

Kanonenkugeln und Melonen

Der englische Adlige und Seefahrer Sir Walter Raleigh (1552–1618) ist vielleicht ein eher unwahrscheinlicher Vorläufer für ein intellektuelles Abenteuer. Seine wissenschaftlichen Leistungen werden mitunter angezweifelt, dennoch stieß er eine der großen mathematischen Untersuchungen der letzten vierhundert Jahre an: Irgendwann gegen Ende der 1590er Jahre, als Raleigh seine Schiffe für eine weitere Entdeckungsreise ausrüstete, bat er seinen besten Freund und mathematischen Assistenten Thomas Harriot um einen Gefallen. Harriot solle eine Formel aufstellen, mit deren Hilfe Raleigh die Anzahl der Kanonenkugeln in einem gegebenen Stapel einfach anhand der Form des Stapels ermitteln konnte. Harriot war auf Draht und löste das Problem, das ihm Raleigh gestellt hatte. Wie jeder gute Assistent verstand Harriot die Bedürfnisse seines Meisters, entwickelte sie einen Schritt weiter und versuchte, die effizienteste Möglichkeit zu finden, so viele Kanonenkugeln wie möglich in den Laderaum eines Schiffes zu stopfen. Auf diese Weise erblickte ein mathematisches Problem das Licht der Welt.

Harriot, acht Jahre jünger als Sir Walter, war ein vielseitig gebildeter Mathematiker, Astronom und Geograph. Er war auch ein glühender Atheist – eine Überzeugung, die er mit seinem Meister teilte, aber das sollte nicht zur Schau gestellt werden. Die beiden Männer waren durch einen gemeinsamen Tutor miteinander bekannt geworden; ihr Interesse an Seefahrt und Forschungsreisen war die Grundlage für eine lebenslange Freundschaft.

Eines der wenigen erhalten gebliebenen schriftlichen Dokumente von Harriot ist sein Bericht über Sir Walters Expedition 1585–1586 in die Neue Welt: *A Briefe and True Report of the New Found Land of Virginia*. Der 1588 veröffentlichte Bericht war das erste englische Buch, das die erste englische Kolonie in Amerika beschrieb. Der Bericht wurde in gebildeten Kreisen der damaligen Zeit ein echter Hit: Er wurde mehrere Male nachgedruckt und ins Lateinische, Französische und Deutsche übersetzt. Dieser Bericht hat dazu geführt, daß Harriot nicht so sehr als Wissenschaftler, sondern eher als Beobachter des *American way of life* bekannt geworden ist.

Harriot hat viele wissenschaftliche Leistungen aufzuweisen und er war einer der führenden Denker seiner Zeit, was mitunter zu Unrecht übersehen wird. Im Jahr 1609 war Harriot der erste Mensch, der den Mond durch ein Fernrohr beobachtete, und er entdeckte die Sonnenflecken und die Jupitermonde unabhängig von Galilei. Das wissen wir jedoch nur aus seinen Notizbüchern, weil Harriot kaum etwas veröffentlichte. Die meisten seiner wissenschaftlichen Ergebnisse sind Bestandteil seines opus magnum *Artis analyticae praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* (Anwendungen der Kunst der Analysis zur Lösung algebraischer Gleichungen), das 1631, zehn Jahre nach seinem Tod, veröffentlicht wurde. In diesem Buch entwickelte Harriot ein numerisches Verfahren zur näherungsweise Lösung von algebraischen Gleichungen. Er entwickelte auch die Techniken zur Lösung von Gleichungen dritten Grades weiter und ihm wird die Einführung der Zeichen $>$ (größer als) und $<$ (kleiner als) in die mathematische Notation zugeschrieben. Er leistete Beiträge zum Verständnis der Lichtbrechung, zum Dualsystem, zur sphärischen Geometrie, zur Ballistik und zu vielen anderen Gebieten. Im Jahr 1607 beobachtete er ein UFO am Nachthimmel, das später als der Halleysche Komet identifiziert werden sollte. Er war auch einer der ersten Atomisten (also jener Denker, die davon überzeugt waren, daß die gesamte Materie aus winzigen Partikeln besteht) – zu einer Zeit, als diese Auffassung noch keineswegs weit verbreitet war. Und er hatte viele Einsichten in die Anordnung von Kristallen – Einsichten, die später dem berühmteren Astronomen Johannes Kepler zugeschrieben wurden.

