23 Mathematische Grundlagen der Analysis

23.1 Die Axiome der reellen Zahlen

Jetzt erzähle ich Ihnen, wie wir die *Mathematikstudenten* in die Analysis einführen. Wie Sie bemerken konnten, habe ich in den ersten Kapiteln des ersten Bandes ab und zu einen Joker aus dem Ärmel gezogen, indem ich unterstellt habe, Sie kennten dies oder jenes "aus der Schule", obwohl das vielleicht eher eine Fiktion war, wenn es auch prinzipiell hätte wahr sein können, ja sogar hätte wahr sein *sollen*.

Ganz anders machen wir es mit den Mathematikstudenten. "Sie wissen etwas aus der Schule? Ver-géssen Sie es!", sagen wir, sinngemäß. Alles was Sie kennen sollen, sind die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ usw. Wir erklären die Notationen des Umgangs mit Mengen, wie Durchschnitt und Vereinigung, Abbildung, Produktmenge, Relation, und dann geht's los:

Satz (Axiome für die reellen Zahlen): *Es gibt ein Paar* $(\mathbb{R}, <)$, *bestehend aus einem Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *im Folgenden der* ***Körper der reellen Zahlen*** *genannt, und einer Relation* $<$ *auf* $\mathbb{R}$, *im Folgenden die Relation "kleiner" genannt, so dass die Bedingungen* (1)-(6) *erfüllt sind:*

(1) VERGLEICHBARKEIT: *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$, *so gilt genau eine der Aussagen* $x < y$, $x = y$ *oder* $y < x$.

K. Jänich, *Mathematik 2*, Springer-Lehrbuch, 2nd ed.,
DOI 10.1007/978-3-642-16150-6_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

(2) Transitivität: *Gilt $x < y$ und $y < z$, so auch $x < z$.*

(3) Translationsinvarianz der Anordnung: *Aus $x < y$ folgt $x + a < y + a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.*

(4) Streckungsinvarianz der Anordnung: *Aus $x < y$ und $0 < a$ folgt $xa < ya$.*

(5) Archimedisches Axiom: *Gilt $0 < x$ und $0 < \varepsilon$, so kann man $x < \varepsilon + \cdots + \varepsilon$ erreichen, wenn man nur genügend viele Summanden nimmt.*

(6) Vollständigkeitsaxiom: *Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere nach oben beschränkte Menge, d.h. ist $M \neq \emptyset$ und gibt es eine* ***obere Schranke*** *für M, also ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $x \in M$ entweder $x < c$ oder $x = c$ (kurz $x \leqslant c$) gilt, so hat M auch eine kleinste obere Schranke, im Folgenden das* ***Supremum*** $\sup M \in \mathbb{R}$ *genannt.*[1] □

Auch diesen Satz formulieren wir nur sinngemäß so, da die Studenten ja noch nicht wissen, was ein Körper ist, wir sagen also in Wirklichkeit " ... *ein Quadrupel* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, *wobei* ... " und führen die Körperaxiome mit auf, so dass wir insgesamt nicht sechs, sondern Stücker fünfzehn Bedingungen in dem Satz stehen haben.

Ganz früher wurde der Beweis dieses Satzes nun auch in der Vorlesung vorgetragen, ich habe es in den 70er Jahren noch selbst so gemacht. Der heutige Zeitdruck lässt das nicht mehr zu, ich seh's ja ein, aber es ist auch schade, denn dabei würden wichtige Techniken des *Erschaffens* neuer mathematischer Objekte auf ganz elementarem Niveau geübt.[2]

Rohmaterial des Beweises sind nur die natürlichen Zahlen und die durch den Sinn der natürlichen Zahlen 'natürlich' gegebene Addition, Multiplikation und Kleinerrelation. Sie können freilich auch *diese* Ausgangsdaten immer weiter hinterfragen, bis Sie an Ihrer eigenen Existenz zweifeln. Ich will dagegen gar nichts sagen, als dass es aus dem Bereich der Mathematik hinausführt. Sie können auch Ihre mentalen Operationen beim Umgang mit natürlichen Zahlen genau zu beobachten suchen mit dem Ziel, sie zu formalisieren und auf wenige Einzeloperationen zu reduzieren. Das führt auf das Gebiet der Logik, nicht gerade aus der Mathematik hinaus, aber doch von einer Einführung in die Analysis weg.

Der Satz mit den "Axiomen der reellen Zahlen" wird den Mathematikstudenten jedenfalls zu Studienbeginn mitgeteilt, aus Zeitmangel meist ohne Beweis, und alle weiteren Aussagen über die reellen Zahlen gelten fortan nur dann als bewiesen, wenn sie sich logisch lückenlos auf die Axiome zurückführen lassen.[3] Wie sieht das praktisch aus?

Es folgt eine Woche, in der in Vorlesung und Übungen eigentlich weiter nichts getan wird, als Rechenregeln und Aussagen über reelle Zahlen aus den Axiomen herzuleiten, von denen Sie bisher geglaubt hatten, dass sie Ihnen seit Jahren schon geläufig seien:

> Dann lehret man euch manchen Tag,/ Daß, was ihr sonst auf einen Schlag/ Getrieben, wie Essen und Trinken frey,/ Eins! Zwey! Drey! dazu nöthig sey. [...]/ Der Philosoph, der tritt herein/ Und beweis't euch, es müßt' so seyn:/ Das Erst' wär' so, das Zweyte so,/ Und drum das Dritt' und Vierte so;/ Und wenn das Erst' und Zweyt' nicht wär',/ Das Dritt' und Viert' wär' nimmermehr.

