b - a) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b}{c} - \frac{a}{c} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

$$(4) a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \stackrel{c \leq 0}{\Leftrightarrow} c(b - a) \leq 0 \Leftrightarrow cb - ca \leq 0 \\ \Leftrightarrow cb - ca + ca \leq 0 + ca \Leftrightarrow ac \geq bc$$

$$(5) a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \stackrel{ab > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{ab}(b - a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

Aufgabe 2.8

Seien p_1, p_2, \dots, p_n positive Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_k \leq \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + \dots + p_n} \leq \max_{1 \leq k \leq n} a_k$$

für alle $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Sei $a := \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$A := \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Sei $a = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = A$

Dann gilt: $(a_k - a_1)p_k \geq 0, k \in J := \{1, 2, \dots, n\} \Leftrightarrow a_1 p_k \leq a_k p_k, k \in J \quad (\alpha)$

und: $(a_n - a_k)p_k \geq 0, k \in J \Leftrightarrow a_k p_k \leq a_n p_k, k \in J \quad (\beta)$

Damit folgt:

$$a_1(p_1 + p_2 + \dots + p_n) = a_1 p_1 + \underbrace{a_1 p_2}_{(\alpha) \leq a_2 p_2} + \dots + \underbrace{a_1 p_n}_{(\alpha) \leq a_n p_n} \\ \stackrel{!}{\leq} \underbrace{a_1 p_1}_{(\beta) \leq a_n p_1} + \underbrace{a_2 p_2}_{(\beta) \leq a_n p_2} + \dots + a_n p_n \\ \leq a_n p_1 + a_n p_2 + \dots + a_n p_n = a_n(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$$

D.h. $a_1(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \leq a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n \leq a_n(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ (1)

Wegen: $p_1, p_2, \dots, p_n > 0 \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n =: p > 0$

$$\stackrel{(1)|:p}{\implies} \min_{k \in J} a_k = a_1 \leq \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \leq a_n = \max_{k \in J} a_k.$$

Aufgabe 2.9

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

- a) $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ und $n \geq 1$ (Ungleichung von Bernoulli)
 b) $(1+x)^n > 1+nx$ für alle $x \geq -1, x \neq 0$ und $n \geq 2$ (die schärfere Fassung der Ungleichung von Bernoulli)

Lösung:

- a) IA: $n = 1$

$$(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x \text{ ist richtig}$$

$$\text{IV: } (1+x)^n \geq 1+nx \text{ für alle } x \geq -1 \text{ und } 1 \leq n$$

IS:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \stackrel{\text{IV}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x + \underbrace{\underbrace{n}_{\geq 1} \underbrace{x^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

- b) Der Beweis der Ungleichung (b) erfolgt in derselben Weise wie der Beweis von (a).

Aufgabe 2.10

Zeigen Sie, dass folgende Abschätzungen gelten:

- a) $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ für alle $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$
 b) $2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$ für alle $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Lösung:

a) i) Beweis der linken Seite:

$$\begin{aligned}
 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &< \frac{1}{\sqrt{k}} && \Leftrightarrow && \sqrt{k}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &< \frac{1}{2} \\
 &&& \Leftrightarrow && \sqrt{k}\sqrt{k+1} - k &< \frac{1}{2} \\
 &&& \Leftrightarrow && \sqrt{k(k+1)} - k &< \frac{1}{2} \\
 &&& \Leftrightarrow && \sqrt{k(k+1)} &< \frac{1}{2} + k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &&& \stackrel{k \geq 1, \text{ Aufgabe 3.3a}}{\Leftrightarrow} && k(k+1) &< \left(k + \frac{1}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + k < k^2 + k + \frac{1}{4}$$

ii) Beweis der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) &&& \Leftrightarrow && \frac{1}{2} &< \sqrt{k}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\
 &&& \Leftrightarrow && \frac{1}{2} &< k - \sqrt{k(k-1)} \\
 &&& \Leftrightarrow && \sqrt{k(k-1)} &< k - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &&& \stackrel{k \geq 1, \text{ Aufgabe 3.3a}}{\Leftrightarrow} && k(k-1) &< \left(k - \frac{1}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k < k^2 - k + \frac{1}{4}$$