Als Antwort auf Sir Walters Frage stellte Harriot eine Tabelle auf, mit deren Hilfe man die Anzahl von Kanonenkugeln auf Karren von gegebenen Formen bestimmen kann. Aber wie wir bereits gesagt hatten, ging Harriot noch einen Schritt weiter. Er ersann nicht nur Formeln zur Berechnung der Anzahl von Kanonenkugeln in Stapeln einer bestimmten Form, sondern entdeckte auch, wie man die Anzahl der Kanonenkugeln maximiert, die in den Laderaum eines Schiffes passen. Im modernen mathematischen Sprachgebrauch ausgedrückt, fragte er sich, wie man dreidimensionale Kugeln so dicht wie möglich packen kann. Nachdem Harriot eine Weile über diese Frage nachgedacht hatte, beschloß er, einen Brief an Kepler zu schreiben, seinen Kollegen in Prag, der einer der führenden Mathematiker, Physiker und Astronomen der damaligen Zeit war.

Obwohl Kanonenkugeln dreidimensionale Objekte sind, kann dasselbe Problem auch in niedrigeren Dimensionen formuliert werden, und wir werden uns das entsprechende Problem zunächst in einer Dimension und dann in zwei Dimensionen ansehen. Die Objekte, die uns interessieren, sind Kugeln, die wir formal als Gesamtheit aller derjenigen Punkte des Raumes definieren, deren Abstand vom Mittelpunkt kleiner oder gleich einem bestimmten Radius ist. Raum und Abstand werden in Bezug auf die jeweilige Dimension definiert. In *einer* Dimension ist der Raum eine Gerade. In zwei Dimensionen ist der Raum eine Ebene. Und der dreidimensionale Raum ist der Raum um uns herum. Gemäß Definition ist also eine eindimensionale Kugel eine Strecke, deren

Länge gleich dem doppeltem Radius ist. Um das Ganze etwas intuitiver zu machen, betrachten wir eine Gerade und legen einen bestimmten Punkt als Kugelmittelpunkt fest. Dann bewegen wir uns zuerst in eine Richtung entlang der Geraden, bis wir den Abstand R zurückgelegt haben. Anschließend machen wir dasselbe in der anderen Richtung. Insgesamt haben wir damit eine eindimensionale Kugel mit Radius R . Es mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen, daß eine gerade Strecke eine Kugel sein kann, da wir uns Kugeln üblicherweise als runde Objekte vorstellen.¹ Aber das sollte uns nicht stören; „Rundheit“ hat keine Bedeutung in *einer* Dimension.

Eine zweidimensionale Kugel ist ein vertrauterer Objekt. Man lege einen Punkt in der Ebene fest und betrachte dann die Gesamtheit aller Punkte, die von dem festgelegten Punkt einen Abstand von höchstens R haben; diese Kugel besteht aus der Kreislinie und aus allen denjenigen Punkten, die innerhalb dieser Linie liegen. Man kann die Situation folgendermaßen illustrieren: Stellen Sie sich eine Wiese vor, auf der ein Mast steht. An diesem Mast binde man eine Kuh mit einem Seil der Länge R fest und lasse sie weiden. Nach einiger Zeit hat die Kuh alles Gras gefressen, das vom Mast nicht weiter als R entfernt ist.

Die dreidimensionale Kugel ist natürlich unsere Kanonenkugel.

Warum sollen wir eigentlich bei drei Dimensionen Schluß machen? Tatsächlich haben die Mathematiker – die nichts glauben, wenn man ihnen keinen wasserdichten Beweis gibt – überhaupt keine Schwierigkeiten, etwas zu definieren, das niemand jemals sehen wird. Sie definieren einfach höherdimensionale Kugeln auf dieselbe Weise, wie sie Strecken, Kreise und dreidimensionale Kugeln definiert haben: als die Gesamtheit von Punkten im n -dimensionalen Raum (wobei n eine beliebige natürliche Zahl sein kann), die nicht weiter vom Mittelpunkt entfernt sind als der Radius. Ob Sie es nun glauben oder nicht: Die Mathematiker können sogar das Volumen einer solchen n -dimensionalen Kugel angeben (vgl. Tabelle im Anhang).

