

Vorwort

Seit über zweitausend Jahren galt eine gewisse Vertrautheit mit Mathematik als ein unverzichtbarer Bestandteil des intellektuellen Rüstzeugs jedes gebildeten Menschen. Heutzutage ist die traditionelle Stellung der Mathematik in der Ausbildung in ernsthafter Gefahr.

Diese Eröffnungssätze schrieb Richard Courant im Jahr 1941 in seinem Vorwort zum Klassiker *What is Mathematics?* Etwas beruhigend ist es festzustellen, dass die Probleme, auf die wir die gegenwärtige Situation gerne zurückführen, vor 65 Jahren (und höchstwahrscheinlich auch viel früher) genauso akut waren wie jetzt. Damit wollen wir aber nicht sagen, dass die Situation ungetrübt sei. Wir hoffen, mit diesem Buch einen bescheidenen Beitrag zum Fortbestand der mathematischen Kultur zu leisten.

Das erste Mathematikbuch, das Vladimir Arnold, einer unserer mathematischen Helden, im Alter von zwölf Jahren las, war das Buch *Von Zahlen und Figuren* von Hans Rademacher und Otto Toeplitz. In seinem Interview, das er der Zeitschrift „Kvant“ gab und das dort 1990 veröffentlicht wurde, erinnert sich Arnold, dass er das Buch langsam durcharbeitete, ein paar Seiten pro Tag. Wir kommen nicht umhin, zu hoffen, dass unser Buch eine ähnliche Rolle bei der mathematischen Entwicklung einiger berühmter Mathematiker der Zukunft spielen wird.

Wir hoffen, dass dieses Buch für jeden von Interesse sein wird, der Mathematik liebt, angefangen von Gymnasiasten bis hin zu gestandenen Wissenschaftlern. Wir versprechen keine leichte Reise: Die Mehrheit der Resultate wird bewiesen, und es wird beachtliche Anstrengungen von Ihnen als Leser erfordern, den Details der Argumente zu folgen. Wir hoffen, dass Sie als Belohnung dafür, zumindest manchmal, von Ehrfurcht für die Harmonie des Stoffes erfüllt sein werden (es ist dieses Gefühl, das die meisten Mathematiker in ihrer Arbeit vorantreibt!). Um es mit den Worten aus *A Mathematician's Apology* von G. H. Hardy zu sagen:

Die Bilder der Mathematik müssen, wie die von Malern oder Poeten, *schön* sein; die Gedanken müssen sich wie Farben oder Worte harmonisch ineinander fügen. Schönheit ist das erste Kriterium: Es gibt keinen festen Platz in der Welt für hässliche Mathematik.

Auch für uns ist Schönheit das erste Kriterium bei der Auswahl der Themen für unsere eigene Forschung sowie für die Gegenstände populärwissenschaftlicher Artikel

und Vorlesungen und folglich bei der Stoffauswahl für dieses Buch. Wir haben uns nicht auf irgendein bestimmtes Gebiet beschränkt (etwa Zahlentheorie oder Geometrie); uns geht es um die Vielfalt und Einheit der Mathematik. Sollten Sie als Leser nach der Lektüre dieses Buches an einer systematischeren Darstellung eines bestimmten Fachgebietes interessiert sein, so werden Sie leicht gute Quellen in der Literatur finden.

Zum Untertitel: Die Lexikondefinition des Wortes *klassisch* ist: „hat sich über eine geraume Zeit als von höchster Qualität und herausragend in seiner Art erwiesen“. Wir haben versucht, Mathematik auszuwählen, die diesem strengen Kriterium genügt. Sie als Leser werden hier Sätze von Isaac Newton und Leonhard Euler, Augustin Louis Cauchy und Carl Gustav Jacob Jacobi, Michel Chasles und Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow, Max Dehn und James Alexander und von vielen anderen großen Mathematikern der Geschichte finden. Recht oft beziehen wir jüngste Resultate berühmter zeitgenössischer Mathematiker ein, darunter Robert Connelly, John Conway und Vladimir Arnold.

Es gibt etwa vierhundert Abbildungen in diesem Buch. Wir stimmen vollkommen mit dem Sprichwort überein, dass ein Bild mehr als tausend Worte sagt. Die Abbildungen sind mathematisch exakt – eine kubische Kurve wurde per Computer als die Ortslinie von Punkten gezeichnet, die eine Gleichung dritten Grades erfüllen. Insbesondere illustrieren die Abbildungen die Bedeutung des sorgfältigen Zeichnens als ein Experimentierwerkzeug in der geometrischen Forschung. Zwei Beispiele werden in Vorlesung 29 gegeben: Das sind der Satz von Money-Coutts, der noch in den 1970er Jahren durch sorgfältiges Zeichnen entdeckt wurde, und ein sehr neuer Satz über Poncelet-Gitter von Richard Schwartz, den er bei Computerexperimenten entdeckte. Ein anderes Beispiel für die Verwendung des Computers als Experimentierwerkzeug wird in Vorlesung 3 gegeben (siehe die Diskussion der „privilegierten Exponenten“).

Wir haben nicht versucht, die Vorlesungen in ihrer Länge und in ihrem Schwierigkeitsgrad ähnlich zu gestalten: Einige Vorlesungen sind recht lang und anspruchsvoll, während andere beachtlich kürzer und einfacher sind. Eine Vorlesung, „Spitzen“, sticht heraus: Sie enthält keine Beweise, sondern nur zahlreiche Beispiele, die durch Abbildungen reichlich illustriert werden; viele dieser Beispiele werden in anderen Vorlesungen streng behandelt.

