

I

Einführung in die Analysis des Unendlichen

... unsere Mathematik-Studenten würden sehr viel mehr davon profitieren, Eulers *Introductio in Analysin Infinitorum* zu studieren anstelle der verfügbaren modernen Lehrbücher.

(André Weil 1979, zitiert nach J.D. Blanton 1988, S. xii)

... da der Lehrer einsichtig genug war den ungewöhnlichen Schüler (Jacobi) gewähren zu lassen und es zu gestatten, daß dieser sich mit Eulers *Introductio* beschäftigte, während die übrigen Schüler mühsam ...

(Dirichlet 1852, Gedächtnisrede auf Jacobi, in Jacobis *Werke*, Band I, S. 4)

Dieses Kapitel erläutert den Ursprung der grundlegenden Funktionen und den Einfluss von Descartes' *Géométrie* auf ihre Berechnung. Das Interpolationspolynom führt zu Newtons binomischem Lehrsatz und zu den Reihenentwicklungen der Exponential- und Logarithmusfunktion und der trigonometrischen Funktionen.

Das Kapitel endet mit einer Diskussion der komplexen Zahlen, unendlichen Produkten und Kettenbrüchen. Die Darstellung der Themen folgt ihrer historischen Entwicklung und der mathematischen Strenge der damaligen Zeit. Die Begründung zweifelhafter Schlussfolgerungen wird eine weitere Motivation liefern für die strenge Behandlung des Konvergenzbegriffs in Kapitel III.

Eulers *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) ist die Inspiration für große Teile dieses Kapitels wie auch seines Titels.

I.1 Kartesische Koordinaten und Polynome

Als Algebra und Geometrie noch voneinander getrennt wurden, war ihr jeweiliger Fortschritt langsam und ihr Nutzen gering; aber in dem Moment, in dem diese Wissenschaften vereint wurden, unterstützten sie sich gegenseitig und strebten schnell und gemeinsam zur Perfektion. Wir verdanken Descartes die Anwendung der Algebra auf die Geometrie; dies wurde der Schlüssel zur größten Entdeckung auf dem Gebiet der Mathematik.

(Lagrange 1795, *Oeuvres*, Band 7, S. 271)

Die griechische Zivilisation brachte die erste große Blüte mathematischen Fortschritts hervor. Beginnend mit Euklids Ära (~ 300 v. Chr.) entwickelte sich Alexandria zum weltweiten Zentrum der Wissenschaft. Alexandria wurde dreimal verwüstet (47 v. Chr. von den Römern, 392 von den Christen, und schließlich 640 von den Moslems), was zum Untergang dieser Zivilisation führte. Im Anschluss an die (für den Koran notwendigen) Verbesserungen am arabischen Schriftsystem übersetzten arabische Gelehrte eifrig diejenigen Fragmente, die von den griechischen Werken verblieben waren (Euklid, Aristoteles, Platon, Archimedes, Apollonius, Ptolemäus), sowie Werke indischer Arithmetiker, und vertieften das mathematische Wissen. Während den Kreuzzügen (1100–1300) entdeckten die Europäer schließlich diese Kultur; Gerhard von Cremona (1114–1187), Robert von Chester (12tes Jhd.), Leonardo da Pisa („Fibonacci“, um 1200) und Regiomontanus (1436–1476) waren die Hauptübersetzer und ersten Wissenschaftler Westeuropas. Zu dieser Zeit gliederte sich die Mathematik in zwei klar abgegrenzte Gebiete: zum einen *Algebra*, zum anderen *Geometrie*.

Algebra

Diophant kann als der Erfinder der Algebra betrachtet werden; . . .

(Lagrange 1795, *Oeuvres*, Band 7, S. 219)

Die Algebra ist ein Erbe der griechischen und orientalischen Vorzeit. Das berühmte Buch *Al-jabr w'al muqâbala* von Mohammed ben Musa Al-Khowârizmî¹ (830 n. Chr.) beginnt mit Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen. Das älteste bekannte Manuskript datiert auf 1342 und beginnt wie folgt:²



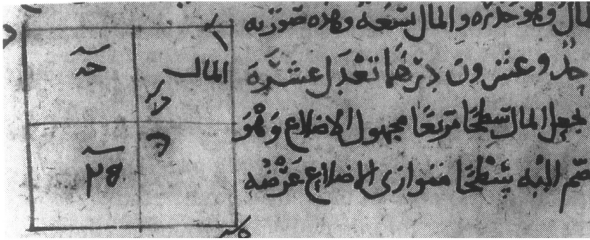
¹ Die Wörter „Algorithmus“ und „Algebra“ stammen jeweils von Al-Khowârizmîs Namen und dem Kurztitel „Al-jabr“ seines Buchs ab.

² Dieses Bild sowie die Abb. 1.1 und 1.2 sind abgedruckt mit der Erlaubnis der Bodleian Library, Universität von Oxford, Ms. Huntington 214, Folios 1R, 4R und 4V. Englische Übersetzung: F. Rosen (1831).

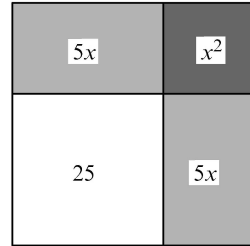
Al-Khowârizmîs Beispiele. Betrachten Sie die quadratische Gleichung

$$(1.1) \quad x^2 + 10x = 39.$$

Eine solche Gleichung beschreibt die unbekannte Lösung x , die von den Arabern *dshidr* (Wurzel) genannt wurde, ein Wort, das ursprünglich für die Seite eines Quadrats von vorgegebener Fläche stand („A root is any quantity which is to be multiplied by itself“, F. Rosen 1831, S. 6).



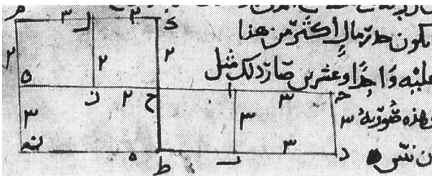
Manuskript von 1342



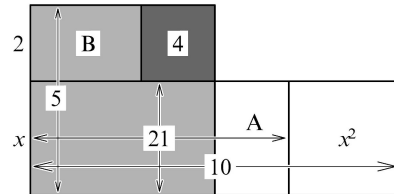
Moderne Darstellung

ABB. 1.1. Lösung von $x^2 + 10x = 39$

Lösung. Al-Khowârizmî skizziert ein Quadrat der Seitenlänge x , um x^2 zu repräsentieren, sowie zwei Rechtecke der Seitenlängen 5 und x für die Terme $10x$ (siehe Abb. 1.1). Gleichung (1.1) zeigt, dass das schattierte Gebiet von Abb. 1.1 die Fläche 39 besitzt; folglich ist die Fläche des gesamten Quadrats $39 + 25 = 64 = 8 \cdot 8$, also $5 + x = 8$ und $x = 3$.



Manuskript von 1342



Moderne Darstellung

ABB. 1.2. Lösung von $x^2 + 21 = 10x$

Ein zweites Beispiel (von Al-Khowârizmî),

$$(1.2) \quad x^2 + 21 = 10x$$

(oder, falls Sie die lateinische Version von Robert von Chester vorziehen: „Substantia vero et 21 dragmata 10 rebus equiparantur“), demonstriert, wie verschiedene Vorzeichen zu verschiedenen Figuren führen. Um seine *Lösung* zu errechnen, skizzieren wir ein Quadrat für x^2 und fügen ein Rechteck der Breite x und unbekannter Länge für die 21 hinzu (Abb. 1.2). Aufgrund von (1.2) hat die

vollständige Figur die Länge 10. Sie wird mittig zerteilt, und das kleine Rechteck (A) zwischen x^2 und der Halbierenden wird auf (B) platziert. Die resultierende Figur hat die Höhe 5. Das graue Gebiet beträgt 21 und das gesamte Quadrat (grau und schwarz) hat die Größe $5 \cdot 5 = 25$. Folglich muss das kleine schwarze Quadrat $25 - 21 = 4 = 2 \cdot 2$ groß sein, und wir erhalten $x = 3$. Mit einer ähnlichen Zeichnung (versuchen Sie es), fand Al-Khowârizmî auch die zweite Lösung $x = 7$.

Mohammed ben Musa Al-Khowârizmî beschreibt seine Lösung wie folgt (Rosen 1831, S. 11):

... for instance, „a square and twenty-one in numbers are equal to ten roots of the same square.“ That is to say, what must be the amount of a square, which, when twenty-one dirhems are added to it, becomes equal to the equivalent of ten roots of that square? Solution: Halve the number of the roots; the moiety is five. Multiply this by itself; the product is twenty-five. Subtract from this the twenty-one which are connected with the square; the remainder is four. Extract its root; it is two. Subtract this from the moiety of the roots, which is five; the remainder is three. This is the root of the square which you required, and the square is nine. Or you may add the root to the moiety of the roots; the sum is seven; this is the root of the square which you sought for, and the square itself is forty-nine.

Als Anwendung löst Al-Khowârizmî das folgende Rätsel: „Ich habe 10 in zwei Teile zerlegt, und multipliziert man einen mit dem anderen, so ist das Resultat 21“. Setzen wir für einen der Teile x ein und für den anderen $10 - x$, so ist ihr Produkt

$$(1.3) \quad x \cdot (10 - x) = 21$$

was (1.2) entspricht. Entsprechend ist die Lösung gegeben durch die zwei Wurzeln von Gl. (1.2), also 3 und 7 oder umgekehrt.

Die Lösung von Gleichungen dritten Grades.

Tartaglia präsentierte seine Lösung in schlechter italienischer Lyrik ...
(Lagrange 1795, *Oeuvres*, Band 7, S. 22)

... Ich habe die allgemeine Regel entdeckt, aber für den Moment möchte ich sie aus verschiedenen Gründen geheim halten.

(Tartaglia 1530, siehe M. Cantor 1891, Band II, S. 485)

Lassen Sie uns als Beispiel versuchen, die Gleichung

$$(1.4) \quad x^3 + 6x = 20,$$

zu lösen, oder, in „schlechter“ italienischer Lyrik, „Quando che'l cubo con le cose appresso, Se agguaglia à qualche numero discreto ...“ (siehe M. Cantor 1891, Band II, S. 488). Nicolò Tartaglia (1499–1557) und Scipione dal Ferro (1465–1526) fanden unabhängig voneinander die Lösungsmethode für dieses Problem, hielten sie aber geheim, um mit ihr Wettbewerbe zu gewinnen. Erst unter Druck und gelockt von falschen Versprechungen verriet Tartaglia sie an Gerolamo Cardano (1501–1576), lyrisch verschleiert und ohne Beweis („suppressa demonstratione“). Cardano rekonstruierte unter großer Mühe ihre Herleitung („quod difficillimum fuit“) und veröffentlichte sie 1545 in seiner „*Ars Magna*“ (siehe auch di Pasquale 1957, und Struik 1969, S. 63–67).

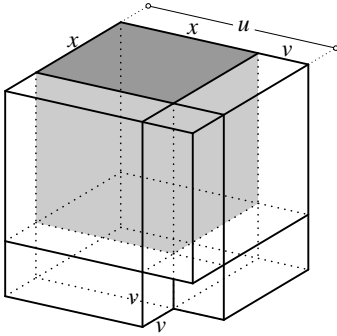


ABB. 1.3a. Kubische Gl. (1.4)

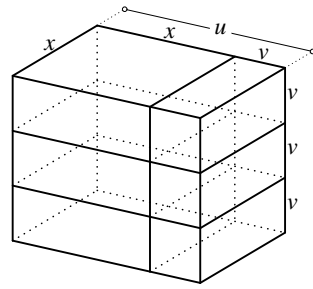


ABB. 1.3b. Rechtfertigung von (1.6)

**riæstimatio. Exemplum. cubus & 6 positi-
ones, æquantur 20, ducito 2, tertiam par-
tem 6, ad cubum, fit 8. duc 10 dimidium nu-
meri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, acci-
peradicem quæ est 108, & eam gemmina-
bis, alteri addes 10, dimidium numeri, a b
altero minues tantundem, habebis Bino-
mium 108 p:10, & Apotomen 108 m:
10, horum accipe 108 cubus & minue illam**

**cubus p:6 reb' æq̃lis 20
2 ——— 20
8 ——— 10
108
108 p:10
108 m:10
108 v:cu. 108 p:10
m:108 v:cu. 108 m:10**

ABB. 1.3c. Ausschnitt aus Cardanos *Ars Magna* von 1545, ed. Basilea 1570³

Herleitung. Wir repräsentieren x^3 durch einen Würfel der Kantenlänge x (wie auch sonst? Grauer Teil in Abb. 1.3a). Der Term $6x$ wird in Form je dreier Prismen mit quadratischer Grundfläche und Volumen x^2v und xv^2 angehängt (weiß in Abb. 1.3a). Wir erhalten einen Körper mit Volumen 20 (gemäß (1.4)), der die Differenz der Kuben u^3 und v^3 ist (siehe Abb. 1.3a), also

$$u^3 - v^3 = 20,$$

wobei

$$(1.5) \quad u = x + v.$$

Arrangieren wir die sechs neuen Prismen wie in Abb. 1.3b, so sehen wir, dass ihr Volumen (wie gefordert) $6x$ gleicht, falls

$$(1.6) \quad 3uvx = 6x \quad \text{oder} \quad uv = 2$$

gilt. Nun kennen wir *Summe* ($= 20$) und *Produkt* ($= -8$) von u^3 und $-v^3$, und können daraus die ursprünglichen Zahlen wie in Al-Khowârizmîs Rätsel (1.3) rekonstruieren, nämlich

$$u^3 = 10 + \sqrt{108}, \quad -v^3 = 10 - \sqrt{108}.$$

Wenden wir die Kubikwurzel und $x = u - v$ an, erhalten wir (siehe auch die Nachbildung in Abb. 1.3c)

$$(1.7) \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Einige Jahre später wurde eine Lösungsstrategie für Gleichungen vierten Grades entdeckt (Ludovico Ferrari, siehe Struik 1969, S. 69f, und Übungen 1.1 und 1.2); die Gleichungen vom Grad 5 blieben dagegen für Jahrhunderte ein Rätsel, bis Abel 1826 bewies, dass sich ihre Lösungen im allgemeinen nicht durch Radikale schreiben lassen.⁴

„Algebra Nova“

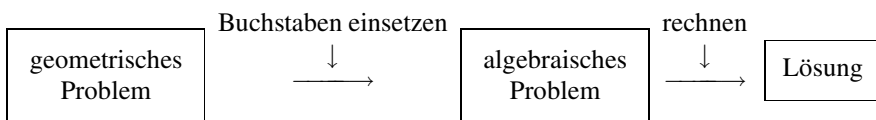
Die Numerische Logistik ist diejenige, die mit Zahlen dargestellt und behandelt wird; die Spezifische wird durch Arten oder Erscheinungsformen von Dingen beschrieben: so wie die Buchstaben des Alphabets.

(Viète 1600, *Algebra nova*, französische Ausgabe 1630)

ALGEBRA ist eine allgemeine Berechnungsmethode mittels bestimmter Zeichen und Symbole, die zu diesem Zweck ersonnen und als nützlich erkannt wurden.

(Maclaurin 1748, *A Treatise of Algebra*, S. 1)

Die antiken Werke behandelten ausschließlich konkrete Beispiele, und ihre Autoren führten „arithmetische“ Betrachtungen nur mit Zahlen aus. François Viète (= Franciscus Vieta 1540–1603, 1591 *In artem analyticam isagoge*, 1600 *Algebra nova*) entwickelte das grundlegende Konzept, Buchstaben A, B, C, X, \dots für die bekannten und unbekannten Größen eines (oftmals geometrischen) Problems zu schreiben, um dann mit ihnen algebraisch zu rechnen (siehe Abb. 1.4a). Da sich keines der Probleme der griechischen Epoche der Methode



widersetzen konnte, schrieb Viète in Großbuchstaben: „NVLVM NON PROBLEMA SOLVERE“ (d.h. „LÖSVNG EINES JEDEN PROBLEMS“). Dieses Konzept fand seine Vollendung in Descartes’ „La Géométrie“.

³ Abbildung mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève.

⁴ Anm. d. Übers.: Natürlich blieben Polynome fünften Grades nicht gänzlich unbeachtet, und es gab lange vor Abels Durchbruch eine ganze Reihe großartiger Ergebnisse: Ehrenfried Walther von Tschirnhaus nutzte Transformationen der Art von (1.11), um zu zeigen, dass jedes Polynom fünften Grades auf die Form $x^5 + ax + b = 0$ gebracht werden kann; Gianfrancesco Malfatti fand eine Methode, alle überhaupt in Radikale auflösbaren Wurzeln auch als solche darzustellen; und Paolo Ruffini schuf 1799 mit einem (fehlerhaften) Beweis, dass nicht alle Wurzeln fünften Grades auflösbar sind, eine der Grundlagen für Abels späteren Erfolg.

⁵ Abgebildet mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève.

Exemple.

Qu'il faille adjoindre $A + D$, avec $B + 2 D$, la somme sera $A + B + 3 D$, observant ce qui a esté dit.

$$\begin{array}{r} B + 2 D. \\ A + D. \\ \hline A + B + 3 D. \end{array}$$

ABB. 1.4a. Nachbildung aus der französischen Auflage (1630) von Viète (1600)⁵

Beispiel. (Dreiteilung eines Winkels). Das berühmte klassische Problem „Datum angulum in tres partes æquales secare“ wird unter Zuhilfenahme von

$$(1.8) \quad \sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

(siehe (4.14) unten) und einigen einfachen Rechnungen zur algebraischen Gleichung

$$(1.9) \quad -4X^3 + 3X = B$$

(siehe Viète 1593, *Opera*, S. 290). Ihre Lösung erhalten wir aus (1.14) unten.

Formel für Gleichungen vom Grad 2. Mit Viète's Notation wird der schwer verständliche Text von Al-Khowârizmî (siehe S. 4) zur „Formel“

$$(1.10) \quad x^2 + ax + b = 0 \quad \implies \quad x_1, x_2 = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}.$$

Formel für Gleichungen vom Grad 3.

$$(1.11) \quad y^3 + ay^2 + by + c = 0 \quad y + \frac{a}{3} = x \quad x^3 + px + q = 0.$$

Wir setzen $x = u + v$ (dies entspricht (1.5), wenn „ $-v$ “ durch „ v “ ersetzt wird), so wird aus Gl. (1.11)

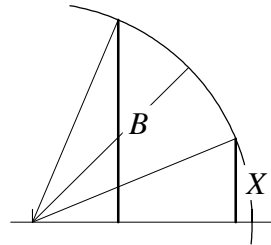
$$(1.12) \quad u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Einsetzen von $uv = -p/3$ (entspricht (1.6)) liefert

$$(1.13) \quad u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -p^3/27.$$

Nach Al-Khowârizmî's Rätsel (1.3) und den Formeln (1.10) erhalten wir (vergleiche die Nachbildung in Abb. 1.4b),

$$(1.14) \quad x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}.$$



Si A quad. \rightarrow B 2 in A, æquetur Z plano. A \rightarrow B esto E. Igitur E quad.
æquabitur Z plano \rightarrow B quad.

Confectarium.

Itaque, $\sqrt[3]{Z \text{ plano} \rightarrow B \text{ quad.}}$ — B fit A, de qua primum quærebatur.

Itaque si A cubus — B plano ; in A, æquetur Z solido 2.
 $\sqrt[3]{C \cdot Z \text{ solidi} \rightarrow \sqrt[3]{Z \text{ solido-folidi}} \rightarrow B \text{ plano-plano-plano}} + \sqrt[3]{C \cdot Z \text{ folidi} \rightarrow \sqrt[3]{Z \text{ folidu-folidi}} \rightarrow B \text{ plano-plano-plano.}}$ Est
 de qua quæritur.

ABB. 1.4b. Auszug aus Viète (1591a)⁶ (*Opera* S. 129 und 150); Lösung von $A^2 + 2BA = Z$ und $A^3 - 3BA = 2Z$

Descartes' Geometrie

An dieser Stelle möchte ich Sie bitten, nebenbei zu beobachten, wie die Skrupel, die die antiken Autoren davon abhielten, arithmetische Begriffe in der Geometrie einzusetzen, und die nur eine Folge ihrer Unfähigkeit sein konnten, die Beziehung zwischen diesen zwei Gebieten klar zu erkennen, für viel Unklarheit und Verwirrung in ihren Erklärungen sorgten.

(Descartes 1637)

Die Überlieferung der Geometrie, dem gewaltigen Erbe der griechischen Antike, verdankt Europa arabischen Übersetzern.

So besteht Euklids *Elemente* (etwa 300 v. Chr.) aus 13 „Büchern“, die „Definitionen“, „Postulate“ und alles in allem 465 „Propositionen“ enthalten, die streng bewiesen werden. Die *Kegelschnitte* des Apollonius (200 v. Chr.) sind von gleicher Wichtigkeit.

Nichtsdestotrotz entzogen sich einige ungelöste Probleme den Anstrengungen dieser Wissenschaftler: die Dreiteilung des Winkels, die Quadratur des Kreises und ein Problem, das Pappus im Jahr 350 erwähnte, und das Descartes' Forschung motivieren sollte.

Problem von Pappus. („Die Frage, deren Lösung von Euklid begonnen und von Apollonius fortgeführt, aber von keinem beendet werden konnte, lautet wie folgt“): Seien a, b, c drei Geraden und α, β, γ drei gegebene Winkel. Für einen beliebig gewählten Punkt C seien B, D, F diejenigen Punkte auf a, b, c , so dass CB, CD, CF mit a, b, c nacheinander die Winkel α, β, γ bilden (siehe Abb. 1.5a und 1.5b). Wir suchen den Ort des Punktes C, für den gilt:

$$(1.15) \quad CB \cdot CD = (CF)^2.$$

Descartes löste dieses Problem unter Verwendung von Viètes „neuer“ und angesehenen Algebra; der Punkt C wird festgelegt durch die Abstände AB und BC.

⁶ Abgebildet mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève. Die unbekannte Variable ist hier A. Erst seit Descartes wählt man x, y, z für Unbekannte.

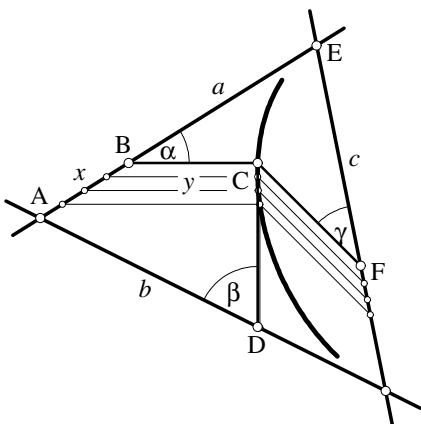


ABB. 1.5b. Problem von Pappus

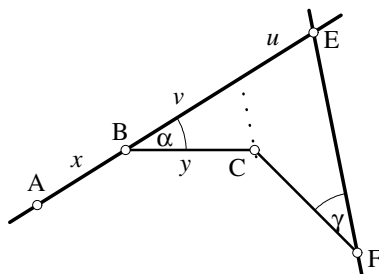


ABB. 1.5c. Gleichung einer Geraden

Polynomiale Funktionen

Algebra kann nicht nur der Geometrie helfen, sondern Geometrie hilft auch der Algebra, da kartesische Koordinaten die Algebra in ein neues Licht tauchen. Wenn wir beispielsweise anstelle von (1.1) und (1.4) die Gleichungen

$$(1.19) \quad y = x^2 + 10x - 39, \quad y = x^3 + 6x - 20$$

betrachten, und beliebige Werte für x einsetzen, dann können wir für jedes x einen Wert für y ausrechnen und die auf diese Weise erhaltenen Kurven studieren (Abb. 1.6). Die Wurzeln von (1.1) und (1.4) erscheinen als Schnittpunkte dieser Kurven mit der (horizontalen) x -Achse. So stellen wir fest, dass die Lösung von (1.4) schlicht $x = 2$ lautet (etwas schöner als Gl. (1.7)).

(1.1) Definition. Ein Polynom ist ein Ausdruck der Form

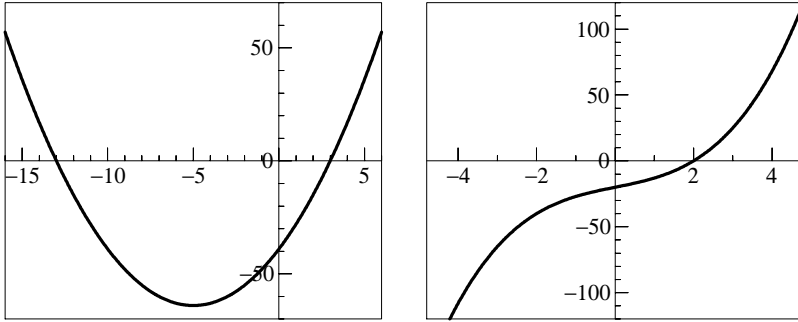
$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

wobei a_0, a_1, \dots, a_n beliebige Konstanten sind. Ist $a_n \neq 0$, dann ist das Polynom vom Grad n .

Interpolationsproblem. Für $n+1$ gegebene Punkte x_i, y_i (siehe Abb. 1.7) suchen wir ein Polynom vom Grad n , das durch all diese Punkte verläuft. Wir interessieren uns hauptsächlich für den Fall, in dem die x_i äquidistant sind, insbesondere

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad \dots$$

⁷ Abb. 1.5a mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève.