Wir kommen nun wieder auf Packungen zurück und definieren, was wir unter deren Dichte verstehen. Immerhin können wir ja stets unendlich viele Kugeln in einen unendlich großen Raum packen. Was bedeutet das für uns? Zunächst einmal haben wir hier ein Beispiel dafür, warum Mathematiker so pingelig in Bezug auf scheinbar offensichtliche Dinge sind. Bevor wir also weitere Untersuchungen durchführen, muß der Begriff der Dichte präzisiert werden. Die Mathematiker definieren die Dichte einer Packung als das Verhältnis des Volumens des Raumes, der mit Kugeln gefüllt ist, zum Volumen des ganzen Raumes. Zur Berechnung der Dichte müssen wir einfach nur das von den Kugeln ausgefüllte Volumen durch das Raumvolumen dividieren. Das gilt für jede Dimension und nach Grenzübergang auch für einen unendlichen Raum. Es mag vielleicht etwas schwierig erscheinen, das Volumen eines unendlichen Raumes zu messen, aber die Mathematiker lassen sich durch der-

¹ Man kann auch eine gekrümmte Linie als eindimensionales Objekt definieren. In diesem Raum wären die Kugeln Teile der gekrümmten Linie.

lei geringfügige Hindernisse nicht abschrecken. Sie definieren die Dichte der Packung eines unendlichen Raumes als den Grenzwert des obengenannten Verhältnisses, wenn der Raum immer größer wird.

Können Sie sich vorstellen, was die dichteste Packung von Kugeln in *einer* Dimension ist? Wir wissen bereits, daß ein eindimensionaler Raum aus einer Geraden besteht, und daß die eindimensionalen Kugeln Strecken dieser Geraden sind – zum Beispiel Streichhölzer oder Zahnstocher. Versuchen Sie jetzt, möglichst viele Streichhölzer oder Zahnstocher auf einer Geraden unterzubringen. Man merkt ziemlich schnell, daß die dichtestmögliche Packungsweise darin besteht, die Streichhölzer lückenlos aneinander zu legen. Tatsächlich erreicht man mit dieser Art Packung die bestmögliche Dichte: 100 Prozent der Geraden werden mit Streichhölzern ausgefüllt und zwischen diesen ist kein Platz übrig. Das ist so offensichtlich, daß nicht einmal Mathematiker einen Beweis verlangen.

Wir gehen jetzt zu zwei Dimensionen über. Hier besteht das Problem darin, Kreise in einer Ebene anzuordnen. Wir illustrieren den Sachverhalt durch ein einfaches Beispiel. Man nehme einige Münzen der gleichen Größe, zum Beispiel Fünfcentstücke, lege sie auf einen Tisch und schubse sie dort eine Weile herum. Schnell findet man die dichteste Anordnung heraus: diese liegt vor, wenn jede Münze von sechs anderen umgeben ist, das heißt, wenn die Münzen ein hexagonales Muster bilden. Man muß nicht einmal besonders sorgfältig vorgehen, wenn man die Münzen anordnet: Wenn man sie nur ein bißchen herumschubst, dann ordnen sie sich üblicherweise von selbst in diesem Muster an.

Was ist die Dichte dieser Anordnung? Anhand der Abbildung erkennen wir, daß das Grundmuster, von dem die Packung bestimmt wird, ein Hexagon ist, genauer gesagt ein reguläres Hexagon oder regelmäßiges Sechseck. (Genaue Berechnungen findet man im Anhang.) Die ganze Fläche läßt sich mit solchen Hexagonen überdecken. Ein Teil eines jeden Hexagons ist durch Kreise ausgefüllt, ein anderer Teil bleibt dagegen leer. Jedes reguläre Sechseck kann in gleichseitige Dreiecke zerlegt werden, wobei die Dreiecke miteinander kongruent sind. Wir können uns deswegen darauf beschränken, die Dichte der Dreiecke zu berechnen. Wie sich herausstellt, überdecken die Kreise 90,7 Prozent der Fläche.

