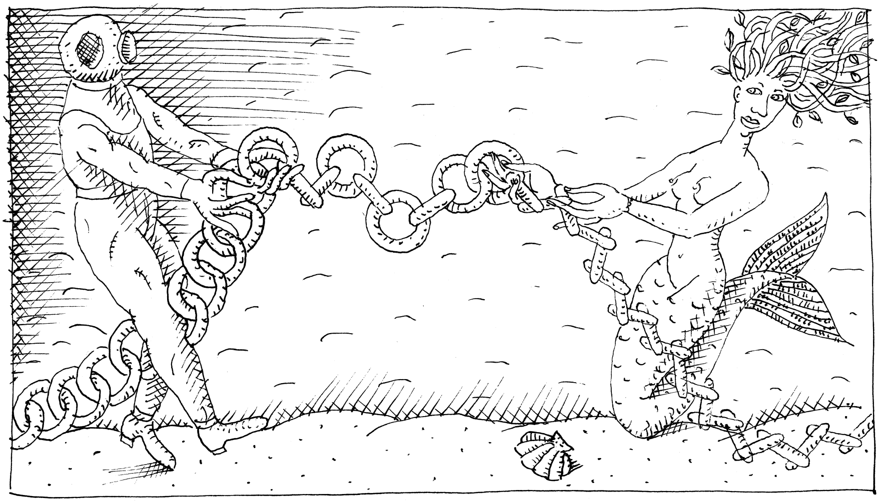
Vorlesung 3
Über das Sammeln gleichartiger Terme, über Euler, Gauß und MacDonald und über verpasste Gelegenheiten



3.1 Die Euler-Identität

Mitte des 18. Jahrhunderts entwickelte Leonhard Euler Interesse an den Koeffizienten des Polynoms

$$\varphi_n(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n).$$

Er löste die Klammern auf – und erhielt das folgende verblüffende Resultat:

$$\begin{array}{rlllllllllll}
\varphi_1(x) = & 1-x, & & & & & & & & & & \\
\varphi_2(x) = & 1-x & -x^2 & +x^3, & & & & & & & & \\
\varphi_3(x) = & 1-x & -x^2 & & +x^4 & +x^5 & -x^6, & & & & & \\
\varphi_4(x) = & 1-x & -x^2 & & & +2x^5 & & & -x^8 & -x^9 & +x^{10}, & \\
\varphi_5(x) = & 1-x & -x^2 & & & +x^5 & +x^6 & +x^7 & -x^8 & -x^9 & -x^{10} & \dots, \\
\varphi_6(x) = & 1-x & -x^2 & & & +x^5 & & +2x^7 & & -x^9 & -x^{10} & \dots, \\
\varphi_7(x) = & 1-x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & +x^8 & & -x^{10} & \dots, \\
\varphi_8(x) = & 1-x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & +x^9 & & \dots, \\
\varphi_9(x) = & 1-x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & & +x^{10} & \dots, \\
\varphi_{10}(x) = & 1-x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & & & \dots.
\end{array}$$

D. Fuchs, S. Tabachnikov, *Ein Schaubild der Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-642-12960-5_3,

Die Punkte stehen für Terme mit einem Exponenten > 10 (es ist kein Platz für alle Terme: Das Polynom $\varphi_{10}(x)$ ist zum Beispiel vom Grad 55).

Euler folgend, wollen wir einige Beobachtungen anstellen. Als Erstes stellen wir fest (was nicht überraschend ist), dass die Koeffizienten jedes Terms x^m mit zunehmendem n stabil werden; genauer gesagt, haben alle Polynome $\varphi_{m+1}(x)$, $\varphi_{m+2}(x)$, $\varphi_{m+3}(x), \ldots$ vor x^m denselben Koeffizienten. (Offenbar ist: $\varphi_{m+1}(x) = \varphi_m(x)(1-x^{m+1})$, $\varphi_{m+2}(x) = \varphi_{m+1}(1-x^{m+2}), \ldots$; folglich berührt die Multiplikation mit $1-x^n$ für $n > m$ den Koeffizienten von x^m nicht.) Aufgrund dessen können wir vom „stabilen" Produkt sprechen:

$$\varphi(x) = \varphi_\infty(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n).$$

Das ist kein Polynom mehr; das ist eine unendliche Reihe mit beliebig hohen Potenzen von x. Wir werden $\varphi(x)$ mitunter als *Euler-Funktion* bezeichnen.

Die zweite (überraschendere) Beobachtung ist: Wenn wir Terme aus dem Produkt $(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)$ sammeln, heben sich viele Terme auf. Multiplizieren wir zum Beispiel $(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{10})$ aus, gibt es 43 Terme mit x hoch 0 bis 10 und nur fünf davon $(1,-x,-x^2,x^5,x^7)$ überleben am Ende. Dieses Phänomen tritt noch deutlicher zutage, wenn wir weitere Berechnungen anstellen; hier ist zum Beispiel der Teil der Reihe $\varphi(x)$ mit allen Termen von x bis zur Potenz ≤ 100:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40}\\ + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} + x^{92} + x^{100} + \ldots.\end{aligned}$$

Euler, der in langen Berechnungen äußerst gut war, berechnete wahrscheinlich fast so viele Terme. Danach konnte er nicht umhin, festzustellen, dass alle von null verschiedenen Koeffizienten dieser Reihe Einsen mit positiven und negativen Vorzeichen sind und dass sie eine streng vorbestimmte Reihenfolge haben: zwei Einsen, zwei Einsen mit negativen Vorzeichen, zwei Einsen, zwei Einsen mit negativen Vorzeichen usw. Wenn Sie sich die nachfolgende Tabelle ansehen, können Sie (wie Euler) die Potenzen von x mit von null verschiedenem Koeffizienten erraten:

Exponenten	0	1, 2	5, 7	12, 15	22, 26	35, 40	51, 57	70, 77	92, 100
Koeffizienten	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1

Diese Tabelle suggeriert, dass der Term $x^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$ $(n \geq 0)$ mit dem Koeffizienten $(-1)^n$ vorkommt und es keine weiteren von null verschiedenen Terme gibt. Diese Vermutung kann in der Form

$$\begin{aligned}(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7\\ + \cdots + (-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}} + (-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}} + \ldots.\end{aligned}$$

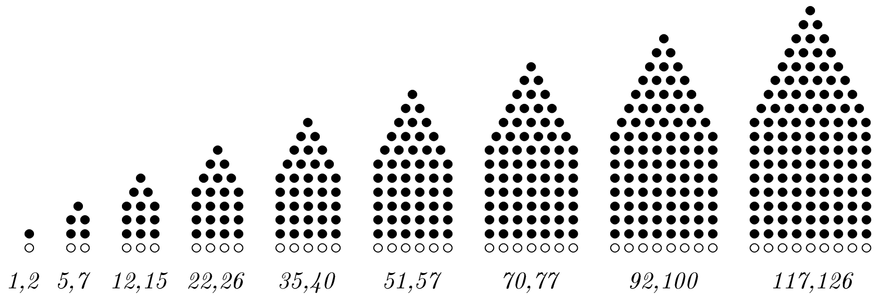


Abb. 3.1 Fünfeckzahlen.

ausgedrückt werden. Oder kürzer

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left(x^{\frac{3r^2-r}{2}}+x^{\frac{3r^2+r}{2}}\right).$$

Noch kürzer ist

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r x^{\frac{3r^2+r}{2}}.$$

Übrigens sind die Zahlen $\dfrac{3n^2 \pm n}{2}$, die in der Formel auftauchen, unter dem Namen „Fünfeckzahlen“ bekannt. Der Grund für diese Bezeichnung wird aus Abbildung 3.1 ersichtlich (die schwarz gepunkteten Fünfecke haben entlang jeder Seite dieselbe Anzahl von Punkten).

Interessant ist, dass obwohl der Beweis der Euler-Identität kurz und elementar erscheint (siehe Abschnitt 3.3 auf der nächsten Seite), Euler, der so viele ungemein schwierigere Aufgaben in der Mathematik gelöst hat, Probleme mit dem Beweis hatte. Seine „Denkschrift“, die sich diesem Thema widmet und im Jahr 1751 unter dem Titel „Decouverte d’une loi tout extraordinaire des nombres par rapport a la somme de leurs diviseurs“ veröffentlicht wurde (der Leser wird bis zum Abschnitt 3.5 auf Seite 60 auf eine Erklärung dieses Titels warten müssen), enthielt keinerlei Beweise der Identität. Der folgende Abschnitt gibt einen relevanten Auszug aus der Denkschrift (dem Buch von G. Polya [62] entnommen) wider.