ABB. 1.6. Die Polynome $x^2 + 10x - 39$ und $x^3 + 6x - 20$

Die Lösung dieses Problems, die sich als sehr praktisch in der Berechnung von Logarithmen und in der Nautik erwies, erschien erstmals im frühen 17ten Jahrhundert in den Arbeiten von Briggs und Sir Thomas Harriot (siehe Goldstine 1977, S. 23f). Newton (1676) ging das Problem an im Sinne von Viète's *Algebra nova* (siehe Abb. 1.8): Wir schreiben Buchstaben für die unbekannten Koeffizienten des Polynoms, z.B.

$$(1.20) \quad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Mit den vorgegebenen Werten y_0, y_1, y_2, y_3 transformieren wir das „Problem“ in „algebraische Gleichungen“

Abszisse	Ordinate
$x = 0$	$A = y_0$
$x = 1$	$A + B + C + D = y_1$
$x = 2$	$A + 2B + 4C + 8D = y_2$
$x = 3$	$A + 3B + 9C + 27D = y_3$

Wir stellen nun fest, dass der Wert A verschwindet, wenn wir die Gleichungen voneinander abziehen, die erste von der zweiten, die zweite von der dritten, die dritte von der vierten:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} B + C + D &= y_1 - y_0 =: \Delta y_0 \\ B + 3C + 7D &= y_2 - y_1 =: \Delta y_1 \\ B + 5C + 19D &= y_3 - y_2 =: \Delta y_2. \end{aligned}$$

B verschwindet, wenn wir ein weiteres Mal subtrahieren:

$$(1.22) \quad \begin{aligned} 2C + 6D &= \Delta y_1 - \Delta y_0 =: \Delta^2 y_0 \\ 2C + 12D &= \Delta y_2 - \Delta y_1 =: \Delta^2 y_1, \end{aligned}$$

⁷ Abbildung mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève.

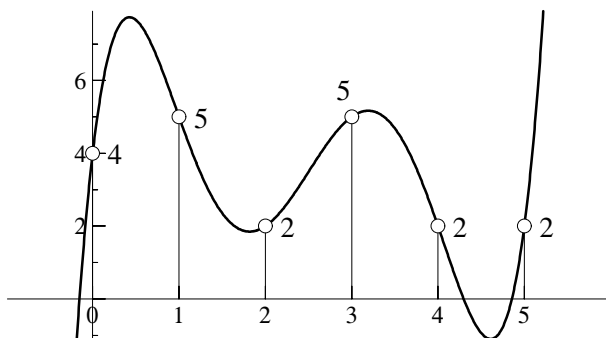


ABB. 1.7. Interpolationspolynom

Abcissa	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=a$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=e$
Divisor. Diff. Ord.	Quoti per divisionem prodeuntes.
$p-q) a-\beta$	$b+c\overline{p+q}+d\overline{pp+pq+qq}+e\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r) \beta-\gamma$	$b+c\overline{q+r}+d\overline{qq+qr+rr}+e\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s) \gamma-\delta$	$b+c\overline{r+s}+d\overline{rr+rs+ss}+e\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t) \delta-e$	$b+c\overline{s+t}+d\overline{ss+st+tt}+e\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\kappa$
$p-r) \zeta-\eta$	$c+d\overline{p+q+r}+e\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s) \eta-\theta$	$c+d\overline{q+r+s}+e\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t) \theta-\kappa$	$c+d\overline{r+s+t}+e\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s) \lambda-\mu$	$d+e\overline{p+q+r+s}=\xi$
$q-t) \mu-\nu$	$d+e\overline{q+r+s+t}=\pi$
$p-t) \xi-\pi$	$e=e$

ABB. 1.8. Interpolationsproblem von Newton (1676, *Methodus Differentialis*)⁸

und ebenso C :

$$(1.23) \quad 6D = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =: \Delta^3 y_0.$$

Dies gibt uns D . Durch die erste Gleichung von (1.22) erhalten wir C , durch die erste von (1.21) den Wert von B . Wir erhalten als Lösung

$$(1.24) \quad y = y_0 + \Delta y_0 \cdot x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot (x^2 - x) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x),$$

was auch geschrieben werden kann als

$$(1.24') \quad y = y_0 + \frac{x}{1} \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y_0.$$

Wir werden im nächsten Abschnitt unter Verwendung des Pascalschen Dreiecks sehen, dass dies ein Spezialfall einer allgemeineren Formel für Polynome beliebigen Grades ist.

(1.2) Satz. Das Polynom vom Grad n , das die Werte

$$y_0 \text{ (für } x = 0), \quad y_1 \text{ (für } x = 1), \dots, y_n \text{ (für } x = n)$$

annimmt, ist gegeben durch die Formel

$$y = y_0 + \frac{x}{1} \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \Delta^n y_0.$$

(1.3) Bemerkung. Seit Newton (siehe Abb. 1.9) ist es üblich, die Differenzen in folgendem Schema anzuordnen:

$$(1.25) \quad \begin{array}{ccccccc} y_0 & & & & & & \\ & \Delta y_0 & & & & & \\ y_1 & & \Delta^2 y_0 & & & & \\ & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & & & \\ y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 & & \\ & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & & & \\ y_3 & & \Delta^2 y_2 & & & & \\ & \Delta y_3 & & & & & \\ y_4 & & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \\ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i, \\ \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Et fac } \frac{A^2 B_2 - A^2 B_1}{A A_2} &= b, \quad \frac{A^2 B_2 - A^3 B_3}{A^2 A_3} = b_2, \\ \frac{A^3 B_3 - A^4 B_4}{A^3 A_4} &= b_3, \quad \frac{A^4 B_4 - A^5 B_5}{A^4 A_5} = b_4, \\ \frac{A^5 B_5 - A^6 B_6}{A^5 A_6} &= b_5, \quad \frac{A^6 B_6 - A^7 B_7}{A^6 A_7} = b_6, \\ \frac{A^7 B_7 - A^8 B_8}{A^7 A_8} &= b_7. \\ \text{Deinde } \frac{b_2 - b_1}{A A_3} &= c, \quad \frac{b_3 - b_2}{A^2 A_4} = c_2, \quad \frac{b_4 - b_3}{A^3 A_5} = c_3, \text{ \&c.} \\ \text{Tunc } \frac{c_2 - c_1}{A A_4} &= d, \quad \frac{c_3 - c_2}{A^2 A_5} = d_2, \quad \frac{c_4 - c_3}{A^3 A_6} = d_3, \text{ \&c.} \\ \text{Et } \frac{d_2 - d_1}{A A_5} &= e, \quad \frac{d_3 - d_2}{A^2 A_6} = e_2, \quad \frac{d_4 - d_3}{A^3 A_7} = e_3, \text{ \&c.} \\ \text{Sic pergendum est ad ultimam differentiam.} \end{aligned}$$

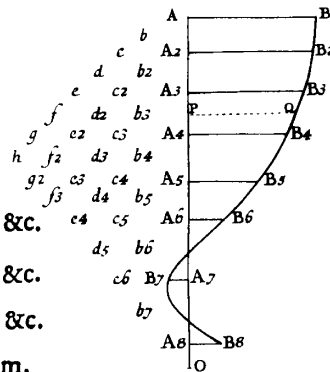


ABB. 1.9. Newtons Differenzenschema (Newton 1676, *Methodus Differentialis*)⁹

⁹ Abbildung mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève.

Beispiel. Für die Werte in unserem Problem (Abb. 1.7) erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccc}
 4 & & & & & & \\
 5 & \frac{1}{-3} & \frac{-4}{6} & \frac{10}{-12} & \frac{-22}{21} & \underline{43} & \Rightarrow \\
 2 & 3 & 6 & -12 & \frac{-22}{21} & \underline{43} & \\
 5 & -3 & -6 & 9 & \frac{-22}{21} & \underline{43} & \\
 2 & -3 & 3 & 9 & \frac{-22}{21} & \underline{43} & \\
 2 & 0 & 3 & 9 & \frac{-22}{21} & \underline{43} & \\
 2 & 0 & 3 & 9 & \frac{-22}{21} & \underline{43} &
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 y &= 4 + \frac{1}{1} \cdot x - \frac{4}{1 \cdot 2} \cdot x(x-1) + \dots \\
 &= 4 + \frac{613x}{30} - 35x^2 + \frac{473x^3}{24} \\
 &\quad - \frac{9x^4}{2} + \frac{43x^5}{120}.
 \end{aligned}$$

Weitere Beispiele. a) Wir betrachten das Polynom $y = x^3$, für das wir die Lösung bereits kennen. Das Differenzenschema lautet:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x=0: & 0 & & & & & \\
 x=1: & 1 & \frac{1}{7} & \frac{6}{12} & \frac{6}{12} & \Rightarrow & \\
 x=2: & 8 & 19 & 12 & \frac{6}{6} & & \\
 x=3: & 27 & & & & &
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 y &= 0 + 1 \cdot x + 6 \cdot \frac{x(x-1)}{2} \\
 &\quad + 6 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\
 &= x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3.
 \end{aligned}$$

b) Die Werte für $x = n$ sind hier die Summen $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 x=0: & 0 & & & & & \\
 x=1: & 1^3 & \frac{1}{2^3} & \frac{7}{19} & \frac{12}{18} & \frac{6}{6} & \frac{0}{0} \\
 x=2: & 1^3 + 2^3 & 3^3 & 19 & \frac{12}{18} & \frac{6}{6} & \frac{0}{0} \\
 x=3: & 1^3 + 2^3 + 3^3 & 4^3 & 37 & \frac{12}{18} & \frac{6}{6} & \frac{0}{0} \\
 x=4: & 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 & & 61 & \frac{12}{18} & \frac{6}{6} & \frac{0}{0}
 \end{array}$$

und wir erhalten die Formel

$$\begin{aligned}
 y &= x + 7 \frac{x(x-1)}{2} + 12 \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + 6 \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} \\
 &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise leiten wir her:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\
 (1.26) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + 0 \\
 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + 0 - \frac{n}{30} \\
 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} + 0 - \frac{n^2}{12}
 \end{aligned}$$

Jakob Bernoulli (1705) fand die *allgemeine Formel*

$$1^q + 2^q + \dots + n^q = \frac{n^{q+1}}{q+1} + \frac{n^q}{2} + \frac{q}{2}An^{q-1} + \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{q-3} + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{q-5} + \dots,$$

wobei

$$(1.27) \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = -\frac{1}{30}, \quad E = \frac{5}{66}, \quad F = -\frac{691}{2730}, \dots$$

die sogenannten *Bernoulli-Zahlen* sind. Für eine elegante Erklärung verweisen wir auf Abschnitt II.10.

Übungen

1.1 Das folgende Problem in Viètes Notation

$$x + y + z = 20$$

$$x : y = y : z$$

$$xy = 8$$

wurde Tartaglia am 15. Dezember 1536 von Zuanne de Tonini da Coi (Colla) gestellt. Tartaglia konnte es nicht lösen (siehe Notari 1924). Eliminieren Sie die Variablen x und z , um zu verstehen, wieso. Cardano gab das Problem später an Ferrari weiter, der eine Lösung fand (siehe nächste Übung). Es ist nicht erstaunlich, dass Ferrari und Tartaglia später böse Briefe mit hitzigen Wortwechseln über mathematische Fragestellungen austauschten.

1.2 Rekonstruieren Sie Ferraris Lösung der biquadratischen Gleichung

$$(1.28) \quad x^4 + ax^2 = bx + c.$$

Hinweis. a) Addieren Sie auf beiden Seiten $a^2/4$ und Sie erhalten

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = bx + c + \frac{a^2}{4}.$$

b) Fügen Sie einen Parameter y ein und addieren Sie $y^2 + ay + 2x^2y$ auf beiden Seiten, mit dem Ergebnis

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + y\right)^2 = 2x^2y + bx + y^2 + ay + c + \frac{a^2}{4}.$$

c) Der Ausdruck auf der rechten Seite, geschrieben als $Ax^2 + Bx + C$, ist von der Form $(\alpha x + \beta)^2$ falls $B^2 = 4AC$. Dies führt zu einer Gleichung dritten Grades für y .

d) Cardanos Formel (1.14) liefert eine Lösung für y , setzen Sie diese ein in die folgende Gleichung mit zwei Wurzeln:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + y\right) = \pm(\alpha x + \beta).$$

Bemerkung. Jedes Polynom $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ kann auf die Form (1.28) zurückgeführt werden, wenn man $x = z + a/4$ substituiert.

- 1.3 (Euler 1749, *Opera Omnia*, Band VI, S. 78–147). Lösen Sie die Gleichung vierten Grades

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

durch Koeffizientenvergleich mit

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta)$$

und finden Sie eine Gleichung dritten Grades für u^2 . Lösen Sie diese Gleichung und berechnen Sie die Lösungen der zwei quadratischen Gleichungen.

- 1.4 (L. Euler 1770, *Vollst. Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg, *Opera Omnia*, Band I). Betrachten Sie eine Gleichung vom Grad 4 mit symmetrischen Koeffizienten, z.B.

$$(1.29) \quad x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Zerlegen Sie das Polynom in $(x^2 + rx + 1)(x^2 + sx + 1)$ und finden Sie die vier Lösungen von (1.29).

Bemerkung. Für eine weitere Möglichkeit, (1.29) zu lösen, teilen Sie die Gleichung durch x^2 und benutzen Sie die neue Variable $u = x + x^{-1}$.

- 1.5 Problem vorgestellt von Armenien/Australien für die 35te Internationale Mathematik-Olympiade (stattgefunden in Hong Kong, 12. bis 19. Juli 1994). Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AB = AC$. Nehmen Sie an, dass (i) M ein Mittelpunkt von BC ist, und dass O derjenige Punkt auf der Geraden AM ist, bei dem OB senkrecht auf AB steht; (ii) Q ein beliebiger Punkt auf dem Segment BC ist, verschieden von B und C ; und (iii) E auf der Geraden AB liegt und F auf der Geraden AC liegt, so dass E , Q und F verschieden und kollinear sind. Beweisen Sie mit Viète's Methode, dass OQ genau dann auf EF senkrecht steht, wenn $QE = QF$.



Ren. Cartesius.

Accesit Commentariolus de VITA AUCTORIS.

R. Descartes 1596–1650⁹I. Newton 1642–1727⁹*Summa Potestatum.*

$$\begin{aligned}
 sn &\infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n. \\
 snn &\infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n. \\
 sn^3 &\infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn. \\
 sn^4 &\infty \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * -\frac{1}{30}n. \\
 sn^5 &\infty \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 * -\frac{1}{12}nn. \\
 sn^6 &\infty \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 * -\frac{1}{6}n^3 * + \frac{1}{42}n. \\
 sn^7 &\infty \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 * -\frac{2}{24}n^4 * + \frac{1}{12}nn. \\
 sn^8 &\infty \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 * -\frac{7}{15}n^5 * + \frac{2}{9}n^3 * -\frac{1}{30}n. \\
 sn^9 &\infty \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 * -\frac{7}{10}n^6 * + \frac{1}{2}n^4 * -\frac{1}{12}nn. \\
 sn^{10} &\infty \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 * -1n^7 * + 1n^5 * -\frac{1}{2}n^3 * + \frac{5}{66}n.
 \end{aligned}$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius inspexerit, eundem etiam continuare poterit absq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\begin{aligned}
 sn^c &\infty \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} An^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} Bn^{c-3} + \\
 &\frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} Cn^{c-5} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} Dn^{c-7} \dots \&
 \end{aligned}$$

Jak. Bernoulli, Ars conj. 1705¹⁰

^{9, 10} Abbildungen mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève.

I.2 Exponentialfunktion und binomischer Lehrsatz

Hier ist es angemessen, zu bemerken, dass ich x^{-1} , x^{-2} , x^{-3} , x^{-4} , &c. für $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. schreibe, $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, &c. für \sqrt{x} , $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, &c. und $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$ &c. für $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c. Und dies gemäß einem Analogieschluss, den man aus geometrischen Folgen wie dieser hier ersehen kann; x^3 , $x^{\frac{5}{2}}$, x^2 , $x^{\frac{3}{2}}$, x , $x^{\frac{1}{2}}$, x^0 , (d.h. 1;) $x^{-\frac{1}{2}}$, x^{-1} , $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2} , &c. (Newton 1671, *Fluxiones*, Engl. Veröffentl. 1736, S. 3)

Für eine gegebene Zahl a schreiben wir

$$(2.1) \quad a \cdot a = a^2, \quad a \cdot a \cdot a = a^3, \quad a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4, \quad \dots$$

Diese Schreibweise hatte sich nur langsam durchgesetzt, hauptsächlich dank den Arbeiten von Bombelli im Jahr 1572, Simon Stevin in 1585, Descartes und Newton (siehe Zitat). Wenn wir multiplizieren, beispielsweise

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5,$$

erkennen wir die Regel

$$(2.2) \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

In der geometrischen Folge (2.1) ist jeder Term das a -fache seines Vorgängers. Wir können diese Folge auch *nach links hin* fortsetzen, indem wir die Zahlen durch a teilen. Dies führt zu

$$\dots \quad a^{-2} = \frac{1}{a \cdot a}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad \dots,$$

wobei wir Nutzen ziehen aus der Notation

$$(2.3) \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Auf diese Weise gilt Formel (2.2) auch für negative Exponenten. Wenn wir nun mehrfach \sqrt{a} an 1 multiplizieren, wobei a eine positive Zahl sein muss, erhalten wir die geometrische Folge

$$1, \quad \sqrt{a}, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3}, \quad \sqrt{a^4} = a^2, \quad \dots,$$

was uns zur Notation

$$(2.4) \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

veranlasst. Hiermit bleibt Formel (2.2) auch für rationale Exponenten gültig. Wir ziehen dabei nur die *positiven* Wurzeln, so dass $a^{5/2}$ zwischen a^2 und a^3 liegt. Der letzte Schritt (für die Menschheit) liegt in *irrationalen* Exponenten, die, wie Euler uns versichert, „schwerer zu verstehen“ sind. Aber „Sic $a^{\sqrt{7}}$ erit valor determinatus intra limites a^2 et a^3 comprehensus“ bedeutet, dass $a^{\sqrt{7}}$ als Wert zwischen a^2 und a^3 liegt, zwischen $a^{26/10}$ und $a^{27/10}$, zwischen $a^{264/100}$ und $a^{265/100}$, zwischen $a^{2645/1000}$ und $a^{2646/1000}$, und so weiter.

Der binomische Lehrsatz

Obwohl diese Behauptung eine unendliche Zahl an Fällen umfasst, werde ich einen ziemlich kurzen Beweis angeben, allein durch die Annahme zweier Lemmata.

Das erste, das selbstverständlich ist, sagt aus, dass dieses Verhältnis für die zweite Zeile eintritt; denn es ist ziemlich offensichtlich, dass sich φ zu σ verhält wie 1 zu 1.

Das zweite besagt, dass, wenn dieses Verhältnis in irgendeiner Zeile auftritt, es auch in der nächsten Zeile notwendigerweise auftreten muss.

(Pascal 1654, einer der ersten Induktionsbeweise)

Wir wollen den Ausdruck $(a+b)^n$ ausmultiplizieren. Indem wir nacheinander mit $(a+b)$ multiplizieren, erhalten wir jeweils

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= a+b \\
 (2.5) \quad (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,
 \end{aligned}$$

und so weiter. Es erscheint ein interessantes Dreieck von „Binomialkoeffizienten“ (Omar Alkhaijâmâ im Jahr 1080, Tshu shi Kih in 1303, M. Stifel 1544, Cardano 1545, Pascal 1654, siehe Abb. 2.1)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & & \\
 (2.6) & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & &
 \end{array}$$

in dem jede Zahl die Summe ihrer zwei „Übergestellten“ ist. Wir wollen eine allgemeine Regel für diese Koeffizienten finden. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die erste Diagonale nur aus Einsen besteht, und die zweite $(1, 2, 3, \dots)$ aus „ n “. Für die dritte Diagonale $(1, 3, 6, 10, \dots)$ erraten wir „ $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ “, gefolgt von „ $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ “ und so weiter. Dies lässt uns folgenden Satz vermuten.

(2.1) Satz (Pascal 1654). Für $n = 0, 1, 2, \dots$ finden wir

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots$$

Diese Summe ist endlich und endet nach $n+1$ Termen.

Beweis. Wir berechnen das Verhältnis einer jeden Zahl aus (2.6) zu ihrem linken Nachbarn (Pascal 1654, S. 7, „Consequence douziesme“).

was bedeutet, dass wir in der nächsten Zeile dieselbe Struktur vorfinden.

Die Tatsache, dass die Verhältnisse in der n -ten Zeile von (2.7) gegeben sind durch $n/1, (n-1)/2, (n-2)/3, \dots$ impliziert, dass die Koeffizienten von (2.6) ein Produkt dieser Verhältnisse sind; beispielsweise ist die „20“ in der siebten Zeile das Produkt

$$20 = \frac{20}{15} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{6}{1} \stackrel{(2.7)}{=} \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1},$$

und wir sehen ein, dass Satz 2.1 allgemeingültig ist. \square

Diese Koeffizienten

$$(2.10) \quad \frac{n(n-1) \dots (n-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot j} = \frac{n(n-1) \dots (n-j+1)(n-j) \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot j \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-j)} \\ = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{n}{j}$$

werden *Binomialkoeffizienten* genannt, und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ heißt die *Fakultät* von n .

Anwendung auf das Interpolationspolynom. Wir entwickeln die Ausdrücke im Differenzschema (1.25):

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & & & & & & \\ & y_1 - y_0 & & & & & \\ y_1 & & y_2 - 2y_1 + y_0 & & & & \\ & y_2 - y_1 & & y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 & & & \\ y_2 & & y_3 - 2y_2 + y_1 & & & & \\ & y_3 - y_2 & & & & & \\ y_3 & & & & & & \end{array}$$

Das Auftauchen des Pascalschen Dreiecks ist kein Zufall, da jeder Term die Differenz der zwei links von ihm stehenden Terme ist.

Desweiteren ist jeder Term des Schemas (1.25) die *Summe* des Terms über ihm und des Terms rechts von ihm. Damit kann das Schema auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & & & & & & \\ & \Delta y_0 & & & & & \\ y_0 + \Delta y_0 & & \Delta^2 y_0 & & & & \\ & \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^3 y_0 & & & \\ y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & & & \\ & \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & & & & \\ y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & & & & & \end{array}$$

Auch in dieser Richtung erscheint wieder das Pascalsche Dreieck. Formel (2.10) ergibt damit

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1} \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

womit Satz 1.2 bewiesen ist.

Negative Exponenten. Wir beginnen mit

$$(a + b)^{-1} = \frac{1}{a + b}.$$

Wenn wir annehmen, dass $|b| < |a|$, so ist eine erste Annäherung an dieses Verhältnis schlicht $1/a$. Wir versuchen, diesen Wert durch eine unbekannte Größe δ zu verbessern:

$$\frac{1}{a + b} = \frac{1}{a} + \delta \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + \frac{b}{a} + a\delta + b\delta.$$

Da $|b| < |a|$, vernachlässigen wir den Term $b\delta$ und erhalten $\delta = -b/a^2$. Wiederholen wir diesen Prozess wieder und wieder (oder, um präziser zu sein, fahren mit einer Induktion fort), finden wir

$$(2.11) \quad (a + b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \dots,$$

was dasselbe ist wie Satz 2.1 für $n = -1$; doch dieses Mal ist die Reihe *unendlich lang*.

Wenn wir (2.11) mit a multiplizieren und $x = b/a$ einsetzen, erhalten wir

$$(2.12) \quad \boxed{\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots} \quad |x| < 1,$$

die berühmte *geometrische Reihe* (Viète 1593).

Quadratwurzeln. Als nächstes betrachten wir $(a + b)^{1/2} = \sqrt{a + b}$. Wieder nehmen wir an, dass b klein ist, so dass $\sqrt{a + b} \approx \sqrt{a}$, und suchen nach einem δ , so dass

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \delta$$

eine bessere Annäherung ist. Quadrieren liefert

$$a + b = (\sqrt{a} + \delta)^2 = a + 2\sqrt{a}\delta + \delta^2.$$

Da δ klein ist, vernachlässigen wir δ^2 und erhalten $\delta = b/(2\sqrt{a})$, also

$$(2.13) \quad \boxed{\sqrt{a + b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}}, \quad |b| \ll a.$$

Beispiel. Berechnung von $\sqrt{2}$. Wir beginnen mit dem Schätzwert $v = 1,4$ und setzen $a = v^2$ und $b = 2 - a = 2 - v^2$ ein. Dann gibt uns (2.13) einen neuen Schätzwert

$$v + \frac{2 - v^2}{2v} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{v} + v \right),$$

eine Formel, die wir nun wiederholt anwenden können, mit dem Ergebnis

1, 4
 1, 414285
 1, 4142135642
 1, 4142135623730950499
 1, 4142135623730950488016887242096980790
 1, 41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799 .

Dieselbe Rechnung, durchgeführt in Basis 60, ergibt mit dem Startwert 1, 25 das Resultat 1, 24, 51, 10 (Kommas trennen hier die Ziffern in Basis 60). Dieser Wert wurde auf einer babylonischen Tafel gefunden, die auf 1900 v. Chr. datiert (siehe Abb. 2.2, siehe auch van der Waerden 1954, Kapitel II, Bildtafel 8b). Dies deutet darauf hin, dass Formel (2.13) bereits seit der babylonischen und griechischen Antike angewandt wird.

