Kapitel 1

Grundlagen und Zählprinzipien

1

1

1 Grundlagen und Zählprinzipien

1.1 Das Induktionsprinzip **3**

1.1.1 Das Wohlordnungsaxiom und die Existenz eines kleinsten Elements **4**

1.1.2 Beweisen durch vollständige Induktion **5**

1.1.3 Induktion und Rekursion **9**

1.2 Das Schubfachprinzip **13**

1.2.1 Anwendungen des Schubfachprinzips **13**

1.2.2 Abbildungen und das Zählen **15**

1.2.3 Der Beweis des Schubfachprinzips **19**

1.3 Grundprinzipien der Kombinatorik **21**

1.3.1 Eine Verallgemeinerung des Schubfachprinzips **21**

1.3.2 Permutationen, Variationen, Kombinationen **24**

1.3.3 Der Binomische Lehrsatz **30**

1.4 Das Inklusions-Exklusions-Prinzip **36**

1.4.1 Eine Hinführung zum Inklusions-Exklusions-Prinzip **37**

1.4.2 Der Beweis des Inklusions-Exklusions-Prinzips **38**

1.4.3 Anwendungen des Inklusions-Exklusions-Prinzips **41**

1.5 Übungsaufgaben **48**

1 Grundlagen und Zählprinzipien

In diesem Kapitel geht es um einige grundlegende Prinzipien, die für den Umgang mit endlichen Strukturen unverzichtbar sind. Es ist sicherlich nicht erstaunlich, dass dabei das Zählen eine ganz wesentliche Rolle spielt. Auch wenn dieses Buch nicht unbedingt für den Beginn des Studiums gedacht ist und wir etwa die Inhalte einer Einführung in die Lineare Algebra an manchen Stellen als bekannt voraussetzen, wird hier relevantes Basiswissen zusammengestellt, das vermutlich nicht wenigen Leserinnen und Lesern bereits vertraut ist. Dabei werden wir uns besonders auf Beweismethoden in der Mathematik und grundlegende kombinatorische Prinzipien konzentrieren, wobei (ihrer Bedeutung für das Buch entsprechend) Abzählmethoden im Vordergrund stehen. Ein wesentliches Ziel ist es, das Induktionsprinzip, das Schubfachprinzip und das Inklusions-Exklusions-Prinzip vorzustellen. Daneben werden Kernideen der Kombinatorik aufgezeigt, die auch dem Zählen zuzuordnen sind.

1.1 Das Induktionsprinzip

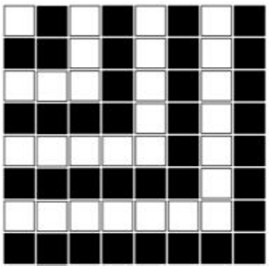
1.1

Es gibt viele mathematische Sätze, die man als universell bezeichnen kann. Sie besagen etwa, dass eine bestimmte Eigenschaft für alle (und nicht nur für einige ausgewählte) Werte x einer vorgegebenen Menge gilt. So kann man beispielsweise behaupten (und zeigen), dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \quad (*)$$

gilt. Die Gültigkeit ist übrigens leicht zu veranschaulichen. Man legt zunächst ein kleines Quadrat auf den Tisch. Dann kann man drei (gleich große) Quadrate so darum herumlegen, dass wieder ein Quadrat aus vier kleineren Quadraten zu sehen ist. Im nächsten Schritt legt man fünf Quadrate so, dass oben und rechts je zwei hinzukommen und schließlich noch ein Quadrat in der Ecke das Bild vervollständigt. Im Ergebnis liegt nun ein Quadrat aus neun kleinen Quadraten auf dem Tisch. Nehmen wir jetzt an, wir gehen von einem $n \times n$–Quadrat für ein beliebiges n aus, dann kann man oben und an der Seite jeweils n Quadrate anfügen und eines zusätzlich in die Ecke legen.

K. Reiss, G. Stroth, *Endliche Strukturen*, Mathematik für das Lehramt,
DOI 10.1007/978-3-642-17182-6_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011



Anschaulich ist damit eigentlich alles klar. Außerdem ist $n^2+2n+1 = (n+1)^2$, sodass man auch gleich die passende formale Antwort hat. Was haben wir gemacht? Nun, wir haben gedanklich gerade eben das so genannte *Induktionsprinzip* angewendet. Was es genau besagt und wie es funktioniert, wollen wir jetzt klären. Dazu benötigen wir als Grundlage einen ganz selbstverständlich klingenden Satz, nämlich den Satz von der Existenz eines kleinsten Elements in jeder Menge natürlicher Zahlen.