Nach den ersten Lemmas und Notationen über das Rechnen im Körper, wie Eindeutigkeit und Bezeichnung der neutralen und inversen Elemente, wird zum Beispiel die Schreibweise $\frac{x}{y} := y^{-1}x$ für $y \neq 0$ eingeführt und es erscheint das

Lemma: *Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ gilt*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \ .$$

Beweis: ... □

Etwa zwanzig dieser Art! Für diejenigen Studenten, die nicht recht mitbekommen haben, worum es dabei eigentlich geht — bedenken Sie, wir sind in der zweiten Woche des ersten Semesters — ist das eine wahre Leidenszeit. Da wird

$$|x| \quad := \quad \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 < x \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

definiert, und man soll nun zu Hause $|x| \geqslant 0$, $|xy| = |x||y|$ und $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ *beweisen*! Das war doch bisher immer so, weshalb soll ich das auf einmal beweisen? Und vor allem: wie? Wenn Schlüsse, die in der Schule immer gegolten haben, hier verboten sind?

Damit nicht genug. Die natürlichen Zahlen mit ihren natürlichen Strukturen, $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$, sind ja auch noch da. Schreiben wir für die reellen Zahlen aus dem Satz zur Unterscheidung einmal $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$ und $1_{\mathbb{R}}$ für die Körpereins. Von $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist in den Axiomen nicht die Rede. Durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \underbrace{1_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} \cdots +_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}}}_{n \text{ Summanden}} =: n_{\mathbb{R}} \end{array}$$

ist aber eine Injektion (Beweis?!) gegeben, und es wird bewiesen (Lemma), dass diese Abbildung mit den Verknüpfungen und der Kleinerrelation verträglich ist. Das ermöglicht die Vereinbarung, die jetzt auch getroffen wird, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ vermöge der Zuordnung $n \mapsto n_{\mathbb{R}}$ als Teilmenge aufzufassen und den Notationsunterschied $+$ und $+_{\mathbb{R}}$ wieder fallen zu lassen: es ist bewiesenermaßen dasselbe, ob man mit den "reellen natürlichen Zahlen" $n = n_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ natürlich oder axiomatisch rechnet. Ausgehend von dem so verstandenen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ werden nun auch

$$\mathbb{Z} := \{p \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{N} \text{ oder } p = 0 \text{ oder } -p \in \mathbb{N}\} \quad \text{und}$$
$$\mathbb{Q} := \{\tfrac{p}{q} \in \mathbb{R} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$$

definiert. — So viel Aufwand, nur um natürliche, ganze und rationale Zahlen als reelle auffassen zu dürfen? — Ja, ja. Und auch andere wohlvertraute 'Tatsachen' über die Lage von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ werden jetzt beweisbedürftige Lemmas, insbesondere:

Lemma: a) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$*, und b) *Zwischen je zwei reellen Zahlen $x < y$ lässt sich immer eine rationale finden, $x < \frac{p}{q} < y$.* □

Das folgt mit Hilfe des archimedischen Axioms. Beachten Sie, dass die Studenten dabei nicht etwa die Dezimaldarstellung der reellen Zahlen benutzen dürfen: davon steht nichts in den Axiomen, sie

muss bewiesen — und davor überhaupt erst einmal formuliert werden, das kommt später dran.

Alles Dinge, die Sie "wie Essen und Trinken frey" sowieso betreiben würden, ohne viel danach zu fragen, ob das auch gestattet sei, und ich führe Sie ja auch gleichsam nur wie Ehrengäste bei einer Anstaltsbesichtigung herum. Weshalb müssen wir aber darauf bestehen, dass unsere Mathematikstudenten diesen Drill absolvieren? Weil sie von Anfang an sehen müssen, dass in der Mathematik alles lückenlos beweisbar ist und der einzelne Mathematiker über alles was er behauptet, restlose Rechenschaft muss geben können. Das betrifft nicht nur die ersten Schritte, sondern das ganze Studium, ja die ganze Wissenschaft.

Die *Physik* würde mit solchen rigorosen Maximen nicht weit kommen, die Wirklichkeit lässt sich nicht einem lückenlosen Diktat der Logik unterwerfen, sondern behält sich vor, absurd zu sein. Im Kampf mit einem so unfairen Gegenspieler ist jedes Mittel recht, da darf man nicht vor lauter mathematischen Skrupeln zu zimperlich zum Zupacken sein. Einerseits.

Andererseits schickt Sie Ihre Fakultät nicht nur deshalb in unsere Vorlesungen, damit Sie hier ein paar Handgriffe erklärt bekommen, wie man dieses Integral ausrechnet und jene Differentialgleichung löst. Vielmehr sollen Sie auch den Geist der Mathematik begreifen, und sei es auch nur, um später ein Urteil darüber zu haben, was da allenfalls zu holen sein könnte und was nicht.

Steigen Sie deshalb jetzt mit ein in die Grundlegung der Analysis. Im ersten Band habe ich immer dann, wenn im Beweis das Vollständigkeitsaxiom heranzuziehen gewesen wäre, auf das Kapitel 23 im zweiten Band verwiesen, zum Beispiel beim Mittelwertsatz, bei der Definition des Riemann-Integrals, bei der Kompaktheit des kompakten Intervalls und deshalb beim Satz von Heine-Borel, implizit auch bei manchen der als "aus der Schule bekannt" angenommenen Tatsachen. Im Abschnitt 23.3 machen wir damit reinen Tisch. Sie sind dann auch vorbereitet auf die Theorie der Funktionenfolgen und -reihen, denen das nächste Kapitel gewidmet ist.