3.2 Was Euler über diese Identität schrieb

„Bei der Betrachtung der Partition der Zahlen untersuchte ich vor langer Zeit den Ausdruck

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots,$$

in dem das Produkt unendlich sein soll. Um zu sehen, was für eine Reihe sich daraus ergeben würde, multiplizierte ich tatsächlich eine große Anzahl von Faktoren aus und fand

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots.$$

Die Exponenten von x, die in der obigen Formel vorkommen, sind wieder dieselben wie vorhin.[1]; auch die Vorzeichen $+$ und $-$ tauchen nacheinander jeweils doppelt auf. Es genügt, diese Multiplikationen auszuführen und so lange weiter zu machen, wie es angemessen erscheint, um sich von der Richtigkeit dieser Reihe zu überzeugen. Noch habe ich keinen anderen Beleg dafür außer einer langen Induktion, die ich so weit ausgeführt habe, dass ich in keiner Weise an dem Gesetz zweifeln kann, das für die Bildung dieser Terme und ihrer Exponenten maßgeblich ist. Ich habe lange erfolglos nach einem strengen Beweis für die Gleichung zwischen der Reihe und dem obigen unendlichen Produkt $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ gesucht. Und ich habe diese Frage auch einigen meiner Freunde gestellt, deren Fähigkeiten in dieser Sache mir bekannt sind. Alle konnten mir nur bestätigen, dass die Umwandlung des Produkts in eine Reihe richtig sei, ohne aber irgendeinen Schlüssel für einen Beweise zutage fördern zu können."

3.3 Beweis der Euler-Identität

Fassen wir die Terme im Produkt

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

zusammen. Wir erhalten die folgende (unendliche) Summe der Terme:

$$(-1)^k x^{n_1+\cdots+n_k},\ k \geq 0,\ 0 < n_1 < \cdots < n_k.$$

Der Gesamtkoeffizient von x^n ergibt sich aus

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der Partitionen}\\ n = n_1+\cdots+n_k,\\ 0 < n_1 < \cdots < n_k\\ \text{mit geradem } k\end{array}} \quad - \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der Partitionen}\\ n = n_1+\cdots+n_k,\\ 0 < n_1 < \cdots < n_k\\ \text{mit ungeradem } k\end{array}}\ .$$

Wir wollen beweisen, dass die beiden Terme in den Kästen in der Regel gleich sind und sich in einigen Ausnahmefällen um 1 unterscheiden.

Gegeben sei eine Partition $n = n_1+\cdots+n_k$, $0 < n_1 < \cdots < n_k$. Mit $s = s(n_1,\ldots,n_k)$ bezeichnen wir die maximale Anzahl der n_i, von n_k nach links gezählt,

[1] Das ist ein Verweis auf einen vorangegangenen Teil der *Denkschrift*, der eine Erklärung für die Folgen $1,5,12,22,35,\ldots$ und $2,7,15,26,40,\ldots$ enthält.

die einen Block aufeinanderfolgender Zahlen bilden (also der Form $a, a+1, \dots, a+b$). Mit anderen Worten: a ist die größte Zahl, die die Relation $n_{k-s+1} = n_k - s + 1$ erfüllt. (Folglich gilt $1 \le s \le k$.)

Wir unterscheiden drei Arten von Partitionen $n = n_1 + \dots + n_k$, $0 < n_1 < \dots < n_k$.

Typ 1: $n_1 \le s$, ausgenommen der Fall $n_1 = s = k$.
Typ 2: $n_1 > s$, ausgenommen der Fall $n_1 = s + 1 = k + 1$.
Typ 3: die beiden ausgenommenen Fälle $n_1 = s = k$ oder $n_1 = s + 1 = k + 1$.

Es folgt eine eineindeutige Transformation der Partitionen der Zahl n vom Typ 1 in Partitionen der Zahl n vom Typ 2:

$$\begin{array}{llll}
n_1 n_2 \dots \overbrace{\dots\dots\dots n_{k-1} n_k}^{s\text{ aufeinanderfolgende Zahlen}} & \mapsto & n_2 \dots \overbrace{\dots\dots n_{k-1} n_k}^{s} & \mapsto n_2 \dots n_{k-n_1+1} \dots n_k \\
& & \big\downarrow \qquad \uparrow \dots \uparrow \quad \uparrow & \qquad\quad +1 \ \dots \ +1 \\
& & n_1 \longrightarrow \underbrace{1 \dots 1 \quad 1}_{n_1} &
\end{array}$$

Mit anderen Worten: Wir streichen die Zahl n_1 aus der Partition, dann zerlegen wir sie in n_1 Einsen, und anschließend addieren wir diese Einsen zu den n_1 letzten (größten) Termen der Partition (es ist wichtig, dass im Fall $s = n_1$ die Ungleichung $s < k$ gilt; anderenfalls müssten wir die Zahl n_1 streichen und anschließend 1 zu n_1 addieren, diese Zahl ist aber nicht mehr vorhanden). In Formeln bedeutet das:

$$(n_1, \dots, n_k) \mapsto (m_1, \dots, m_{k-1}),\ m_i = \begin{cases} n_{i+1}, & \text{für } i < k - n_1, \\ n_{i+1} + 1, & \text{für } i \ge k - n_1. \end{cases}$$

Beispiele:

$$13 = 1 + 3 + 4 + 5;\ (1,3,4,5) \mapsto (\cancel{1}, 3, 4, \underset{+1}{5}) = (3,4,6),$$
$$37 = 2 + 5 + 9 + 10 + 11;\ (2,5,9,10,11) \mapsto (\cancel{2}, 5, 9, \underset{+1}{10}, \underset{+1}{11}) = (5,9,11,12).$$

Die Partition $m_1, \dots, m_{k-1}$ ist vom Typ 2. In der Tat ist $m_1 \ge n_2 > n_1 = s(m_1, \dots, m_{k-1})$. Und gilt $m_1 = s(m_1, \dots, m_{k-1}) + 1 = (k-1) + 1$, so ist einerseits $m_1 = n_1 + 1$ und andererseits $n_1 + 1 = k$. Folglich ist $m_i = n_{i+1} + 1$ für $i \ge k - n_1 = 1$, und demzufolge ist $m_1 = n_2 + 1$; das ist wegen $n_2 > n_1$ aber unmöglich.

Die Tatsache, dass die obige Transformation eine eineindeutige Transformation ist, ergibt sich aus der Existenz einer inversen Transformation:

$$\begin{array}{llll}
m_1 \dots \overbrace{\dots\dots\dots m_{k-1}}^{s\text{ aufeinanderfolgende Zahlen}} & \mapsto & m_1 \dots \overbrace{\dots\dots m_{k-1}}^{s} & \mapsto s\, m_1 \dots m_{k-s} \dots m_{k-1} \\
& & \qquad -1 \cdots -1 & \qquad\qquad -1 \ \dots \ -1 \\
& & \big\uparrow \qquad \downarrow \ \dots \ \downarrow & \\
& & s \longleftarrow 1 \ \dots \ 1 &
\end{array}$$

(wir subtrahieren also 1 von jeder der s aufeinanderfolgenden Zahlen auf der rechten Seite, fassen diese Einsen in einer Zahl s zusammen und setzen diese Zahl s vor m_1).

In Formeln ausgedrückt, heißt das

$$(m_1,\dots,m_{k-1}) \mapsto (n_1,\dots,n_k),\ n_i = \begin{cases} s, & \text{für } i = 1, \\ m_{i-1}, & \text{für } 2 \le i \le k-s, \\ m_{i-1}-1, & \text{für } i > k-s. \end{cases}$$

Beispiele:

$$(3,4,6) \mapsto (3,4,\underset{-1}{6}) \mapsto (1,3,4,5),$$
$$(5,9,11,12) \mapsto (5,9,\underset{-1}{11},\underset{-1}{12}) \mapsto (2,5,9,10,11).$$

Die einander entsprechenden Terme

$$(-1)^k x^{n_1+\dots+n_k} \qquad \text{und} \qquad (-1)^{k-1} x^{m_1+\dots+m_{k-1}}$$

heben sich im Produkt $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ gegenseitig auf, und es bleiben nur Terme übrig, die Partitionen vom Typ 3 entsprechen. Das sind

$$k\,k+1\dots 2k-1 \qquad \text{und} \qquad k+1\,k+2\dots 2k,$$

und die entsprechenden Terme in $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ sind

$$(-1)^k x^{k+(k+1)+\dots+(2k-1)} = (-1)^k x^{\frac{k(3k-1)}{2}} \text{ und}$$
$$(-1)^k x^{(k+1)+(k+2)+\dots+2k} = (-1)^k x^{\frac{k(3k+1)}{2}}. \quad \square$$

Als nächstes werden wir zwei Anwendungen der Euler-Identität vorstellen.

3.4 Erste Anwendung: Die Partitionsfunktion

Der Begriff „Partition“, den wir als einen geläufigen deutschen Begriff verwendet haben, hat in der Kombinatorik eine genau festgelegte Bedeutung. Von nun an werden wir diesen Begriff traditionell verwenden: Als Partition einer Zahl n bezeichnen wir eine Folge ganzer Zahlen $n_1,\dots,n_k$ mit $n = n_1+\dots+n_k$ und $0 < n_1 \le \dots \le n_k$. Wir hoffen, dass diese Verschiebung der Terminologie keine Schwierigkeiten verursachen wird. Wir wollen aber noch erwähnen, dass die in Abschnitt 3.3 verwendeten Partitionen solche spezieller Art sind: Alle Summanden n_i sind verschieden.