Die Vorlesungen sind unabhängig voneinander, aber Ihnen als Leser werden einige Themen auffallen, die über das Buch hinweg immer wieder auftauchen. Wir setzen nicht viele Vorkenntnisse voraus: Ein gewöhnlicher Analysiskurs reicht in den meisten Fällen, und recht oft wird nicht einmal Analysis gebraucht (und durch diese relativ niedrige Schwelle werden auch mathematisch unbedarfte Gymnasiasten nicht ausgeschlossen). Wir glauben auch, dass jeder Leser, unabhängig von seiner Ausbildung, in fast jeder Vorlesung Überraschungen finden wird.

Im Buch gibt es etwa zweihundert Übungen, zu vielen ist eine Lösung oder Antwort angegeben. Sie entwickeln die Themen, die in der Vorlesung behandelt wurden, weiter; in vielen Fällen beinhalten sie höhere Mathematik (dann geben wir anstelle einer Lösung Verweise auf die Literatur). Schwierigere Übungen sind durch einen einfachen oder durch einen doppelten Stern gekennzeichnet.

Zurückführen lässt sich dieses Buch auf eine ganze Menge von Artikeln, die wir für die russische Zeitschrift „Kvant“ in den Jahren 1970–1990 verfasst haben¹, und auf etliche Vorlesungen, die wir über die Jahre verschiedenen Zuhörerkreisen in der Sowjetunion und in den Vereinigten Staaten (wo wir seit 1990 leben) gegeben haben. Darunter sind Gymnasiasten – die Teilnehmer des kanadisch/amerikanischen Binational Mathematical Camps in den Jahren 2001 und 2002, Studenten, die in den Jahren 2000–2006 am Mathematics Advanced Study Semesters (MASS) Program an der Penn State teilnahmen, und Gymnasiasten, die – zusammen mit ihren Lehrern und Eltern – am Bay Area Mathematical Circle in Berkeley teilnahmen.

Das Buch eignet sich als Grundlage eines Mathematikseminars für Studienanfänger (es gibt mehr als ausreichend Stoff für ein ganzes akademisches Jahr), für verschiedene Fachseminare, für Matheclubs an Gymnasien oder Fachschulen oder einfach als Kaffeepausenbuch, in dem man in seiner Freizeit blättert.

Um die Behauptung mit dem „Kaffeepausenbuch“ zu stützen, wurde dieser Band von einem gestandenen Künstler, Sergey Ivanov, großzügig illustriert. Sergey war in den 1980er Jahren der Chefillustrator der Zeitschrift „Kvant“ und machte dann bei ihrem englischsprachigen Gegenstück „Quantum“ in einer ähnlichen Position in den 1990er Jahren weiter. Als Werke eines ausgebildeten Physikers sind Ivanovs Illustrationen nicht nur ästhetisch attraktiv, sondern sie spiegeln auch den mathematischen Inhalt des Stoffes wider.

Wir haben dieses Vorwort mit einem Zitat begonnen; wir wollen es mit einem anderen beenden. Max Dehn, dessen Sätze hier mehr als ein Mal erwähnt werden, charakterisiert Mathematiker in seiner Schrift [22] auf diese Weise; wir glauben, dass diese Worte auf das Anliegen dieses Buches zutreffen:

Hin und wieder erfüllt den Mathematiker die Leidenschaft eines Poeten oder eines Erobers, die Strenge seiner Argumente ist die eines pflichtbewussten Staatsmanns oder einfacher eines besorgten Vaters, und seine Duldsamkeit und sein Verzicht sind die eines alten Weisen; er ist revolutionär und konservativ, skeptisch und doch vertrauensvoll optimistisch.

Danksagung: Dieses Buch ist V. I. Arnold anlässlich seines siebzigsten Geburtstags gewidmet; seine Art der mathematischen Forschung und Darstellung hat die Autoren über Jahre hinweg stark beeinflusst.

In zwei aufeinanderfolgenden Jahren, 2005 und 2006, nahmen wir am Programm „Research in Paris“ des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) teil. Wir sind diesem Paradies für Mathematiker sehr dankbar, wo sich Verwaltung, Köche und Natur verbünden, um die Kreativität jedes Einzelnen zu fördern. Ohne unsere Aufenthalte am MFO läge der Abschluss dieses Projekts noch immer in ferner Zukunft.

Der zweite Autor bedankt sich beim Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn für seine beständige Gastfreundschaft.

Vielen Dank an John Duncan, Sergei Gelfand und Günter Ziegler, die das Manuskript von Anfang bis Ende lasen und deren detaillierte (und nahezu disjunkte!) Kommentare und Kritiken die Darstellung wesentlich verbesserten.

¹ In Russisch unter <http://kvant.mccme.ru/> online verfügbar.

Der zweite Autor bedankt sich herzlich für die teilweise Unterstützung durch die National Science Foundation (NSF).

Dmitry Fuchs und Serge Tabachnikov
Dezember 2006

Ergänzung zur ersten deutschen Auflage

Wir sind unserer Übersetzerin Micaela Krieger-Hauwede und allen Mitarbeitern des Springer-Verlags für ihre exzellente Arbeit dankbar.

Dmitry Fuchs und Serge Tabachnikov
September 2010

Ein Schaubild der Mathematik

30 Vorlesungen über klassische Mathematik

Fuchs, D.; Tabachnikov, S.

2011, XIII, 541 S. 500 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-642-12959-9