b) i) Beweis der linken Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{n} - 2 &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} &\stackrel{a)}{>} 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \\
 &= 2(\sqrt{1+1} - 1 + \sqrt{2+1} - \sqrt{2} + \sqrt{3+1} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= 2(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= 2(\underbrace{\sqrt{2} - \sqrt{2}}_{=0} + \underbrace{\sqrt{3} - \sqrt{3}}_{=0} + \underbrace{\sqrt{4} - \sqrt{4}}_{=0} + \dots + \underbrace{\sqrt{n} - \sqrt{n}}_{=0} + \sqrt{n+1} - 1) \\
 &= 2(\sqrt{n+1} - 1) = 2\sqrt{n+1} - 2 > 2\sqrt{n} - 2
 \end{aligned}$$

ii) Beweis der rechten Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} &< 2\sqrt{n} - 1 \\
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \stackrel{a)}{<} 1 + 2 \sum_{k=2}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 1 + 2 \cdot (\sqrt{n} - 1) = 2\sqrt{n} - 1
 \end{aligned}$$

Beispiel:

Abschätzung der Summe der Kehrwerte der ersten 10^6 Wurzeln:

$$\underbrace{2\sqrt{10^6} - 2}_{=1998} < \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}} < \underbrace{2\sqrt{10^6} - 1}_{=1999}.$$

2.3 Gleichungen ohne Beträge

Aufgabe 2.11

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x \neq 1$:

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \\ (1-x)(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) &= 1-x^{2^{n+1}} \\ (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) &= 1-x^{2^{n+1}} \\ (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\dots(1+x^{2^n}) &= 1-x^{2^{n+1}} \\ &\dots \\ (1-x^{2^n})(1+x^{2^n}) &= 1-x^{2^{n+1}} \\ \left(1-(x^{2^n})^2\right) &= 1-x^{2 \cdot 2^n} = 1-x^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.12

Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ hat die quadratische Gleichung

- a) $x^2 - (c+2)x + 1 = 0$,
 b) $x^2 - (2c-1)x + \left(c - \frac{1}{2}\right) = 0$

genau eine Lösung?

Lösung:

Sei $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ mit $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (*)

$D := \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Gleichung (*) hat genau eine Lösung $\Leftrightarrow D = 0$

$$\text{a) } x^2 - (c+2)x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_a &= (c+2)^2 - 4 = (c+2)^2 - 2^2 = (c+2+2)(c+2-2) = c(c+4) \\ \Rightarrow D_a = 0 &\Leftrightarrow c = 0 \text{ oder } c = -4 \end{aligned}$$

$$\text{i) } c = 0: \quad (1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ ist 2-fache Nullstelle}$$

$$\text{ii) } c = -4: \quad (1) \Leftrightarrow x^2 - (-4+2)x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \\ \Rightarrow x_0 = -1 \text{ ist 2-fache Nullstelle}$$

$$\text{b) } x^2 - (2c-1)x + \left(c - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2\left(c - \frac{1}{2}\right)x + \left(c - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow D_b = \left(2\left(c - \frac{1}{2}\right)\right)^2 - 4\left(c - \frac{1}{2}\right) = 4\left(c - \frac{1}{2}\right) \left(\left(c - \frac{1}{2}\right) - 1\right)$$

$$= 4\left(c - \frac{1}{2}\right) \left(c - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow D_b = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \text{ oder } c = \frac{3}{2}$$

$$\text{i) } c = \frac{1}{2}, \quad (2) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ist 2-fache Nullstelle}$$

$$\text{ii) } c = \frac{3}{2}, \quad (2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ ist 2-fache Nullstelle.}$$