1.1.1 Das Wohlordnungsaxiom und die Existenz eines kleinsten Elements

Es ist sicherlich den meisten Leserinnen und Lesern bekannt, dass mit $\mathbb{Z}$ die Menge der so genannten *ganzen Zahlen* bezeichnet wird, also die Zahlen

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Wir sind mit diesen Zahlen gut vertraut (oder glauben das zumindest). Man kann sie ohne Einschränkung addieren, subtrahieren und multiplizieren und das Ergebnis solcher Rechnungen in $\mathbb{Z}$ ist immer wieder eine ganze Zahl. Man kann allerdings nicht uneingeschränkt dividieren. Der Quotient zweier ganzer Zahlen ist zwar eine rationale Zahl, aber möglicherweise keine ganze Zahl mehr. So ist zum Beispiel der Quotient aus 1 und 2 die rationale Zahl $\frac{1}{2}$, die aber keine ganze Zahl ist. Darüber hinaus ist ganz praktisch, dass man zu zwei gegebenen ganzen Zahlen immer angeben kann, welche der beiden die kleinere ist bzw. ob sie gleich sind. Man kann also zwei ganze Zahlen bezüglich ihrer Größe vergleichen und feststellen, dass beispielsweise $1 < 5$, $-3 < 5$, $-5 < -3$ und $3 = 3$ ist.

Was man kann und darf in der Mathematik, das ist zumeist gut geregelt. Die wesentlichen Bausteine sind Axiome, Definitionen („Begriffsfestlegungen“) und Sätze („beweisbare Aussagen“). Die Axiome spielen dabei eine Sonderrolle, denn sie sind nicht zu beweisende, grundlegende Annahmen, von denen man ausgehen *muss*, um ein sinnvolles Gefüge mathematischen Wissens zu bekommen.

Die Möglichkeit des Vergleichs ganzer Zahlen führt nun zu einem solchen Axiom. Es ist eine der wichtigsten Eigenschaften der ganzen Zahlen, die im folgenden *Wohlordnungsaxiom* formuliert ist. Betrachtet wird eine Menge ganzer Zahlen, die (irgendwie, also zum Beispiel auch durch ein Element, das gar nicht in der Menge ist) nach unten beschränkt ist. Das Axiom besagt, dass es dann auch in der gegebenen Menge selbst eine untere Schranke gibt.

Wohlordnungsaxiom Sei X eine nicht leere Menge von ganzen Zahlen, die eine untere Schranke b zulässt, d. h. es sei $b \leq x$ für alle $x \in X$. Dann gibt es ein $x_0 \in X$ mit $x_0 \leq x$ für alle $x \in X$.

Der Inhalt des Axioms ist nicht weiter aufregend. Wenn man etwa die Menge $M = \{5, 6, 7, 8\}$ ganzer Zahlen betrachtet und sieht, dass die Zahl „1“ auf jeden Fall eine untere Schranke ist, dann besagt es, dass es auch in M selbst eine solche untere Schranke gibt (konkret ist das in diesem Fall die Zahl $5 \in M$). Interessanter ist sicherlich, dass man diese Eigenschaft axiomatisch regeln muss und sie nicht aus anderen Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ ableiten kann. Es gibt aber eine wichtige Folgerung, wenn man dieses Prinzip auf die natürlichen Zahlen (und das sind alle ganzen Zahlen z mit $z \geq 1$) anwendet.

Satz 1.1.1 Ist X eine nicht leere Menge natürlicher Zahlen, so enthält X ein kleinstes Element. **1.1.1**

Beweisidee 1.1.1 Es ist alles ganz einfach. Man kann das Axiom auf die Menge $X \subseteq \mathbb{N}$ anwenden, denn eine absolute untere Grenze gibt es auf jeden Fall durch die Zahl $1 \in \mathbb{N}$.

Beweis 1.1.1 Es ist $1 \in \mathbb{N}$ und außerdem $1 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit kann man das Wohlordnungsaxiom anwenden und die Behauptung des Satzes folgt. □

1.1.2 Beweisen durch vollständige Induktion

Wir werden nun sehen, wie man Satz 1.1.1 zum Beweis der Gleichung $(*)$ auf Seite 3 benutzen kann. Es soll also gezeigt werden, dass

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Überlegung 1: Die Formel $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ ist sicherlich für $n = 1$ richtig, was man durch Einsetzen sofort sieht: $1 = 1^2$.