23.2 Die Konvergenz von Folgen

Dieser vorbereitende Abschnitt handelt von der formalen Seite des Umgangs mit Folgen, das Vollständigkeitsaxiom spielt dabei noch keine Rolle. Zunächst erinnere ich an die

Definition: Eine Folge $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ reeller Zahlen ***konvergiert gegen*** ein $a \in \mathbb{R}$, symbolisch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ möglich ist ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt. □

Man nennt dann a den ***Limes*** oder ***Grenzwert*** der Folge, und diese bestimmte Sprechweise (*der* Grenzwert statt vorsichtiger *ein* Grenzwert) ist auch berechtigt, denn wie bei Folgen in beliebigen metrischen, ja sogar in bloßen Hausdorffräumen (siehe Aufgabe T19.3) kann eine reelle Folge offenbar höchstens einen Grenzwert haben. Wenn eine reelle Folge gegen Null konvergiert, nennt man sie eine ***Nullfolge***.

Ich weiß nicht, ob Sie es noch nachempfinden können, aber (wirkliche) Anfänger haben mit dem Konvergenzbegriff oft einige Schwierigkeiten, weil sie dabei zweimal eine unendliche Menge von Zahlen ins Auge fassen müssen: "Für jedes $\varepsilon > 0$" — das sind ja unendlich viele, die da in Frage kommen, und sodann "für alle $n \geqslant n_0$". Sie können sich selbst testen, indem Sie einmal hinzuschreiben versuchen, was es eigentlich bedeutet, dass eine gegebene Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *nicht* konvergiert, also ***divergiert***, wie man sagt.

Das heißt also: für jedes $a \in \mathbb{R}$ (das sind noch ein drittes Mal unendlich viele!) ist die Konvergenzbedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ verletzt, gibt es unter den sämtlichen $\varepsilon > 0$ also jeweils mindestens ein schwarzes Schaf, d.h. ein $\varepsilon_0 > 0$, für das es unmöglich ist, ein n_0 mit der verlangten Eigenschaft zu finden, was wiederum bedeutet, dass es für jedes n_0 einen Ausreißer $n_1 \geqslant n_0$ gibt, wegen dessen Fehltritt $|a_{n_1} - a| \geqslant \varepsilon_0$ das n_0 disqualifiziert werden muss.

Im Einzelnen ist das ja alles ganz gewöhnliche Alltagslogik, nichts Geheimnisvolles, es ist nur die schiere *Komplexität* der Aussage, die sie unübersichtlich macht. In solchen Situationen kann die

Quantorenschreibweise eine große Hilfe sein, weshalb ich sie Ihnen jetzt erkläre.

Man verwendet zur Formulierung komplizierter Aussagen zwei logische Symbole, den ***Allquantor*** $\forall$ und den ***Existenzquantor*** $\exists$, die unten und rechts noch beschriftet werden müssen und dann so zu lesen sind:

$\underset{①}{\forall}\ ②$ ist zu lesen als: Jedes ① erfüllt ②

$\underset{①}{\exists}\ ②$ ist zu lesen als: Es gibt ein ①, welches ② erfüllt

Als "②" ist hier alles, was rechts von dem Quantor steht zusammengefasst, bis zum Ende der gesamten Formel, wenn nicht gesetzte Klammern etwas anderes andeuten. Da unter dem Symbol manchmal nicht genügend viel Platz ist, schreiben manche Anwender auch

$$\forall\, ① : ② \quad \text{bzw.} \quad \exists\, ① : ②,$$

aber dabei muss man höllisch auf den Doppelpunkt aufpassen, das will ich lieber nicht machen.

Die Konvergenzbedingung hieße so geschrieben also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geqslant n_0}{\forall}\ |a-a_n| < \varepsilon\,.$$

Beim Lesen des ersten Quantors ist "$\varepsilon > 0$" die Beschriftung ①, und "$\underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geqslant n_0}{\forall}\ |a-a_n| < \varepsilon$" ist ②.

Vielleicht haben Sie das Gefühl, damit sei wenig gewonnen, weil nur eine verwickelte verbale Aussage in eine verwickelte Formel verwandelt wurde. Der Vorteil zeigt sich aber, wenn man eine komplizierte Aussage, etwa im Zuge eines indirekten Beweises, verneinen will. Für das Verneinen oder Negieren gibt es auch ein Zeichen:

Notation: Ist $\mathcal{A}$ eine Aussage, so ist $\neg\,\mathcal{A}$ als "nicht $\mathcal{A}$" oder "$\mathcal{A}$ gilt nicht" zu lesen. □

Offenbar ist aber

$$\neg \underset{①}{\forall}\, ② \iff \underset{①}{\exists}\, \neg\, ②$$

und analog

$$\neg \underset{①}{\exists}\, ② \iff \underset{①}{\forall}\, \neg\, ②,$$

Sie brauchen das nur laut zu lesen, dann hören Sie, dass es Tautologien sind. Daraus folgt aber, dass das Negationszeichen $\neg$, wenn es durch eine ganze Serie von Quantoren hindurchrauscht, einfach jeden Allquantor in einen Existenzquantor verwandelt und umgekehrt, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} & \neg \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geqslant n_0}{\forall}\ |a-a_n|<\varepsilon \\ \iff\ & \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n\geqslant n_0}{\exists}\ |a-a_n|\geqslant\varepsilon\,, \end{aligned}$$

denn $\neg\, |a-a_n|<\varepsilon$ bedeutet natürlich $|a-a_n|\geqslant\varepsilon$.