Zu Vergleichszwecken wollen wir die Dichte der Münzen bestimmen, wenn sie in einer regulären quadratischen Packung angeordnet werden. In diesem Fall füllen die Münzen weniger als 79 Prozent der Fläche aus (für die Details der Berechnung verweisen wir auf den Anhang). Folglich ist in zwei Dimensionen die regelmäßige quadratische Packung weitaus weniger effizient als die hexagonale Packung.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die hexagonale Packung nicht notwendigerweise eine dichtere Packung als die quadratische Packung ist, falls die Fläche nicht bis ins Unendliche erweitert wird. Zum Beispiel könnten wir unter Verwendung der hexagonalen Packung nur drei Kreise in einem Quadrat der Kantenlänge vier unterbringen, während bei einer quadratischen Packung

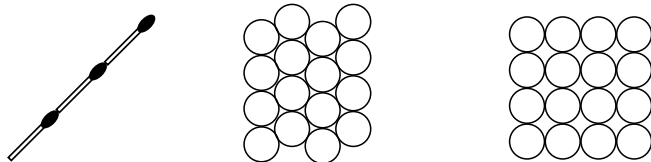


Abb. 1.1. (links) Streichhölzer, (Mitte) Münzen in einer hexagonalen Packung, (rechts) Münzen in einer quadratischen Packung

vier Kreise hineinpassen würden. Etwas Ähnliches gilt auch in drei Dimensionen und die Keplersche Vermutung, der Gegenstand dieses Buches, bezieht sich auf einen Raum, der sich bis ins Unendliche erstreckt.

Wir haben gesehen, daß im zweidimensionalen Raum die hexagonale Packung dichter als die quadratische Packung ist, aber ist sie auch die dichtestmögliche Packung? Es ist keineswegs offensichtlich, daß es keine dichteren Anordnungen gibt, und die Optimalität der hexagonalen Anordnung erfordert tatsächlich einen Beweis. Aber auch wenn das Ergebnis ziemlich banal aussieht, war ein exakter Beweis keine einfache Sache und es hat bis 1940 gedauert, einen Beweis zu finden, der die Mathematiker zufriedenstellte. Wir werden auf dieses Problem in Kapitel 4 zurückkommen.

Aber nun zurück zu Raleighs Kanonenkugeln. Nach Erhalt des Briefes von Harriot mußte Kepler nicht lange nachdenken, um zu dem Schluß zu kommen, daß man die dichtestmögliche Packung dreidimensionaler Kugeln dadurch erreicht, daß man sie so anordnet wie die Marktverkäufer ihre Äpfel, Orangen und Melonen stapeln. Kepler veröffentlichte 1611 eine kleine Broschüre, die er seinem Freund Johann Matthäus Wacker von Wackenfels als Neujahrs Geschenk überreichte. Das Büchlein hieß *Vom sechseckigen Schnee* und Kepler beschrieb darin eine Methode, Kugeln so dicht wie möglich zu packen. Das war die Geburt der Keplerschen Vermutung. Im nächsten Kapitel werden wir ausführlicher auf Schneeflocken und ihre Beziehung zur Packung von Kanonenkugeln eingehen.

Wir wollen Melonen als Illustration verwenden. Wären Melonen würfelförmig, dann wäre alles viel einfacher. Sie könnten dann lückenlos nebeneinander und übereinander gestapelt werden. Wie bei den Streichhölzern würde