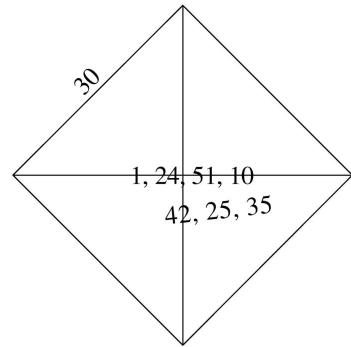


ABB. 2.2. Auf der babylonischen Keilschrift-Tafel YBC 7289 von 1900 v. Chr. ist ein Quadrat der Seitenlänge 30 abgebildet, die Diagonale wird mit 42, 25, 35 angegeben, und das Verhältnis mit 1, 24, 51, 10.²

Nächster Schritt (Alkalsâdî etwa 1450, Briggs 1624). Um (2.13) weiter zu verbessern, betrachten wir

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \delta,$$

berechnen das Quadrat

$$a+b = a + b + \frac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta + \frac{b\delta}{\sqrt{a}} + \delta^2,$$

vernachlässigen die letzten zwei Terme, und erhalten

$$(2.14) \quad \boxed{\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}.}$$

² Abbildung mit Erlaubnis der Yale Babylonian Collection.

Beispiel. Für $\sqrt{2}$ liefert die neue Approximation diesmal

$$v + \frac{2 - v^2}{2v} - \frac{4 - 4v^2 + v^4}{8v^3} = \frac{3v}{8} + \frac{3}{2v} - \frac{1}{2v^3},$$

deren wiederholte Anwendung, beginnend mit $v = 1, 4$, sehr schnell konvergiert:

1,4
1,4142128
1,41421356237309504870
1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317643 .

Die Gleichungen (2.13) und (2.14) werden deutlich übersichtlicher, wenn wir durch \sqrt{a} teilen, und b/a durch x ersetzen:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Mit dem Ziel noch besserer Annäherungen können wir die obigen Rechnungen weiterführen. Das Ergebnis wird eine Reihe der Form

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots,$$

sein, deren Koeffizienten b, c, d, \dots wir noch bestimmen müssen. Setzen wir diese Darstellung ein in die Beziehung $(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+x$ und vergleichen die Potenzen von x miteinander, so erhalten wir $b = -1/8$, $c = 1/16$, $d = -5/128, \dots$, was sofort zu einer besseren Approximation führt (Newton 1665):

(2.15)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Wir stellen überdies fest

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} &= -\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2}, & \frac{1}{16} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\ -\frac{5}{128} &= -\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)(\frac{1}{2} - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \end{aligned}$$

was uns vermuten lässt, dass Satz 2.1 auch für $n = 1/2$ gültig ist. Die Folge $1+x/2, 1+x/2-x^2/8, \dots$ ist in Abb. 2.3 skizziert und illustriert die Konvergenz von (2.15) gegen $\sqrt{1+x}$ für $-1 < x < 1$.

Beliebige rationale Exponenten.

Alles dies geschah in den zwei Jahren der Seuche 1665 und 1666, denn zu dieser Zeit war ich in der Blüte meiner Jahre als Erfinder, und widmete mich der Mathematik und Philosophie mehr als zu jeder späteren Zeit.

(Newton, zitiert nach Kline 1972, S. 357)

Einer von Newtons Einfällen in jenen „anni mirabiles“, inspiriert von der Arbeit von Wallis (siehe die Bemerkung, die auf Gl. (5.27) folgt), war der Versuch, die

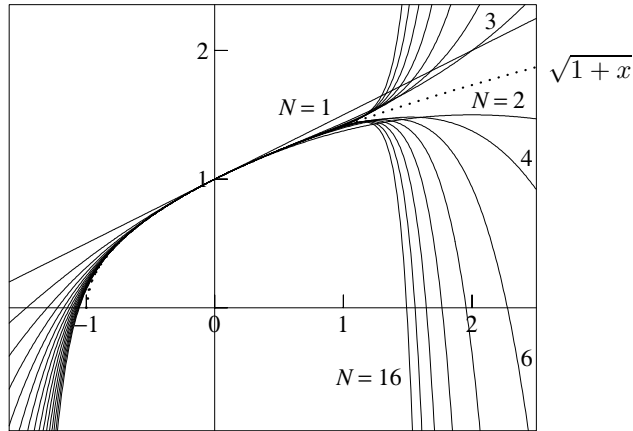


ABB. 2.3. Reihe für $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$

Polynome $(1+x)^0, (1+x)^1, (1+x)^2, \dots$ zu *interpolieren*, mit dem Ziel, eine Reihe für $(1+x)^a$ mit rationalem a zu finden. Dies bedeutet, dass wir die Koeffizienten in Satz 2.1 interpolieren müssen (siehe Abb. 2.4). Da letztere *selber* Polynome in n sind, ist klar, dass das Resultat durch denselben Ausdruck gegeben sein muss, wenn man n durch a ersetzt. Wir erhalten somit den allgemeinen Satz.

(2.2) Satz (Allgemeiner binomischer Lehrsatz von Newton). *Für jedes rationale a und für $|x| < 1$ gilt*

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$x = \frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{8192}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{32768}$
$x = \frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{6561}$	$\frac{1}{19683}$	$\frac{1}{59049}$	$\frac{1}{177147}$	$\frac{1}{531441}$	$\frac{1}{1594323}$	$\frac{1}{4782969}$	$\frac{1}{14348907}$
$x = \frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{16384}$	$\frac{1}{65536}$	$\frac{1}{262144}$	$\frac{1}{1048576}$	$\frac{1}{4194304}$	$\frac{1}{16777216}$	$\frac{1}{67108864}$	$\frac{1}{268435456}$	$\frac{1}{1073741824}$
$x = \frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{3125}$	$\frac{1}{15625}$	$\frac{1}{78125}$	$\frac{1}{390625}$	$\frac{1}{1953125}$	$\frac{1}{9765625}$	$\frac{1}{48828125}$	$\frac{1}{244140625}$	$\frac{1}{1220703125}$	$\frac{1}{6103515625}$	$\frac{1}{30517578125}$
$x = \frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{1296}$	$\frac{1}{7776}$	$\frac{1}{46656}$	$\frac{1}{279936}$	$\frac{1}{1679616}$	$\frac{1}{10077696}$	$\frac{1}{60466176}$	$\frac{1}{362817024}$	$\frac{1}{2176902144}$	$\frac{1}{13061412864}$	$\frac{1}{78368477184}$	$\frac{1}{470210863104}$
$x = \frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{343}$	$\frac{1}{2401}$	$\frac{1}{16807}$	$\frac{1}{117649}$	$\frac{1}{823543}$	$\frac{1}{5724353}$	$\frac{1}{39810119}$	$\frac{1}{276681833}$	$\frac{1}{1936772831}$	$\frac{1}{13557409817}$	$\frac{1}{94901868719}$	$\frac{1}{664313081033}$	$\frac{1}{4650191567231}$

ABB. 2.4. Interpolation des Pascalschen Dreiecks, Newtons Originalmanuskript (1665)³

Selbst Newton empfand das Interpolationsargument als gefährlich. Euler gab den allgemeinen Satz in seiner *Introductio* (1748, §71) ohne weiteren Beweis oder Kommentar wieder („ex hoc theoremate universali“). Erst Abel sah Bedarf für einen strengen Beweis, ein Jahrhundert später (siehe Abschnitt III.7 unten).

Bemerkung. Dies ist genau die Formel, die auf Newtons Grabstein in Westminster Abbey 1727 eingraviert wurde. Versuchen Sie nicht, sie zu finden . . . in den letzten hundert Jahren war die Formel unlesbar.

Die Exponentialfunktion

. . . ubi e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est 1.
(erste Definition von e ; Euler 1736b, *Mechanica*, S. 60)

Ursprünge. 1. F. de Beaune (1601–1652) war der erste Leser von Descartes' „Géométrie“ aus dem Jahr 1637. Ein Jahr später stellte er Descartes das folgende geometrische Problem: Man finde eine Kurve $y(x)$, so dass für jeden Punkt P der Abstand zwischen den Punkten V und T, die die Schnittpunkte zwischen der x -Achse und der vertikalen bzw. tangentialen Linie sind, stets konstant a ist (siehe Abb. 2.5a). Trotz den Anstrengungen von Descartes und Fermat blieb dieses Problem für fast 50 Jahre ungelöst. Leibniz (1684, „... tentavit, sed non solvit“) schlug dann folgende Lösung vor (siehe Abb. 2.5b): Sei (x, y) ein bereits gegebener Punkt auf der Lösungskurve. Sodann erhöhe man x um einen kleinen Betrag b , so dass sich y (aufgrund der Ähnlichkeit zweier Dreiecke) um yb/a erhöht. Man wiederhole diesen Prozess, und erhalte eine Folge von Funktionswerten

$$y, \quad \left(1 + \frac{b}{a}\right) y, \quad \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 y, \quad \left(1 + \frac{b}{a}\right)^3 y, \dots$$

für die Abszissen $x, x + b, x + 2b, x + 3b, \dots$

2. Fragen der Form „Wenn die Bevölkerung einer bestimmten Region jährlich um ein Dreißigstel wächst, und diese Region zu einem Zeitpunkt 100.000 Einwohner hatte, wie hoch wäre dann die Bevölkerung 100 Jahre später?“ (Euler 1748, *Introductio* §110) oder „Ein bestimmter Mann lieh sich 400.000 Gulden zum Wucherzins von fünf Prozent im Jahr . . .“ (*Introductio* §111) führen zur Berechnung von Ausdrücken der Art

$$(2.16) \quad \left(1 + \frac{1}{30}\right)^{100}, \quad (1 + 0.05)^N, \quad \text{oder allgemein} \quad (1 + \omega)^N,$$

wobei ω klein ist und N groß.

³ Abb. 2.4 mit Genehmigung der Cambridge University Press.

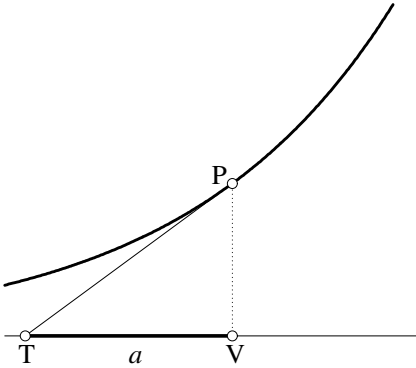


ABB. 2.5a. Beaunesche Aufgabe

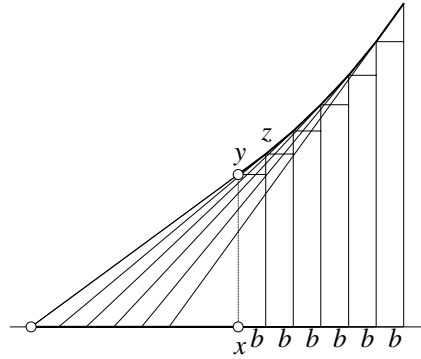


ABB. 2.5b. Leibniz' Lösung

Die Eulersche Zahl. Nehmen wir zunächst mal an, dass $\omega = \frac{1}{N}$. Wir berechnen (2.16) mit Hilfe von Satz 2.1 zu

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N &= 1 + \frac{N}{N} + \frac{N(N-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{N^3} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1(1 - \frac{1}{N})}{1 \cdot 2} + \frac{1(1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Ohne mit der Wimper zu zucken, behauptet Euler nun: „Wenn N eine Zahl ist größer als jede bestimmbare Zahl, dann ist $\frac{N-1}{N}$ gleich 1“. Dies zeigt, dass, wenn N gegen Unendlich strebt, $(1 + \frac{1}{N})^N$ gegen die sogenannte *Eulersche Zahl*

$$(2.17) \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

konvergiert. Wir möchten betonen, dass dieses Argument gefährlich ist, da es unendlich oft angewendet werden muss. So könnte man durch einen ähnlichen „Beweis“ zeigen:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N} = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Wir werden auf diese Frage in Abschnitt III.2 zurückkommen. Tabelle 2.1 vergleicht die Güte der Konvergenz der Reihe (2.17) mit der von $(1 + \frac{1}{N})^N$.

Potenzen von e . Als nächstes betrachten wir in (2.16) den Fall $\omega = x/N$, wobei x eine feste, z.B. rationale Zahl ist. Das bedeutet, dass wir gleichzeitig N gegen Unendlich und ω gegen Null streben lassen, in der Weise, dass ihr Produkt konstant gleich x bleibt. Dieselbe Rechnung wie zuvor führt uns nun zum Ergebnis

$$(2.18) \quad \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

TABELLE 2.1. Berechnung von e

N	$(1 + \frac{1}{N})^N$	$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!}$
1	2,000	2,0
2	2,250	2,5
3	2,370	2,66
4	2,441	2,708
5	2,488	2,7166
6	2,522	2,71805
7	2,546	2,718253
8	2,566	2,7182787
9	2,581	2,71828152
10	2,594	2,718281801
11	2,604	2,7182818261
12	2,613	2,71828182828
13	2,621	2,718281828446
14	2,627	2,7182818284582
15	2,633	2,71828182845899
16	2,638	2,7182818284590422
17	2,642	2,71828182845904507
18	2,646	2,718281828459045226
19	2,650	2,7182818284590452349
20	2,653	2,718281828459045235339
21	2,656	2,7182818284590452353593
22	2,659	2,718281828459045235360247
23	2,661	2,7182818284590452353602857
24	2,664	2,718281828459045235360287404
25	2,666	2,7182818284590452353602874687
26	2,668	2,71828182845904523536028747125
27	2,670	2,718281828459045235360287471349
28	2,671	2,71828182845904523536028747135254

Wir können aber auch $M = N/x$, $N = xM$ für jene Werte von N einsetzen, für die M eine ganze Zahl ist. Lassen wir N und M gegen Unendlich streben, bedeutet dies

(2.19)
$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{Mx} = \left(\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right)^x \rightarrow e^x.$$

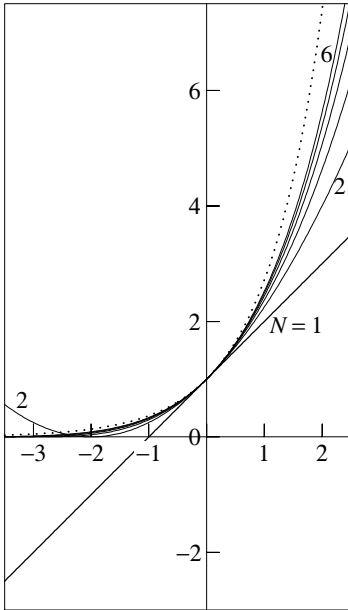
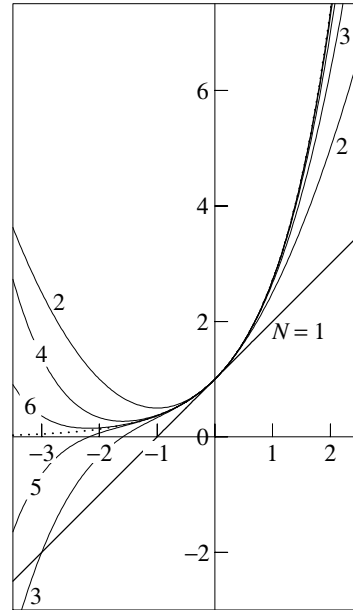
Kombinieren wir (2.18) und (2.19), erhalten wir den folgenden Satz.

(2.3) Satz (Euler 1748, *Introductio* §§123, 125). Für N gegen Unendlich gilt

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

□

Die Konvergenz dieser Ausdrücke gegen e^x (was auch mit $\exp x$ bezeichnet wird) ist in den Abbildungen 2.6a und 2.6b dargestellt. Die gepunktete Linie ist dabei die exakte Funktion e^x .


 ABB. 2.6a. $\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$

 ABB. 2.6b. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Übungen

- 2.1 Beweisen Sie die folgende Formel (Euler 1755, *Opera* Band X, S. 280), nutzen Sie dafür $50 = 2 \cdot 5^2 = 7^2 + 1$:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1 \cdot 3}{100 \cdot 200} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{100 \cdot 200 \cdot 300} + \text{etc.} \right)$$

„quae ad computum in fractionibus decimalibus instituendum est optissima“. Summieren Sie numerisch fünf Terme dieser Reihe.

Hinweis. Arbeiten Sie mit der Reihenentwicklung von $(1 - x)^{-1/2}$.

- 2.2 Zeigen Sie, dass die Zahl, die in Basis 60 als 1,25 geschrieben wird, eine gute Annäherung an $\sqrt{2}$ ist. Zeigen Sie dann, dass eine Iteration des „babylonischen Quadratwurzel-Algorithmus“, der aus Formel (2.13) folgt, zu 1,24,51,10,... führt, dem Wert aus Abb.2.2.

- 2.3 Multiplizieren Sie die Reihe

$$(1 + x)^{1/3} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \dots$$

zweimal mit sich selbst, und bestimmen Sie so die Koeffizienten a, b, c, \dots . Sie sollten folgendes finden:

$$(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3 \cdot 6} x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - + \dots$$

Benutzen Sie $2 \cdot 4^3 - 5^3 = 3$, um hieraus die folgende Formel abzuleiten:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 125} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot (125)^2} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (125)^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (125)^4} + \dots \right).$$

Bemerkung. Die Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$ war eines der großen Probleme der griechischen Mathematik (Verdoppelung des Würfels).

- 2.4 (Bernoullis Ungleichung; Jak. Bernoulli 1689, siehe 1744, *Opera*, S. 380; Barrow 1670, siehe 1860, *Works*, Lectio VII, §XIII, S. 224). Beweisen Sie durch Induktion nach n , dass

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{für } a \geq -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$1-na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na} \quad \text{für } 0 < a < 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

- 2.5 Studieren Sie die Konvergenz von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gegen e , und betrachten Sie dafür die Folgen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < e < \dots < b_3 < b_2 < b_1$$

und $b_n - a_n \leq 4/n$ gelten.

Hinweis. Benutzen Sie die zweite Ungleichung von Übung 2.4 mit $a = 1/n^2$.

I.3 Logarithmen und Flächen

Tabularum autem logarithmicarum amplissimus est usus . . .

(Euler 1748, *Introductio*, §110)

Der Begriff des Logarithmus wird von den Schülern im allgemeinen nur sehr schwer verstanden.

(B.L. van der Waerden 1957, S. 1)

M. Stifel widmete 1544 (siehe Nachbildung in Abb. 3.1) sein Interesse dem Zusammenspiel folgender zweier Folgen:

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

ARITHMETICAE LIBER III. 237									
8. diff. ut plene ostendi lib. 1. capite de geomet. progres.									
Vide ergo,									
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	
Sicut ex additione (in superiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8. sic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Est autem 3 exponens ipsius octonarii, & 5 est exponens numeri 32. & 8 est exponens numeri 256. Item sicut in ordine superiori, ex subtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex divisione 128 per 8, fiunt 16.									

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum..

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

ABB. 3.1. Auszüge aus Stifels Buch (S. 237 und 250)¹

Uns fällt auf, dass der Übergang von der unteren zur oberen Zeile *Produkte in Summen* überführt. So kann man beispielsweise, statt 8 mit 32 „in inferiore ordine“ zu multiplizieren, auch die entsprechenden „Logarithmen“ 3 und 5 „in superiore ordine“ nehmen, ihre Summe (8) berechnen, und zur „inferiore ordine“ zurückkehren, womit man das Produkt $8 \cdot 32 = 256$ findet. Da Addition einfacher ist als Multiplikation, wäre eine detailliertere Tabelle dieser Art von großem Nutzen. Derart „logarithmische“ Tabellen (λόγος ist griechisch für „Wort, Beziehung“, αριθμός steht für „Zahl“, Logarithmen sind folglich nützliche Beziehungen zwischen Zahlen) wurden zuerst von John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) und Jost Bürgi (1620) berechnet.

¹ Abbildung mit Genehmigung der Bibl. Publ. Univ. Genève.

(3.1) Definition. Eine Funktion $\ell(x)$, definiert für positive Werte x , heißt *logarithmische Funktion*, falls für alle $x, y > 0$ gilt:

$$(3.1) \quad \boxed{\ell(x \cdot y) = \ell(x) + \ell(y).}$$

Wenn wir zunächst $y = z/x$ und dann $x = y = 1$ in (3.1) einsetzen, folgt

$$(3.2) \quad \ell(z/x) = \ell(z) - \ell(x),$$

$$(3.3) \quad \ell(1) = 0.$$

Wenden wir (3.1) zweimal auf $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$ an, finden wir

$$(3.4) \quad \ell(x \cdot y \cdot z) = \ell(x) + \ell(y) + \ell(z),$$

und entsprechendes für Produkte von vier oder mehr Faktoren. Desweiteren können wir (3.4) auf $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$ anwenden, wir erhalten daraus $\ell(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\ell(x)$ oder allgemein

$$(3.5) \quad \ell(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n} \ell(x), \quad \text{mit } x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Basen. Sei $\ell(x)$ eine fest vorgegebene logarithmische Funktion. Wir nehmen außerdem an, dass es eine Zahl a gibt, für die $\ell(a) = 1$ ist. Dann wird aus (3.5)

$$(3.6) \quad \ell(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n},$$

d.h., die logarithmische Funktion ist die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion a^x . Wir nennen sie den *Logarithmus zur Basis a* und schreiben

$$(3.7) \quad y = \log_a x \quad \text{falls} \quad x = a^y.$$

Logarithmen zur Basis 10 (*Briggsche Logarithmen*) sind besonders geeignet für numerische Berechnungen, da eine Verschiebung des Dezimalkommas schlicht eine ganze Zahl zum Logarithmus hinzufügt. Die beste Basis für theoretische Arbeiten ist jedoch, wie wir bald sehen werden, die Eulersche Zahl e (*natürlicher Logarithmus*, selten auch *Neperscher*, *Napierscher* oder *hyperbolischer Logarithmus*). Dieser Logarithmus wird gewöhnlich mit $\ln x$ oder $\log x$ bezeichnet.

Eulers „goldene Regel“. Sobald die Logarithmen in *einer* Basis bekannt sind, lassen sich die Logarithmen aller anderen Basen durch eine einfache Division errechnen. Um dies einzusehen, betrachtet man den Logarithmus von $x = a^y$ zur Basis b und benutzt (3.7) und (3.5), also

$$(3.8) \quad \log_b x = y \cdot \log_b a \quad \Rightarrow \quad y = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Berechnung des Logarithmus

Man erhält eine große Zahl an Logarithmen dadurch, dass man die Quadratwurzel der Basis a berechnet, dann die Quadratwurzel der Quadratwurzel usw., wobei sich die Logarithmen mittels (3.6) stets halbieren. Produkte der Quadratwurzeln liefern mit (3.1) weitere Logarithmen. Dies ist für $a = 10$ in Abb. 3.2 dargestellt.

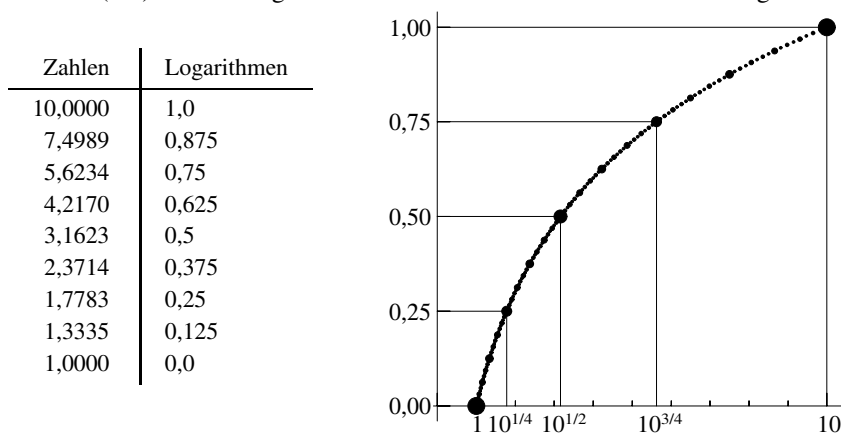


ABB. 3.2. Mehrfache Wurzeln von 10 und ihre Produkte

Es bleibt aber ein Problem: Uns würden vielmehr Logarithmen zu Zahlen wie 2, 3, 4, ... interessieren, als solche zu 4, 2170 oder 2, 3714.

Briggs Methode. Man berechne die Wurzel von 10, dann die Wurzel der Wurzel usw., 54 Mal (siehe die Nachbildung in Abb. 3.3). Mit $c = 1/2^{54}$ ergibt dies

$$(3.9a) \quad 10^c = 1,00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35 = 1 + a.$$

Sodann berechne man auf dieselbe Weise die iterierten Wurzeln von 2:

$$(3.9b) \quad 2^c = 1,00000\ 00000\ 00000\ 03847\ 73979\ 65583\ 10 = 1 + b.$$

Wir wollen den Wert von $x = \log_{10} 2$ berechnen, dieser erfüllt $2 = 10^x$. Folglich gilt

$$1 + b \stackrel{(3.9b)}{=} 2^c = (10^c)^x \stackrel{(3.9a)}{=} (1 + a)^x \stackrel{(\text{Satz 2.2})}{\approx} 1 + ax$$

und wir finden

$$(3.10) \quad \log_{10}(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3847739796558310}{12781914932003235} \approx 0,3010299956638812.$$

Damit haben wir gerademal *einen* Wert. Die Gesamtarbeit, die für eine *umfangreiche Tabelle* notwendig ist, übertrifft jede Vorstellung.

² Abb. 3.3 mit Erlaubnis der Bibl. Publ. Univ. Genève.