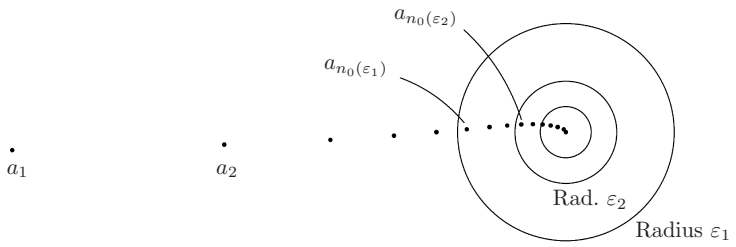
Es ist eine verbreitete Unsitte, die Symbole $\exists$ und $\forall$ auch oder womöglich *nur* als stenografische Kürzel für die Ausdrücke 'es gibt' und 'für alle' zu verwenden und sich dabei aller Freiheiten der Satzstellung zu bedienen, welche die Grammatik (hoffentlich) zulässt. Der Automatismus der Negation ist dann natürlich weg.

Für eine suggestive *verbale* Beschreibung des Verhaltens von Folgen ist das Wort "schließlich" oft nützlich, verstanden in dem folgenden genauen technischen Sinne:

Sprechweise: Wir sagen, eine gegebene Forderung $\mathcal{F}$ werde von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ***schließlich*** erfüllt, wenn es ein n_0 gibt, so dass $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ die Forderung $\mathcal{F}$ erfüllt. □

Eine Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in einem metrischen Raum (X,d) zum Beispiel konvergiert definitionsgemäß genau dann gegen $x\in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ ein n_0 gibt, so dass der Abstand $d(x_n,x)$ für alle $n\geqslant n_0$ kleiner als ε ist. Dafür können wir kurz und anschaulich und

trotzdem präzise sagen: *Die Folge konvergiert genau dann gegen x, wenn sie in jeder ε-Kugel um x schließlich bleibt.* Etwas zu viel verlangt wäre es freilich, wenn die Folge schließlich in jeder ε-Kugel um x bleiben sollte, denn das erfüllen natürlich nur jene Folgen, die schließlich konstant x sind.



"In jeder Kugel schließlich" bedeutet nicht dasselbe wie "schließlich in jeder Kugel"

Analog für Aussagen über mehrere Folgen zugleich. Dass zum Beispiel zwei Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ schließlich übereinstimmen, soll natürlich die Existenz eines n_0 mit $a_n = b_n$ für alle $n \geqslant n_0$ bedeuten. Solche Folgen haben dann offensichtlich dasselbe Limesverhalten, das heißt entweder sie konvergieren beide nicht oder sie haben denselben Grenzwert.

Mit der praktischen Berechnung von Grenzwerten von Folgen ist es wie beim Differenzieren von Funktionen. So wie man hier 'Grundbeispiele' und 'Ableitungsregeln' hat, gibt es auch für den Folgenlimes Grundbeispiele und Limesregeln. Beim Anwenden der Limesregeln braucht man dann gar kein ε mehr zur Hand zu nehmen und kein n_0 mehr zu suchen, das ist ja der Sinn der Sache. Startkapital sind drei einfache Beispiele:

Lemma 1 (Fundamentale Beispiele):

(1) *Ist* $a_1 = a_2 = \cdots =: c$, *so auch* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

(2) *Die Folge* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ *ist eine Nullfolge.*

(3) *Ist* $|x| < 1$, *so ist* $(x^n)_{n\geqslant 1}$ *eine Nullfolge.*

Beweis: (1) ist klar, weil für die konstante Folge sowieso $|c-a_n| = 0$ für alle n gilt. Zu (2): Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle n_0 so, dass $1 < n_0\varepsilon$ ist, das ist nach dem archimedischen Axiom möglich. Dann ist auch $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Zu (3): Für $x = 0$ ist nichts zu beweisen, und für $x \neq 0$ gilt jedenfalls

$$\frac{1}{|x|} =: 1 + a$$

mit einem $a > 0$ wegen $|x| < 1$ und daher jedenfalls[4]

$$1 + na \leqslant (1 + a)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, erst recht also $|x^n| < \frac{1}{na}$. Wenn wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ also nur n_0 so groß wählen, dass

$$\frac{1}{a} < n_0\varepsilon$$

ist, dann gilt

$$|x^n| < \frac{1}{na} \leqslant \frac{1}{n_0 a} < \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_0$, also ist $(x^n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge. □

Das sind sie schon, die Grundbeispiele. Nun zu den Limesregeln für Folgen:

Lemma 2 (Limesregeln für reelle Folgen): *Gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*, so gilt auch*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

(3) *Falls* $b \neq 0$ *und* $b_n \neq 0$ *für alle* n*, dann* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

(4) *Falls* $a_n \leqslant b_n$ *für alle* n*, dann auch* $a \leqslant b$. □

Die Beweise von (1)-(3) fangen natürlich mit "Sei $\varepsilon > 0$", der von (4) mit "Angenommen, es wäre $b < a$" an, und alle sind trivial. □

Mit diesen Beispielen und Regeln kommt man schon ganz schön weit im 'Limesrechnen ohne Epsilon'. Zur Ergänzung könnte man etwa noch mitnehmen:

Lemma 3: *Ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine beschränkte Folge, d.h. gibt es ein C mit $|a_n| \leqslant C$ für alle n, und ist $(b_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge, so ist auch $(a_n b_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.* □

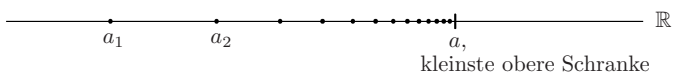
Klar, aber kein Spezialfall von Lemma 2(2), weil dort ja Konvergenz beider Folgen angenommen war. — Schließlich sei an den Begriff der Teilfolge erinnert (vergl. Aufgabe T19.5): Ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge und $(n_k)_{k\geqslant 1}$ eine streng monoton steigende Folge $n_1 < n_2 < \dots$ in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine ***Teilfolge*** von $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Konvergiert eine Folge gegen a, dann konvergiert natürlich auch jede Teilfolge davon gegen a, eine banale aber nützliche Bemerkung.