Mit $\mathbf{p}(n)$ bezeichnen wir die Anzahl der Partitionen einer positiven ganzen Zahl n mit $n = n_1+\dots+n_k,\ k > 0,\ 0 < n_1 \le \dots \le n_k$. Wir berechnen $\mathbf{p}(n)$ für kleine n:

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}(1) = 1, \\ &\mathbf{p}(2) = 2 \ \ (2 = 1+1), \\ &\mathbf{p}(3) = 3 \ \ (3 = 1+2 = 1+1+1), \\ &\mathbf{p}(4) = 5 \ \ (4 = 1+3 = 2+2 = 1+1+2 = 1+1+1+1). \end{aligned}$$

Können Sie $\mathbf{p}(10)$ bestimmen? Es ist nicht schwer, obwohl Sie vielleicht nicht auf Anhieb auf das richtige Ergebnis kommen. Die Antwort lautet $\mathbf{p}(10) = 42$. Wie ist es mit $\mathbf{p}(20)$, $\mathbf{p}(50)$ oder $\mathbf{p}(100)$? Es stellt sich heraus, dass wir diese Zahlen relativ schnell bestimmen können, wenn wir die Euler-Identität verwenden.

Betrachten wir die Reihe

$$\mathbf{p}(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{p}(r)x^r.$$

Satz 3.1. $\varphi(x)\mathbf{p}(x) = 1$.

Beweis.

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots)$$

(folglich ist die Reihe $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ selbst ein Produkt von unendlich vielen Reihen). Was ist der Koeffizient von x^r im Produkt

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)\dots?$$

Wir müssen aus jedem Faktor einen Summanden nehmen (nur endlich viele von ihnen sollten ungleich 1 sein) und sie multiplizieren. Wir erhalten

$$x^{1\cdot k_1} \cdot x^{2\cdot k_2} \cdot \dots \cdot x^{m\cdot k_m} = x^{k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m}.$$

Wir wollen die Anzahl solcher Produkte mit $k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = r$ bestimmen, das heißt, die Anzahl der Darstellungen

$$r = k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k_1} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{k_2} + \cdots + \underbrace{m + \cdots + m}_{k_m},$$

und damit die Anzahl der Partitionen von r. Folglich ist der Koeffizient von x^r in $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ gleich $\mathbf{p}(r)$. □

Nun verwenden wir die Euler-Identität:

$$(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} \dots)(1 + \mathbf{p}(1)x + \mathbf{p}(2)x^2 + \mathbf{p}(3)x^3 + \dots) = 1;$$

das heißt, der Koeffizient von x^n mit beliebigem $n > 0$ in diesem Produkt ist gleich null. Daraus erhalten wir eine Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}(1) - 1 = 0,\\
&\mathbf{p}(2) - \mathbf{p}(1) - 1 = 0,\\
&\mathbf{p}(3) - \mathbf{p}(2) - \mathbf{p}(1) = 0,\\
&\mathbf{p}(4) - \mathbf{p}(3) - \mathbf{p}(2) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}(5)-\mathbf{p}(4)-\mathbf{p}(3)+1=0,\\
&\mathbf{p}(6)-\mathbf{p}(5)-\mathbf{p}(4)+\mathbf{p}(1)=0,\\
&\mathbf{p}(7)-\mathbf{p}(6)-\mathbf{p}(5)+\mathbf{p}(2)+1=0,\\
&\mathbf{p}(8)-\mathbf{p}(7)-\mathbf{p}(6)+\mathbf{p}(3)+\mathbf{p}(1)=0,
\end{aligned}$$

oder

$$\mathbf{p}(n)=\mathbf{p}(n-1)+\mathbf{p}(n-2)-\mathbf{p}(n-5)-\mathbf{p}(n-7)+\mathbf{p}(n-12)+\mathbf{p}(n-15)-\dots$$

wobei wir $\mathbf{p}(0)$ als 1 und $\mathbf{p}(m)$ mit $m<0$ als 0 zählen. Dies können wir als ein Hilfsmittel für eine induktive Berechnung der Zahlen $\mathbf{p}(n)$ verwenden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(5)&=\mathbf{p}(4)+\mathbf{p}(3)-1=5+3-1=7,\\
\mathbf{p}(6)&=\mathbf{p}(5)+\mathbf{p}(4)-\mathbf{p}(1)=7+5-1=11,\\
\mathbf{p}(7)&=\mathbf{p}(6)+\mathbf{p}(5)-\mathbf{p}(2)-1=11+7-2-1=15,\\
\mathbf{p}(8)&=\mathbf{p}(7)+\mathbf{p}(6)-\mathbf{p}(3)-\mathbf{p}(1)=15+11-3-1=22,\\
\mathbf{p}(9)&=\mathbf{p}(8)+\mathbf{p}(7)-\mathbf{p}(4)-\mathbf{p}(2)=22+15-5-2=30,\\
\mathbf{p}(10)&=\mathbf{p}(9)+\mathbf{p}(8)-\mathbf{p}(5)-\mathbf{p}(3)=30+22-7-3=42,
\end{aligned}$$

und weitere Berechnungen ergeben $\mathbf{p}(20)=627$, $\mathbf{p}(50)=204\,226$, $\mathbf{p}(100)=190\,569\,791$.

Erwähnenswert ist, dass unsere rekursive Formel für die Funktion $\mathbf{p}$ dazu verwendet werden kann, eine sehr einfach Maschine zur Berechnung der Werte dieser Funktion zu konstruieren. Diese Maschine zeigt Abbildung 3.2 auf der nächsten Seite. Nehmen Sie ein kariertes Blatt Papier und schneiden Sie einen langen Streifen ab, wie auf der linken Seite von Abbildung 3.2 auf der nächsten Seite dargestellt (je länger Ihr Streifen ist, umso mehr Werte der Funktion $\mathbf{p}$ werden Sie damit berechnen können). In das obere Kästchen des Streifens zeichnen Sie einen Pfeil nach rechts. Dann schreiben Sie in die Kästchen mit den Nummern 1, 2, 12, 15, 35, 40,… ein Pluszeichen (vom Pfeil aus gezählt) und ein Minuszeichen in die Kästchen mit den Nummern 5, 7, 22, 26,… In die unterste linke Ecke des karierten Blattes schreiben Sie eine 1 (das ist $\mathbf{p}(0)$). Legen Sie die rechte Kante Ihres Streifens so an die linke Kante des karierten Blattes, dass der Pfeil auf diese 1 zeigt. Schieben Sie dann den Streifen Kästchen für Kästchen nach oben. Jedes Mal, wenn der Pfeil in ein leeres Kästchen (in der linken Spalte des Papiers) zeigt, schreiben Sie in dieses Kästchen die Summe der Zahlen an den Pluszeichen minus die Summe der Zahlen an den Minuszeichen. Die aufgeschriebenen Zahlen sind die Funktionswerte von $\mathbf{p}$. Diese Prozedur ist in Abbildung 3.2 auf der nächsten Seite bis zum Wert $\mathbf{p}(12)$ dargestellt.

Schließlich geben wir eine asymptotische Formel für $\mathbf{p}(n)$ nach Rademacher an:

$$\mathbf{p}(n)\sim\frac{1}{4n\sqrt{3}}\,e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}}.$$