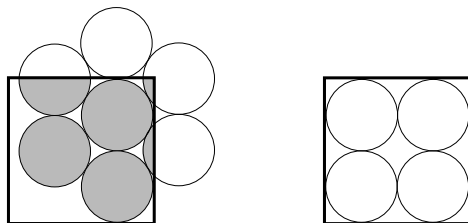


Abb. 1.2. Packung in einer endlichen Box

die Dichte dann 100 Prozent betragen. Aus exakt diesem Grund hat es Versuche gegeben, kubische Melonen zu züchten.² Da die Produkte häufig von heißen Ländern zu Überseemärkten geflogen werden, muß man die Melonen in Flugzeuge verladen. Das könnte am effizientesten in Kisten erfolgen, in denen man würfelförmige Melonen stapelt. An dieser Stelle fragt sich der Leser vielleicht, warum die Natur runde Melonen entwickelt hat (wobei wir zu Illustrationszwecken annehmen, daß Melonen vollkommen runde Objekte sind). Und warum sind so viele andere Früchte und Gemüsepflanzen annähernd rund? Nun, die Natur machte sich keine Sorgen wegen des beschränkten Laderaumes auf Schiffen oder in Flugzeugen, wohl aber wegen des Feuchtigkeitsverlustes in heißen Ländern. Und sie war bestrebt, diesen Verlust zu minimieren. Der Feuchtigkeitsverlust eines Objektes ist zu dessen Oberfläche proportional: Je mehr Schale erforderlich ist, um das Objekt zu bedecken, desto höher ist der Feuchtigkeitsverlust aufgrund der Verdunstung. Und welche Form minimiert die Oberfläche für eine Frucht mit gegebenem Volumen? Der Leser ahnt vielleicht schon, daß das die Kugelform ist.³ Vergleicht man zwei Melonen gleichen Gewichts – eine würfelförmige und eine runde Melone –, dann hat die runde Melone fast 20 Prozent weniger Oberfläche als die würfelförmige (vgl. Anhang). Durch die Entwicklung runder Melonen strebte die Natur danach, die Oberfläche zu minimieren, um den Feuchtigkeitsverlust zu senken. Übrigens war das ein weiteres derjenigen leidigen Probleme, auf deren Beweis man Jahrtausende warten mußte. Bereits Archimedes kannte vermutlich die richtige Form. Aber erst 1894 gab Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) einen strengen Beweis, daß die „runde“ Kugel diejenige Form ist, die bei einem gegebenen Volumen die Oberfläche minimiert.

Ähnliche Überlegungen dürften zwei Mineralwasservertreiber zu unterschiedlichen Schlußfolgerungen bezüglich der optimalen Form der Behälter veranlaßt haben, die sie für den Vertrieb verwenden sollten. Eines der Unternehmen (Neviot) vertreibt das Wasser in würfelförmigen Dosen. Das andere Unternehmen (Eden) liefert zylindrische Flaschen. (Keine der beiden Firmen verwendet runde Flaschen – vermutlich deswegen, weil diese von den Transportern rollen würden.) Offensichtlich versucht Neviot, die Anzahl der Flaschen zu maximieren, die auf einen Lasttransporter passen, und würfelförmige Flaschen erfüllen diesen Zweck. Was aber macht Eden? Das Unternehmen versucht augenscheinlich, die Rohstoffkosten zu minimieren, denn – für ein und dasselbe Volumen – erfordern zylindrische Flaschen weniger Kunststoff als die würfelförmigen. Aber die Eden-Container haben einen wirklich wichtigen Vorteil für den Endverbraucher. Die 20-Kilogramm-Flaschen können von der Haustür bis in die Küche gerollt werden, während die Neviot-Flaschen getragen werden müssen.

² Japanische Bauern haben herausgefunden, wie man kubische Wassermelonen anbaut.

³ Das ist eine Version des sogenannten Problems der Dido, auf das wir in Kapitel 3 zurückkommen.

Um wieder auf den Obststand zurück zu kommen: Eine Methode, die Waren zur Schau zu stellen, besteht darin, diese in wildem Durcheinander in eine Kiste zu legen. Aus gutem Grund wählen nur sehr wenige Verkäufer diese Möglichkeit. Das ist nämlich nicht nur eine extrem unansprechende Weise, Melonen zur Geltung zu bringen, sondern auch eine sehr ineffiziente Methode. Experimente zeigen, daß nur ungefähr 55 bis 60 Prozent einer Kiste gefüllt sind, wenn man die Kugeln nach dem Zufallsprinzip hineinlegt. Eine besseres, obwohl auch nicht viel ästhetischeres Verfahren besteht darin, die Kiste zu verformen, während die Melonen hineingelegt werden. Unter der Voraussetzung, daß bei diesem Verfahren keine der Melonen zerquetscht wird, lassen sich ungefähr 64 Prozent des Behälters füllen.