23.3 Die Anwendung des Vollständigkeitsaxioms

Im vorigen Abschnitt haben wir das Vollständigkeitsaxiom noch nicht herangezogen, nur das Archimedische, um ein paar Nullfolgen zu erzielen, aber die anderen Konvergenzaussagen beruhten darauf, dass wir schon gewisse Konvergenz*voraussetzungen* gemacht hatten. Das wäre für $\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{R}$ auch alles gegangen. Jetzt fangen wir an, das Vollständigkeitsaxiom auszunutzen.

Lemma 1: *Jede monoton wachsende beschränkte Folge konvergiert.*

Beweis: Sei also $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant C$. Es bezeichne a das Supremum der Bildmenge der Folge, $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.



Anschauung sagt: a muss der Grenzwert sein.

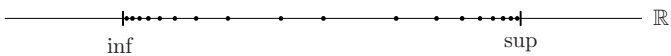
Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a-\varepsilon$ keine obere Schranke, weil a bereits die kleinste ist. Also gibt es ein n_0 mit

$a-\varepsilon < a_{n_0}$, und wegen der Monotonie ist dann $a-\varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a$ für alle $n \geqslant n_0$, insbesondere $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle diese n. □

Natürlich konvergiert auch jede monoton *fallende* beschränkte Folge $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$, weil ja $-b_1 \leqslant -b_2 \leqslant \ldots$ nach dem Lemma konvergiert. Der Limes b von $(b_n)_{n\geqslant 1}$ ist dann die größte untere Schranke der Bildmenge $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, deren so genanntes *Infimum*, das Gegenstück zum Supremum:

Notiz und Definition: Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge, d.h. gibt es eine ***untere Schranke*** $c \in \mathbb{R}$, also eine Zahl mit $c \leqslant x$ für alle $x \in M$, so hat M auch eine größte untere Schranke, nämlich $\inf M := -\sup\{-x \mid x \in M\}$. Man nennt $\inf M$ das ***Infimum*** von M. □

Supremum und Infimum der Bildmenge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ einer beschränkten (nicht notwendig monotonen) Folge haben eine einfache anschauliche Bedeutung: sie begrenzen das kleinste abgeschlossene Intervall K, das alle Folgenpunkte enthält.



$K := [\inf\{a_n \mid n \geqslant 1\}, \sup\{a_n \mid n \geqslant 1\}]$
ist der kleinste 'Käfig' für die Folge.

Wenn die Folge zufällig konstant c ist, dann ist K natürlich kein Intervall mehr, sondern entartet zu der einpunktigen Menge $K = \{c\}$, klar.

Über das Verhalten der Folge für $n \to \infty$ gibt der kleinste Käfig wenig Aufschluss. Es bezeichne nun aber K_n den kleinsten Käfig für die erst mit dem n-ten Glied beginnende Folge $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, also das Intervall $K_n := [\inf\{a_k \mid k \geqslant n\}, \sup\{a_k \mid k \geqslant n\}]$. Wie entwickelt sich die Folge $K =: K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ dieser Intervalle? Da die linken Intervall-Enden eine monoton wachsende, die

rechten eine monoton fallende Folge bilden, konvergieren sie jedenfalls, und diese wichtigen Grenzwerte haben eigene Namen, man nennt sie den unteren bzw. oberen Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$, oder auf Lateinisch:

Definition: Es sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine beschränkte Folge. Dann nennt man

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &:= \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k \geqslant n\} \quad \text{und} \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &:= \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geqslant n\} \end{aligned}$$

den ***Limes inferior*** bzw. den ***Limes superior*** der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$. □

Das von diesen beiden Limites begrenzte (eventuell zum Punkt entartete) abgeschlossene Intervall könnte man recht gut mit K_∞ bezeichnen, es ist nämlich offenbar der Durchschnitt der Folge der Käfige:

$$K_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

und intuitiv gesprochen so etwas wie der Mindestspielraum, den die Folge braucht auch wenn man noch so viele Anfangsterme weglässt. Anschaulich und genau zugleich: das kleinste (eventuell entartete) abgeschlossene Intervall mit der Eigenschaft, dass in jeder ε-Umgebung davon die Folge schließlich bleibt.

Auch eine nur nach oben beschränkte, nach unten aber unbeschränkte Folge kann einen Limes superior haben, genauso definiert als Limes der Folge der Suprema der Restfolgen, Beispiel

$$a_n := ((-1)^n - 1)n,$$

braucht aber nicht, Beispiel $a_n = -n$. Analog für den Limes inferior.

Für konvergente Folgen hätte man diese Begriffe gar nicht einzuführen brauchen, denn das sind genau jene beschränkten Folgen, bei denen oberer und unterer Limes übereinstimmen und gleich dem gewöhnlichen Limes sind. Für divergente Folgen aber messen sie einen wichtigen quantitativen Aspekt der Nichtkonvergenz.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathbb{R}$ heißt eine ***Cauchyfolge***, wenn sie für jedes $\varepsilon > 0$ schließlich um nicht mehr als ε schwankt, d.h. wenn

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m>n_0}\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

gilt. □

Offenbar ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge, denn wenn $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt, so auch

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geqslant n_0$. Aber umgekehrt?