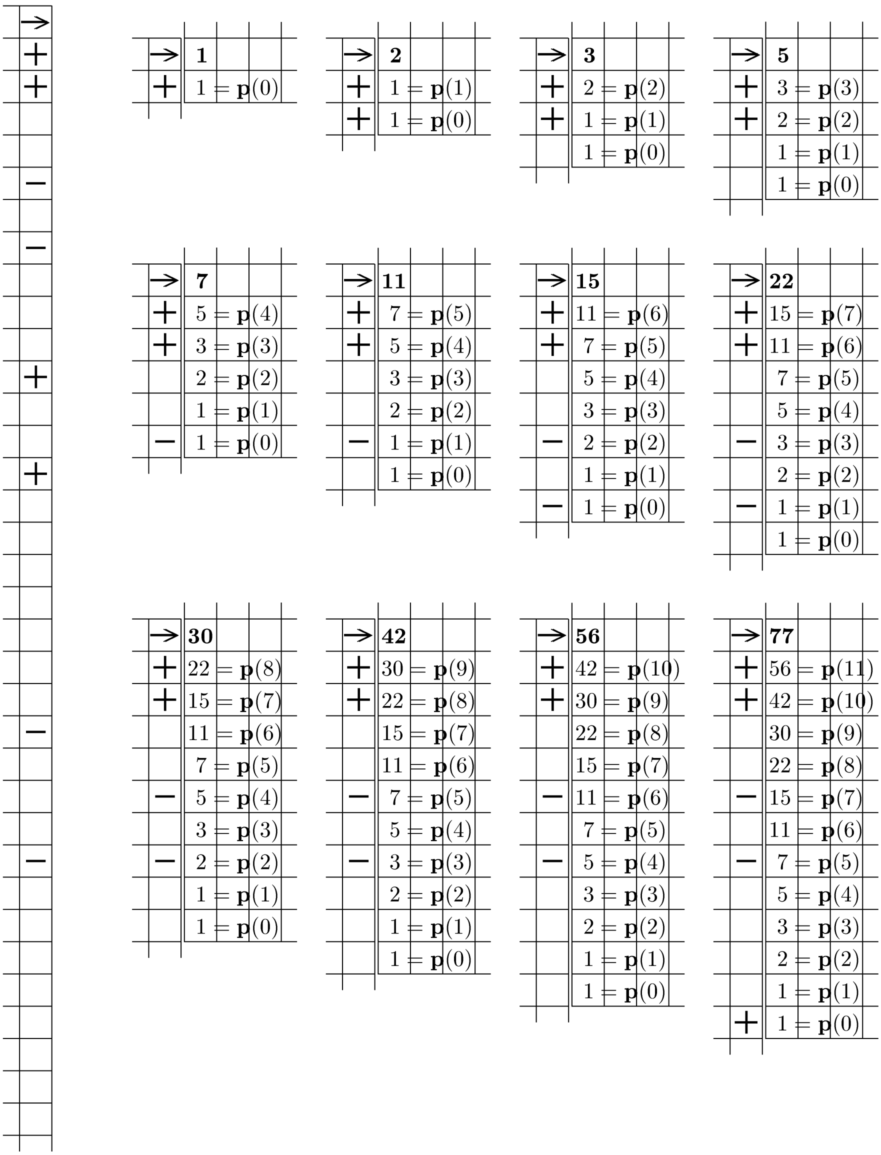


Abb. 3.2 Eine Maschine zur Berechnung von $\mathbf{p}(n)$.

Das Symbol $\sim$ bedeutet, dass das Verhältnis aus dem Ausdruck auf der rechten Seite zu $\mathbf{p}(n)$ für n gegen unendlich gegen 1 geht. Unter anderem offenbart diese Formel, dass $\mathbf{p}(n)$ eine Eigenschaft besitzt, die für Funktionen, die üblicherweise in der Mathematik vorkommen, selten ist: Die Funktion wächst schneller als jedes Polynom, aber langsamer als jede Exponentialfunktion c^n.

3.5 Zweite Anwendung: Die Summe der Teiler

Diese Anwendung gab Eulers *Denkschrift* den Namen. In diesem Abschnitt folgen wir Eulers Überlegungen.

Sei n eine positive ganze Zahl. Mit $\mathbf{d}(n)$ bezeichnen wir die Summe der Teiler von n. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(4) &= 1+2+4=7,\\ \mathbf{d}(1000) &= 1+2+4+5+8+10+20+25+40+50+100+125\\ &\qquad +200+250+500+1000=2340,\\ \mathbf{d}(1001) &= 1+7+11+13+77+91+143+1001=1344.\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den Zahlen $\mathbf{p}(n)$ lassen sich die Zahlen $\mathbf{d}(n)$ leicht berechnen. Für sie gibt es eine einfache, explizite Formel. Und zwar: Ist $n = 2^{k_2}3^{k_3}\dots p^{k_p}$ eine Primfaktorzerlegung von p, so gilt

$$\mathbf{d}(n) = (2^{k_2+1}-1)\cdot\frac{3^{k_3+1}-1}{2}\cdots\frac{p^{k_p+1}-1}{p-1}$$

(siehe Übung 3.3 auf Seite 72). Interessant ist darüber hinaus, dass eine Rekursionsformel für die Zahlen $\mathbf{d}(n)$ existiert, die der Formel für $\mathbf{p}(n)$ aus Abschnitt 3.4 auf Seite 56 sehr ähnelt. Sie verknüpft die Zahl $\mathbf{d}(n)$ mit den scheinbar unzusammenhängenden Zahlen $\mathbf{d}(n-1),\mathbf{d}(n-2),\mathbf{d}(n-5),\dots$. (Für Euler war das ein Schritt zum Verständnis der Natur der Verteilung der Primzahlen).

Sei

$$\mathbf{d}(x) = \sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{d}(r)x^r = x+3x^2+4x^3+7x^4+6x^5+12x^6+\dots.$$

Satz 3.2. $\varphi(x)\mathbf{d}(x)+x\varphi'(x)=0.$

Hier bedeutet $\varphi'(x)$ die Ableitung von $\varphi(x)$. Folglich gilt

$$x\varphi'(x) = -x-2x^2+5x^5+7x^7-12x^{12}-15x^{15}+\dots.$$

Beweis des Satzes. Betrachten wir die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}n(x^n+x^{2n}+x^{3n}+\dots).$$

Sind $d_1,d_2,\dots,d_m$ Teiler von r (einschließlich 1 und r), so erscheint x^r in der letzten Summe als $d_i\cdot x^{d_i\cdot\frac{r}{d_i}}$ für alle d_i, und der Gesamtkoeffizient von x^r ist $d_1+d_2+\dots+d_m=\mathbf{d}(r)$. Folglich ist die Summe $\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{d}(r)x^r=\mathbf{d}(x)$, also

$$\mathbf{d}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}.$$

Es gilt aber

$$\frac{nx^n}{1-x^n} = -x \cdot [\ln(1-x^n)]'.$$

Folglich muss

$$\mathbf{d}(x) = -x\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-x^n)\right)' = -x\left(\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right)'$$

$$= -x \cdot [\ln\varphi(x)]' = -\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

sein, was $\mathbf{d}(x)\varphi(x) + x\varphi'(x) = 0$ beweist. □

Setzen wir den Koeffizienten von x^n, $n > 0$ auf der linken Seite der letzten Gleichung gleich null, so stellen wir fest:

$$\mathbf{d}(n) - \mathbf{d}(n-1) - \mathbf{d}(n-2) + \mathbf{d}(n-5) + \mathbf{d}(n-7) - \dots$$
$$= \begin{cases} -(-1)^m \dfrac{3m^2 \pm m}{2}, & \text{für } n = \dfrac{3m^2 \pm m}{2}, \\ 0, & \text{wenn } n \text{ keine Fünfeckzahl ist.} \end{cases}$$

Man formuliert dies besser in der folgenden Form:

$$\mathbf{d}(n) = \mathbf{d}(n-1) + \mathbf{d}(n-2) - \mathbf{d}(n-5) - \mathbf{d}(n-7) + \mathbf{d}(n-12) + \mathbf{d}(n-15) - \dots,$$

wobei $\mathbf{d}(k)$ mit $k < 0$ als 0 gezählt wird und $\mathbf{d}(0)$ (wenn es in dieser Formel vorkommt) als n.

3.6 Die Identitäten von Gauß und Jacobi

Etwa 70 Jahre nach Eulers Entdeckung bewies ein anderer großartiger Mathematiker, Carl Friedrich Gauß, dass die *dritte Potenz* der Euler-Funktion auf eine Reihe führt, die noch bemerkenswerter als die Euler-Funktion ist:

$$\varphi(x)^3 = (1-x)^3(1-x^2)^3(1-x^3)^3\cdots = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15}\dots$$

oder

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)x^{\frac{r(r+1)}{2}}.$$

Noch weitaus bemerkenswerter erscheint die Gauß-Identität, wenn wir bedenken, dass die *zweite Potenz* der Euler-Funktion, zumindest auf dem ersten Blick, keine interessanten Eigenschaften aufzuweisen scheint:

$$\varphi(x)^2 = 1 - 2x - x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 - 2x^6 - 2x^8 - 2x^9 + x^{10} \ldots .$$

Für die Gauß-Identität sind etliche Beweise bekannt. Sie fallen in sehr verschiedene Teilgebiete der Mathematik, darunter homologische Algebra, komplexe Analysis und hyperbolische Geometrie (diese Tatsache kann an sich als ein Hinweis darauf angesehen werden, dass das Resultat sehr tiefgreifend ist). Es existiert auch ein elementarer kombinatorischer Beweis (den wir in Abschnitt 3.7 auf der nächsten Seite diskutieren werden). Die meisten dieser Beweise (einschließlich des Beweises aus Abschnitt 3.7) liefern sogar ein strengeres Resultat: die Jacobi-Tripelprodukt-Identität:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+y^{-1}z^{2n-1})(1+yz^{2n-1})(1-z^{2n}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y^r z^{r^2}. \tag{3.1}$$

Vor ihrem Beweis werden wir zeigen, dass sich daraus die Gauß-Identität ergibt.

Herleitung der Gauß-Identität aus der Jacobi-Identität. Wir leiten die beiden Seiten der Jacobi-Identität (3.1) nach z ab, setzen $y = -z$ und dann $z^2 = x$.