D Numeri continue Medij inter Denariū & Unitatē.	E Logarithmi rationales.
10	1,000
13162,77660,16837,93319,98893,54	0,50
17782,79410,05892,28011,97304,13	0,25
13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
11547,81984,68945,81996,61918,213	0,0625
10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
10366,32928,43769,79972,90627,3131	0,015625
10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,0078125
10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390625
10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,001953125
10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,0009765625
10011,24941,39987,98758,85395,51805	0,00048828125
1000,62312,60210,86366,18495,91839	0,000244140625
10002,81116,78773,01323,99249,64315	0,0001220703125
10001,40548,51694,72581,62677,32715	0,00006103515625
10000,70171,78941,14355,38811,70845	0,000030517578125
10000,35135,27746,18566,08581,37077	0,0000152587890625
10000,17567,48442,26738,33846,78274	0,00000762939453125
10000,08783,70363,46121,46574,07431	0,000003814697265625
10000,04391,84217,31672,36281,88083	0,0000019073486328125
10000,02195,91867,55542,03317,07719	0,00000095367421640625
10000,01097,95873,50204,09754,72940	0,000000476837158203125
10000,00548,97921,68211,14662,60250,4	0,0000002384185791015625
10000,00274,48957,07182,95091,25449,9	0,00000011920928955078125
10000,00137,24477,59510,83282,69572,5	0,000000059604644775390625
10000,00068,62238,56210,25737,18748,2	0,0000000298023223876953125
10000,00034,31119,22188,83912,75020,8	0,00000001490116119384765625
10000,00017,15559,95637,84719,93879,1	0,000000007450580596923828125
10000,00008,57779,79451,03051,17588,8	0,0000000037252902984619140625
10000,00004,28889,89633,54198,42901,3	0,00000000186264514923095703125
10000,00002,14444,94793,77767,42970,4	0,000000000931322574615478515625
10000,00001,07222,47391,14050,76926,8	0,0000000004656612873077392578125
10000,00000,53611,23694,13317,14831,4	0,000000000232830643165386962890625
10000,00000,26805,61846,70731,51508,7	0,0000000001164152522874824453125
10000,00000,13402,80923,26383,99277,7	0,0000000000582076609134674072265625
10000,00000,06701,40461,60946,55519,6	0,00000000002910383045673370361328125
10000,00000,03350,70230,79911,91730,0	0,00000000001451512283368851806640625
10000,00000,01675,35115,39815,61857,6	0,0000000000072759576141834259033203125
10000,00000,00837,67557,69872,72426,9	0,00000000000363797880709171295166015625
10000,00000,00418,83773,84927,59087,9	0,000000000001818989403545856475830078125
10000,00000,00209,41889,42461,60262,5	0,00000000000090904947017729282379150390625
10000,00000,00104,70944,71230,25311,0	0,00000000000045474735088646411895751953125
10000,00000,00052,35472,35014,98950,4	0,0000000000002273736754432320594787597656
10000,00000,00026,17736,17807,46048,9	0,0000000000001136868377216160297393798828
10000,00000,00013,08868,08903,72167,3	0,0000000000000568434188608080148696899414
10000,00000,00006,54434,04451,85869,75	0,0000000000000284217094304040074343449707
10000,00000,00003,27217,02225,92881,337	0,0000000000000142108547192020037174224853
10000,00000,00001,63608,51112,96427,283	0,0000000000000070150427357601001858712426
10000,00000,00000,81804,25556,48210,295	0,0000000000000035527136788005009293556213
10000,00000,00000,40902,12778,24104,311	0,0000000000000017673568394002504646778106
10000,00000,00000,20451,06389,12051,946	0,0000000000000008881784197001252323389053
10000,00000,00000,10225,53194,56025,921	0,0000000000000004440892098500626161694526
10000,00000,00000,05112,76597,28012,947M	0,000000000000000220446049250313080847263
10000,00000,00000,02556,38298,64006,479N	0,0000000000000001110223024625156540423631
10000,00000,00000,01273,19149,32003,235P	0,000000000000000055511151232578270211815

ABB. 3.3. Briggs Berechnung der iterierten Wurzeln von 10, Briggs (1624)²

Interpolation. Ein wichtiges Werkzeug zur schnellen Berechnung von Logarithmen war in der damaligen Zeit die Interpolation. Angenommen, wir haben bereits vier Werte von \log_{10} berechnet. Wir können leicht ihr Differenzenschema berechnen:

$$\begin{array}{rcl}
 \log(44) = 1,6434526765 & & \\
 & 0,0097598373 & \\
 \log(45) = 1,6532125138 & & -0,0002145194 \\
 & 0,0095453179 & \underline{\quad\quad\quad} \\
 \log(46) = 1,6627578317 & & -0,0002052917 \quad \underline{\quad\quad\quad} 0,0000092277. \\
 & 0,0093400262 & \\
 \log(47) = 1,6720978579 & &
 \end{array}$$

Satz 1.2 (mit verschobenen Koordinaten) erlaubt uns, das Interpolationspolynom zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad p(x) = & 1,6434526765 + (x - 44) \left(0,0097598373 \right. \\
 & \left. + \frac{x - 45}{2} \left(-0,0002145194 + \frac{x - 46}{3} \cdot 0,0000092277 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Einige ausgewählte Werte sind in Tabelle 3.1 mit ihren Abweichungen von den echten Werten wiedergegeben. Trotz der Einfachheit der Rechnung sind die Abweichungen sehr gering. Indem man weitere Stützpunkte hinzufügt, lässt sich die Präzision erhöhen, falls gewünscht.

TABELLE 3.1. Abweichungen vom Interpolationspolynom

x	$p(x)$	$\log_{10}(x)$	Differenz
44,25	1,645913252	1,645913275	$2,34 \cdot 10^{-8}$
44,50	1,648359987	1,648360011	$2,42 \cdot 10^{-8}$
44,75	1,650793026	1,650793040	$1,35 \cdot 10^{-8}$
45,25	1,655618594	1,655618584	$-1,05 \cdot 10^{-8}$
45,50	1,658011411	1,658011397	$-1,43 \cdot 10^{-8}$
45,75	1,660391109	1,660391098	$-1,04 \cdot 10^{-8}$
46,25	1,665111724	1,665111737	$1,32 \cdot 10^{-8}$
46,50	1,667452930	1,667452953	$2,34 \cdot 10^{-8}$
46,75	1,669781593	1,669781615	$2,24 \cdot 10^{-8}$

Bevor wir mit dem Logarithmenkalkül fortfahren, fügen wir einen kurzen Exkurs in die Geometrie ein.

Berechnung von Flächen

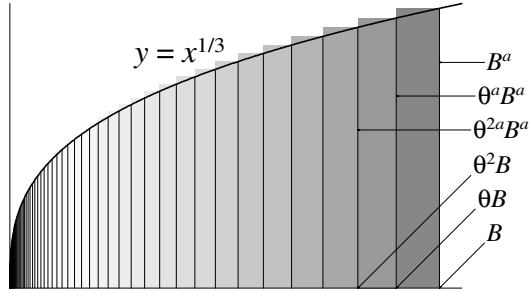
Die Bestimmung von Flächen und Volumina fasziniert Mathematiker seit der griechischen Antike. Zwei der größten Errungenschaften von Archimedes (283–212 v. Chr.) waren die Berechnungen der Flächen der Parabel und des Kreises. Im

frühen 17ten Jahrhundert trat dann die Berechnung von Flächen unter Kurven der Form $y = x^a$ ins Rampenlicht, sowohl für ganze Zahlen a als auch für beliebige (Bonaventura Cavalieri, Roberval, Fermat).

Problem. Sei a gegeben. Man bestimme die Fläche unter der Kurve $y = x^a$ zwischen den Schranken $x = 0$ und $x = B$.



ABB. 3.4a. Fermat 1601–1655

ABB. 3.4b. Fermats Berechnung der Fläche unter x^a

Lösung (Fermat 1636). Wir wählen ein θ , das nahe an, aber kleiner als 1 ist, und betrachten die Rechtecke, die von der geometrischen Folge $B, \theta B, \theta^2 B, \theta^3 B, \dots$ (Abb. 3.4b) herrühren, mit ihren Höhen $B^a, \theta^a B^a, \theta^{2a} B^a, \theta^{3a} B^a, \dots$. Dann kann die gesuchte Fläche annähernd durch eine geometrische Reihe berechnet werden,

$$\begin{aligned}
 & \text{erstes Rechteck} + \text{zweites Rechteck} + \text{drittes Rechteck} + \dots \\
 &= B(1 - \theta)B^a + B(\theta - \theta^2)\theta^a B^a + B(\theta^2 - \theta^3)\theta^{2a} B^a + \dots \\
 (3.12) \quad &= B^{a+1}(1 - \theta) \underbrace{(1 + \theta^{a+1} + \theta^{2a+2} + \dots)}_{\text{geometrische Reihe}} = B^{a+1} \frac{1 - \theta}{1 - \theta^{a+1}},
 \end{aligned}$$

solange nur $a + 1 > 0$ bzw. $a > -1$ gilt (siehe Gl. (2.12)). Sei nun $\theta = 1 - \varepsilon$ mit kleinem ε . Dann ist $1 - \theta = \varepsilon$, $\theta^{a+1} = 1 - (a + 1)\varepsilon + \dots$ nach Satz 2.2. Wir finden

$$\frac{1 - \theta}{1 - \theta^{a+1}} \approx \frac{\varepsilon}{(a + 1)\varepsilon} = \frac{1}{a + 1} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Die Summe der Rechtecke (3.12) approximiert die Fläche S von oben (für $a > -1$). Wenn wir nun die Höhen der Rechtecke durch $\theta^a B^a, \theta^{2a} B^a, \dots$ ersetzen, erhalten wir eine Approximation von S von unten. In diesem Fall wird der Wert (3.12) schlicht mit θ^a multipliziert, was für $\theta \rightarrow 1$ gegen 1 strebt. Damit müssen beide Näherungen gegen denselben Wert streben, wir erhalten das folgende Resultat.

(3.2) Satz (Fermat 1636). Die Fläche unter der Kurve $y = x^a$ zwischen den Schranken $x = 0$ und $x = B$ ist gegeben durch

$$S = \frac{B^{a+1}}{a + 1} \quad \text{falls } a > -1. \quad \square$$

Fläche unter der Hyperbel und natürlicher Logarithmus

Im Monat September 1668 veröffentlichte *Mercator* seine Logarithmotechnica, welche ein Beispiel dieser Methode (d.h. der unendlichen Reihen) für einen einzigen Fall beinhaltet, nämlich die Quadratur der Hyperbel.
(Brief an Collins, 26. Juli 1672)

Fermats Methode lässt sich nicht auf die Hyperbel $y = 1/x$ anwenden. Tatsächlich wird aus der *geometrischen* Folge der Abszissen $B, \theta B, \theta^2 B, \theta^3 B, \dots$ die Summe $(1 - \theta)(1 + 1 + 1 + \dots)$ für die Flächen, deren Partialsummen eine *arithmetische* Folge beschreiben. Dies motivierte die folgende Entdeckung von Grégoire de Saint-Vincent im Jahr 1647 und Alfons Antonius de Sarasa im Jahr 1649 (siehe Kline 1972, S. 354): *Die Fläche unter der Hyperbel $y = 1/x$ ist ein Logarithmus* (siehe Abb. 3.5).

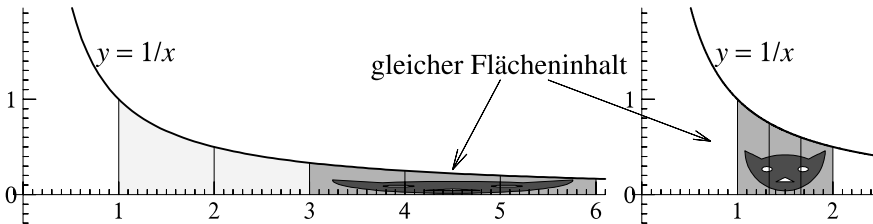


ABB. 3.5. Die Fläche unter der Hyperbel ist ein Logarithmus

Durch Kontraktion der x -Koordinaten und Strecken der y -Koordinaten stellen wir fest, dass beispielsweise Fläche $(3 \rightarrow 6) = \text{Fläche } (1 \rightarrow 2)$. Damit haben wir

$$\text{Fläche } (1 \rightarrow 3) + \text{Fläche } (1 \rightarrow 2) = \text{Fläche } (1 \rightarrow 6).$$

Dies bedeutet, dass die Funktion $\ln(a) = \text{Fläche } (1 \rightarrow a)$ die Identität

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

erfüllt und folglich ein Logarithmus ist (der „natürliche“ Logarithmus).

Die Mercator-Reihe. Wenn wir den Ursprung um 1 verschieben, sehen wir, dass $\ln(1 + a)$ die Fläche unter $1/(1 + x)$ zwischen 0 und a ist. Wir ersetzen $1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ mittels Formel (2.12) und fügen für die Flächen unter $1, x, x^2, \dots$ zwischen 0 und a die Ausdrücke aus Satz 3.2 ein:

$$a, \quad \frac{a^2}{2}, \quad \frac{a^3}{3}, \quad \frac{a^4}{4}, \quad \dots$$

(siehe Abb. 3.6). Auf diese Weise finden wir, wenn wir noch a durch x ersetzen (N. Mercator 1668)

$$(3.13) \quad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

³ Fermats Porträt, abgebildet mit Genehmigung der Bibl. Math. Univ. Genève.

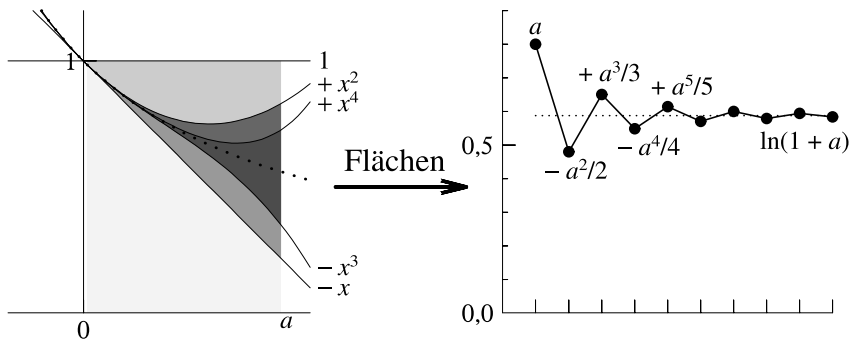


ABB. 3.6. Integration der geometrischen Reihe Term für Term

Die Konvergenz dieser Reihe ist für verschiedene Werte von x in Abb.3.7 zu sehen. Mit dem Wert $x = 1$ wird die Reihe zu

(3.13a)
$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots,$$

einer wunderschönen Formel von begrenztem Nutzen (siehe Tabelle 3.1). Für noch größere Werte von x konvergiert die Reihe überhaupt nicht mehr.

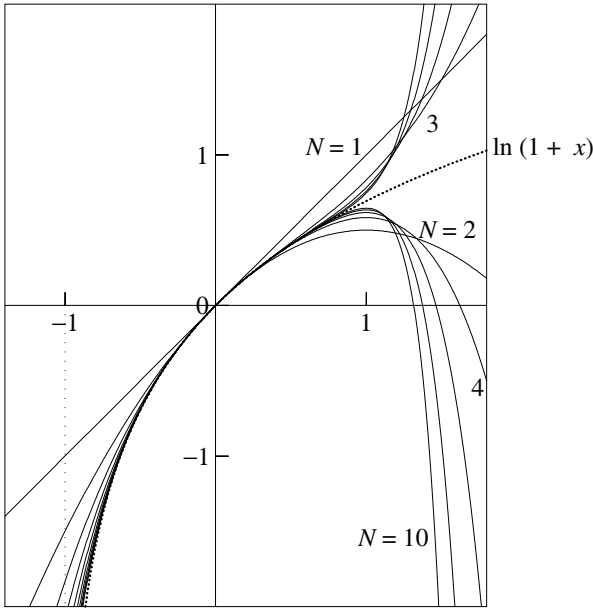


ABB. 3.7. Konvergenz von $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^N}{N}$ gegen $\ln(1+x)$

Die Gregorysche Reihe. Wir ersetzen in (3.13) die Unbekannte x durch $-x$:

$$(3.14) \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

und ziehen diese Gleichung von (3.13) ab. Dies liefert (Gregory 1668)

$$(3.15) \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \right).$$

Beispiele. Setzen wir $x = 1/2$ in (3.14) und $x = 1/3$ in (3.15) ein, so erhalten wir die folgenden zwei Reihen für $\ln 2$:

$$(3.14a) \quad \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$(3.15a) \quad \ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right).$$

Tabelle 3.2 stellt die Güte der Konvergenz gegen $\ln 2$ der drei Reihen (3.13a), (3.14a) und (3.15a) einander gegenüber. Es ist offensichtlich, welche Reihe die beste ist.

TABELLE 3.2. Konvergenz der Reihen für $\ln 2$

n	(3.13a)	(3.14a)	(3.15a)
1	1,000	0,500	0,667
2	0,500	0,625	0,6914
3	0,833	0,667	0,69300
4	0,583	0,6823	0,693135
5	0,783	0,6885	0,6931460
6	0,617	0,6911	0,69314707
7	0,760	0,69226	0,693147170
8	0,635	0,69275	0,6931471795
9	0,746	0,69297	0,693147180559
10	0,646	0,693065	0,6931471805498
11	0,737	0,693109	0,6931471805589
12	0,653	0,693130	0,69314718055984

Berechnung von $\ln p$ für Primzahlen ≥ 3 . Nutzt man (3.1), so reicht es aus, die Logarithmen der Primzahlen zu kennen. Die Logarithmen zusammengesetzter ganzer Zahlen und rationaler Zahlen erhält man sodann über Addition und Subtraktion. Will man den Logarithmus einer Primzahl p berechnen, so teilt man p durch eine Zahl in ihrer Nähe, deren Logarithmus bereits bekannt ist. Dann kann man einen kleinen Wert für x in Reihe (3.15) einsetzen, die sehr schnell konvergiert. Zum Beispiel können wir für $p = 3$ ansetzen:

$$3 = \frac{3}{2} \cdot 2, \quad \frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5},$$

so dass gilt

$$(3.16) \quad \ln 3 = \ln \frac{3}{2} + \ln 2 = \ln \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} + \ln 2.$$

Eine Alternative bildet $3 = (3/4) \cdot 4$, was zu

$$(3.17) \quad \ln 3 = 2 \ln 2 - \ln \frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}$$

führt. Noch besser ist, man benutzt das *geometrische Mittel* der obigen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 3 &= \sqrt{\frac{9}{8}} \cdot \sqrt{8} \Rightarrow \ln 3 = \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{17}}{1 - \frac{1}{17}} \\
 5 &= \sqrt{\frac{25}{24}} \cdot \sqrt{24} \Rightarrow \ln 5 = \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{49}}{1 - \frac{1}{49}} \\
 7 &= \sqrt{\frac{49}{48}} \cdot \sqrt{48} \Rightarrow \ln 7 = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{97}}{1 - \frac{1}{97}},
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

und so weiter. Je größer p ist, desto schneller konvergiert Reihe (3.15). Die ersten Werte, die man auf diese Weise erhält, lauten:

$\ln(1) = 0,00000000000000000000000000$
 $\ln(2) = 0,693147180559945309417232121458$
 $\ln(3) = 1,098612288668109691395245236923$
 $\ln(4) = 1,386294361119890618834464242916$
 $\ln(5) = 1,609437912434100374600759333226$
 $\ln(6) = 1,791759469228055000812477358381$
 $\ln(7) = 1,945910149055313305105352743443$
 $\ln(8) = 2,079441541679835928251696364375$
 $\ln(9) = 2,197224577336219382790490473845$
 $\ln(10) = 2,302585092994045684017991454684.$

Diese eindrucksvolle Verfeinerung des Rechenverfahrens seit Briggs wurde in nur wenigen Jahrzehnten (zwischen 1620 und 1670) erarbeitet. Sie verdeutlicht wieder einmal den enormen Fortschritt, der in der Mathematik durch das Erscheinen von Descartes' „La Géométrie“ ausgelöst wurde.

Zusammenhang zur Eulerschen Zahl. Der Zusammenhang zwischen e und dem natürlichen Logarithmus (in seiner Definition als Fläche unter der Hyperbel) wird durch folgenden Satz hergestellt.

(3.3) Satz. Der natürliche Logarithmus $\ln x$ ist der Logarithmus zur Basis e .

Beweis. Wir wenden den natürlichen Logarithmus auf die Formel aus Satz 2.3 an. Zusammen mit (3.5) und (3.13) ergibt dies

$$\ln\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = N \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{N}\right) = N \cdot \left(\frac{x}{N} - \frac{x^2}{2N^2} + \dots\right) \rightarrow x,$$

so dass $\ln e^x = x$ sein muss.

1

Dies liefert uns eine geometrische Interpretation von e : Die Eulersche Zahl ist diejenige Zahl e , für die die Fläche unter der Hyperbel $y = 1/x$ zwischen 1 und e gerade 1 ist (siehe Abb. 3.8).

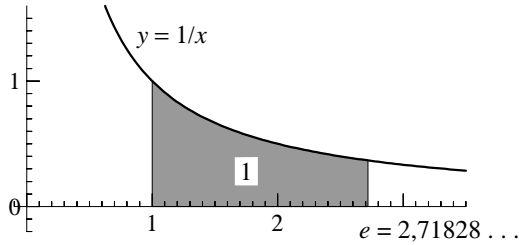


ABB. 3.8. Geometrische Bedeutung von e

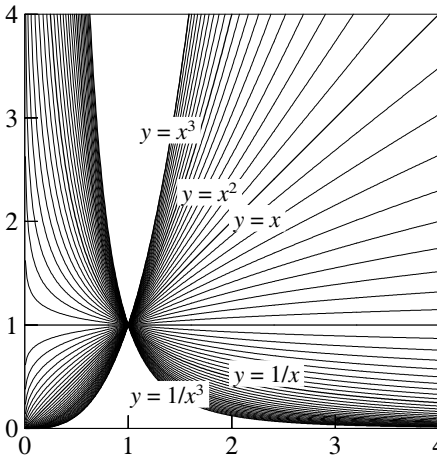


ABB. 3.9a. Funktionen $y = x^a$

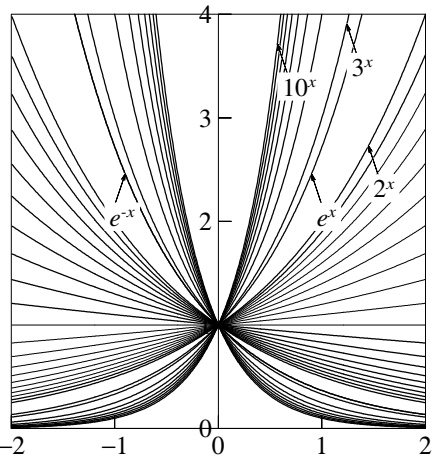


ABB. 3.9b. Funktionen $y = a^x$

Beliebige Potenzen. Logarithmen erlauben es uns, beliebige Potenzen wie folgt zu berechnen (und zu definieren) (Joh. Bernoulli 1697, *Principia Calculi Exponentialium, Opera*, Band I, S. 179): Wir nutzen $a = e^{\ln a}$ und erhalten

(3.19)

$$a^b = (e^{\ln a})^b = e^{b \ln a}.$$

Graphen der Funktionen (3.19), sei es als Funktionen von a oder als Funktionen von b , sind in den Abbildungen 3.9a und 3.9b dargestellt.

Übungen

- 3.1 (Newton 1671, *Method of Fluxions*, Euler 1748, *Introductio*, §123). Zeige dass man aus $2 = (4/3) \cdot (3/2)$ erhält:

$$\ln 2 = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}\right), \quad \ln 3 = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right) + \ln 2,$$

was eine gleichzeitige Berechnung von $\ln 2$ und $\ln 3$ mittels der schnell konvergierenden Reihe (3.15) erlaubt.

- 3.2 (Newton 1669, *Inventio Basis ex Area data*). Angenommen, die Fläche z unter der Hyperbel ist gegeben durch die Formel

$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

Finden Sie eine Reihenentwicklung von $x = e^z - 1$ von der Form

$$x = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

und (re)konstruieren Sie damit die Reihe der Exponentialfunktion.

I.4 Trigonometrische Funktionen

Sybil: Es geht zurück auf die Anfänge der Zivilisation.

(J. Cleese & C. Booth 1979, *Fawlty Towers*, *The Psychiatrists*)

Winkelmessung. Eine der ältesten Anwendungen der Geometrie ist die Bestimmung von Winkeln, insbesondere für astronomische Zwecke. Die Babylonier teilten dafür den Kreis in 360° , wahrscheinlich weil dies die ungefähre Zahl an Tagen im Jahr ist. Ein halber Kreis entspricht dann 180° , ein rechter Winkel 90° , und das gleichseitige ebene Dreieck hat 60° -Winkel (siehe Abb. 4.1a). Ptolemäus⁴, verfeinerte im Jahr 150 in seinem *Almagest* die Winkelmessungen, indem er die nächste Ziffer des damals aktuellen Zahlensystems in Basis 60 einbezog, *partes minutae primae* (erste kleine Unterteilungen) und *partes minutae secundae* (zweite kleine Unterteilungen). Aus ihnen entwickelten sich unsere „Minuten“ und „Sekunden“. Doch gibt es noch andere Systeme als die 360° -Zerlegung. Viele andere Einheiten können benutzt werden, beispielsweise wird in einigen technischen Anwendungen in einem System gerechnet, in dem ein rechter Winkel aus 100 „Gon“ besteht. Wie im Fall der Logarithmen gibt es jedoch auch hier ein *natürliches Maß*, das auf der Bogenlänge eines Kreises vom Radius 1 basiert, das *Bogenmaß* (siehe Abb. 4.1b). Dabei ist die Bogenlänge eines Halbkreises, geschrieben in der Genauigkeit, die von Th. F. de Lagny im Jahr 1719 angegeben und von Euler reproduziert wurde (mit einem Fehler an der 113ten Dezimalstelle, der hier korrigiert ist),

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510
58209749445923078164062862089986280348253421170679
821480865132823066470938446

Für diesen etwas unhandlichen Ausdruck prägte W. Jones (1706, S. 243) die Abkürzung π („periphery“, zu deutsch: „Umfang“). Dann beträgt das Bogenmaß des Winkels von 54° aus Abb. 4.1 gerade $54\pi/180 = 0,9425$ rad („Radian“).