Lemma 2: *In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchyfolge.*[5]

Beweis: Sei also $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Cauchyfolge. Da sie nach endlich vielen Schritten nur noch wenig schwankt, ist sie jedenfalls beschränkt und hat daher einen Limes superior, nennen wir ihn a. Sei nun $\varepsilon > 0$ und sei n_0 so gewählt, dass die Folge ab dem Index n_0 um nicht mehr als $\frac{\varepsilon}{2}$ schwankt. Dann ist

$$\sup\{a_k \mid k \geqslant n\} \in [a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}, a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}]$$

für jedes $n \geqslant n_0$ und daher auch der Limes dieser Folge von Suprema in diesem Intervall, und das ist der Limes superior, den wir a genannt hatten. Also ist $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$.

□

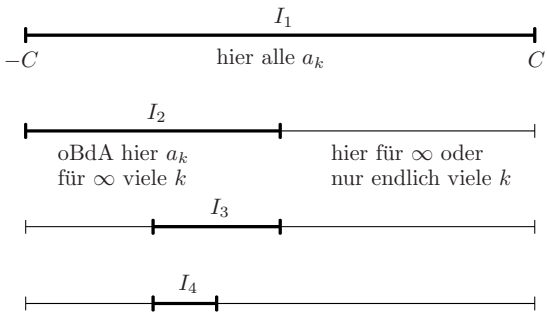
Lemma 3 (Satz von Bolzano-Weierstraß): *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei also $|a_n| \leqslant C$ für alle $n \geqslant 1$. Konstruiere sukzessive abgeschlossene Intervalle

$$[-C, C] =: I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

durch Halbierung und Auswahl einer Hälfte nach dem Gesichtspunkt, dass es für jedes n unendlich viele k mit $a_k \in I_n$ geben soll.

Das ist möglich, denn wenn das Hotel I_n für unendlich viele k die a_k beherbergt, so müssen auch in mindestens einer seiner beiden Hälften die a_k für unendlich viele k wohnen, wo sollten die vielen Gäste sonst geblieben sein. So eine Hälfte wählen wir dann als I_{n+1}.



Fortgesetzte Intervallhalbierung nach Bolzano-Weierstraß

Wähle nun $n_1 < n_2 < \dots$ so, dass jeweils $a_{n_k} \in I_k$. Dann ist offenbar $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine Cauchyfolge und konvergiert deshalb. □

Nun können wir auch die Lücke schließen, die im ersten Band Abschnitt 19.4 beim Beweis des Satzes von Heine-Borel geblieben war, indem wir jetzt, wie dort versprochen, beweisen:

Satz: *Die so genannten kompakten Intervalle $[a, b]$ sind wirklich kompakt.*

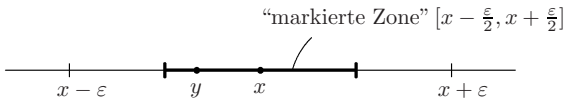
Beweis: Sei $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $[a, b] \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda$. Wir haben zu zeigen, dass es $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gibt, für die bereits $[a, b] \subset \Omega_{\lambda_1} \cup \dots \cup \Omega_{\lambda_r}$ gilt. — Unter einer ***Lebesgue-Zahl*** für die Überdeckung $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von $[a, b]$ versteht man ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \in [a, b]$ ein λ mit

$$[x - \delta, x + \delta] \subset \Omega_\lambda$$

gibt. Offenbar genügte es, so eine Lebesgue-Zahl zu finden, denn mit endlich vielen Intervallen der Länge 2δ können wir $[a, b]$ natürlich überdecken. Angenommen also, es gäbe *keine* Lebesgue-Zahl!

Dann ist insbesondere $\frac{1}{n}$ keine Lebesgue-Zahl, also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit der Eigenschaft, dass $[x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}]$ in keines der Ω_λ passt. Nach Bolzano-Weierstraß konvergiert eine geeignete Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ von $(x_n)_{n\geqslant 1}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$, nach der Limesregel (4), wonach die Limesbildung mit der Relation "$\leqslant$" verträglich ist, ist auch dieser Grenzwert x in unserem Intervall $[a,b]$ enthalten — das ist die Stelle, an der wir die Abgeschlossenheit des Intervalls ausnutzen, mit einem offenen oder halboffenen Intervall hätten wir so nicht schließen können.

Da deshalb x in einem der offenen Ω_λ liegen muss, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset \Omega_\lambda$, und daher gilt $[y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}] \subset \Omega_\lambda$ für alle y in dem kleineren Intervall $[x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}]$:



Jeder Punkt in der markierten Zone hat eine $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung, die in Ω_λ passt, weil ja sogar das ganze $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ in Ω_λ liegt.

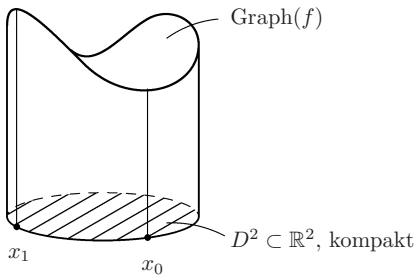
Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ bleibt aber die Folge $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ schließlich in der markierten Zone, und weil auch $\frac{1}{n_k}$ schließlich kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird, steht das im Widerspruch dazu, dass keines der $[x_{n_k} - \frac{1}{n_k}, x_{n_k} + \frac{1}{n_k}]$ in ein Ω_λ passt. □