Um ein Produkt abzuleiten (auch wenn es unendlich ist), müssen wir jeweils die Ableitung eines Faktors bilden und den Rest unverändert lassen. Anschließend müssen wir alle entstandenen Produkte addieren:

$$(f_1 f_2 f_3 \ldots)' = f_1' f_2 f_3 \cdots + f_1 f_2' f_3 \cdots + f_1 f_2 f_3' \cdots + \ldots .$$

Allerdings verschwindet der erste Faktor $(1+y^{-1}z)$ auf der linken Seite der Jacobi-Identität durch die Substitution $y = -z$. Von allen Summanden in der Ableitung überlebt diese Substitution daher nur einer, und das ist

$$(1+y^{-1}z)_z'(1+yz)(1-z^2)\prod_{n=2}^{\infty}(1+y^{-1}z^{2n-1})(1+yz^{2n-1})(1-z^{2n}).$$

Nach der Substitution $y = -z$ erhalten wir (wegen $(1+y^{-1}z)_z' = y^{-1}$)

$$-z^{-1}(1-z^2)^2\prod_{n=2}^{\infty}(1-z^{2n-2})(1-z^{2n})^2 = -z^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{2n})^3.$$

Aus der gesamten Identität (3.1) wird (wegen $(y^r z^{r^2})_z' = r^2 y^r z^{r^2-1}$)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{2n})^3 = -z\sum_{r=-\infty}^{\infty} r^2(-1)^r z^r z^{r^2-1} = \sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^{r+1} r^2 z^{r^2+r},$$

woraus nach der Substitution $z^2 = x$

$$\varphi(x)^3 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^{r+1} r^2 x^{\frac{r^2+r}{2}} \tag{3.2}$$

wird. Es bleibt festzustellen, dass der r-te Term und der $(-r-1)$-te Term auf der rechten Seite von (3.2) gleichartig sind: $\dfrac{(-r-1)^2+(-r-1)}{2} = \dfrac{r^2+r}{2}$. Also gilt

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^{r+1} r^2 x^{\frac{r^2+r}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} [(-1)^{r+1} r^2 + (-1)^{-r}(-r-1)^2] x^{\frac{r^2+r}{2}},$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) x^{\frac{r^2+r}{2}},$$

was zu beweisen war. □

Abschließend bemerken wir, dass man die Jacobi-Identität dazu verwenden kann, andere Identitäten in einer Variablen zu beweisen. Wenn wir zum Beispiel in der Jacobi-Identität (3.1) einfach $y = -1$ setzen (und dann z durch x ersetzen), erhalten wir die bemerkenswerte Identität

$$(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^4)\cdots = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r x^{r^2} = 1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r x^{r^2},$$

die auch Gauß bekannt war. Übrigens ist die linke Seite dieser Identität $\dfrac{\varphi(x)^2}{\varphi(x^2)}$; wir können daraus also auch eine Formel für $\varphi(x)^2$ herleiten:

$$\varphi(x)^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r x^{r^2} \cdot \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s x^{3s^2+s},$$

die jedoch nicht so bemerkenswert ist wie die Formeln für $\varphi(x)$ und $\varphi(x)^3$.

Für eine weitere Identität, in der $\varphi(x)$ vorkommt und die sich aus der Jacobi-Identität ergibt, verweisen wir auf Übung 3.4 auf Seite 72.

3.7 Beweis der Jacobi-Identität

Dieser Beweis geht auf Zinovy Leibenzon zurück; wir folgen seinem Artikel [50] und verwenden seine Terminologie.

Schreiben wir die Jacobi-Identität als

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+yz^{2n-1})(1+y^{-1}z^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{2n})^{-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} y^r z^{r^2}$$
$$= \mathbf{p}(z^2) \sum_{r=-\infty}^{\infty} y^r z^{r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n) z^{2n} \sum_{r=-\infty}^{\infty} y^r z^{r^2}$$

und vergleichen wir die Koeffizienten von $y^r z^{2n+r^2}$. Auf der rechten Seite ist der Koeffizient offensichtlich $\mathbf{p}(n)$. Auf der linken Seite kann $y^r x^{2n+r^2}$ als ein Produkt

$$yz^{2\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot yz^{2\alpha_s-1}\cdot y^{-1}s^{2\beta_1-1}\cdot\ldots\cdot y^{-1}z^{2\beta_t-1}$$

vorkommen, wobei $0<\alpha_1<\cdots<\alpha_s,\ 0<\beta_1<\cdots<\beta_t,\ s-t=r$ ist und

$$\sum_{i=1}^{s}(2\alpha_i-1)+\sum_{j=1}^{t}(2\beta_j-1)=2n+r^2$$

gilt. Daher ist der Koeffizient von $y^r x^{2n+r^2}$ die Anzahl der Mengen $((\alpha_1,\ldots,\alpha_s),(\beta_1,\ldots,\beta_t))$ mit den besagten Eigenschaften. Diese Anzahl bezeichnen wir mit $\mathbf{q}(n,r)$. Um die Jacobi-Identität zu beweisen, müssen wir das Folgende beweisen.

Proposition 3.1. $\mathbf{q}(n,r)=\mathbf{p}(n)$ *(insbesondere hängt* $\mathbf{q}(n,r)$ *nicht von r ab).*

Für den Beweis von Proposition 3.1 brauchen wir folgende Konstruktion.

Wenn wir von einer *Kette* sprechen, dann meinen wir eine auf beiden Seiten unendliche Folge von zwei verschiedenen Symbolen: $\bigcirc$ (*Kreise*) und $|$ (*Striche*), sodass links von einer Stelle nur Kreise vorkommen und rechts von einer Stelle nur Striche. Zwei Beispiele:

$$\begin{array}{l}\ldots\ldots\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ |\ |\ \bigcirc\ |\ \bigcirc\ |\ \bigcirc\ \bigcirc\ |\ |\ |\ |\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ \bigcirc\ \bigcirc\ |\ |\ |\ |\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ |\ \bigcirc\ |\ |\ |\ |\ \ldots\ldots\end{array}$$

Ketten, die durch Verschiebung auseinander hervorgehen, unterscheiden wir nicht voneinander.

Die *Höhe* $h(A)$ einer Kette A ist als die Anzahl der *Inversionen*, also der Paare von Symbolen (nicht notwendigerweise aufeinanderfolgend), definiert, von denen das linke ein Kreis und das rechte ein Strich ist. In den beiden obigen Beispielen sind die Höhen 13 und 17.

Wir werden annehmen, dass der Abstand zwischen zwei beliebigen benachbarten Symbolen 2 ist und dass sich zwischen ihnen, im Abstand 1, eine *Lücke* befindet. Die Lücken einer gegebenen Kette können natürlich nummeriert werden: Wir sagen, dass eine Lücke T den Index r hat, wenn die Anzahl der Striche links von T minus die Anzahl der Kreise rechts von T gleich r ist. Es ist klar, dass sich, wenn wir uns von links nach rechts bewegen, der Index der Lücke um 1 erhöht. Ein Beispiel:

$$\ldots\cdots\bigcirc^{-6}\bigcirc^{-5}\bigcirc^{-4}|^{-3}|^{-2}\bigcirc^{-1}|^{0}\bigcirc^{1}|^{2}\bigcirc^{3}\bigcirc^{4}|^{5}|^{6}|\ldots\ldots$$

Beweis von Proposition 3.1. Wir werden die Anzahl der Ketten der Höhe n auf zwei Wegen berechnen.

Erster Weg: Gegeben sei eine Kette A der Höhe n. Mit n_i bezeichnen wir die Anzahl der Kreise rechts des i-ten Strichs von links. Für ein hinreichend großes i gilt offensichtlich $n_1\geq n_2\geq\ldots$; $n_i=0$; und es ist $n_1+n_2+\cdots=n$. Die Zahlen $n_1,n_2,\ldots$ bestimmen die Kette und können beliebige Werte annehmen (wenn sie die oben gestellte Bedingung erfüllen). Daher ist die Anzahl der Ketten der Höhe n gleich $\mathbf{p}(n)$.

Zweiter Weg: Wir halten die ganze Zahl r fest und betrachten die Lücke T mit der Nummer r. Links von T sollen sich s Striche befinden, und rechts von T sollen sich t Kreise befinden; folglich ist $s-t=r$. Die Abstände der Striche links von T zu T seien (in aufsteigender Reihenfolge) $2\alpha_1-1,\dots,2\alpha_s-1$ und die Abstände der Kreise rechts von T zu T seien (in aufsteigender Reihenfolge) $2\beta_1-1,\dots,2\beta_t-1$. Ein Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & \alpha_4 & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & & \alpha_1 & \beta_1 & & & \beta_2 & & & \\
 & & & & 8 & & & & 4 & 3 & & 1 & 1 & & & 4 & & & \\
\cdots & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & | & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & | & | & \bigcirc & |_T & \bigcirc & | & | & \bigcirc & | & | & \cdots
\end{array}$$

Die Zahlen $s,t,\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t$ bestimmen die Kette. Beweisen wir

$$2n+r^2=\sum_{i=1}^{s}(2\alpha_i-1)+\sum_{j=1}^{t}(2\beta_j-1).$$

In der Kette A gibt es drei Arten von Inversionen: (1) sowohl der Kreis als auch der Strich sind links von T; (2) sowohl der Kreis als auch der Strich sind rechts von T und (3) der Kreis ist rechts von T und der Strich ist links von T. Zwischen einem Strich im Abstand $2\alpha_i-1$ links von T und T gibt es (einschließlich dieses Strichs) α_i Symbole, von denen i Striche und α_i-i Kreise sind; daher ist dieser Strich an α_i-i Inversionen der ersten Art beteiligt, und die Anzahl der Inversionen der ersten Art ist $\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i-i)$. Analog dazu gibt es $\sum_{j=1}^{t}(\beta_j-j)$ Inversionen der zweiten Art, und offensichtlich ist die Anzahl der Inversionen der dritten Art st. Damit ist

$$\begin{aligned}
n&=\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i-i)+\sum_{j=1}^{t}(\beta_j-j)+st\\
&=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i+\sum_{j=1}^{t}\beta_j-\frac{s(s+1)}{2}+st-\frac{t(t+1)}{2}\\
&=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i+\sum_{j=1}^{t}\beta_j-\frac{s^2+s-2st+t^2+t}{2}\\
&=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i+\sum_{j=1}^{t}\beta_j-\frac{r^2+s+t}{2},
\end{aligned}$$

$$2n+r^2=2\sum_{i=1}^{s}\alpha_i+2\sum_{j=1}^{t}\beta_j-s-t=\sum_{i=1}^{s}(2\alpha_i-1)+\sum_{j=1}^{t}(2\beta_j-1).$$

Wir sehen, dass die Anzahl der Ketten der Höhe n gleich $\mathbf{q}(n,r)$ ist.