Aufgabe 2.13

Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}, x \neq 1, \text{ für alle } n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

b) Sind $q \neq 1$ eine reelle und n eine natürliche Zahl, so gilt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Lösung:

a) IA: $n = 1$

Die Aussage ist wahr, weil:

$$\underbrace{1 \cdot x^{1-1}}_{=1 \cdot x^0=1} = \underbrace{\frac{1 - 2x + x^2}{(1-x)^2}}_{=\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}}$$

$$\text{IV: } \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$

IS:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1} + (n+1)x^n \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} + (n+1)x^n \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1} + (n+1)x^n(1-x)^2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1} + (n+1)x^n(1-2x+x^2)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (-n+2(n+1))x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

b) IA: $n = 0$

$$q^0 = 1 = \frac{1 - q^1}{1 - q^1}$$

IV:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

IS:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

2.4 Gleichungen mit Beträgen

Aufgabe 2.14

Weisen Sie nach: Für alle $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$:

- a) $|a| \geq 0$
- b) $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$
- c) $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$

Lösung:

- a) Für alle $a \in \mathbb{R} \Rightarrow |a| \geq 0$, denn
 für alle $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a < 0 \end{cases}$ „Trichometrie der reellen Zahlen“

und damit:

Für $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \geq 0$
 Für $a < 0 \Rightarrow |a| = -(a) > 0$

- b) (\Rightarrow) : Für $a = 0 \stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} |a| = a = 0$
 (\Leftarrow) : Sei $|a| = 0$ und sei $a \neq 0$
 $\Rightarrow |a| > 0$ – Widerspruch!
 $\Rightarrow a = 0$

- c) $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$

- i) Fall : $\lambda = 0, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a = 0 \Rightarrow |\lambda a| = 0 = 0 \cdot |a| \stackrel{|\lambda|=0}{=} |\lambda| \cdot |a|$
- ii) Fall : $a = 0, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a = 0 \Rightarrow |\lambda a| = 0 = 0 \cdot |a| \stackrel{|a|=0}{=} |\lambda| \cdot |a|$
- iii) Fall : $\lambda > 0, a > 0 \Rightarrow |\lambda| = \lambda, |a| = a, |\lambda a| = \lambda a$
 $\Rightarrow |\lambda a| = \lambda a = |\lambda| \cdot |a|$
- iv) Fall : $\lambda > 0, a < 0 \Rightarrow (|\lambda| = \lambda, |a| = -a \text{ und } \lambda a < 0 \Rightarrow |\lambda a| = -(\lambda a))$
 $\Rightarrow |\lambda a| = -(\lambda a) = \lambda(-a) = |\lambda| \cdot |a|$
- v) Fall : $\lambda < 0, a < 0 \Rightarrow (|\lambda| = -\lambda, |a| = -a \text{ und } \lambda a > 0 \Rightarrow |\lambda a| = \lambda a)$
 $\Rightarrow |\lambda a| = \lambda a = (-\lambda)(-a) = |\lambda| \cdot |a|$
- vi) Fall : $\lambda < 0, a > 0 \Rightarrow (|\lambda| = -\lambda, |a| = a \text{ und } \lambda a < 0 \Rightarrow |\lambda a| = -(\lambda a))$
 $\Rightarrow |\lambda a| = -\lambda a = |\lambda| \cdot |a|$

Aufgabe 2.15

Lösen Sie die Gleichungen

- a) $6x^2 + 5|x| - 4 = 0$
- b) $3x^2 - 4|x| + 1 = 0$

Lösung:

a) Setze $|x| =: t \geq 0$ wegen $x^2 = |x|^2$ gilt:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 5|x| - 4 = 0 &\Leftrightarrow 6t^2 + 5t - 4 = 0 \Leftrightarrow 6\left(t^2 + \frac{5}{6}t - \frac{4}{6}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 + 2t\frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 - \frac{4}{6} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(t + \frac{5}{12}\right)^2 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \frac{8}{12} = \frac{5^2 + 12 \cdot 8}{12^2} = \left(\frac{11}{12}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left|t + \frac{5}{12}\right| = \frac{11}{12} \\ &\stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} t = -\frac{5}{12} + \frac{11}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Aus } |x| = \frac{1}{2} = t \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x^2 - 4|x| + 1 = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 4|x| \\ &\Leftrightarrow (3x^2 + 1)^2 = (4|x|)^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 = 16|x|^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 = 16x^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^4 + 6x^2 - 16x^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Substitution : } y := x^2 \geq 0 : 9y^2 - 10y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ und } y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{9} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{9} \text{ oder } 1 \end{aligned}$$