Auch über die Existenz von Extremwerten (Maxima und Minima) stetiger Funktionen gibt uns das Vollständigkeitsaxiom, das ja ein *Existenzaxiom* ist, neue Einsichten. Zunächst bemerken wir, dass im Falle einer *abgeschlossenen* beschränkten Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ Supremum und Infimum zur Menge gehören, denn wäre etwa $\sup M \notin M$, so gäbe es wegen der Offenheit von $\mathbb{R} \smallsetminus M$ ein zu M disjunktes ε-Intervall um $\sup M$, im Widerspruch dazu, dass $\sup M$ die *kleinste* obere Schranke von M ist. Daraus schließen wir jetzt:

Satz: *Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum X, so nimmt f auf X ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es gibt $x_0, x_1 \in X$ mit $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$ für alle $x \in X$.*

BEWEIS: 'Stetige Bilder' kompakter Räume sind kompakt, wie wir aus dem Abschnitt 19.3 schon wissen, also ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt, insbesondere beschränkt und abgeschlossen, enthält also sein Supremum und sein Infimum, d.h. es gibt $x_0, x_1 \in X$ mit $\inf f(X) = f(x_0)$ und $\sup f(X) = f(x_1)$, folglich nimmt f bei x_0 ein Minimum und bei x_1 ein Maximum an. □

Natürlich können stetige Funktionen auf nichtkompakten Räumen auch Extrema annehmen, wie etwa die Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$, die ihre beiden Extremwerte ± 1 sogar sehr oft annimmt. Aber es gibt eben auch Beispiele beschränkter stetiger Funktionen, die keine Extrema annehmen, z.B. der Arcustangens auf $\mathbb{R}$ oder überhaupt jede streng monotone Funktion auf einem offenen allgemeinen Intervall. Ist aber der Definitionsbereich X kompakt, zum Beispiel die abgeschlossenen Einheitskreisscheibe D^2, und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so müssen Extrema da sein.



Kompaktheit von D^2 sichert die Existenz von Extremstellen, wenn nicht im Innern, dann eben auf dem Rand.

Mit dem Satz von der Existenz der Extrema bei kompaktem Definitionsbereich ist nun auch der Mittelwertsatz der Differentialrechnung saniert, den ich im ersten Band im Abschnitt 7.1 ohne Beweis angegeben hatte (eine stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ muss an einer Stelle ξ zwischen a und b ihren 'mittleren Anstieg' wirklich annehmen, $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$). Wie es geht, erst für $f(a) = f(b)$, dann allgemein, steht aber schon in der Fußnote 7.2, S. 529 des ersten Bandes.

Seinen vollen Glanz entfaltet der Satz von der Existenz der Extrema bei kompaktem Definitionsbereich in Verbindung mit dem

Satz von Heine-Borel in der *Analysis unter Nebenbedingungen*, der wir uns bald zuwenden werden. Dort sind nämlich komplizierte, durch nichtlineare Gleichungssysteme beschriebene Definitionsbereiche X an der Tagesordnung.

Auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen beruht auch der topologische Zusammenhang der Intervalle.

Definition: Ein topologischer Raum heißt ***zusammenhängend***, wenn er sich nicht in zwei offene (nichtleere) Mengen zerlegen lässt. □

Das ist zum Beispiel deshalb ein interessanter Begriff, weil auf zusammenhängenden Räumen das *Zusammenhangsargument* als Beweistechnik funktioniert. Einfaches Beispiel:

Notiz: *Hat eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem zusammenhängenden Raum X keine Nullstelle, so hat sie einerlei Vorzeichen.* □

Denn sonst wäre $X = f^{-1}(\mathbb{R}^+) \cup f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ eine verbotene offene Zerlegung. Ganz allgemein kann man das Zusammenhangsargument so fassen:

Bemerkung (Zusammenhangsargument): *Ist X ein zusammenhängender topologischer Raum und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die jeder Punkt von X entweder haben kann oder nicht. Wenn dann gilt:*

(1) *Hat ein Punkt die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so auch alle Punkte in einer genügend kleinen Umgebung,*
(2) *hat ein Punkt die Eigenschaft $\mathcal{E}$ nicht, so auch kein Punkt in einer genügend kleinen Umgebung und*
(3) *es gibt einen Punkt, der die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat,*

dann haben alle Punkte von X die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Beweis: Bezeichnet $A \subset X$ die Menge der $\mathcal{E}$ erfüllenden, $B \subset X$ die der $\mathcal{E}$ nicht erfüllenden Punkte, so ist sowieso $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = X$. Wegen (1) ist A offen, wegen (2) ist B offen, und weil X zusamenhängend ist, muss eine der Mengen leer und die andere der ganze Raum sein. Nach (3) ist A nicht leer, also $A = X$. □

Man sagt statt (1) auch, $\mathcal{E}$ sei eine ***offene Eigenschaft***. Man kann das Zusammenhangsargument also kurz so aussprechen: sind $\mathcal{E}$ und $\neg\,\mathcal{E}$ beides offene Eigenschaften und X zusammenhängend, dann herrscht eine der beiden in ganz X.

Zu wissen, dass ein gegebener Raum zusammenhängend ist, kann also nützlich sein. Wie erkennt man es? Oft schon mit Hilfe von Grundbeispielen und zwei einfachen Regeln:

Lemma (Zusammenhangsregeln): a) *Stetige Bilder zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.* b) *Ist X Vereinigung zusammenhängender Teilräume X_λ, die alle einen Punkt x_0 gemeinsam haben, so ist auch X zusammenhängend.*

Beweis: a) Wäre $f(X) = A \cup B$ eine in $f(X)$ offene Zerlegung von $f(X)$, so wäre wegen der Stetigkeit ("Urbilder offener Mengen offen") auch

$$X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

eine offene Zerlegung von X. b) Wäre $X = A \cup B$ eine offene Zerlegung und oBdA $x_0 \in A$, so wäre $X_\lambda \subset A$ für jedes λ, da ja sonst

$$X_\lambda = (A \cap X_\lambda) \cup (B \cap X_\lambda)$$

eine verbotene Zerlegung wäre, also $X = A$. □

Die Grundbeispiele sind die allgemeinen Intervalle, und um sie als zusammenhängend nachzuweisen, brauchen wir das Vollständigkeitsaxiom.