Somit ist $\mathbf{p}(n)=\mathbf{q}(n,r)$, was Proposition 3.1 und die Jacobi-Identität beweist. □

3.8 Potenzen der Euler-Funktion

Bis jetzt wissen wir, wie die Reihen für $\varphi(x)$ und $\varphi(x)^3$ aussehen, aber für $\varphi(x)^2$ haben wir nichts vergleichbar Gutes. Wie verhält es sich mit den Reihen $\varphi(x)^4, \varphi(x)^5$, usw.? Mit anderen Worten: Für welche n existiert eine Formel für die Koeffizienten der Reihe $\varphi(x)^n$? Um diese saloppe (das heißt, nicht streng formulierte) Frage zu beantworten, werden wir das folgende halb saloppe Kriterium verwenden. Wenn es für ein n unter den Koeffizienten der Reihe $\varphi(x)^n$ viele Nullen gibt, ist das ein Anhaltspunkt dafür, dass es für $\varphi(x)^n$ eine Formel gibt, die denen von Euler und Gauß ähnelt. (Jedoch kann die Tatsache, dass es nur ein paar Nullen oder überhaupt keine Nullen gibt, nicht als eindeutiger Hinweis darauf betrachtet werden, dass keine Formel existiert.) Es ist eine Sache eines einfachen Computerprogramms, die Anzahl der Nullen unter den, sagen wir, ersten 500 Koeffizienten von $\varphi(x)^n$ zu bestimmen. Diese Anzahl bezeichnen wir mit $c(n)$, und es folgen die Werte von $c(n)$ für $n \leq 35$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11-13	14	15	16-25	26	27-35
$c(n)$	464	243	469	158	0	212	0	250	0	151	0	172	2	0	80	0

Wir können Folgendes beobachten. Für $n = 1,3$ gibt es sehr viele Nullen (das wissen wir bereits); für $n = 2,4,6,8,10,14,26$ ist die Anzahl der Nullen erheblich; für $n = 15$ gibt es zwei Nullen (was nicht als ernsthafter Hinweis für irgendetwas angesehen werden kann)[2]; für $n = 5,7,9,11-13,16-25,27-35$ gibt es überhaupt keine Nullen. Wir sollten über die erheblich Anzahl von Nullen für $n = 2,4,6$ nicht überrascht sein: Die Reihen für $\varphi(x)$ und $\varphi(x)^3$ sind so dünn besetzt, dass ihren Produkten $\varphi(x)^2 = \varphi(x) \cdot \varphi(x),\ \varphi(x)^4 = \varphi(x) \cdot \varphi(x)^3,\ \varphi(x)^6 = \varphi(x)^3 \cdot \varphi(x)^3$ einige Potenzen von x abhanden kommen können, noch bevor wir gleichartige Terme zusammenfassen. Zum Beispiel können die Zahlen $11,18,21$ (und viele weitere) nicht als Summen von Zahlenpaaren der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ dargestellt werden. Und aus diesem Grund gibt es in der Reihe für $\varphi(x)^2$ keine Terme x^{11}, x^{18}, x^{21}. Aus einem ähnlichen Grund gibt es keine Terme x^9, x^{14}, x^{19} in der Reihe für $\varphi(x)^4$, und es gibt keine Terme x^5, x^8, x^{14} in der Reihe für $\varphi(x)^6$. Warum gibt es aber so viele Nullen in den Reihen für $\varphi(x)^8, \varphi(x)^{10}, \varphi(x)^{14}$ und $\varphi(x)^{26}$?

Es stellt sich heraus, dass es für diese Potenzen der Euler-Funktion Formeln gibt, die zwar nicht so einfach wie die Formeln von Euler und Gauß sind, aber auch tiefgreifend und schön. (Es gibt auch für einige andere Potenzen der Euler-Funktion

[2] Obwohl eine Formel für $\varphi(x)^{15}$ existiert (siehe später).

Formeln, doch das spiegelt sich in unserer Tabelle nicht wider.) Zur Illustration geben wir eine Formel für $\varphi(x)^8$ an, die auf Felix Klein zurückgeht:

$$\varphi(x)^8 = \sum \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{2}(3klm - kl - km - lm)\right] x^{-(kl+km+lm)},$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über alle Tripel (k,l,m) von ganzen Zahlen mit $k+l+m=1$ läuft. Aus der Formel kann man Folgendes ablesen: Kann eine Zahl r nicht als $-(kl+km+lm)$ mit $k+l+m=1$ dargestellt werden, so enthält die Reihe für $\varphi(x)^8$ keinen Term x^r. Beispielsweise enthält sie keine Terme x^r, wenn $r = 4s+3$ (mit ganzzahligem s) oder $r = 13, 18, 28, 29$ ist (siehe Übung 3.5 auf Seite 72).

All dem entnehmen wir, dass es einige „privilegierte Exponenten“ n gibt, für die eine fassbare Formel existiert. Das Rätsel der privilegierten Exponenten wurde im Jahre 1972 von Ian MacDonald (siehe Abschnitt 3.9, der einen Teil seiner Resultate wiedergibt), gelöst. Ein Bericht über diese Entdeckung findet sich in einem emotional verfassten Artikel von F. Dyson [26]. Über Dyson und seinen Artikel seien ein paar Worte gesagt. Freeman Dyson ist einer der prominentesten Physiker unserer Zeit. Seine Karriere begann er als Mathematiker, und er schrieb einige bekannte Arbeiten über klassische Kombinatorik und Zahlentheorie. Mit seinem Artikel wollte er aufzeigen, wie die fehlende Kommunikation zwischen Physikern und Mathematikern zu einer katastrophalen Verzögerung einiger wesentlicher Entdeckungen in beiden Disziplinen führte. Es folgt ein Auszug aus Dysons Artikel, der sich auf unser Thema bezieht.

3.9 Dysons Geschichte

„Ich beginne mit einer belanglosen Episode aus meiner eigenen Erfahrung, die lebhaft illustriert, wie die Gewohnheit der Spezialisierung dazu führen kann, dass wir Gelegenheiten verpassen. Diese Episode hat etwas mit einer kürzlich erschienen und wunderbaren Arbeit von Ian MacDonald zu tun, die sich mit den Eigenschaften affiner Wurzelsysteme aus der klassischen Lie-Algebra beschäftigt.

Ich begann mein Leben als Zahlentheoretiker, und während der Anfangsjahre meines Studiums in Cambridge saß ich vor der bereits damals legendären Persönlichkeit G. H. Hardy. Selbst einem Studienanfänger war damals klar, dass Zahlentheorie im Stil von Hardy und Ramanujan altmodisch war und keine große und glorreiche Zukunft vor sich hatte. Sogar Hardy selbst hatte in einer veröffentlichten Vorlesung über die τ-Funktion von Ramanujan dieses Thema als „eines der Rückstandsgebiete der Mathematik“ bezeichnet. Die τ-Funktion ist als der Koeffizient in der Modulform

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^{n-1} = \varphi(x)^{24} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)^{24} \tag{3.3}$$

definiert. Ramanujan entdeckte etliche bemerkenswerte arithmetische Eigenschaften von $\tau(n)$. Der Beweis und die Verallgemeinerung dieser Eigenschaften durch Mordell, Hecke und andere spielten bei der Entwicklung der Theorie von Modulformen eine wesentliche Rolle. Aber die τ-Funktion selbst ist fernab des mathematischen Mainstreams ein Rückstandsgebiet geblieben, worin sich Amateure nach Herzenslust versuchen können, ohne Konkurrenz von Profis fürchten zu müssen.[3] Noch lange, nachdem ich zu einem Physiker geworden war, hielt ich eine sentimentale Bindung an die τ-Funktion aufrecht, und als Entspannung von der ernstzunehmenden Angelegenheit der Physik wollte ich ab und zu auf Ramanujans Artikel zurückkommen und über die vielen faszinierenden Probleme nachdenken, die er ungelöst gelassen hatte. Vor vier Jahren fand ich während einer dieser Erholungspausen eine neue Formel für die τ-Funktion, die so elegant ist, dass es ziemlich überrascht, dass Ramanujan nicht selbst darauf gekommen ist. Die Formel lautet

$$\tau(n) = \sum \frac{\prod_{1\leq i<j\leq 5}(a_i - a_j)}{1!2!3!4!}, \tag{3.4}$$

wobei über alle Mengen ganzer Zahlen $a_1, \ldots, a_5$ mit $a_i \equiv i \bmod 5$, $a_1 + \cdots + a_5 = 0, a_1^2 + \cdots + a_5^2 = 10n^2$ summiert wird. Das kann nach Gleichung (3.3) auf der vorherigen Seite auch als eine Formel für die 24-te Potenz der Euler-Funktion φ geschrieben werden. Darauf gekommen bin ich durch einen kurzen Artikel von Winquist, der eine ähnliche Formel für die 10-te Potenz von φ entdeckte. Winquist war zufällig auch ein Physiker, der sich in seiner Freitzeit in altmodischer Zahlentheorie versuchte.