Überlegung 2: Es ist sinnlos, nun mit konkreten Zahlen wie 2, 3, 4 und 5 weiter zu machen und jeweils zu prüfen, ob die Gleichung erfüllt ist. Wir brauchen vielmehr ein für jeden beliebigen Fall gültiges Verfahren. Und das geht so: Wir nehmen an, dass die Gleichung $(*)$ für ein festes k richtig ist, dass also

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = \sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$$

gilt. Unter dieser Voraussetzung werden wir die Gleichung für $k+1$ beweisen. Dazu betrachten wir die Summe der ersten $k+1$ ungeraden Zahlen und ersetzen darin die Summe der ersten k ungeraden Zahlen durch k^2 (entsprechend der Voraussetzung). Konkret rechnet man:

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Überlegung 3: Ganz offensichtlich haben wir für diesen Nachweis der Korrektheit nur die Voraussetzung der Gültigkeit für das feste $n = k$ gebraucht. Wir wissen damit: *Ist das Resultat für $n = k$ korrekt, so auch für $n = k + 1$.* Ganz wesentlich ist es nun, sich zu überlegen, dass es auf jeden Fall eine natürliche Zahl n gibt, für die die Gleichung $(*)$ erfüllt ist, und das ist (wie wir in Überlegung 1 gesehen haben) die Zahl $n = 1$. Da die Gleichung für $n = 1$ richtig ist, ist sie es auch für $n = 2$ und damit für $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ und immer weiter. Das dahinter liegende Prinzip nennen wir das *Induktionsprinzip.*

Intuitiv ist damit zwar alles geklärt, aber bei unendlichen Mengen kann man leicht Probleme bekommen, wenn man sich nur auf die Intuition verlässt. Man braucht daher noch den expliziten Beweis, dass mit der Anwendung des *Induktionsprinzips* die Behauptung tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist. Das geht so: Sei S die Menge der natürlichen Zahlen, für die die Gleichung $(*)$ von Seite 3 falsch ist. Ist $S \neq \emptyset$, so enthält S nach Satz 1.1.1 ein kleinstes Element $k \in \mathbb{N}$. Da $(*)$ für $n = 1$ richtig ist, ist $1 \notin S$, also ist $k > 1$. Damit ist $k - 1 \in \mathbb{N}$, aber $k - 1 \notin S$. Also ist die Gleichung $(*)$ für $n = k - 1$ richtig. Weil man daraus die Gültigkeit für $n = k$ folgern kann, widerspricht dies der Voraussetzung $k \in S$. Also ist $S = \emptyset$ und die Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe des Induktionsprinzips kann man viele Aussagen beweisen, die für alle natürlichen Zahlen gelten. Es lohnt sich also, den folgenden Satz zu formulieren, dessen Beweis dann der gleichen Logik wie im Beispiel folgt.

Satz 1.1.2 (Induktionsprinzip) Sei S eine Menge mit $S \subseteq \mathbb{N}$. Es sollen die folgenden Eigenschaften erfüllt sein: **1.1.2**

(a) $1 \in S$.
(b) Für jedes $k \in S$ ist stets auch $k + 1 \in S$.

Dann ist $S = \mathbb{N}$.

Beweis 1.1.2 Angenommen, es ist $S \neq \mathbb{N}$, dann ist $S_0 := \mathbb{N} \setminus S$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$. Also gibt es ein kleinstes Element $k \in S_0$. Da $1 \in S$ ist, muss $k > 1$ sein, und $k - 1$ ist somit eine natürliche Zahl. Da k aber das kleinste Element von S_0 ist, gilt $k - 1 \notin S_0$, also ist $k - 1 \in S$. Nach Voraussetzung (b) ist dann aber auch $(k - 1) + 1 = k \in S$ und das steht im Widerspruch zur Annahme. □

Eine kleine Anmerkung für Leserinnen und Leser, die dieses Ergebnis schon einmal in anderem Zusammenhang gesehen haben und sich eventuell wundern. Bei einer axiomatischen Einführung der natürlichen Zahlen mit Hilfe der Peano-Axiome ist Satz 1.1.2 eines der Axiome, das so genannte *Induktionsaxiom*. Auch das ist natürlich in Ordnung. Man könnte dann das Wohlordnungsaxiom als einen Satz ableiten und würde schlicht auf einer etwas anderen Grundlage arbeiten.

Für die mit dem Induktionsprinzip verbundenen *Induktionsbeweise* gibt es ein einprägsames Schema, das wir in den Überlegungen auf Seite 5 schon genutzt haben und noch einmal kurz explizit betrachten wollen. Es besteht aus drei Teilen, dem

Induktionsanfang (auch *Induktionsbasis* genannt), der

Induktionsannahme (manchmal auch als *Induktionsvoraussetzung* bezeichnet) und dem

Induktionsschluss (manchmal auch als *Induktionsschritt* bezeichnet).