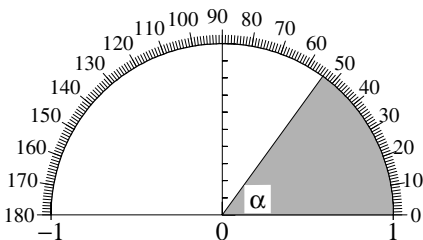
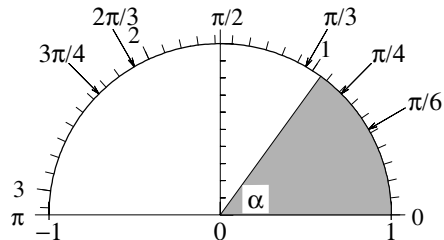


ABB. 4.1a. Babylonische Grade



auf den Winkel schließen, oder umgekehrt. Solche Tabellen haben ihren Ursprung in der griechischen Antike (Hipparch 150 v. Chr. (verloren gegangen) und Ptolemäus 150 n. Chr.). Die Sinusfunktion, die mit der Sehnenfunktion (engl. „chord“) über $\sin \alpha = (1/2) \text{ chord}(2\alpha)$ eng verwandt ist, stammt aus Indien (Brahmagupta um 630) und der europäisch-mittelalterlichen Wissenschaft (Regiomontanus 1464). Sie hieß ursprünglich *sinus rectus* (also senkrechter Sinus) und eignet sich wesentlich besser für Berechnungen am Dreieck als die Sehnenfunktion.

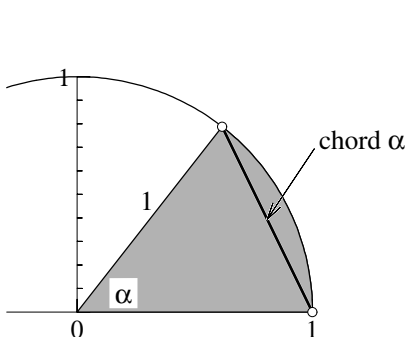


ABB. 4.2. Ptolemäus' Sehnenfunktion

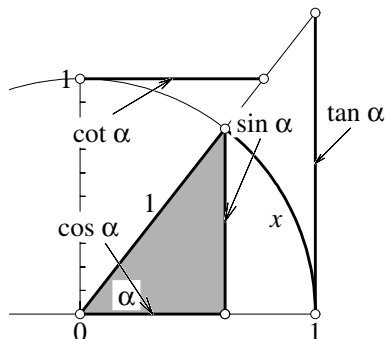


ABB. 4.3. Definition von sin, cos, tan und cot

(4.1) Definition. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck in einem Kreis vom Radius 1, wie in Abb. 4.3 positioniert. Dann wird die Länge der Seite gegenüber dem Winkel α mit $\sin \alpha$ bezeichnet, die der anliegenden Seite mit $\cos \alpha$. Ihre Verhältnisse, die zugleich die Längen der senkrechten und waagerechten Tangenten an den Kreis sind, notieren wir mit

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{und} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Diese Definitionen lassen sich unmittelbar auf beliebige rechtwinklige Dreiecke anwenden: Für eine Hypotenuse c , Ankathete b und Gegenkathete a (d.h. a liegt dem Winkel α und c dem rechten Winkel gegenüber) finden wir:

$$(4.1) \quad a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha, \quad a = b \cdot \tan \alpha.$$

Obwohl in der Geometrie Winkel üblicherweise mit kleinen griechischen Buchstaben notiert werden, wollen wir, sobald wir zum Bogenmaß wechseln und Funktionen einer reellen Variablen betrachten (siehe Funktionsgraphen in Abb. 4.4), kleine lateinische Buchstaben (wie z.B. x) als Argument bevorzugen. Viele Formeln lassen sich bereits als Spezialfälle aus Abb. 4.3 ableiten, wie

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin \pi/2 = 1, \quad \cos \pi/2 = 0, \quad \sin \pi = 0, \quad \cos \pi = -1,$$

$$(4.2a) \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$(4.2b) \quad \sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$(4.2c) \quad \sin(x + \pi/2) = \cos x, \quad \cos(x + \pi/2) = -\sin x$$

$$(4.2d) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind periodisch mit Periode 2π , $\tan x$ ist periodisch mit Periode π .

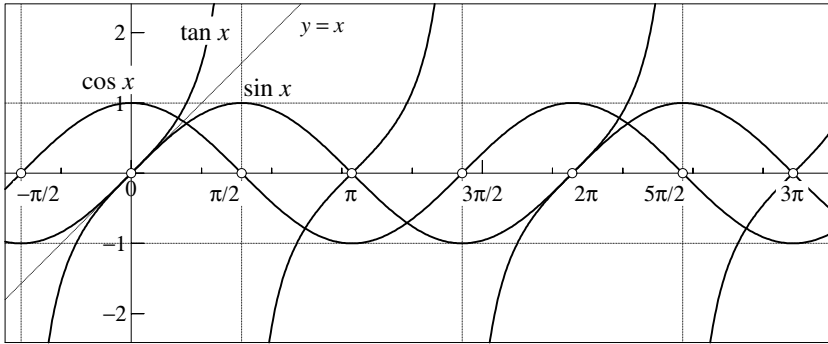


ABB. 4.4. Die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$

Abb. 4.5 zeigt die Zeichnung einer Sinuskurve aus Seite 17 von A. Dürers *Underweysung der Messung* (1525). Dürer nannte diese Kurve „eynn schrauben lini“ und behauptet, dass sie sich für Steinmetze eignet, die Wendeltreppen anlegen wollen.

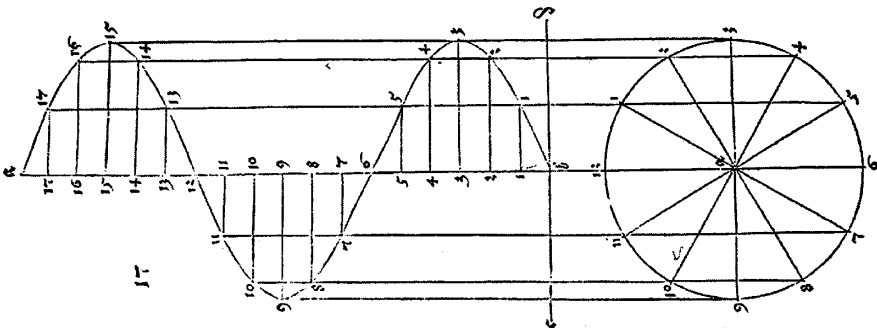


ABB. 4.5. Eine Sinuskurve bei Dürer (1525)²

Seltsame geometrische Muster erscheinen, wenn man $\sin n$ nur an ganzen Zahlen n auswertet (Abb. 4.6, siehe Strang 1991, Richert 1992).

² Abbildung mit Erlaubnis des Dr. Alfons Uhl Verlag, Nördlingen.

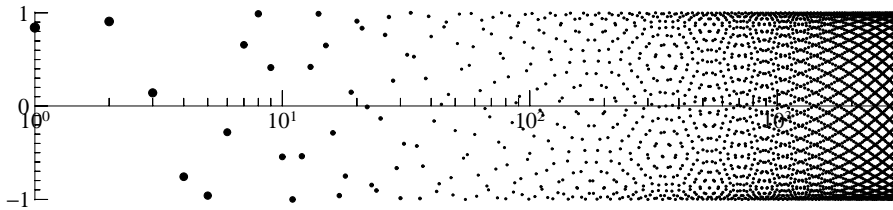


ABB. 4.6. Werte von $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots$ mit n in logarithmischer Skala

Grundlegende Beziehungen und Folgerungen

Die Gleichungen ... haben ... ein ehrwürdiges Alter. Schon Ptolemäus leitet ... (L. Vietoris 1949, J. reine ang. Math., Band 186, S. 1)

Seien α und β zwei Winkel mit Bogenmaß x bzw. y .

(4.2) Satz (Ptolemäus 150 n. Chr., Regiomontanus 1464).

(4.3)

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

(4.4)

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Beweis. Diese Zusammenhänge sieht man sofort für $0 \leq x, y \leq \pi/2$, wenn man die drei rechtwinkligen Dreiecke in Abb. 4.7 näher untersucht. Alle anderen Kombinationen für x und y kann man mit den Formeln (4.2b) und (4.2c) auf diesen Fall reduzieren. \square

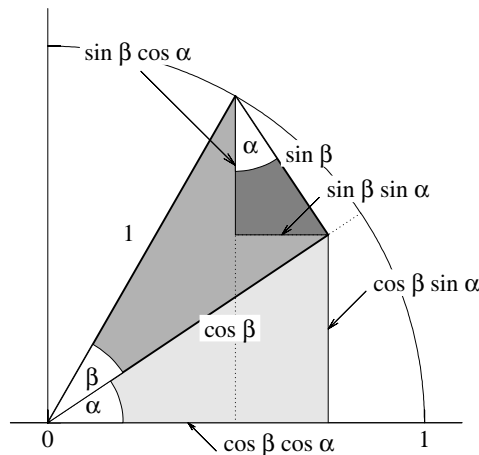


ABB. 4.7. Beweis der Formeln (4.3) und (4.4)

Indem man die Gleichung (4.3) durch Gl. (4.4) teilt, erhält man

$$(4.5) \quad \tan(x+y) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Weitere Formeln. Ersetzen wir y in (4.3) und (4.4) durch $-y$, erhalten wir

$$(4.3') \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$(4.4') \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Addieren wir nun die Gleichungen (4.3) und (4.3'), liefert dies uns $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \cdot \sin x \cos y$. Schließlich führen wir neue Variablen anstelle von $x+y$ und $x-y$ ein, nämlich

$$\begin{array}{ll} x+y = u & \text{also} \quad x = (u+v)/2 \\ x-y = v & y = (u-v)/2, \end{array}$$

mit der ersten der folgenden drei Formeln als Ergebnis:

$$(4.6) \quad \sin u + \sin v = 2 \cdot \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$(4.7) \quad \cos u + \cos v = 2 \cdot \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$(4.8) \quad \cos v - \cos u = 2 \cdot \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Die anderen leitet man ähnlich her.

Der Spezialfall $x = y$ führt in (4.3) und (4.4) zu

$$(4.9) \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$(4.10) \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1.$$

Ersetzen wir nun x durch $x/2$ in (4.10), finden wir

$$(4.11) \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Einige Werte von sin und cos. Die Verhältnisse im gleichseitigen Dreieck und im Quadrat erlauben uns direkt die Werte von sin und cos für die Winkel 30° , 60° und 45° zu berechnen. Für das regelmäßige Fünfeck betrachten wir die nebenstehende Abbildung (Hippasos 450 v. Chr.): Die Dreiecke ACE und AEF sind sich ähnlich, wir haben $1 + 1/x = x$ und daher $x = (1 + \sqrt{5})/2$, d.h. die Diagonale CA wird vom Punkt F im goldenen Schnitt geteilt (siehe Euklid, *Elemente*, Band XIII, §8); damit haben wir $\sin 18^\circ = 1/(2x)$.

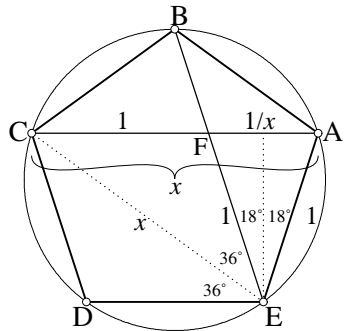


TABELLE 4.1. Spezielle Werte von sin, cos und tan

α	Bogenmaß	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0°	0	0	1	0
15°	$\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\pi/10$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10\sqrt{2}}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\pi/5$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}}$
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$2+\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	∞

Tabelle 4.1 ist eine Liste aller auf diese Weise erhaltenen Werte. Für eine vollständige Liste von $\sin \alpha$ für $\alpha = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ \dots$ siehe Lambert (1770c).

Formeln von de Moivre. Wenn wir in (4.3) und (4.4) y durch nx ersetzen, erhalten wir die rekursiven Formeln

(4.12) $\sin((n+1)x) = \sin x \cos nx + \cos x \sin nx,$

(4.13) $\cos((n+1)x) = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx.$

Beginnen wir mit (4.9) und (4.10) und wenden (4.12) und (4.13) mehrfach an, finden wir

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3 x && - 3 \sin^2 x \cos x \\ \sin(3x) &= && 3 \sin x \cos^2 x && - \sin^3 x \\ \cos(4x) &= \cos^4 x && - 6 \sin^2 x \cos^2 x && + \sin^4 x \\ \sin(4x) &= && 4 \sin x \cos^3 x && - 4 \sin^3 x \cos x \\ \cos(5x) &= \cos^5 x && - 10 \sin^2 x \cos^3 x && + 5 \sin^4 x \cos x \\ \sin(5x) &= && 5 \sin x \cos^4 x && - 10 \sin^3 x \cos^2 x && + \sin^5 x.\end{aligned}$$

Uns fällt dabei auf, dass das Pascalsche Dreieck wieder auftaucht; die Begründung hierfür ist genau dieselbe wie in Abschnitt I.2 (Satz 2.1). Hieraus folgern wir die allgemeinen Formeln (gefunden von de Moivre 1730, siehe Euler 1748, *Introductio*, §133):

$$\begin{aligned}
 \cos nx &= \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin^2 x \cos^{n-2} x \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots \\
 \sin nx &= n \sin x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Reihenentwicklungen

Sit arcus z infinite parvus; erit $\sin z = z$ et $\cos z = 1; \dots$

(Euler 1748, *Introductio*, §134)

Während sämtliche bisherige Formeln (4.5) bis (4.14) nur unter Einsatz von (4.3) und (4.4) sowie (4.2a) hergeleitet wurden, benötigen wir nun eine weitere grundlegende Annahme: Wenn x gegen Null strebt, so nähert sich der „sinus rectus“ seinem Kreisbogenabschnitt an. Da wir Winkel in Bogenmaß messen, folgt daraus: Je näher x an Null ist, desto besser wird $\sin x$ von x approximiert. Wir notieren dies als

(4.15)

$$\sin x \approx x \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Nun wenden wir dieselbe Idee an, die wir schon im Beweis der Gleichungen (2.18) und (2.19) eingesetzt haben: Wir setzen $x = y/N$, $n = N$ in den Formeln (4.14) von de Moivre ein, wobei y ein fester Wert ist, während N gegen unendlich und x gegen Null streben. Aufgrund von (4.15) können wir nun $\sin x$ durch x und $\cos x$ durch 1 ersetzen. Da $N \rightarrow \infty$ strebt, werden auch alle Terme $(1 - k/N)$ gegen 1 streben. Ersetzen wir schließlich y durch x , führt uns dies zu den folgenden Formeln (Newton 1669, Leibniz 1691, Jak. Bernoulli 1702):

(4.16)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

(4.17)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Newtons Herleitung dieser Reihen wird in Übung 4.1 skizziert; der obige Beweis stammt von Jak. Bernoulli und Eulers *Introductio*, §134.

Bemerkung. Es bedarf eigentlich einer größeren Sorgfalt, wenn wir $\cos(y/N)$ für große N durch 1 ersetzen wollen, da dieser Ausdruck in der N -ten Potenz auftritt. Beispielsweise strebt zwar $1 + y/N$ gegen 1 für $N \rightarrow \infty$, nicht jedoch $(1 + y/N)^N$ (siehe Satz 2.3). Die Rettung kommt hier aus der Tatsache, dass $\cos(y/N)$ schneller gegen 1 strebt als $1 + y/N$. Genauer gesagt gilt

$$\cos^N(y/N) = \left(1 - \sin^2(y/N)\right)^{N/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{N} \rightarrow 1$$

nach (4.2d), Satz 2.2 und (4.15).

Die Konvergenz der Reihen (4.16) und (4.17) wird in Abb. 4.8 demonstriert. Sie konvergieren offenbar für alle x (siehe Abschnitt III.7). Man sieht sehr deutlich, wie ab etwa $x = 15$ numerische Probleme aufgrund von Rundungsfehlern auftreten (die Berechnungen wurden hierfür absichtlich nur mit 32 Bit-Zahlen durchgeführt).

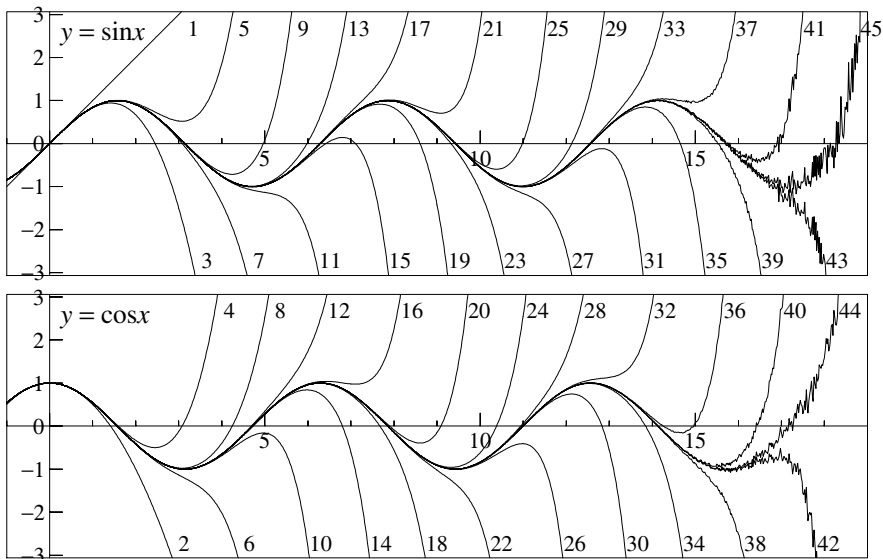


ABB. 4.8. Die Reihen $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ und $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

Die Reihen von $\tan x$. Wir setzen

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots$$

Um a_1, a_3, a_5, \dots zu bestimmen, multiplizieren wir diese Formel mit $\cos x$ und benutzen die bekannten Reihen (4.16) und (4.17):

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots = \left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right).$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von x, x^3 und x^5 , erhalten wir

$$1 = a_1, \quad -\frac{1}{6} = -\frac{a_1}{2} + a_3, \quad \frac{1}{120} = \frac{a_1}{24} - \frac{a_3}{2} + a_5,$$

und damit

$$a_1 = 1, \quad a_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{2}{15}.$$

Wenn wir hiermit fortfahren, finden wir die Reihe

(4.18)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} + \dots$$

Man sieht zunächst keine allgemeine Regel in den Koeffizienten. Es gibt aber eine, und diese basiert auf den Bernoulli-Zahlen (1.29) (siehe Übung 10.2 aus Abschnitt II.10).

Antike Berechnungen und Tabellen. Aus den Werten der Tabelle 4.1, die bereits seit der Antike bekannt sind, können wir mit Hilfe von (4.3') und (4.4') die Werte von $\sin 3^\circ$, $\cos 3^\circ$ oder, wie es damals üblich war, $\text{chord } 6^\circ$ bestimmen. Die Formeln (4.11) für Winkelhalbierung erlaubt uns dann die Berechnung von $\text{chord } 3^\circ$, $\text{chord } 1\frac{1}{2}^\circ$, $\text{chord } \frac{3}{4}^\circ$, jedoch nicht von $\text{chord } 1^\circ$. Ptolemäus bemerkte, dass $\text{chord } \frac{3}{4}^\circ$ ungefähr die Hälfte ist von $\text{chord } 1\frac{1}{2}^\circ$. Damit liegt die Vermutung nahe, dass $\text{chord } 1^\circ = \frac{2}{3} \cdot \text{chord } 1\frac{1}{2}^\circ$, womit sich in Basis 60 ergibt (siehe Aaboe 1964, S. 121):

(4.19)

$$\text{chord } 1^\circ = 0; 1, 2, 50 \quad (\text{richtiger Wert: } 0; 1, 2, 49, 51, 48, 0, 25, 27, 22, \dots).$$

Aus (4.14) können wir hiermit die Werte des Sinus und Cosinus für alle Winkel 2° , 3° , 4° usw. berechnen. Etwa um 1464 stellte Regiomontanus eine Tabelle auf („SEQVITVR NVNC EIVSDEM IOANNIS Regiomontani tabula sinuum, per singula minuta extensa . . .“), in der er den Sinus aller Winkel in Schritten von einer Winkelminute angibt, bis auf fünf Dezimalstellen genau; siehe Abb. 4.9 für eine von ihm handgeschriebene Tabelle von $\tan x$ (üblicherweise mit vier korrekten Dezimalstellen).

Eine besonders genaue Berechnung von $\sin 1^\circ$ wurde von Al-Kāshī (Samar-kand in 1429) durchgeführt, indem er numerisch die aus Gl. (1.9) folgende Gleichung

$$(4.20) \quad -4x^3 + 3x = \sin 3^\circ$$

löste, dabei nutzte er eine iterative Methode und gab die Lösung in Basis 60 an („Wir gewannen sie mit inspirierter Kraft der Ewigen Präsenz . . .“, siehe A. Aaboe 1954)

$$\sin 1^\circ = 0; 1, 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 19, 16 \dots$$

Hier ist nun der wahre Wert in Basis 60, berechnet von einem modernen Computer:

$$\sin 1^\circ = 0; 1, 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 26, 18, 28, 49, 20, 26, 50, 41, \dots$$

TABELLA FAICVNDI

NUMERVS	NUMERVS	NUMERVS	NUMERVS		
1	1724	31	6086	61	180902
2	3892	32	6248	62	18074
3	4240	33	64940	63	190265
4	6992	34	67242	64	204032
5	8728	35	70022	65	218940
6	10411	36	72542	66	234607
7	12278	37	74346	67	251483
8	14043	38	78129	68	267413
9	14838	39	80978	69	280411
10	17633	40	83909	70	272743
11	19239	41	86529	71	290222
12	21240	42	90040	72	307767
13	23087	43	93248	73	327088
14	24933	44	96471	74	348725
15	26799	45	100000	75	37211
16	28672	46	103441	76	401089
17	30473	47	107236	77	433188
18	32292	48	111062	78	470243
19	34235	49	114037	79	512238
20	36395	50	119177	80	567118
21	38387	51	123891	81	631377
22	40202	52	127992	82	711469
23	42488	53	132709	83	812445
24	44422	54	137639	84	941387
25	46631	55	142813	85	1123131
26	48772	56	148243	86	1330203
27	49942	57	153982	87	1505217
28	51170	58	159034	88	18033463
29	54832	59	165829	89	1729796
30	47732	60	173207	90	infinitum

ABB. 4.9. Regiomontanus' Originaltabelle von $\tan \alpha$ (siehe Kaunzner 1980)³

Ein weiteres Mal sehen wir den enormen Fortschritt der Reihenmethode (4.17), aus der wir $\sin 1^\circ = \sin(\pi/180) = \sin(0,0174532925\dots)$ bereits mit nur drei Termen auf

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ &\approx 0,0174532925199 - 0,0000008860962 + 0,000000000013496 \\ &\approx 0,0174524064373. \end{aligned}$$

bestimmen können.

Arkusfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen definieren $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$ für einen vorgegebenen Bogen x . Die *inversen* trigonometrischen Funktionen liefern den Bogen x als Funktion von $\sin x$, $\cos x$ oder $\tan x$, und heißen deshalb „Arkusfunktionen“.

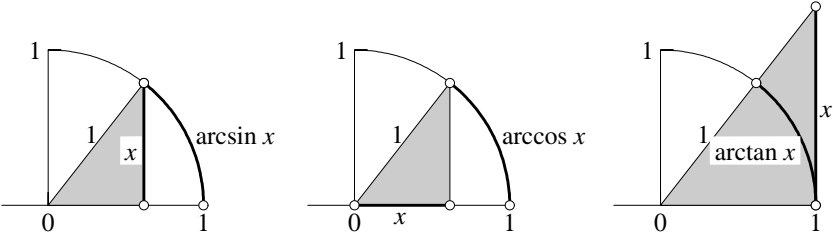


ABB. 4.10. Definition von $\arcsin x$, $\arccos x$ und $\arctan x$

³ Abbildung mit Genehmigung der Nürnberger Stadtbibliothek, Cent V, 63, f. 30^f.

(4.3) Definition. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse 1. Sei x die Länge der dem Winkel gegenüberliegende Seite, so ist $\arcsin x$ die Länge des zugehörigen Bogens (siehe Abb. 4.10a). Die Werte $\arccos x$ und $\arctan x$ werden ähnlich definiert (Abbildungen 4.10b und 4.10c).

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen besitzen die Arkusfunktionen mehrere mögliche Funktionswerte. Die sogenannten *Hauptäste* erfüllen dabei die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} y = \arcsin x &\Leftrightarrow x = \sin y && \text{für } -1 \leq x \leq 1, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2, \\ y = \arccos x &\Leftrightarrow x = \cos y && \text{für } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi, \\ y = \arctan x &\Leftrightarrow x = \tan y && \text{für } -\infty < x < \infty, -\pi/2 < y < \pi/2. \end{aligned}$$

Reihen für $\arctan x$.