Während ich den Identitäten mit meinen umständlichen Methoden weiter nachging, stellte ich fest, dass eine Formel von derselben Eleganz wie (3.4) für alle d-ten Potenzen von φ existiert, für die d aus der folgenden Reihe ganzer Zahlen stammt:

$$d = 3, 8, 10, 14, 15, 21, 24, 26, 28, 35, 36, \ldots. \tag{3.5}$$

Tatsächlich entdeckt wurde der Fall $d = 3$ von Jacobi, der Fall $d = 8$ von Klein und Fricke und die Fälle $d = 14, 26$ von Atkin. An dieser Stelle kam ich nicht weiter. Ich starrte eine Weile auf diese seltsame Liste von Zahlen aus Gleichung (3.5). Da ich einstweilen ein Zahlentheoretiker war, ergaben die Zahlen für mich keinen Sinn. Mein Verstand war so wohl-strukturiert, dass ich mich nicht daran erinnerte, dass mir dieselben Zahlen in meinem Leben als Physiker oft begegnet waren. Wären die Zahlen im Zusammenhang mit einem physikalischen Problem aufgetaucht, hätte ich sie bestimmt als die Dimensionen endlich-dimensionaler einfacher Lie-Algebren erkannt. Mit Ausnahme der 26. Warum die Zahl 26 vorkommt, weiß ich immer noch nicht.[4] So verpasste ich die Gelegenheit, einen tieferen Zusammenhang zwischen

[3] In einer Fußnote zu einer russischen Übersetzung von Dysons Artikel (1980 veröffentlicht) bemerkte der Übersetzer, dass es ihm schwergefallen sei, sich auch nur vorzustellen, dass es jemals so sein könnte.

[4] Das wollen wir kurz erklären. Die Drehung einer Ebene um einen Punkt hängt von einem Parameter ab: dem Drehwinkel. Drehungen des dreidimensionalen Raumes hängen von drei Parametern ab: dem Längen- und Breitengrad der Drehachse und dem Drehwinkel. Allgemein hängen Drehun-

Modulformen und Lie-Algebren zu entdecken. Und das nur, weil der Zahlentheoretiker Dyson und der Physiker Dyson nicht miteinander sprachen.

Diese Geschichte hat ein gutes Ende. Ohne dass ich es wusste, hatte der englische Geodät Ian MacDonald dieselben Formeln als Spezialfall einer viel allgemeineren Theorie entdeckt. In seiner Theorie kamen die Lie-Algebren von Anfang an vor, überraschend ergab sich der Zusammenhang mit Modulformen. Wie dem auch sei, MacDonald stellte den Zusammenhang her und ergriff so die Gelegenheit, die ich verpasste. Es war zufällig auch so, dass MacDonald am Institute for Advanced Study in Princeton war, während wir beide an diesem Problem arbeiteten. Da wir Töchter in derselben Schulklasse hatten, sahen wir uns während seines Jahres in Princeton ab und zu. Da er aber ein Mathematiker und ich ein Physiker war, diskutierten wir nicht über unsere Arbeit. Die Tatsache, dass wir über dasselbe Problem nachdachten, während wir so eng beieinander saßen, kam erst heraus, nachdem er nach Oxford zurückgegangen war. Das war eine weitere verpasste Gelegenheit, wenn auch keine tragische, denn MacDonald klärte das gesamte Thema ganz ohne meine Hilfe.“

3.10 Die MacDonald-Identitäten

Wir beenden diese Vorlesung mit einer schier endlosen Sammlung von Identitäten, die einen erheblichen Teil der Arbeit von MacDonald umfassen, die von Dyson erwähnt wurde. Die erste Formel verallgemeinert die Jacobi-Identität (was dem Fall $n = 2$ entspricht):

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[(1-x_1^k\dots x_n^k)^{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}\left(1-\frac{x_1^k\dots x_n^k}{x_i\dots x_{j-1}}\right)\left(1-\frac{x_1^k\dots x_n^k}{x_1\dots x_{i-1}x_j\dots x_n}\right)\right] = \sum \varepsilon(k_1,\dots,k_n)x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n},$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über alle n-Tupel nicht-negativer ganzer Zahlen $(k_1,\dots,k_n)$ läuft, die die Gleichung

$$k_1^2+\dots+k_n^2 = k_1+\dots+k_n+k_1k_2+\dots+k_{n-1}k_n+k_nk_1 \tag{3.6}$$

erfüllen. Dabei ist $\varepsilon(k_1,\dots,k_n) = \pm 1$ folgendermaßen definiert. Erfüllen die Zahlen $k_1,\dots,k_n$ die Gleichung (3.6), so gilt das auch für die Zahlen $k_1,\dots,k_{i-1},k_i',k_{i+1},\dots,k_n$, wobei $k_i' = -k_i+k_{i-1}+k_{i+1}+1$ ist (hier gilt $1\le i\le n$; für $i = n$ sollten wir

gen eines n-dimensionalen Raumes von $\dfrac{n(n-1)}{2}$ Parametern ab, und Drehungen eines komplexen n-dimensionalen Raumes hängen von n^2-1 Parametern ab. Zu den Zahlen $\dfrac{n(n-1)}{2}$ und n^2-1, also $1,3,6,10,15,21,28,36,\dots$ und $3,8,15,24,35,\dots$, sollte man fünf „außergewöhnliche Dimensionen“ $14,52,78,133,248$ hinzunehmen. Streicht man, wie Dyson, außerdem die Zahlen 1 und 6 und nimmt 26 hinzu (was hier nach einer moderneren Erklärung als $52\div 2$ erscheint), so ergibt sich die Reihe (3.5); sicher erinnert sich jeder theoretischer Physiker sehr genau an diese Reihe.

x_1 für x_{i+1} verwenden, und für $i = 1$ sollten wir x_n für x_{i-1} verwenden). Darüber hinaus kann jedes n-Tupel $k_1, \ldots, k_n$ nicht-negativer ganzer Zahlen, die die Gleichung (3.6) erfüllen, aus $(0, \ldots, 0)$ durch eine endliche Reihe solcher Transformationen erzeugt werden. Das kann auf vielen verschiedenen Wegen geschehen; aber die Parität der Anzahl solcher Transformationen hängt nur von $k_1, \ldots, k_n$ ab. Ist diese Zahl gerade, so gilt $\varepsilon(k_1, \ldots, k_n) = 1$; anderenfalls gilt $\varepsilon(k_1, \ldots, k_n) = -1$. Es gibt noch einige weitere explizite Formeln für $\varepsilon(k_1, \ldots, k_n)$. Ist zum Beispiel $n = 2$, so wird Gleichung (3.6) zu $(k_1 - k_2)^2 = k_1 + k_2$ und alle ganzzahligen Lösungen sind

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2}\right), -\infty < n < \infty;$$

das zugehörige ε ist $(-1)^n$. Für $n = 3$ gilt

$$\varepsilon(k_1, k_2, k_3) = \begin{cases} 1, & \text{für } k_1 + k_2 + k_3 \equiv 0 \bmod 3, \\ -1, & \text{für } k_1 + k_2 + k_3 \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$$

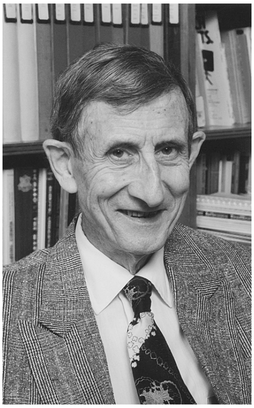
(der Fall $k_1 + k_2 + k_3 \equiv 2 \bmod 3$ kann nicht vorkommen). Für $n = 4$ gilt

$$\varepsilon(k_1, k_2, k_3, k_4) = \begin{cases} 1, & \text{für } k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0, 2, 3, 7 \bmod 8, \\ -1, & \text{für } k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 1, 4, 5, 6 \bmod 8. \end{cases}$$

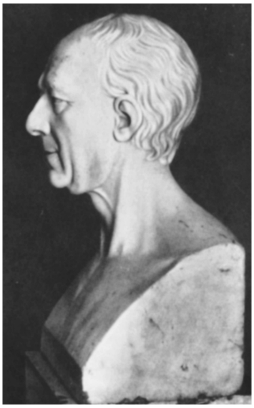
Die zweite Formel verallgemeinert die Gauß-Identität (und auch die Klein-Identität und die Dyson-Identität) zu einer Formel für $\varphi(x)^{n^2-1}$:

$$\varphi(x)^{n^2-1} = (-1)^{n-1} \sum \varepsilon(k_1, \ldots, k_n) \binom{k_1}{n-1} \binom{k_2}{n-2} \cdots \binom{k_{n-1}}{1} x^{k_n},$$

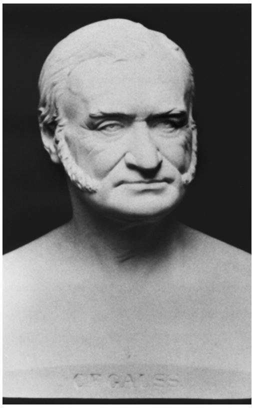
wobei die Summe über dieselben n-Tupel $(k_1, \ldots, k_n)$ läuft wie in der vorherigen Identität, und auch $\varepsilon(k_1, \ldots, k_n)$ hat dieselbe Bedeutung wie vorhin.