Eine viel ästhetischere Art und Weise, die Melonen unterzubringen, besteht darin, zuerst die unterste Schicht in ordentlichen „Zeilen“ und „Spalten“ anzuordnen, und darauf dann die nächste Schicht so zu legen, daß die neu hinzukommenden Melonen sorgfältig auf den oberen „Spitzen“ der unteren Melonen positioniert werden. Offensichtlich hat diese kubische Stapelung aber einen ernsthaften Nachteil: die Melonen sind nicht stabil positioniert. Der geringste Ruck oder Stoß von einem Kunden würde den ganzen Stapel zum Einsturz bringen. Aber die Stabilität von Melonenstapeln – eine äußerst wichtige Sache für Marktverkäufer – ist für Mathematiker ohne Belang.⁴ Die Mathematiker stört hingegen, daß die kubische Stapelmethode auf einem unendlich großen Tisch ineffizient ist. Die Dichte erreicht nur ungefähr 52 Prozent. Wenn also der Melonenhaufen einstürzt, dann nimmt die Dichte tatsächlich um ungefähr 3 bis 8 Prozent zu. Nur doofe Verkäufer würden so weit gehen, einen instabilen Melonenhaufen anzulegen, der noch dazu ineffizient ist.

Schlauere Verkäufer können es besser machen. Wie es sich herausstellt, wird auf den Märkten überall auf der Welt die gleiche, allgemein akzeptierte Stapelmethode angewendet. Zuerst werden die einzelnen Früchte in einer Reihe von einem Ende des Tisches zum anderen gelegt. Wie wir oben gesehen hatten, ist das die dichteste Packung in *einer* Dimension. Dann wird die nächste Reihe so aufgefüllt, daß jede Melone dieser zweiten Reihe in eine Vertiefung kommt, die zwischen zwei Melonen der ersten Reihe besteht. Im mathematischen Jargon ist die zweite Reihe „um eine halbe Melone transponiert“. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis der Tisch aufgefüllt ist. Sieht man von oben auf den Ladentisch, dann hat der Verkäufer jetzt die dichtestmögliche Packung in zwei Dimensionen.

Wenden wir uns jetzt der nächsten Schicht von Melonen zu, was also dem Übergang zur dritten Dimension entspricht. Es liegt nicht auf der Hand, was der Verkäufer tun sollte. Wir könnten etwa so vorgehen, daß wir jede Melone der zweiten Schicht genau über einer Melone der darunter befindlichen ersten

⁴ Die Physiker hingegen machen sich da schon eher Sorgen. Wir verweisen auf das, was Per Bak in *How Nature Works* (Copernicus, New York 1996) über die Stabilität von Sandhaufen zu sagen hat.

Schicht plazieren. Das führt zu einer Dichte von 60,5 Prozent (vgl. Anhang). Leider ist das nicht viel besser als die zufällige Anordnung von Melonen.

Aber kluge Mathematiker können es sogar noch besser machen. Sie weisen uns prompt darauf hin, daß sich zwischen jeweils drei benachbarten Melonen der ersten Schicht eine Vertiefung gebildet hat. Eine größere Menge von Früchten kann gestapelt werden, wenn die Melonen der zweiten Schicht in die Vertiefungen der ersten Schicht gelegt werden. In der nachfolgenden Schicht wird eine Vertiefung mit einer Melone gefüllt, die nächste Vertiefung bleibt leer, danach wird wieder eine Vertiefung gefüllt, die nächste wird wieder leer gelassen und so weiter. Wie wir in Kapitel 2 sehen werden, erreicht die Dichte dieser sogenannten *hexagonal dichtesten Packung* (*hexagonal closest packing*, HCP) mordsmäßige 74,05 Prozent. Diese Art und Weise, Melonen zu stapeln, ist nicht nur besser als die vorherige, sondern sogar die beste Methode. Mit anderen Worten: es handelt sich um die dichteste Packung. Marktverkäufer wissen es, Sie und ich wissen es, Harriot und Kepler wußten es, aber die Mathematiker weigerten sich, das zu glauben. Und es dauerte 387 Jahre, um sie von der Richtigkeit dieser Tatsache zu überzeugen.