Es ist aber guth, dass wann man etwas wirklich exhibiret, ma entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen.

(Brief von Leibniz; zitiert aus Eulers *Opera Omnia*, Band 27, S. xxvii)

Die Reihe des Arkustangens wurde von Gregory im Jahr 1671 entdeckt. 1674 fand Leibniz sie ein zweites Mal und veröffentlichte sie 1682 in den *Acta Eruditorum*, schwärmend über die Weisheit Gottes, doch ohne Herleitung (siehe Zitat). Wir suchen daher die Inspiration in Newtons Behandlung der Reihe von $\arcsin x$ in seinem Manuskript *De Analysisi*, das er 1669 schrieb, das aber erst 40 Jahre später veröffentlicht wurde (siehe Formel (4.25) unten). Man kann entweder die Bogenlänge oder die Fläche des zugehörigen Kreissektors berechnen. Die Beziehung zwischen beiden ist seit Archimedes bekannt (*Über die Vermessung des Kreises*, Proposition 1) und wird auch von Kepler dargestellt (Abb. 4.12).

Sei x die gegebene Länge der Tangente eines Winkels, dessen Bogenmaß $y = \arctan x$ wir bestimmen wollen (siehe Abb. 4.11a). Aufgrund des Satzes von Pythagoras haben wir

$$(4.21) \quad OA = \sqrt{1 + x^2}.$$

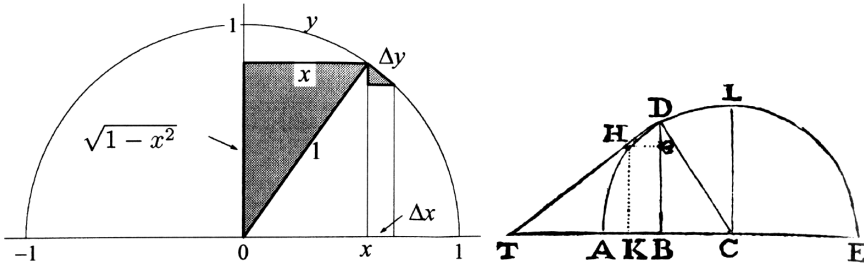
Wir können den Satz des Thales auf die zwei größeren, einander ähnlichen, grau gefärbten Dreiecke anwenden, und finden

$$(4.22) \quad OB = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{sowie} \quad \Delta u = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Gemäß den rechten Winkeln ist das kleine graue Dreieck auch ähnlich zu den anderen zwei Dreiecken, und wir schließen

$$(4.23) \quad \Delta y = \frac{\Delta u}{\sqrt{1 + x^2}} \stackrel{(4.22)}{=} \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

³ Abbildung mit Genehmigung der Bibl. Publ. Univ. Genève.


 ABB. 4.13. Beweis von (4.25) für $y = \arcsin x$; Skizze von Newton (1669)⁵

sein Manuskript *De Analysis* (Newton 1669) einigen seiner Freunde zu zeigen, erlaubte aber nicht dessen Veröffentlichung. Es wurde schließlich als erstes Kapitel von *Analysis per quantitatum* (Newton 1711) von W. Jones publiziert. Newton hat Mercators Reihe nicht nur deutlich früher entdeckt, sondern dazu noch die Reihe

$$(4.25) \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

und ebenso die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ (siehe Übung 4.1). Newtons Beweis für (4.25) lautete wie folgt.

Beweis. Angenommen, x ist gegeben und wir wollen den Bogen y berechnen, zu dem $x = \sin y$ gilt (siehe Abb. 4.13). Wenn sich x um den Wert Δx erhöht, so erhöht sich y um Δy , dabei ist

$$(4.26) \quad \Delta y \approx \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$$

aufgrund der Ähnlichkeit der zwei schattierten Dreiecke in Abb. 4.13. Diese Größe ist die Fläche des Rechtecks mit Breite Δx und Höhe $1/\sqrt{1-x^2}$. Ähnlich wie in Abb. 4.11c folgt daraus, dass die vollständige Bogenlänge y gleich der Fläche unter der Funktion $1/\sqrt{1-x^2}$ zwischen 0 und x ist. Wir wenden den binomischen Lehrsatz 2.2 mit $a = -1/2$ an, und finden

$$(4.27) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$$

sowie Formel (4.25), wenn wir die Funktionen $1, x^2, x^4, \dots$ durch ihre Flächen $x, x^3/3, x^5/5, \dots$ ersetzen (Satz 3.2). \square

⁵ Die rechte Hälfte von Abb. 4.13 mit Genehmigung der Bibl. Univ. Genève.

Berechnung von π

... Du wirst kaum leugnen, dass Du eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft des Kreises entdeckt hast, die für immer unter Geometern berühmt sein wird.
(Brief von Huygens an Leibniz, 7. Nov. 1674)

Daher verhält sich der *Durchmesser zu seinem Umfang, wie 1,000, &c. zu 3,141592653.589*

7932384.6264338327.9502884197.1693993751.0582097494.4592307816.4062862089.9862803482.5342117067.9+, exakt bis auf die hundertste Stelle; so berechnet vom genauen und stets bereiten Stift des wahrhaft genialen Mr. *John Machin*: Schlicht als ein Beispiel für den gewaltigen Fortschritt, den die *arithmetischen Berechnungen* aus der *modernen Analysis* ziehen, in einem so dermaßen für sich einnehmenden Bereich, dass er die Köpfe der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten auf sich gelenkt hat. ... Aber die Methode der Reihen (wie sie von Mr. *Newton* und Mr. *Halley* verbessert wurde) bewältigt dies mit größter Leichtigkeit, verglichen mit den umständlichen und weitschweifigen Rechenwegen von *Archimedes, Viète, Van Ceulen, Metius, Snellius, Lansbergius, &c.*

(W. Jones 1706)

Archimedes (283–212 v. Chr.) schätzte die Kreiszahl π ab, indem er den Kreis zwischen regelmäßigen 6-, 12-, 24-, 48- und 96-Ecken einschloss und deren Umfänge berechnete, er erhielt

$$(4.28) \quad 3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

Keiner der Versuche im Mittelalter, diesen Schätzwert weiter zu verbessern, fruchtete. Schließlich hat Adrien van Roomen 1580 allein durch Archimedes' Methode nach Jahren der Arbeit die ersten 20 Dezimalstellen von π bestimmt. Ludolph van Ceulen (=Köln) (1596, 1616) berechnete 35 Dezimalstellen, die noch für lange Zeit sein Grab in der Pieterskerk („St. Petrikirche“) in Leiden (Niederlande) zierten. Um diese Genauigkeit zu erzielen, musste Ludolph die Rechnungen bis zum $6 \cdot 2^{60}$ -Eck fortsetzen.

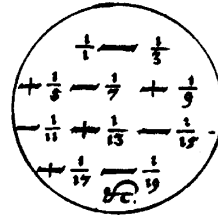
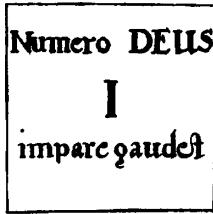
Die Leibnizsche Reihe. Aus Tabelle 4.1 wissen wir, dass $\tan(\pi/4) = 1$ und folglich $\arctan(1) = \pi/4$ ist. Setzen wir $x = 1$ in (4.24) ein, finden wir die berühmte Reihe von Leibniz (1682)

$$(4.29) \quad \boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - + \dots}$$

Obwohl wir mit Leibniz über die unbestreitbare Schönheit seiner Formel übereinstimmen (Leibniz zitiert Vergil: „Der Herr erfreut sich der ungeraden Zahlen“, siehe Abb. 4.14), bemerken wir auch, dass sie für praktische Berechnungen absolut ineffizient ist, da wir allein für die ersten 50 Dezimalstellen bereits 10^{50} Terme addieren müssten, mit „labor fere in aeternum“ (Euler 1737).

Wesentlich effizienter ist der Einsatz von $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$ (s. Tabelle 4.1), was schließlich zur Formel

⁶ Abbildung mit Genehmigung der Bibl. Publ. Univ. Genève.

ABB. 4.14. Leibniz' Darstellung für die Summe (4.29)⁶

$$(4.30) \quad \pi = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \dots \right)$$

führt, deren erste 210 Terme „exhibitus incredibili labore“ von Th. F. de Lagny im Jahr 1719 berechnet und summiert wurden; sein Ergebnis bildet das einleitende Zitat dieses Abschnitts. Die Reihe (4.25) für $\arcsin x$ kann ebenfalls benutzt werden, so ist beispielsweise $\sin(\pi/6) = 1/2$, woraus folgt

$$(4.31) \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

Zusammengesetzte Formeln. Wir setzen $u = \tan x$ und $v = \tan y$ in (4.5) ein, und erhalten

$$(4.32) \quad \arctan u + \arctan v = \arctan \left(\frac{u+v}{1-uv} \right)$$

für $|\arctan u + \arctan v| < \pi/2$. Wenn wir nun $u = 1/2$ und $v = 1/3$ betrachten, sehen wir, dass der Bruch auf der rechten Seite von (4.32) gleich 1 ist. Dies liefert die Eulersche Formel (1737)

$$(4.33) \quad \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$

für die die Reihe (4.24) bereits deutlich schneller konvergiert.

Besonders attraktiv ist der Ansatz von John Machin, der (ohne weitere Details) in W. Jones (1706, S. 243) veröffentlicht wurde. Mit $u = v = 1/5$ erhalten wir

$$2 \cdot \arctan \frac{1}{5} = \arctan \left(\frac{2/5}{1 - 1/25} \right) = \arctan \frac{5}{12}.$$

Für $u = v = 5/12$ finden wir

$$2 \cdot \arctan \frac{5}{12} = \arctan \left(\frac{2 \cdot 5/12}{1 - 25/144} \right) = \arctan \frac{120}{119}.$$

Schließlich setzen wir auch noch $u = 120/119$ ein, und suchen nach jenem v , für das gilt

$$\frac{u+v}{1-uv} = 1, \quad \text{also} \quad v = \frac{1-u}{1+u} = -\frac{1}{239}.$$

Alle Formeln zusammen ergeben

(4.34)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

ein Ausdruck, für den die Reihe (4.24) besonders angenehm in Basis 10 zu rechnen ist (siehe Tabelle 4.2). „Der genaue und stets bereite Stift“ Machins fand auf diesem Wege 100 Dezimalstellen.

TABELLE 4.2. Berechnung von π nach Machins Formel

1	0,	20000000000000000000000000000000		
3	-0,	26666666666666666666666666666667		
5	0,	64000000000000000000000000000000		
7	-0,	1828571428571428571428571429		
9	0,	5688888888888888888888888889		
11	-0,	1861818181818181818181818		
13	0,	63015384615384615		
15	-0,	21845333333333333		
17	0,	77101176470588		
19	-0,	2759410526316		
21	0,	99864380952		
23	-0,	3647220870		
25	0,	134217728	1	0, 004184100418410041841004184
27	-0,	4971027	3	-0, 24416591787083803627
29	0,	185128	5	0, 256472314424647
31	-0,	6927	7	-0, 3207130658
33	0,	260	9	0, 43669
35	-0,	10	11	-0, 1
= 0, 197395559849880758370049763			= 0, 004184076002074723864538214	

Die Suche nach weiteren Formeln dieser Art wird ein Problem der Zahlentheorie. Gauß fand als Nebenprodukt von 20 Seiten voller Primfaktorzerlegungen (siehe *Werke*, Band 2, S. 477–502)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}, \\ \frac{\pi}{4} &= 12 \arctan \frac{1}{38} + 20 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} + 24 \arctan \frac{1}{268}. \end{aligned}$$

Heutzutage sind mehrere Billionen Ziffern von π bekannt. Siehe Shanks & Wrench Jr. (1962) für eine Liste der ersten 100.000 Dezimalstellen (die 100.000ste Ziffer ist eine 6). Weitere Details zur alten und neueren Geschichte können bei Miel (1983) nachgelesen werden.

Übungen

- 4.1 (Newton 1669, „Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ“). Nachdem wir die Reihe $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$ für den Arkussinus gefunden haben (siehe (4.25)), entdecken Sie die Reihe für $x = \sin z$ der Form $x = z + a_3z^3 + a_5z^5 + a_7z^7 + \dots$ (ähnlich wie in Übung 3.2) und die Reihe von $w = \cos z$ durch Entwicklung von $w = \sqrt{1 - x^2}$ (siehe Abb. 4.15).

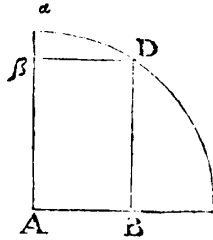
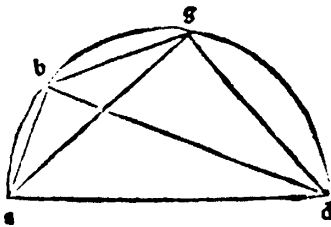


ABB. 4.15. Auszug aus Newton (1669), S. 17⁷

- 4.2 Verstehen Sie Ptolemäus' ursprünglichen Beweis der Additionstheoreme (4.3) und (4.4) für die Sehnenfunktion (siehe Abb. 4.16).



Propositio iii.
Notis chordis inequalium arcuum in semicirculo: arcus quo maior minorē superat chorda nota fiet. Et in semicirculo. a. b. d. sup. i. diametrum. i. d. nota sunt chordae. a. b. a. g. Dico notam fieri chordam. b. g. nam per corollarium prime huius note etiam fiet chorda. b. d. e. g. d. ¶ Sint in quadrilatero. a. b. g. d. diametri. a. g. e. b. d. note sunt et late a. a. b. e. g. d. opposita nota. igit per p̄missam quod fit ex a. d. in b. g. notā ier. Sed a. d. est nota: quia diameter circuli. ideo. b. g. nota fiet: d. querebas. Per hāc plurimor arcuū chordas coānosces. Repice enī chordā arcus quo quāta pars circūferentiē segit supat. f. chorda arcus. 12. gradūū: 7 sic de alijs.

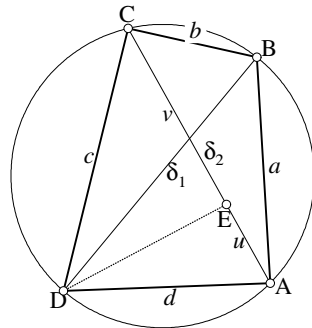
ABB. 4.16. Ptolemäus' Beweis der Formel für $\text{chord}(\alpha + \beta)$; aus *Almagest*, übersetzt von Regiomontanus, gedruckt 1496⁷

Hinweis. Benutzen (und/oder beweisen) Sie den „Satz von Ptolemäus“, welcher besagt, dass die Seiten und Diagonalen eines in einen Kreis eingeschriebenen Vierecks die Gleichung $ac + bd = \delta_1 \delta_2$ erfüllen. Um den Satz zu beweisen, ziehen Sie eine Gerade DE so, dass die Winkel EDA und CDB gleich sind. Damit haben wir zwei ähnliche Dreiecke

$$\triangle EDA \cong \triangle CDB \implies b/\delta_1 = u/d$$

$$\triangle DCE \cong \triangle DBA \implies a/\delta_1 = v/c$$

$$\text{also } bd + ac = (u + v)\delta_1 = \delta_1 \delta_2.$$



⁷ Abbildungen 4.15 und 4.16 mit Genehmigung der Bibl. Publ. Univ. Genève.

4.3 *Die Hyperbelfunktionen* (Foncenex 1759, Lambert 1770b). Zu einem gegebenen x sei P derjenige Punkt auf der Hyperbel $u^2 - v^2 = 1$, für den die schattierte Fläche in Abb. 4.17 (links) gleich $x/2$ beträgt. Die Koordinaten dieses Punktes schreiben wir $(\cosh x, \sinh x)$.

a) Beweisen Sie, dass

$$(4.35) \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Hinweis. Die Flächen der Dreiecke ACD und PCQ sind gleich groß. Folglich sind auch die Flächen von ACPA und ABQPA von gleicher Größe, nämlich $(\ln a)/2$, wenn wir den Abstand zwischen C und Q mit $a/\sqrt{2}$ angeben. (Abb. 4.17, rechts).

b) Verifizieren Sie die Beziehungen

$$(4.36) \quad \begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \end{aligned}$$

c) Die Umkehrfunktionen von (4.35), die „Areafunktionen“, sind definiert als

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arsinh} x &\Leftrightarrow x = \sinh y && \text{für } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, \\ y = \operatorname{arcosh} x &\Leftrightarrow x = \cosh y && \text{für } 1 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

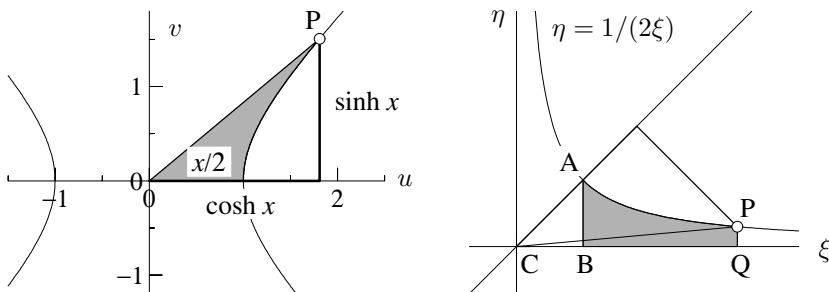


ABB. 4.17. Definition der Hyperbelfunktionen

4.4 Beweisen (und befolgen) Sie Newtons Ratschlag (Newton 1671, Probl. IX, §XLIX) zur Berechnung von π : Indem Sie die Fläche a unter dem Kreis $y = x^{1/2}(1-x)^{1/2}$ zwischen $x = 0$ und $x = 1/4$ mittels Binomialreihe entwickeln, zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \pi &= 24a + 3\sqrt{3}/4 \\ &= 24 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \frac{1}{2^5} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{7} \frac{1}{2^7} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{2}{9} \frac{1}{2^9} - \dots \right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

I.5 Komplexe Zahlen und Funktionen

Weder die echten noch die unechten Wurzeln sind stets reell; manchmal sind sie nur imaginär; das heißt, obwohl wir uns stets so viele Wurzeln für jede Gleichung vorstellen [frz.: „imaginer“] können, wie ich ihr zugewiesen habe, entspricht doch nicht jede Wurzel, die wir uns vorgestellt haben, auch einer bestimmten Größe. (Descartes 1637, S. 380)

Cardano traf als erster auf komplexe Zahlen, als er sich (1545, in seiner *Ars Magna*) die folgende Frage stellte: Man teile eine gegebene Strecke AB der Länge 10 „in duas partes“, so dass das Rechteck mit diesen zwei Streckenstücken als Seitenlängen die Fläche 40 hat. Jeder würde einsehen (siehe Abb. 5.1), dass die Fläche eines solchen Rechtecks nicht größer als 25 sein kann, womit das Problem keine reelle Lösung besitzt. Doch *gibt* uns die Algebra eine Lösung, da die zugehörige Gleichung (siehe Gl. (1.3)) $x^2 - 10x + 40 = 0$ zu

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{and} \quad 5 - \sqrt{-15}.$$

führt („ideo imaginaberis $\sqrt{-15}$ “). Obwohl diese Ausdrücke irgendwo zwischen Haarspalterei und völliger Nutzlosigkeit anzusiedeln sind („quæ uere est sophistica“), muss doch ein Körnchen Wahrheit in ihnen stecken, da ihr Produkt

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

letztlich das richtige Ergebnis liefert (siehe Abb. 5.1).

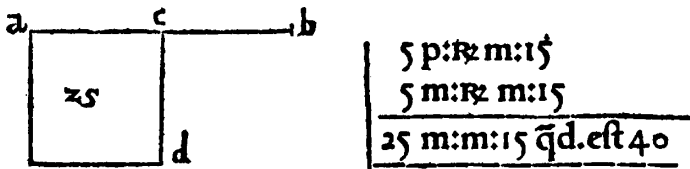


ABB. 5.1. Auszüge aus Cardanos *Ars Magna*¹

Im Laufe der folgenden Jahrhunderte traten derlei „unmögliche“ oder „imaginäre“ (Descartes, siehe Zitat) Lösungen algebraischer Gleichungen immer und immer wieder auf, waren Anlass zahlreicher Dispute, stellten sich aber auch als zunehmend nützlich heraus. Ihr Gebrauch fand seine endgültige Akzeptanz in den Arbeiten von Euler, der auch in seinem späteren Leben das Symbol i für $\sqrt{-1}$ prägte. Die obigen Werte werden heute geschrieben als $5 \pm i\sqrt{15}$ und komplexe Zahlen sind von der allgemeinen Form

$$c = a + ib,$$

wobei $a = \operatorname{Re}(c)$ als *Realteil* und $b = \operatorname{Im}(c)$ als *Imaginärteil* von c bezeichnet werden. Die Interpretation der komplexen Zahl $a + ib$ als Punkt (a, b) in der

¹ Abbildung mit Genehmigung der Bibl. Publ. Univ. Genève.

zweidimensionalen *komplexen Ebene* geht zurück auf Gauß' Dissertation (1799) (siehe Abb. 5.2) und auf Argand im Jahr 1806 (siehe Kline 1972, S. 630).

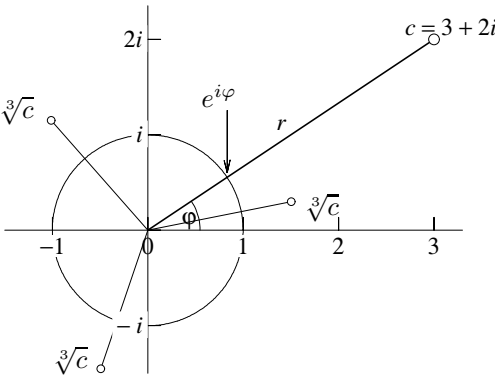


ABB. 5.2a. Komplexe Ebene und kubische Wurzeln

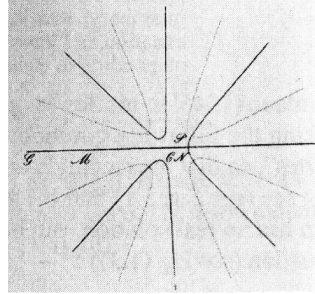


ABB. 5.2b. Komplexe Ebene bei Gauß (1799)²

Komplexe Operationen. Für Rechnungen mit komplexen Zahlen erinnern wir uns an die Beziehung $i^2 = -1$ und wenden die ansonsten üblichen Regeln für rationale und reelle Zahlen an. So ist die *Summe* (oder *Differenz*) zweier komplexer Zahlen

$$c = a + ib, \quad w = u + iv$$

diejenige komplexe Zahl, die aus der Addition (oder Subtraktion) der Real- und Imaginärteile für sich resultiert. Das Produkt wird (vergl. Abb. 5.1)

$$(5.1) \quad c \cdot w = au - bv + i(av + bu).$$

Um den Quotienten w/c zu berechnen, stellen wir fest, dass das Produkt von c mit seinem *komplex Konjugierten*

$$(5.2) \quad \bar{c} = a - ib$$

reell und nicht-negativ ist, nämlich $c \cdot \bar{c} = a^2 + b^2$. Multiplizieren wir Zähler und Nenner von w/c mit \bar{c} , wird der *Quotient* w/c für $c \neq 0$

$$(5.3) \quad \frac{w}{c} = \frac{w \cdot \bar{c}}{c \cdot \bar{c}} = \frac{au + bv}{a^2 + b^2} + i \frac{av - bu}{a^2 + b^2}.$$

² Abbildung mit Genehmigung des Georg Olms Verlags.

Die Eulersche Identität und ihre Folgerungen

... wie imaginäre Exponenten ausgedrückt werden können als Terme von Sinus und Cosinus reeller Bögen. (Euler 1748, *Introductio*, §138)

Diese Identität, die von Euler 1740 beim Studium von Differentialgleichungen des Typs $y'' + y = 0$ entdeckt wurde (siehe Abschnitt II.8), ist der Schlüssel zum Verständnis von weitergehenden Operationen mit komplexen Zahlen.

Wir definieren e^{ix} über die Reihe aus Satz 2.3 (wobei wir x durch ix ersetzen), benutzen die Beziehungen $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ... und trennen Real- und Imaginärteile voneinander:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right)}_{\cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right)}_{\sin x} = \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist die berühmte *Eulersche Identität* (Euler 1743, *Opera Omnia*, Band 14, S. 142)

(5.4)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Als eine erste Anwendung setzen wir die Spezialfälle $x = \pi/2$ und $x = \pi$ ein; wir finden

$$e^{i\pi/2} = i \quad \text{und} \quad e^{i\pi} = -1,$$

zwei elegante Formeln, die die berühmten mathematischen Konstanten π , e und i auf wundervoll einfache Weise zusammenführen.