Lemma (Zusammenhang der Intervalle): *Jedes allgemeine Intervall $D \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen, D ließe sich — in der Teilraumtopologie, versteht sich — offen zerlegen, also $D = A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$, A, B offen in D, beide nicht leer. Wähle $a \in A$ und $b \in B$, oBdA $a < b$. Jetzt wenden wir das Vollständigkeitsaxiom an: es sei

$$s := \sup\{x \in A \mid x < b\}\,.$$

Jedenfalls ist dann $s \in [a, b] \subset D$, und zwischen s und b gibt es keine Punkte von A mehr. Dann kann aber s auch nicht zu A gehören,

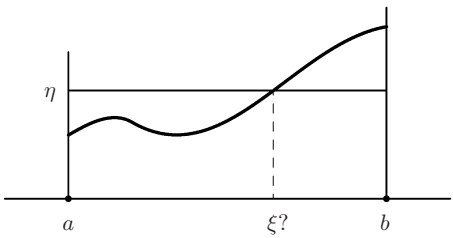
denn dann wäre $s < b$ und wegen der Offenheit von A in D würde A auch Punkte aus $(s, b]$ enthalten, was wir gerade ausgeschlossen hatten. Also $s \in B$! Aber dann ist $a < s$ und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap D \subset B$. Also wäre in $(a, s] \cap (s - \varepsilon, s]$ kein Punkt von A zu finden und daher s nicht die kleinste obere Schranke von $\{x \in A \mid x < b\}$. □

Ein topologischer Raum X heißt ***wegzusammenhängend***, wenn sich je zwei Punkte $p, q \in X$ immer durch einen stetigen Weg in X verbinden lassen, d.h. wenn es eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ gibt. Aus dem Zusammenhang von $[0, 1]$ folgt mit den beiden Zusammenhangsregeln zum Beispiel, dass jeder wegzusammenhängende Raum erst recht zusammenhängend ist, weil er ja die Vereinigung aller bei einem festen Punkt $x_0 \in X$ beginnenden Wegebilder ist.

Wir wollen aber zum Schluss noch eine ganz direkte Folgerung aus dem Zusammenhang der Intervalle ziehen, nämlich den wichtigen *Zwischenwertsatz* beweisen:

Zwischenwertsatz: *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis: OBdA $f(a) < f(b)$, sei $f(a) < \eta < f(b)$.



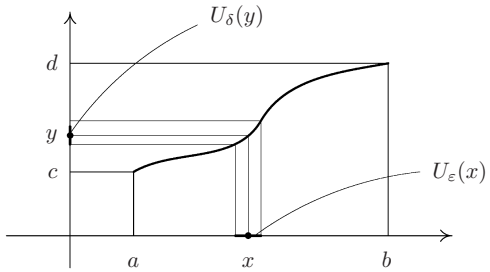
Anschauung nimmt den Zwischenwertsatz für selbstverständlich. Aber könnte das anschaulich gedachte ξ in dem abstrakten Objekt $\mathbb{R}$ nicht gerade 'fehlen'?

Angenommen, es gäbe kein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = \eta$. Dann hätte die stetige Funktion $x \mapsto f(x) - \eta$ auf $[a, b]$ keine Nullstelle, wegen des Zusammenhangs von $[a, b]$ also einerlei Vorzeichen, im Widerspruch zu $f(a) - \eta < 0 < f(b) - \eta$. □

Korollar: *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone (oBdA steigende) Funktion, dann ist $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv und die Umkehrung*

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

ist ebenfalls stetig.



Zur Stetigkeit der Umkehrfunktion

Beweis: Die Injektivität folgt natürlich schon aus der strengen Monotonie, die Surjektivität aber aus dem Zwischenwertsatz, und dass f^{-1} an jedem Punkt $y \in [f(a), f(b)]$ stetig ist, sieht man, fallunterscheidend nach Rand- oder Innenlage von y, sofort mittels ε und δ ... □

... da braucht man die Kanone, dass f ja eine stetige Bijektion von einem kompakten auf einen Hausdorffraum sei, gar nicht erst hervorzuholen.

Mit diesem Korollar als Hilfsmittel sieht man dann auch leicht, dass für eine stetige streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem allgemeinen Intervall D stets auch die Bildmenge $f(D)$ ein allgemeines Intervall und $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig ist.

Damit beschließe ich das Kapitel über die mathematischen Grundlagen der Analysis. Zwar habe ich Ihnen darin nicht sämtliche kleinen Lemmas vorbewiesen, mit denen in den ersten Wochen der Anfängervorlesung für die Mathematikstudenten die Lückenlosigkeit der Gesamtargumentation eindringlich demonstriert wird. Es

fehlt aber nichts, was Sie sich jetzt bei Bedarf nicht auch selber überlegen könnten, und Sie dürfen sich nun auch über die *Grundlagen der Analysis* mit den Mathematikstudenten auf gleicher Augenhöhe unterhalten.

Das war ein *Lesekapitel*, Übungsaufgaben stelle ich dazu keine.

http://www.springer.com/978-3-642-16149-0

Mathematik 2
Geschrieben für Physiker
Jänich, K.
2011, XII, 384 S. 210 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-16149-0