An dieser Stelle möchte ich zwei interessante und sehr wichtige Fakten über Kugelpackungen bekanntgeben. Diese Fakten zeigen, daß insbesondere in der Mathematik nichts so einfach ist wie es aussieht: 1883 wies der Kristallograph William Barlow (1845–1934) darauf hin, daß es nicht nur *eine* gute Möglichkeit gibt, Melonen zu stapeln, sondern zwei. Barlow war ein autodidaktischer Wissenschaftler, der die Muße, die ihm sein väterliches Erbe gewährte, dazu nutzte, auf dem Gebiet der Kristallographie zu arbeiten. Er war überzeugt davon, daß die Art und Weise, in der die Atome und Moleküle zusammengepackt sind, die Frage nach den symmetrischen Formen von Kristallen beantworten würde. Deswegen untersuchte er verschiedene Packungsanordnungen. Nach langjährigen Untersuchungen veröffentlichte er in der britischen Zeitschrift *Nature* einen Artikel, in dem er fünf räumliche Anordnungen von Atomen beschrieb. Zwei dieser Anordnungen sind hier für uns von Interesse.

Die erste Anordnung ist die oben beschriebene HCP der Marktverkäufer. Wir wollen aber nochmals kurz auf die Strategie der doofen Verkäufer eingehen. Sie beginnen damit, ihre Melonen in ordentlichen „Zeilen“ und „Spalten“ anzuordnen. Haben wir diese Anordnung nicht soeben als ineffizient zurückgewiesen? Ja schon, aber der springende Punkt ist die nachfolgende zweite Schicht. Man beachte, daß es auch hier (auf der Oberseite der ersten Schicht) Vertiefungen gibt, aber diese bestehen zwischen jeweils vier aneinander angrenzenden Melonen. (Bei der HCP gibt es Vertiefungen zwischen jeweils drei Melonen.) Die doofen Verkäufer legen die Melonen der nachfolgenden Schicht in diese Zwischenräume und errichten auf diese Weise den Stapel. Sie erhalten eine Packung, die als *flächenzentrierte kubische Packung* (*face-centered cubic packing*, FCC) bezeichnet wird.

Warum sollten Verkäufer so etwas Dummes tun, nachdem wir gezeigt haben, daß die HCP die effizienteste Anordnung ist? Nun, die HCP ist die effizienteste Stapelmethode, aber sie ist nicht die *einzig*e. Bei genauer – peinlich

genauer – Inspektion stellt sich nämlich heraus, daß die FCC und die HCP zwar nicht identisch, aber in gewisser Weise äquivalent sind! Das scheint auf den ersten Blick ziemlich unglaublich zu sein. Aber in Barlows Arbeit zeigt die sehr aufschlußreiche Illustration eines Schnittmodells einer FCC-Anordnung, daß sich die beiden Anordnungen mühelos ineinander transformieren lassen. Um die FCC-Anordnung in dem Schnittmodell fortzusetzen, müssen zehn Kugeln in zehn der verfügbaren sechzehn Lücken positioniert werden. Demzufolge bleiben sechs Lücken leer. Anstelle der zehn Kugeln könnte man nun aber sechs Kugeln in den Lücken positionieren, die zuvor unbesetzt geblieben sind. Setzt man die Positionierung der Kugeln über das Schnittmodell hinaus fort, dann wird wieder klar, daß jede Kugel von zwölf Nachbarn berührt wird. Aber jetzt ist die Schicht nicht als FCC-Anordnung gepackt, sondern als HCP-Anordnung. In Abhängigkeit davon, in welche Lücken die Kugeln der nächsten Schicht plaziert werden, erhält man entweder eine FCC- oder eine HCP-Anordnung. Beide Packungen haben die gleiche Dichte von 74,05 Prozent. Ganz so dumm sind also die dummen Verkäufer doch nicht.