Polarkoordinaten. Gleichung (5.4) zeigt, dass der Punkt $e^{i\varphi}$ den Realteil $\cos \varphi$ und den Imaginärteil $\sin \varphi$ hat, d.h. es ist der Punkt auf dem Einheitskreis, dessen Radius unter dem Winkel φ zur reellen Achse steht (siehe Abbildungen 5.2a und 4.3). Folglich kann jede komplexe Zahl auch geschrieben werden als

$$(5.5) \quad c = a + ib = r \cdot e^{i\varphi},$$

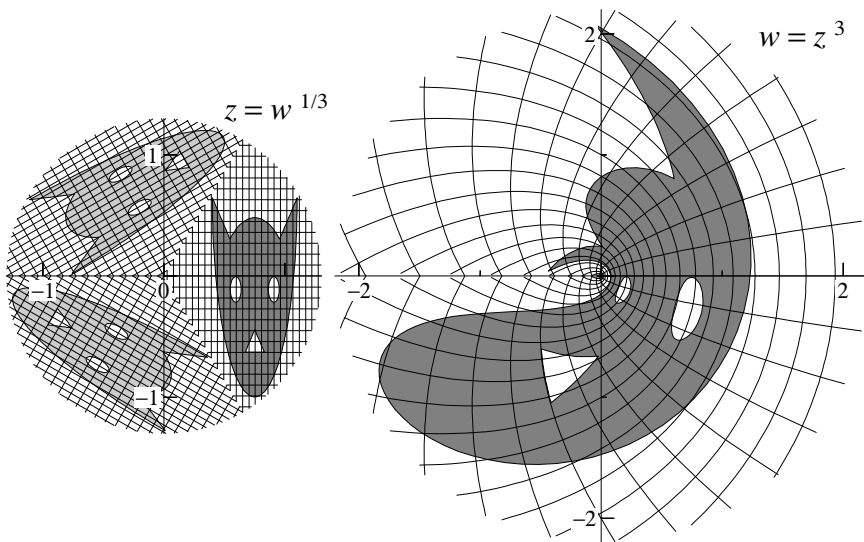
wobei

$$(5.6) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot \bar{c}} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Wir nennen $r = |c|$ den *Betrag* oder *Absolutwert* von c und $\varphi = \arg(c)$ sein *Argument*. Seien

$$c = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad w = s \cdot e^{i\theta}$$

zwei komplexe Zahlen, dargestellt in Polarkoordinaten. Aus (4.2a) folgt, dass $\bar{c} = r \cdot e^{-i\varphi}$, und aus Satz 4.2, dass

ABB. 5.3. Die Funktion $w = z^3$ und ihr Inverses $z = w^{1/3}$

$$\begin{aligned}
 e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\
 (5.7) \quad &= (\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) + i(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta) = e^{i(\varphi+\theta)}
 \end{aligned}$$

ist. Damit gilt für Produkt und Quotient

$$(5.8) \quad c \cdot w = rs \cdot e^{i(\varphi+\theta)}, \quad \frac{w}{c} = \frac{s}{r} \cdot e^{i(\theta-\varphi)}.$$

In dieser Anwendung ist die Darstellung in Polarkoordinaten besonders aussagekräftig: *Multiplikation multipliziert die Radien und addiert die Winkel; Division teilt die Radien und subtrahiert die Winkel.*

Wurzeln. Wir wollen beispielsweise $\sqrt[3]{c}$ berechnen. Ein weiteres Mal vollbringen die Polarkoordinaten ein Wunder, da Wurzeln von Produkten die Produkte der Wurzeln sind. Allerdings müssen wir vorsichtig vorgehen, da beispielsweise $e^{2i\pi} = 1$ und $e^{4i\pi} = 1$ auch die dritten Wurzeln $e^{2i\pi/3}$ und $e^{4i\pi/3}$ besitzen, die sich von 1 unterscheiden. Damit gibt es drei Kubikwurzeln von c :

$$(5.9) \quad \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\varphi/3}, \quad \sqrt[3]{r} \cdot e^{i(\varphi/3+2\pi/3)}, \quad \sqrt[3]{r} \cdot e^{i(\varphi/3+4\pi/3)}.$$

Für $c = 3 + 2i$ sind diese exemplarisch in Abb. 5.2a dargestellt. Der nächste Kandidat $e^{6i\pi} = 1$ reproduziert wieder die erste dieser Wurzeln und wir finden nichts neues. Die so erhaltenen Wurzeln bilden daher einen gleichmäßigen Stern; vom Mercedes-Typ für $n = 3$, von Handels Feuerwerksmusik-Typ für $n > 3$. Abb. 5.3 stellt die Funktion $z \mapsto w = z^3$ in Abhängigkeit von z sowie ihre Umkehrfunktion $w \mapsto z = w^{1/3} = \sqrt[3]{w}$ dar. Das „Tier“, das hierbei solch schmerzhaft Transformationen über sich ergehen lassen muss, ist auch als „Arnolds Katze“ bekannt. Die Umkehrabbildung erzeugt gleich drei Katzen aus einer.

Exponentialfunktion und Logarithmus. Die Exponentialfunktion lässt sich wie folgt von imaginären Argumenten auf komplexe Argumente ausdehnen:

$$(5.10) \quad e^c = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) \quad \text{für} \quad c = a + ib.$$

Durch diese Festlegung bleibt die fundamentale Eigenschaft $e^{c+w} = e^c \cdot e^w$ gültig, wie aus Gl. (5.7) folgt.

Die Natur des Logarithmus für negative Argumente sorgte für lange und harte Dispute zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli. Euler (1751) gab einen fantastischen Überblick über diese Diskussionen, die solange wie möglich geheim gehalten wurden, da Diskussionen über mathematische Interpretationen das Ansehen der reinen Mathematik als exakte und strenge Wissenschaft gefährdet hätten. Die wahre Natur des Logarithmus von negativen und komplexen Zahlen wurde dann von Euler aufgedeckt („Denouement des difficultés précédentes“), wieder einmal mit Hilfe von Gl. (5.4). Viele der Widersprüche der frühen Streitgespräche wurden durch die Erkenntnis aufgelöst, dass der Logarithmus einer komplexen Zahl nicht etwa nur *eine* Zahl ist, sondern *unendlich viele* Zahlen. Wir schreiben c in Polarkoordinaten

$$c = r \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

und damit als Produkt. Um die Eigenschaften (3.1) und (3.7) für einen Logarithmus mit komplexen Argumenten zu erhalten, definieren wir

$$(5.11) \quad \ln(c) = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Abb. 5.4 zeigt die Funktion $w = e^z$ und ihr Inverses. Da der Imaginärteil des Logarithmus einfach $\varphi = \arg(c)$ ist, ist klar, dass sich der Logarithmus nach jeder Rotation $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi$ wiederholen muss.

Ein neuer Blick auf trigonometrische Funktionen

Der kürzeste Weg zwischen zwei Wahrheiten im reellen Gebiet geht durch das komplexe Gebiet.

(Jacques Hadamard; zitiert nach Kline (1972), S. 626)

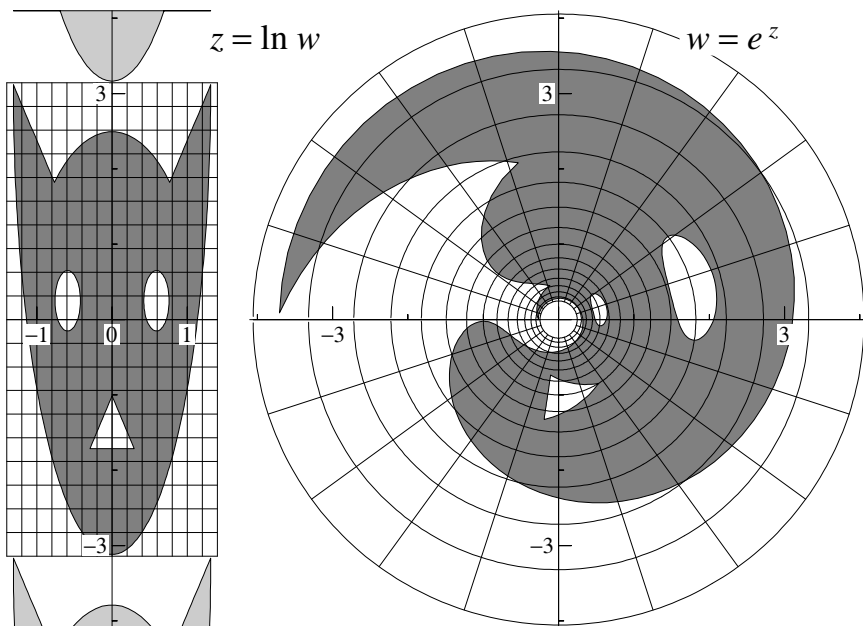
Ersetzen wir x in (5.4) durch $-x$, so finden wir $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$; wenn wir nun diese Formeln addieren bzw. subtrahieren, erhalten wir

$$(5.12) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$(5.13) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$(5.14) \quad \tan x = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$

Im Reich der komplexen Zahlen sind also die trigonometrischen Funktionen und die Exponentialfunktion eng miteinander verwandt. Viele Formeln aus Abschnitt I.4 stehen plötzlich in Zusammenhang mit e^x ; beispielsweise drücken die

ABB. 5.4. Die Funktion $w = e^z$ und ihr Inverses $z = \ln w$

Formeln von de Moivre (4.14) einfach den Zusammenhang $e^{inx} = (e^{ix})^n$ aus. Dies ist wohlgerneht *kein neuer Beweis*, da er auf Gl. (5.4) basiert, die wiederum aus den Reihen (4.16) und (4.17) abgeleitet wurde, welche wir mit Hilfe der Formeln von Moivre bewiesen hatten.

Arkusfunktionen. Wenn wir e^{ix} in (5.12), (5.13) oder (5.14) durch eine Variable u substituieren und $\sin x$, $\cos x$ oder $\tan x$ durch v , so erhalten wir algebraische Gleichungen, die nach u aufgelöst werden können. Im Ergebnis können wir so die Arkusfunktionen mit dem komplexen Logarithmus ausdrücken:

$$(5.15) \quad \arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$$

$$(5.16) \quad \arccos x = -i \ln(x + i\sqrt{1-x^2})$$

$$(5.17) \quad \arctan x = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+x}{i-x}\right).$$

Da die Logarithmus-Funktion mehrwertig ist, muss man bei der Wahl des richtigen Zweiges der jeweiligen Funktion (d.h. des Wertes für k in (5.11)) aufpassen. Die letzte Formel erläutert die eindrucksvolle Ähnlichkeit zwischen der Reihe (4.24) für $y = \arctan x$ und Gregorys Reihe (3.15) für $\ln((1+x)/(1-x))$. Und Machins Formel aus Gl. (4.34) entspricht einer Faktorisierung von komplexen Zahlen:

$$(5.18) \quad \frac{1}{i} = \frac{i+1}{i-1} = \left(\frac{5i+1}{5i-1}\right)^4 \cdot \left(\frac{239i+1}{239i-1}\right)^{-1}.$$

Eulers Produkt für die Sinus-Funktion

... und ich sehe bereits einen Weg, die Summe dieser Reihe zu berechnen:
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ usw.
 (Joh. Bernoulli, 22. Mai 1691, in einem Brief an seinen Bruder)

Eine der großen Herausforderungen an die Mathematik des frühen 18ten Jahrhunderts war es, einen Ausdruck für die Summe der reziproken Quadrate zu finden:

$$(5.19) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = ?$$

Joh. Bernoulli hat viele Jahrzehnte eifrigst nach einem solchen Ausdruck gesucht. Euler (1740) fand dann die folgende elegante Lösung: Wir wissen aus der Algebra, dass beispielsweise

$$(5.20) \quad 1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x),$$

wobei $1/\alpha$, $1/\beta$, $1/\gamma$ die Wurzeln des Polynoms $1 - Ax + Bx^2 - Cx^3$ sind. Desweiteren lautet die erste sogenannte „Viète-Identität“

$$(5.21) \quad A = \alpha + \beta + \gamma.$$

Dasselbe Prinzip wenden wir nun ohne Skrupel auf die *unendliche* Reihe

$$(5.22) \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

mit ihrer unendlichen Zahl an Wurzeln $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... an. Gleichung (5.20) wird zu

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

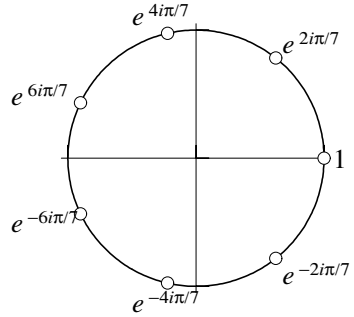
Vergleichen wir diese Beziehung mit (5.22), wird aus dem Analogon von (5.21)

$$(5.23) \quad \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2} + \dots = \frac{1}{6}$$

und die Summe (5.19) ergibt sich zu $\pi^2/6$. Wie kühn diese Argumentation auch sein mag, und wie schön ihr Resultat, so ist doch die mathematische Strenge dahinter selbst für die Verhältnisse des 18ten Jahrhunderts mehr als dürftig. Daher suchte Euler später nach einem besseren Beweis (1748, *Introductio*, §156). Wir beginnen mit der Faktorisierung von $z^n - 1$.

Einheitswurzeln. Das Polynom $z^n - 1$ besitzt die Wurzeln $z = \sqrt[n]{1} = e^{2ik\pi/n}$ für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Da $e^{2i\pi} = 1$, liefern nur n aufeinander folgende Werte von k verschiedene Wurzeln, danach wiederholen sie sich. So sind beispielsweise für $n = 7$ die Lösungen

$$1, e^{2i\pi/7}, e^{-2i\pi/7}, e^{4i\pi/7}, e^{-4i\pi/7}, e^{6i\pi/7}, e^{-6i\pi/7}.$$



Faktorisierungen in der Art von (5.20) sind auch gültig für Polynome mit komplexen Wurzeln.

Tatsächlich können wir jedes Polynom $p(z)$ durch $(z - c)$ mit Rest teilen:

$$p(z) = (z - c)q(z) + d$$

mit $d = p(c)$. Falls c eine Wurzel von $p(z)$ ist, so finden wir eine Faktorisierung $p(z) = (z - c)q(z)$. Wenden wir dieselbe Prozedur nun auf $q(z)$ an, und wiederholen dies mit den jeweils neuen Polynomen, finden wir eine Faktorisierung von $p(z)$ in Linearfaktoren $(z - c)$. Für unser Polynom $z^7 - 1$ finden wir

$$z^7 - 1 = (z - 1) \cdot (z - e^{2i\pi/7}) \cdot (z - e^{-2i\pi/7}) \cdot (z - e^{4i\pi/7}) \cdot (z - e^{-4i\pi/7}) \cdot (z - e^{6i\pi/7}) \cdot (z - e^{-6i\pi/7}),$$

oder allgemein

(5.1) Satz (Euler 1748, *Introductio*, Kap. IX). Für ungerade n gilt

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= (z - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z - e^{2ik\pi/n})(z - e^{-2ik\pi/n}) \\ (5.24) \quad &= (z - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + 1). \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Identität ist die Faktorisierung, die wir oben bereits hergeleitet haben. Die zweite folgt aus Gl. (5.13). \square

Wenn wir z durch z/a in (5.24) ersetzen und mit a^n multiplizieren, erhalten wir ein noch etwas allgemeineres Ergebnis:

$$(5.25) \quad z^n - a^n = (z - a) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2az \cos \frac{2k\pi}{n} + a^2).$$

Wir setzen jetzt $z = (1 + x/N)$, $a = (1 - x/N)$ in (5.25) ein und wählen $n = N$.

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N &= \frac{2x}{N} \cdot \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(2 + \frac{2x^2}{N^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right) \cos \frac{2k\pi}{N}\right) \\
 &= \frac{2x}{N} \cdot \prod_{k=1}^{(N-1)/2} 2 \left(\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{N}\right) + \frac{x^2}{N^2} \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{N}\right) \right) \\
 &= C_N \cdot x \cdot \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(1 + \frac{x^2}{N^2} \cdot \frac{1 + \cos(2k\pi/N)}{1 - \cos(2k\pi/N)}\right).
 \end{aligned}$$

Da der Koeffizient von x^1 im Polynom $(1 + x/N)^N - (1 - x/N)^N$ gleich 2 ist (siehe Satz 2.1), finden wir $C_N = 2$ für alle N . Für große N wird die linke Seite der obigen Formel zu $e^x - e^{-x}$ (Satz 2.3) und wenn wir ausnutzen, dass für kleine y gilt $\cos y \approx 1 - y^2/2$, so strebt der k -te Faktor auf der rechten Seite gegen

$$\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Wir folgern daraus

$$(5.26) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \dots$$

Da hier unendlich viele Faktoren auftreten, müssen wir im Umgang mit diesem Grenzwert Vorsicht walten lassen (für eine Rechtfertigung siehe Übung III.2.5). Ersetzen wir nun x durch ix , finden wir auf der linken Seite die gesuchte Funktion $\sin x$. Auf diese Weise haben wir die folgende berühmte Formel auf glaubhaftere Weise als zuvor abgeleitet.

(5.2) Satz (Euler 1748, §158). *Die Funktion $\sin x$ kann faktorisiert werden als*

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \dots \quad \square$$

Die Konvergenz dieses Produktes ist dargestellt in Abb. 5.5. Wir stellen fest, dass die Konvergenz für kleine Werte von $|x|$ besser ist.

Das Wallissche Produkt. Wir setzen $x = \pi/2$ in die Formel von Satz 5.2 ein, und erhalten

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\pi}{2} = 1 &= \frac{\pi}{2} \quad \left(1 - \frac{1}{4}\right) \quad \left(1 - \frac{1}{16}\right) \quad \left(1 - \frac{1}{36}\right) \quad \dots \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots \\
 &= \frac{\pi}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{6} \quad \dots,
 \end{aligned}$$

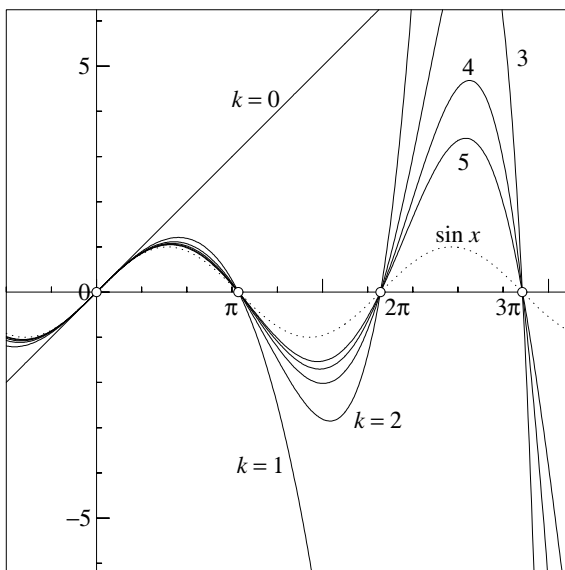


ABB. 5.5. Konvergenz des Produktes aus Satz 5.2

was uns das berühmte Produkt von Wallis (1655) liefert:

$$(5.27) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \dots$$

Bemerkung. Der ursprüngliche Beweis von Wallis beginnt mit der Tatsache, dass $\pi/2$ die Fläche unter $(1 - x^2)^{1/2}$ (zwischen -1 und $+1$) ist, gefolgt von einer komplizierten Abfolge von Interpolationen, die auf den bekannten Flächen von $(1 - x^2)^0$, $(1 - x^2)^1$, $(1 - x^2)^2$, ... basiert. Genau diese Idee inspirierte Newton zu seiner Entdeckung des allgemeinen binomischen Lehrsatzes, den wir in Abschnitt I.2 diskutiert haben.

Übungen

- 5.1 (Euler 1748, §185.) Setzen Sie $x = \pi/6$ in die Formel aus Satz 5.2 ein und finden Sie, mit der Hilfe von $\sin(\pi/6) = 1/2$, eine weitere Produktdarstellung für $\pi/2$:

$$(5.28) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdot \frac{18 \cdot 18}{17 \cdot 19} \cdot \frac{24 \cdot 24}{23 \cdot 25} \cdot \dots;$$

setzen Sie nun $x = \pi/4$ ein, multiplizieren Sie das erhaltene Produkt mit dem Wallisschen Produkt, und leiten Sie folgende interessante Formel her:

$$(5.29) \quad \sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \frac{14 \cdot 14}{13 \cdot 15} \cdot \frac{18 \cdot 18}{17 \cdot 19} \cdot \dots$$

5.2 (Euler, *Introductio* §§166, 168). Verallgemeinern Sie (5.19) und (5.21) auf folgende Weise: Sei

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots = (1 + \alpha_1 z)(1 + \alpha_2 z)(1 + \alpha_3 z) \cdot \dots$$

(hier steht z für x^2 aus Satz 5.2) und definieren Sie die Summen der Potenzen

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

$$S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots$$

$$S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots,$$

und so weiter. Dann führen Sie einen „demonstratio gemina theorematum Newtonianum“

$$(5.30) \quad \begin{aligned} S_1 &= A_1 \\ S_2 &= A_1 S_1 - 2A_2 \\ S_3 &= A_1 S_2 - A_2 S_1 + 3A_3 \\ S_4 &= A_1 S_3 - A_2 S_2 + A_3 S_1 - 4A_4 \end{aligned}$$

und leiten Sie aus diesen Formeln und Satz 5.2 die folgenden Summen ab:

$$(5.31) \quad \begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2 \pi^2}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{6} \\ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots &= \frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4 \pi^4}{2 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{30} \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots &= \frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6 \pi^6}{2 \cdot 6!} \cdot \frac{1}{42} \\ 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots &= \frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8 \pi^8}{2 \cdot 8!} \cdot \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Eigentlich hatte Euler diese Ausdrücke etwas anders niedergeschrieben und der Zusammenhang zu den „Bernoulli-Zahlen“ (siehe Abschnitt II.10 unten) wurde ihm erst einige Jahre später klar (1755, *Institutiones Calculi Differentialis*, Caput V, §§124, 125, 151, „ingrediuntur in expressiones summarum. . .“).

5.3 (Euler 1748, §169). Beweisen Sie, entweder durch einen Beweis ähnlich dem vorangegangenen (beginnend mit den Wurzeln von $z^n + 1 = 0$) oder mittels $\cos x = \sin 2x / (2 \sin x)$, dass

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \right) = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2} \right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2} \right) \cdot \dots$$

Finden Sie durch Anwendung dieses Produktes Ausdrücke der Form

$$(5.32) \quad \begin{aligned} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{8} \\ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots &= \frac{\pi^4}{96}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (5.32) auch direkt aus (5.31) abgeleitet werden kann.

- 5.4 (Euler 1748, §§189–198). Nehmen Sie den Logarithmus der Formel aus Satz 5.2 (welcher das Produkt in eine Summe verwandelt) und finden Sie so praktische Wege zur Berechnung von

$$\ln(\sin(x))$$

mit Hilfe der Ausdrücke (5.31).

- 5.5 Berechnen Sie mit Hilfe von Cardanos Formel (1.14) alle Wurzeln von

$$(5.33) \quad x^3 - 5x + 2 = 0.$$

Trotz der Tatsache, dass alle drei Wurzeln reell sind, muss man zwischen- durch die Kubikwurzeln einer komplexen Zahl berechnen.

- 5.6 Vereinfachen Sie die Berechnung der Wurzeln aus (5.33) mit dem folgenden Ansatz (Viète 1591a): Setzen Sie $x = \mu \cos \alpha$ und ersetzen Sie $\cos \alpha$ durch x/μ in der Identität $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ mit dem Ziel

$$x^3 - \frac{3\mu^2}{4}x - \frac{\mu^3}{4} \cos 3\alpha = 0.$$

Vergleichen Sie diese Gleichung mit (5.33) und bestimmen Sie μ , α und x .

I.6 Kettenbrüche

Die Theorie der Kettenbrüche ist eine der nutzbringendsten Theorien der Arithmetik . . . da sie in den meisten Werken über Arithmetik und Algebra fehlt, ist sie vielleicht unter Geometern nicht sonderlich bekannt. Ich wäre zufrieden, wenn ich dazu beitragen könnte, sie etwas vertrauter zu machen.

(Lagrange 1793, *Oeuvres*, Band 7, S. 6–7)

Wir sagen daher; dass sich der Kreis zum Quadrat seines Durchmessers verhält wie 1 zu $1 + \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times \&c$, *unendlich oft*. Oder wie 1 zu

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \&c, \text{unendlich oft.}}}}}}$$

Wie diese Annäherungen erhalten wurden . . . wäre hier zu lang zu berichten; aber kann von denen eingesehen werden, die die Abhandlung heranziehen möchten.

(J. Wallis 1685, *A Treatise of Algebra*, S. 318)

Nachdem wir nun den Nutzen von unendlichen Reihen und unendlichen Produkten in der Analysis kennengelernt haben, werden wir nun eine dritte Form eines „unendlichen“ Prozesses diskutieren: unendliche Quotienten, oder auch „Kettenbrüche“.