$$\text{Rücksubstitution : } x = \pm 1 \text{ oder } x = \pm \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 2.16

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $|x+2| - |x-2| = |x-5| + |6-x| - 1$

Lösung:

$$|x+2| - |x-2| = |x-5| + |6-x| - 1$$

Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{l} x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \\ x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \\ 6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6 \end{array} \left\| \begin{array}{l} x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2 \\ x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \\ x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5 \\ 6-x < 0 \Leftrightarrow x > 6 \end{array} \right.$$

1. Fall:

$$x < -2, \quad \text{d.h. } x+2 < 0, x-2 < 0, x-5 < 0, 6-x > 0$$

$$\Rightarrow -x-2 - (-x+2) = -x+5+6-x-1$$

$$\Leftrightarrow -4 = -2x+10$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

\Rightarrow keine Lösung

2. Fall:

$$-2 \leq x < 2, \quad \text{d.h. } x+2 \geq 0, x-2 < 0, x-5 < 0, 6-x > 0$$

$$\Rightarrow x+2 - (-x+2) = -x+5+6-x-1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2x+10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

\Rightarrow keine Lösung

3. Fall:

$$2 \leq x < 5, \quad \text{d.h. } x+2 > 0, x-2 \geq 0, x-5 < 0, 6-x > 0$$

$$\Rightarrow x+2 - x+2 = -x+5+6-x-1$$

$$\Leftrightarrow 4 = -2x+10$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

\Rightarrow Lösung $x = 3$

4. Fall:

$$5 \leq x < 6, \quad \text{d.h. } x+2 > 0, x-2 > 0, x-5 \geq 0, 6-x > 0$$

$$\Rightarrow x+2 - x+2 = x-5+6-x-1$$

$$\Leftrightarrow 4 = 0$$

\Rightarrow keine Lösung

5. Fall:

$$x \geq 6, \quad \text{d.h. } x+2 > 0, x-2 > 0, x-5 > 0, 6-x \leq 0$$

$$\Rightarrow x+2 - x+2 = x-5-6+x-1$$

$$\Leftrightarrow 4 = 2x-12$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

\Rightarrow Lösung $x = 8$

Insgesamt: $x = 3$ oder $x = 8$.

Aufgabe 2.17

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, die jedem Paar $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seinen "Abstand" $d(a, b) := |a - b|$ zuordnet. Zeigen Sie: Für alle $a, b, c, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$d(a+c, b+c) = d(a, b)$$

$$d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| \cdot d(a, b)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } d(a+c, b+c) &\stackrel{\text{Def}}{=} |(a+c) - (b+c)| = |a+c-b-c| = |(a-b) + (c-c)| = \\ &= |a-b| \stackrel{\text{Def}}{=} d(a, b) \\ d(a+c, b+c) &= d(a, b) \quad \text{heißt „Translationsvarianz der Metrik d“} \end{aligned}$$

$$\text{b) } d(\lambda a, \lambda b) \stackrel{\text{Def}}{=} |\lambda a - \lambda b| = |\lambda(a - b)| = |\lambda||a - b| \stackrel{\text{Def}}{=} |\lambda| d(a, b).$$



<http://www.springer.com/978-3-7908-2609-8>

Übungsbuch zum Grundkurs Mathematik für Ingenieure,
Natur- und Wirtschaftswissenschaftler
Marti, K.

2010, X, 314 S. 43 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-7908-2609-8

A product of Physica-Verlag Heidelberg