Vierundzwanzig Jahre später schlug der Amateurwissenschaftler erneut zu. Zusammen mit seinem Kollegen William Jackson Pope, der später Chemieprofessor in Manchester wurde, schrieb Barlow einen Artikel, der 1907 im *Journal of the Chemical Society* erschien. In dieser Arbeit zeigten die beiden, daß es nicht nur zwei, sondern unendlich viele Möglichkeiten gibt, Melonen auf effizienteste Weise zu stapeln. (In Wahrheit befaßten sie sich mehr mit Atomen als mit Melonen.) Wir wollen nun beschreiben, was sie damit meinten.

Nach Anordnung der ersten Schicht von Melonen muß der Verkäufer eine Entscheidung treffen: Welche Vertiefungen soll er für die zweite Schicht verwenden? Er könnte die Zwischenräume verwenden, die auf Abbildung 1.4 durch ein Y gekennzeichnet sind. Er könnte aber auch diejenigen Zwischenräume nehmen, die durch ein Z markiert sind. Wir nehmen an, daß der Verkäufer Y verwendet. Bei der nachfolgenden Schicht steht er wieder vor einer Wahl:

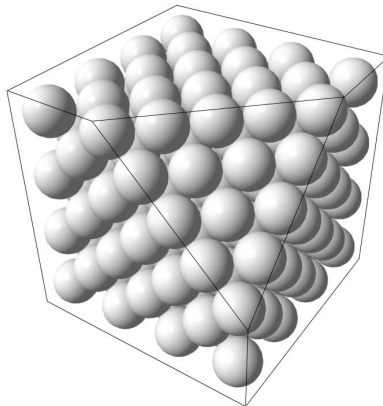


Abb. 1.3. Barlows Illustration

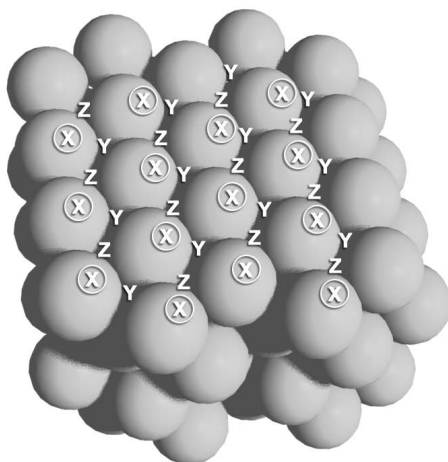


Abb. 1.4. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Kugeln zu stapeln

Soll er die durch Z gekennzeichneten Zwischenräume oder die mit X markierten Zwischenräume verwenden? Und so weiter. Nach einigen Schichten wird der Haufen als XYZXZX oder als XZXZYX oder als XYXYXY oder als irgendeine andere Folge von Schichten gestapelt, die aus einer unendlichen Vielfalt von Möglichkeiten ausgewählt werden. Alle diese Anordnungen haben eine Dichte von 74,05 Prozent! Wären Harriot und Kepler da nicht überrascht gewesen?

Haben diese unendlich vielen Packungen außer ihrer Dichte noch etwas anderes gemeinsam? Ja, das haben sie. Bei jeder dieser Anordnungen berührt jede Kugel zwölf andere Kugeln. Man darf diese Aussage jedoch nicht mit ihrer Umkehrung verwechseln. Nicht jede Anordnung, bei der jede Kugel zwölf andere berührt, ist effizient. Tatsächlich gibt es äußerst widerliche Anordnungen, die ich als *dreckige Dutzende* bezeichne. In späteren Kapiteln werde ich mehr davon erzählen. Einstweilen wollen wir hier jedoch definitiv festhalten, daß in der Mathematik nichts so einfach ist, wie es aussieht.

Die Keplersche Vermutung

Wie Mathematiker ein 400 Jahre altes Rätsel lösten

Szpiro, G.G.

2011, XII, 325 S. 90 Abb., 4 Abb. in Farbe., Hardcover

ISBN: 978-3-642-12740-3