Ursprünge

Der euklidische Algorithmus. Dieser Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen ist seit mehr als 2000 Jahren bekannt (Euklid, ~ 300 v. Chr., *Elemente*, Buch VII, Propositionen 1 und 2). Gegeben seien zwei positive ganze Zahlen, zum Beispiel 105 und 24. Wir teilen die größere durch die kleinere und erhalten den Quotienten 4 mit Rest 9, d.h.

$$105/24 = 4 + 9/24.$$

Wir setzen nun diesen Prozess mit dem Divisor und dem Rest fort:

$$24/9 = 2 + 6/9, \quad 9/6 = 1 + 3/6, \quad 6/3 = 2.$$

Der Algorithmus muss irgendwann enden, da die Nenner der Reste eine streng monoton abfallende Folge positiver ganzer Zahlen bilden. Der letzte nicht verschwindende Nenner (hier 3) ist der größte gemeinsame Teiler, nach dem wir suchen, und durch Kombination der vorherigen Schritte erhalten wir

$$(6.1) \quad \frac{105}{24} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Irrationale Zahlen. Wenn diese Form des euklidischen Algorithmus (wiederholte Subtraktion des Ganzteils und Invertieren) auf eine irrationale Zahl angewendet wird, kann der Prozess nicht enden, da ein endlicher Ausdruck wie in (6.1) rational sein muss. Beispielsweise finden wir für $\alpha = \sqrt{2}$

$$1,4142\dots = 1 + 0,4142\dots = 1 + \frac{1}{2,4142\dots} = 1 + \frac{1}{2 + 0,4142\dots}.$$

Dass die Ziffern von $\sqrt{2}$ im letzten Quotienten wieder auftreten, ist kein Zufall, da $\sqrt{2}$ gerade die Gleichung $\alpha = 1 + 1/(1 + \alpha)$ erfüllt (multiplizieren Sie mit $1 + \alpha$, um dies zu sehen). Wenn wir weiter fortfahren, erhalten wir die folgende Formel von Bombelli aus dem Jahr 1572:

$$(6.2) \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Die einfachste aller Folgen beschreibt den „goldenen Schnitt“, nämlich

$$(6.3) \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803 = 1 + \frac{1}{1,61803} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Weitere Beispiele sind die folgenden:

$$(6.4) \quad \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}$$

$$(6.5) \quad \frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \dots}}}} \quad \pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Die Zahlen 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ... die als Quotienten in der Entwicklung von $\sqrt{3}$ auftreten, sind periodisch, die für e und $(e-1)/(e+1)$ besitzen ebenfalls ein regelmäßiges Verhalten. Für $(e-1)/(e+1)$ werden wir das unten erklären können, da diese Zahl gerade $\tanh(1/2)$ ist (vergl. Gl. (6.31) unten). Die Regelmäßigkeit von e ist dagegen subtiler (siehe Hurwitz, *Werke* 2, S. 130). Überhaupt keine Regelmäßigkeit scheint in der Entwicklung von π zu stecken, selbst wenn wir Tausende ihrer Quotienten berechnen (Lambert (1770a) berechnete 27, Lochs (1963) berechnete 968).

Lord Brounckers Entwicklung für $\pi/4$. Ein Jahr nach der Entdeckung des Wallisschen Produktes für π gelang es Lord Brouncker, es in einen interessanten Kettenbruch umzuformen (siehe das Zitat oben und Gl. (6.23) unten). Dieses Resultat inspirierte Wallis dazu, eine Theorie der Kettenbrüche auf den zwei letzten Seiten seiner *Arithmetica Infinitorum* (1655, siehe *Opera*, Band I, S. 474–475) einzufügen.

Lamberts Kettenbruch für $\tan x$.

Die Veranlassung aber, diese Formeln zu suchen, gab mir des Herrn *Eulers* Analysis infinitorum, wo der Ausdruck ... in Form eines Beyspieles vorkömmt. (Lambert 1770a)

Wie wir bereits in Abschnitt I.4 gesehen haben, besitzt die Funktion $\tan x = \sin x / \cos x$ keine besonders einfache Reihenentwicklung. Wir beginnen mit

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/6 + x^5/120 - \dots}{1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots} = \frac{x}{\frac{1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots}}.$$

Für $x \rightarrow 0$ strebt der Zähler gegen 1. Daher ziehen wir 1 ab und erhalten

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2/3 - x^4/30 + \dots}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{\frac{1 - x^2/6 + \dots}{1/3 - x^2/30 + \dots}}}.$$

Nun strebt der letzte Nenner für $x \rightarrow 0$ gegen 3. Wir subtrahieren 3 mit dem Ergebnis

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{\dots}}}.$$

Fahren wir auf diese Weise fort, so finden wir als weitere Nenner 5, 7 und so weiter. Für einen Mann des 18ten Jahrhunderts (Lambert 1768) gibt es dann keinen Zweifel mehr an der Wahrheit der folgenden allgemeinen Formel:

$$(6.6) \quad \tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \dots}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3 - \frac{1}{x - \frac{5}{x - \frac{7}{x - \dots}}}}}.$$

Ein paar Jahrzehnte später gab Legendre (1794) einen vollständigen Beweis (siehe Übung 6.6).

Ein Ausdruck der Form

$$(6.7) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots}}}$$

heißt *Kettenbruch*. Die Brüche $p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, \dots$ heißen *Teilbrüche* des Kettenbruchs. Falls alle $p_k = 1$ sind, so nennen wir den Kettenbruch *regulär* oder *einfach*.

Näherungsbrüche

Wenn der Kettenbruch (6.7) an seiner k -ten Stelle abgebrochen wird, erhalten wir eine rationale Zahl

$$(6.8) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \dots + \frac{p_k}{q_k}}},$$

die als k -ter *Näherungsbruch* des Kettenbruchs bezeichnet wird. Wir wollen diese rationalen Zahlen als Quotienten zweier ganzer Zahlen schreiben. Der erste Schritt ist einfach:

$$(6.9a) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + p_1}{q_1},$$

$$(6.9b) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2}{q_1 q_2 + p_2}.$$

Seien nun A_k der jeweilige Zähler und B_k der jeweilige Nenner, wenn wir Ausdruck (6.8) auf diese Weise weiter auswerten. Aus (6.9) folgt

$$\begin{aligned} A_0 &= q_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= q_0 q_1 + p_1, & B_1 &= q_1, \\ A_2 &= q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2, & B_2 &= q_1 q_2 + p_2. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun diese Formeln, wie Euler sagt „mit ein wenig Aufmerksamkeit“ (tamen attendenti statim patebit), und entdecken die folgende schöne Struktur:

$$(6.10) \quad A_2 = q_2 A_1 + p_2 A_0, \quad B_2 = q_2 B_1 + p_2 B_0.$$

Für die Berechnung von A_3 und B_3 , deren Quotient natürlich

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{\boxed{q_2 + p_3/q_3}}}$$

sein muss, müssten wir also bei Vergleich mit (6.9b) die Formeln von A_2 und B_2 nehmen, und jedes q_2 durch den Term $q_2 + p_3/q_3$ ersetzen. Doch wären die auf diese Weise erhaltenen Ausdrücke im allgemeinen keine ganzen Zahlen. Daher multiplizieren wir sie noch mit q_3 , was den Quotienten nicht ändert, und haben gemäß (6.10)

$$A_3 = \left((q_2 + p_3/q_3)A_1 + p_2A_0 \right) \cdot q_3, \quad B_3 = \left((q_2 + p_3/q_3)B_1 + p_2B_0 \right) \cdot q_3.$$

Diese zwei Ausdrücke werden nach Vereinfachung zu

$$A_3 = q_3A_2 + p_3A_1, \quad B_3 = q_3B_2 + p_3B_1.$$

Dieses Schema wiederholt sich nun wieder und wieder und wir erhalten:

(6.1) Satz (Wallis 1655, Euler 1737b). *Die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche (6.8) sind rekursiv bestimmt durch*

$$(6.11) \quad \boxed{\begin{array}{l} A_k = q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2} \\ B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2} \end{array}}$$

mit

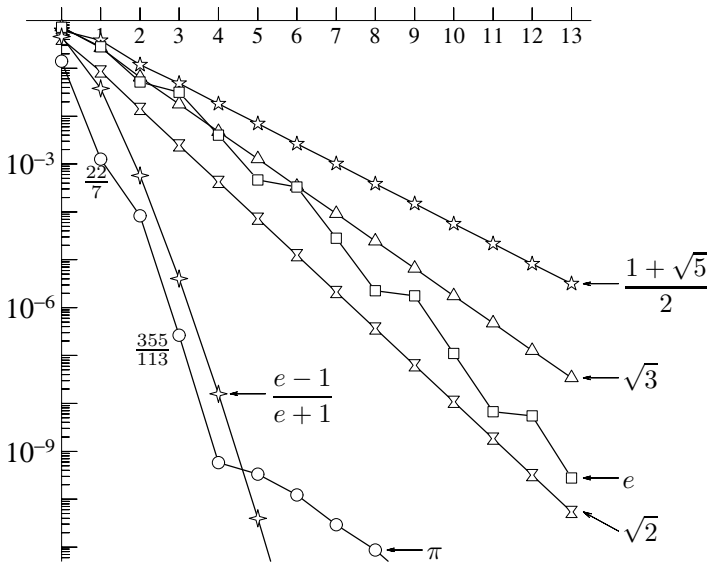
$$(6.12) \quad \begin{array}{lll} A_{-1} = 1 & A_0 = q_0 & A_1 = q_1 q_0 + p_1 \\ B_{-1} = 0 & B_0 = 1 & B_1 = q_1. \end{array}$$

(6.2) Beispiele. Wenden wir die Gleichungen (6.11) und (6.12) auf die obigen Beispiele an, finden wir die folgenden rationalen Näherungsbrüche,

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &\approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \dots \\ \sqrt{2} &\approx \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \dots \\ \sqrt{3} &\approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \dots \\ e &\approx \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \frac{1457}{536}, \frac{2721}{1001}, \dots \\ \pi &\approx \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots, \end{aligned}$$

welche schnell gegen die ursprünglichen irrationalen Zahlen konvergieren (siehe Abb. 6.1).

Die Näherungen für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ waren bereits in der Antike bekannt (Archimedes benutzte ohne weiteren Kommentar $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$). Die zwei Näherungsbrüche $22/7$ (Archimedes) und $355/113$ (Tsu Chung-chih um 480 in China, Adrianus Metius 1571–1635 in Europa) für π sind von überdurchschnittlicher Güte. Erklärung: Der erste Nenner q_{k+1} , der vernachlässigt wird, ist

ABB. 6.1. Fehler der Näherungsbrüche A_k/B_k (logarithmische Skala)

vergleichsweise groß (15 bzw. 292). Zwei andere sehr genaue Näherungsbrüche für π , nämlich der 11te und der 26ste, wurden 1766 in Japan von Y. Arima zu

$$\frac{5419351}{1725033} \quad \text{und} \quad \frac{428224593349304}{136308121570117}$$

berechnet (siehe Hayashi 1902). Umgekehrt konvergiert der Kettenbruch für den goldenen Schnitt nur sehr langsam, da alle $q_k = 1$ sind. Hier wird (6.11) zur Rekursionsformel für die Fibonacci-Zahlen (Leonardo da Pisa 1170–1250, auch bekannt als Fibonacci).

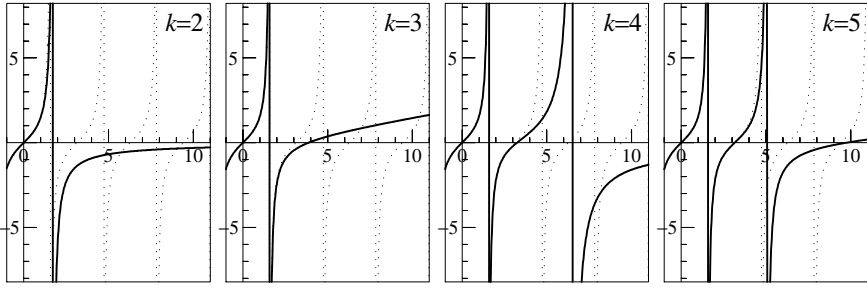
Einige Näherungsbrüche des Kettenbruchs (6.6) für $\tan x$ lauten

$$(6.13) \quad \frac{x}{1}, \frac{3x}{3-x^2}, \frac{15x-x^3}{15-6x^2}, \frac{105x-10x^3}{105-45x^2+x^4}, \frac{945x-105x^3+x^5}{945-420x^2+15x^4}, \dots$$

und sind in Abb. 6.2 dargestellt, sie streben gut gegen die Funktion $\tan x$, selbst jenseits der Singularitäten bei $x = \pi/2, 3\pi/2, \dots$.

Unendliche Reihen zu Kettenbrüchen. Die Differenz zweier aufeinander folgender Näherungsbrüche beträgt

$$(6.14) \quad \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1}}{B_kB_{k+1}} = (-1)^k \cdot \frac{p_1p_2 \cdots p_{k+1}}{B_kB_{k+1}}.$$

ABB. 6.2. Näherungsbrüche des Kettenbruchs für $\tan x$

Die letzte Gleichheit sehen wir wie folgt: Benutzen wir (6.11), so haben wir

$$\begin{aligned} A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1} &= (q_{k+1}A_k + p_{k+1}A_{k-1})B_k - A_k(q_{k+1}B_k + p_{k+1}B_{k-1}) \\ &= -p_{k+1}(A_kB_{k-1} - A_{k-1}B_k) = \dots \\ &= p_2 \cdot \dots \cdot p_{k+1}(-1)^k(A_1B_0 - A_0B_1) \end{aligned}$$

und $(A_1B_0 - A_0B_1) = p_1$ aufgrund von (6.12). Schreiben wir den k -ten Näherungsbruch A_k/B_k als

$$\frac{A_k}{B_k} = \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right) + \left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} \right) + \dots + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0} \right) + \frac{A_0}{B_0},$$

so folgt aus (6.14), dass

$$(6.15) \quad \frac{A_k}{B_k} = q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1p_2}{B_1B_2} + \frac{p_1p_2p_3}{B_2B_3} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{p_1p_2 \cdot \dots \cdot p_k}{B_{k-1}B_k}$$

und finden

(6.3) Satz. Die Näherungsbrüche von (6.7) sind die Partialsummen der Reihe

$$(6.16) \quad \boxed{q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1p_2}{B_1B_2} + \frac{p_1p_2p_3}{B_2B_3} - \frac{p_1p_2p_3p_4}{B_3B_4} + \dots}$$

Für reguläre Kettenbrüche (d.h. alle $p_k = 1$) folgt

$$(6.16') \quad q_0 + \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_1B_2} + \frac{1}{B_2B_3} - \frac{1}{B_3B_4} + \dots$$

Da $1/(B_{k-1}B_k)$ der kleinstmögliche Abstand zwischen zwei rationalen Zahlen mit Nennern B_{k-1} und B_k ist, kann das Intervall zwischen A_{k-1}/B_{k-1} und A_k/B_k keine rationale Zahl enthalten, deren Nenner kleiner oder gleich B_k ist.

Kettenbrüche zu unendlichen Reihen. Sei

$$(6.17) \quad \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} - + \dots$$

eine gegebene Reihe mit ganzen Zahlen c_i ; wir wollen ganze Zahlen p_i, q_i finden, so dass die Reihe (6.17) Term für Term mit (6.16) übereinstimmt (mit $q_0 = 0$).

Lösung. Wir setzen $p_1 = 1$ und $q_1 = B_1 = c_1$. Dann teilen wir zwei aufeinander folgende Terme aus (6.16) (so dass sich die Produkte der p_i vereinfachen) und erhalten

$$(6.18) \quad c_{k-1}B_k = c_k p_k B_{k-2}.$$

Dies ähnelt bereits Gl. (6.11), abgesehen von den Faktoren c_{k-1} und c_k . Daher subtrahieren wir noch von (6.18) die Gl. (6.11), einmal mit c_{k-1} multipliziert, einmal mit c_k , und finden

$$\begin{aligned} c_{k-1}q_k B_{k-1} &= (c_k - c_{k-1})p_k B_{k-2} \\ (c_{k-1} - c_k)B_k &= -c_k q_k B_{k-1}. \end{aligned}$$

In der ersten Formel ersetzen wir k durch $k+1$ und dividieren die zwei Ausdrücke. Dies kürzt B_k und B_{k-1} heraus und gibt uns

$$(6.19) \quad \frac{c_k q_{k+1}}{c_k - c_{k-1}} = \frac{(c_{k+1} - c_k)p_{k+1}}{c_k q_k}.$$

Die p_i, q_i sind selbstverständlich nicht eindeutig festgelegt. Da wir sie als ganze Zahlen wollen, ist eine natürliche Wahl, die (6.19) erfüllt,

$$(6.20) \quad \boxed{p_{k+1} = c_k^2, \quad q_{k+1} = c_{k+1} - c_k}$$

für $k \geq 1$. Wir erhalten so die folgende Formel von Euler (1748, §369):

$$(6.21) \quad \boxed{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \dots = \frac{1}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2 - c_1 + \frac{c_2^2}{c_3 - c_2 + \frac{c_3^2}{c_4 - c_3 + \dots}}}}.}$$

Wenden wir dies auf zwei wohlbekannte Reihen an (siehe Abschnitte I.3 und I.4), finden wir

$$(6.22) \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \frac{9}{1 + \frac{16}{1 + \dots}}}}}$$

$$(6.23) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}}.$$

Der zweite Kettenbruch ist derjenige, den Lord Brouncker gefunden hat, hier von uns hergeleitet über Leibniz' Reihe.

Auf ähnliche Art beweisen wir (Euler 1748, §370)

(6.24)

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 c_2 c_3} - \dots = \frac{1}{c_1 + \frac{c_1}{c_2 - 1 + \frac{c_2}{c_3 - 1 + \frac{c_3}{c_4 - 1 + \dots}}}},$$

und als Anwendungsbeispiel

$$(6.25) \quad 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \dots}}}}}.$$

Irrationalität

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen, oder auch verstanden werden die den meisten Antheil davon nehmen sollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu suchen. Es wird sicher genug immer solche geben ... die von der Geometrie wenig verstehen ...

(Lambert 1770a)

Eines der großen ungelösten Probleme der klassischen Analysis war die Quadratur des Kreises (d.h. die Konstruktion von π) mit Zirkel und Lineal. Lambert glaubte als erster daran, dass diese Konstruktion, die sich 2000 Jahre lang der Kunst der Mathematiker widersetzt hat, schlicht unmöglich ist. Ein erster Hinweis in diese Richtung wäre die Feststellung, dass π irrational ist. Wir sind daher an einem Satz interessiert, der aussagt, wann ein unendlicher Kettenbruch einen irrationalen Wert beschreibt.

Erste Schwierigkeit. Es kann passieren, dass ein Kettenbruch *gar keine* Zahl repräsentiert. Ein Beispiel hierfür ist die Reihe

$$(6.26) \quad \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \frac{7}{6} + \dots$$

Da ihre Partialsummen abwechselnd gegen $+1$ und -1 streben, kann sie nicht konvergieren. Um aus dieser Reihe einen Kettenbruch zu gewinnen, setzen wir $c_k = k/(k+1)$ (siehe (6.17)) und erhalten aus (6.19) nach Vereinfachung

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1} \cdot q_k} = k^3(k+2).$$

Mit $p_{k+1} = k^3(k+2)$ und $q_k = 1$ haben wir ganzzahlige Koeffizienten und stellen fest, dass die Näherungsbrüche des Kettenbruchs

$$(6.27) \quad \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{32}{1 + \frac{135}{1 + \dots}}}}$$

nicht gegen eine reelle Zahl konvergieren können.

Zweite Schwierigkeit. Es gibt unendliche Kettenbrüche, die sehr wohl eine rationale Zahl beschreiben. Wenn wir beispielsweise in $2 = 1 + 2/2$ wiederholt die 2 ersetzen, gibt uns das

$$(6.28) \quad 2 = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}}},$$

was rational ist.

(6.4) Satz. Falls p_j und q_j ganze Zahlen sind und ab einem bestimmten Index $j \geq j_0$ aufwärts

$$(6.29) \quad 0 < p_j \leq q_j$$

erfüllen, dann konvergiert ihr zugehöriger Kettenbruch (6.7), und zwar gegen eine irrationale Zahl α .

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $0 < p_j \leq q_j$ für alle j erfüllt ist. Ansonsten betrachten wir stattdessen den Kettenbruch, der mit p_{j_0}/q_{j_0} beginnt; Konvergenz dieses Kettenbruchs und seine Irrationalität sind äquivalent zur Konvergenz und Irrationalität des ursprünglichen.

Die Annahme, dass $0 < p_j \leq q_j$ gilt, garantiert uns, dass die Näherungsbrüche des Kettenbruchs gegen eine reelle Zahl streben. Dies ist eine Folgerung aus dem „Leibniz-Kriterium“ und wird in Abschnitt III.2 beschrieben.

Wir folgen nun einer Idee von Legendre (1794, *Éléments de Géométrie*, Note IV) und schreiben den Kettenbruch (6.7) ohne q_0 als

$$(6.30) \quad \alpha = \frac{p_1}{q_1 + \beta} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots}}.$$

Mit $q_1 \geq p_1$ und $\beta > 0$ haben wir $\alpha < 1$. Nehmen wir nun an, dass $\alpha = B/A$ rational ist mit $0 < B < A$. Eine einfache Umformulierung von (6.30) liefert dann

$$\beta = \frac{p_1 - q_1 \alpha}{\alpha} = \frac{Ap_1 - Bq_1}{B},$$

so dass sich β ausdrücken lässt als rationale Zahl, dessen Nenner *kleiner* ist als der von α . Wenn wir dieselbe Argumentation auf $\beta = p_2/(q_2 + \gamma)$ anwenden, und dies immer wieder wiederholen, finden wir fortlaufend kleinere Nenner, die aber noch alle ganze Zahlen sind. Dies ist nicht unendlich oft möglich. \square

Negative p_j . Die Schlussfolgerung von Satz 6.4 ist auch dann gültig, wenn wir (6.29) ersetzen durch

$$(6.29') \quad 2|p_j| \leq q_j - 1.$$

Dies sieht man, wenn man wiederholt die Gleichheit

$$q_{j-1} + \frac{p_j}{q_j + \beta} = (q_{j-1} - 1) + \frac{1}{1 + \frac{|p_j|}{q_j - |p_j| + \beta}}$$

ausnutzt (sie gilt für $p_j < 0$), welche unter der Annahme (6.29') den Kettenbruch in einen anderen Kettenbruch umformt, der (6.29) erfüllt.

(6.5) Satz (Lambert 1768, 1770a, Legendre 1794). *Für jedes rationale x ($x \neq 0$) ist der Wert $\tan x$ irrational.*

Beweis. Sei $x = m/n$ rational, wir setzen x in (6.6) ein:

$$(6.31) \quad \tan \frac{m}{n} = \frac{\frac{m}{n}}{1 - \frac{\frac{m^2}{n^2}}{3 - \frac{\frac{m^2}{n^2}}{5 - \frac{\frac{m^2}{n^2}}{7 - \dots}}}} = \frac{m}{n - \frac{m^2}{3n - \frac{m^2}{5n - \frac{m^2}{7n - \dots}}}}.$$

Rechts steht ein Kettenbruch mit ganzzahligen Koeffizienten. Da die Faktoren 1, 3, 5, 7, 9, ... gegen Unendlich streben, ist die Bedingung (6.29') für alle m und n ab einem bestimmten Index i_0 erfüllt. \square

Dasselbe Ergebnis gilt für den Arkustangens; tatsächlich muss $x = \arctan y$ irrational sein, wenn y rational ist, da ansonsten $y = \tan x$ irrational wäre nach Satz 6.5. Insbesondere muss $\pi = 4 \arctan 1$ irrational sein.

Der Beweis eines analogen Resultats für den *hyperbolischen* Tangens

$$\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$$

ist sogar noch einfacher, da sämtliche Minuszeichen in (6.31) zu Pluszeichen werden. Invertieren wir die letzte Formel, so haben wir $e^x = (1 + \tanh(x/2))/(1 - \tanh(x/2))$ und erhalten insbesondere die Irrationalität von e^x und $\ln x$ für rationale Zahlen $x \neq 0$ beziehungsweise $x \neq 1$.

Übungen

- 6.1 Zeigen Sie, dass die Nenner A_k und B_k der Näherungsbrüche (6.8) mit Hilfe der Matrixnotation wie folgt ausgedrückt werden können:

$$\begin{pmatrix} A_k & A_{k-1} \\ B_k & B_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_{k-1} & 1 \\ p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ p_k & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6.2 Berechnen Sie numerisch die regulären Kettenbrüche der Zahlen

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \quad \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}$$

und entdecken Sie einen bedeutenden Unterschied zwischen den Quadrat- und Kubikwurzeln.

- 6.3 Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \dots}}}}}$$

Lösungen einer Gleichung zweiten Grades sind. Berechnen Sie ihre Werte.

- 6.4 Die Länge eines astronomischen Jahres ist (Euler 1748, §382)

$$365 \text{ Tage } 5 \text{ Stunden } 48'55''.$$

Entwickeln Sie 5 Stunden 48'55'' (gemessen in Tagen) als regulären Kettenbruch und berechnen Sie die zugehörigen Näherungsbrüche. Vergessen Sie nicht, Papst Gregor XIII. ihren wertvollen Ratschlag für die Kalenderreform vorzulegen.

- 6.5 Geben Sie einen detaillierten Beweis von Gl. (6.24).

6.6 Beweisen Sie Formel (6.6).

Hinweis (Legendre 1794). Definieren Sie

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{1 \cdot z} + \frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot z(z+1)} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z(z+1)(z+2)} + \dots$$

und zeigen Sie, dass gilt: $\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)} \varphi(z+2)$. Definieren Sie als nächstes

$$(6.33) \quad \psi(z) = \frac{a \cdot \varphi(z+1)}{z \cdot \varphi(z)}, \text{ so dass } \psi(z) = \frac{a}{z + \psi(z+1)}.$$

Iteration von (6.33) führt zu einem Kettenbruch. Setzen Sie schließlich $a = x^2/4$, so dass $\varphi(1/2) = \cosh x$ und $x\varphi(3/2) = \sinh x$ erfüllt sind, und ersetzen Sie x durch ix . Wir wollen anmerken, dass diese Formeln verwandt sind mit den Kettenbrüchen hypergeometrischer Funktionen (Gauß, Heine, siehe Perron 1913, S. 313, 353).



L. Euler 1707–1783



C.F. Gauß 1777–1855

Mit freundlicher Erlaubnis der Schweizer Nationalbank und der Deutschen Bundesbank



J. Wallis 1616–1703



J.H. Lambert 1728–1777

Mit Erlaubnis des Georg Olms Verlags Hildesheim und der Univ.-Bibl. Basel

Analysis in historischer Entwicklung

Hairer, E.; Wanner, G.

2011, XI, 405 S. 173 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-13766-2