Freeman Dyson
geboren 1923



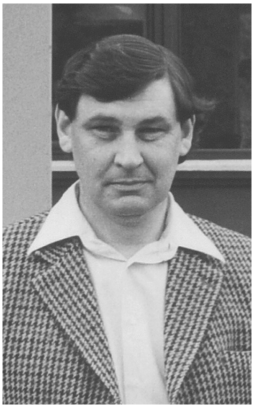
Leonard Euler
1707–1783



Carl Friedrich Gauß
1777–1855

Godfrey Harold Hardy
1877–1947

Felix Klein
1849–1925



Ian MacDonald
geboren 1928

Srinivasa Ramanujan
1887–1920

3.11 Übungen

Übung 3.1. Beweisen Sie

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der Partitionen}\\ n=n_1+\cdots+n_k\ (k>0)\\ \text{mit } 0<n_1<\cdots<n_k\end{array}} \quad = \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{Anzahl der Partitionen}\\ n=n_1+\cdots+n_k\ (k>0)\\ \text{mit } 0<n_1\leq\cdots\leq n_k\\ \text{alle } n_i \text{ ungerade}\end{array}}\ .$$

Hinweis: Es gibt eine natürliche eineindeutige Transformation zwischen den Partitionen im linken Kasten und den Partitionen im rechten Kasten. Sie sollen aus den folgenden Beispielen ableiten, wie die Transformation funktioniert:

$$\begin{aligned}1+3+6+10 &\leftrightarrow 1+3+3+3+5+5,\\ 1+4+7+11 &\leftrightarrow 1+1+1+1+1+7+11,\\ 2+4+6 &\leftrightarrow 1+1+1+1+1+1+3+3.\end{aligned}$$

Übung 3.2. Beweisen Sie, dass für jedes reelle $s > 1$ (oder ein komplexes s mit Realteil $\operatorname{Re} s > 1$)

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots = \left(\frac{2^s}{2^s-1}\right)\left(\frac{3^s}{3^s-1}\right)\left(\frac{5^s}{5^s-1}\right)\left(\frac{7^s}{7^s-1}\right)\cdots$$

gilt. Kürzer ausgedrückt

$$\sum_{n=i}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\{\text{Primzahlen}\}}\left(\frac{p^s}{p^s-1}\right).$$

Anmerkungen. (1) Diese Formel, die ebenfalls auf Euler zurückgeht, hat nicht direkt etwas mit dem Thema dieser Vorlesung zu tun. Aber ihr Beweis ähnelt stark dem Beweis von Satz 3.1, und wir hoffen, dass Sie als Leser das zu schätzen wissen.

(2) Der Ausdruck auf der linken Seite (und folglich die rechte Seite) der letzten Gleichung wird als $\zeta(s)$ bezeichnet. Das ist die berühmte riemannsche ζ-Funktion. Ein einfacher Trick liefert eine Fortsetzung dieser Funktion auf alle komplexen Werte des Arguments (außer $s = 1$). Es ist bekannt, dass für jede positive ganze Zahl n die Funktion $\zeta(-2n) = 0$ ist. Die riemannsche Vermutung (wobei es sich vermutlich um das gegenwärtig berühmteste ungelöste Problem der Mathematik handelt) besagt: Gilt $\zeta(s) = 0$ und $s \neq -2n$ für jede positive ganze Zahl n, so ist $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Übung 3.3. Beweisen Sie die Formel aus Abschnitt 3.5 auf Seite 60: Ist $n = 2^{k_2}3^{k_3}5^{k_5}\ldots$ eine Primfaktorzerlegung von n, so gilt

$$\mathbf{d}(n) = \prod_{p\in\{\text{Primzahlen}\}}\frac{p^{k_p+1}-1}{p-1}.$$

Übung 3.4. Leiten Sie aus der Jacobi-Identität die folgende Identität her, in der die Euler-Funktion φ vorkommt:

$$\frac{\varphi(y)\varphi(y^4)}{\varphi(y^2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n y^{2n^2+n}.$$

Hinweis: Versuchen Sie es mit $z = -y^2$.

Übung 3.5. Beweisen Sie folgende Aussage. Sind k, l und m ganze Zahlen und gilt $k+l+m = 1$, so ist $-(kl+km+lm)$ eine nicht-negative ganze Zahl, die nicht kongruent zu 3 modulo 4 ist.

Anmerkungen. (1) Das hat etwas mit der Klein-Identität für $\varphi(x)^8$ zu tun.

(2) Nach der Tabelle aus Abschnitt 3.8 auf Seite 66 sind 250 der ersten 500 Koeffizienten der Reihe für $\varphi(x)^8$ null. Diese Übung spezifiziert 125 Koeffizienten.

Die Zahlen für die übrigen 125 Koeffizienten sehen chaotisch aus. Sie als Leser sollen versuchen, eine gewisse Ordnung in diesem Chaos zu finden.

Übung 3.6. (a) Sei $\mathbf{q}(n)$ die Anzahl der Partitionen $n = n_1 + \cdots + n_k$ mit $0 < n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{k-1} < n_k$ (im Fall $k = 1$ bedeutet dies nur $0 < n$). Beweisen Sie $\mathbf{q}(n) = \mathbf{p}(n-1)$ für $n \geq 1$.
(b) Leiten Sie aus (a) ab, dass $\mathbf{p}(n) > \mathbf{p}(n-1)$ für $n \geq 2$ gilt.

Übung 3.7. Beweisen Sie, dass $\mathbf{p}(n) < F_n$ gilt, wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist ($F_0 = F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$).
Hinweis: Verwenden Sie die Euler-Identität und Übung 3.6(b).

Übung 3.8. * Seien F_n $(k = 1, 2, \dots)$ die Fibonacci-Zahlen ($F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 3$; im Gegensatz zu Übung 3.7 betrachten wir F_0 nicht).

(a) Beweisen Sie, dass jede ganze Zahl $n \geq 1$ als Summe verschiedener Fibonacci-Zahlen ausgedrückt werden kann: $n = F_{k_1} + \cdots + F_{k_s},\ 1 \leq k_1 < \cdots < k_s$.
(b) Beweisen Sie, dass eine Partition von n wie in Teil (a) existiert und eindeutig ist, wenn wir die zusätzliche Bedingung $k_i - k_{i-1} \geq 2$ für $1 < i \leq s$ stellen.
(c) Beweisen Sie, dass eine Partition von n wie in Teil (a) auch existiert und eindeutig ist, wenn wir die entgegengesetzte Bedingung stellen: $k_1 \leq 2,\ k_i - k_{i-1} \leq 2$ für $1 < i \leq s$.
(d) Sei K_n die Anzahl der Partitionen von n wie in Teil (a) mit geradzahligem s, und sei H_n dasselbe mit ungeradzahligem s. Beweisen Sie, dass $|K_n - H_n| \leq 1$ gilt.
(e) (analog zu (d)) Gegeben sei

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^8)\cdots = 1 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \dots$$

(oder in Kurzschreibweise $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{F_k}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_nx^n$). Beweisen Sie, dass für alle n die Ungleichung $|g_n| \leq 1$ gilt.
(f) (Verallgemeinerung von (e)) Beweisen Sie, dass für jedes $k, \ell > k$ alle Koeffizienten des Polynoms $(1-x^{F_k})(1-x^{F_{k+1}})\dots(1-x^{F_\ell})$ gleich null oder ± 1 sind.
(g) (Ergänzung zu (e)) Beweisen Sie, dass für jedes $k \geq 4$ gilt:

$$g_n = 0 \text{ für } 2F_k - 2 < n < 2F_k + F_{k-3}.$$

http://www.springer.com/978-3-642-12959-9

Ein Schaubild der Mathematik
30 Vorlesungen über klassische Mathematik
Fuchs, D.; Tabachnikov, S.
2011, XIII, 541 S. 500 Abb., Hardcover
ISBN: 978-3-642-12959-9