Im folgenden Beispiel wird deutlich, was die einzelnen Schritte leisten.

1.1.3 **Beispiel 1.1.3** Die Zahlen x_n (mit $n \in \mathbb{N}_0$) werden wie folgt definiert: Es sei $x_0 = 0$ und $x_n = x_{n-1} + 2n$ für alle $n \geq 2$. Dann gilt $x_n = n \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Diese Behauptung soll durch Induktion bewiesen werden. Wir folgen dabei den oben genannten Schritten.

Induktionsanfang: Die Behauptung ist korrekt für $n = 1$, denn es ist

$$x_1 = 0 + 2 = 1 \cdot 2 = 2.$$

Induktionsannahme: Das Resultat sei richtig für $n = k$, es gelte also

$$x_k = k(k+1).$$

Induktionsschluss ($k \longrightarrow k+1$): Das Resultat ist richtig für $n = k+1$, denn es ist

$$x_{k+1} = x_k + 2(k+1)$$

nach Definition der Zahlen und $x_k + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1)$ unter Verwendung der Induktionsannahme. Einfaches Rechnen zeigt

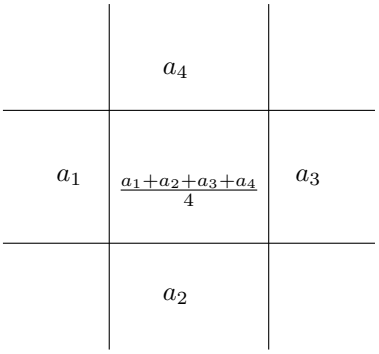
$$k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2),$$

sodass die Behauptung bewiesen ist. □

Der Induktionsanfang garantiert, dass man überhaupt etwas Sinnvolles beweist. Wenn es kein konkretes Beispiel gibt, dann nützt natürlich auch die Verallgemeinerung nichts. Die Induktionsannahme nimmt diesen Fall auf, setzt aber eine Variable statt der konkreten Zahl ein und bereitet so die Frage „was wäre, wenn“ vor. An k werden dabei keine Bedingungen geknüpft, insofern ist es beliebig. Andererseits ist ganz wichtig, dass k fest ist, wenn es erst einmal gewählt ist (und so sind auch nachträgliche Änderungen der Bedingungen ausgeschlossen). Der korrekt durchgeführte Induktionsschluss beweist dann, dass man von einem Fall auf den nächsten und damit auf alle möglichen Fälle schließen darf.

Das Induktionsprinzip steckt nicht nur in diesem Beweisverfahren, sondern ist in der Mathematik auch in anderen Zusammenhängen ein probates Mittel für Problemlösungen. Man betrachtet etwa einen speziellen Fall (z. B. ein ganz bestimmtes Element) und verallgemeinert mit Hilfe induktiven Schließens auf einen umfassenderen Zusammenhang.

Beispiel 1.1.4 In der Ebene sind im ganzzahligen Gitter natürliche Zahlen eingetragen, wobei jede das arithmetische Mittel ihrer vier Nachbarn ist. Was kann man über diese Zahlen aussagen ? **1.1.4**



Sei x die kleinste natürliche Zahl im Gitter (und Satz 1.1.1 sagt uns, dass eine solche Zahl existiert). Dann ist

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

wobei a_1, a_2, a_3, a_4 die vier benachbarten Zahlen sind. Da $a_i \geq x$ für alle i ist, muss $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = x$ sein. Dann sind (und das sieht man mit dem gleichen Argument) auch alle Nachbarn von a_1 und genauso alle Nachbarn von a_2, a_3 und a_4 gleich. Man schließt, dass somit alle Einträge im Gitter gleich sein müssen. □

1.1.3 Induktion und Rekursion

Bei der Induktion geht es darum, ein Problem auf ein „kleineres“ und schließlich auf ein bereits gelöstes Problem zurückzuführen. Auf dieser Grundidee basiert auch die so genannte *Rekursion*, die im folgenden Beispiel betrachtet wird. Wir argumentieren dabei in $\mathbb{N}_0$, was natürlich keinen prinzipiellen Unterschied bewirkt.

Beispiel 1.1.5 Sei N eine Menge mit n Elementen. Wie groß ist die Anzahl A_n aller Teilmengen von N? **1.1.5**

Ist $n = 0$, so ist $A_n = 1$, denn $N = \emptyset$ hat nur sich selbst als Teilmenge.

Wir fügen nun zwei Betrachtungen ein, die man zwar nicht unbedingt braucht, die aber das Verständnis erleichtern.

Ist $n = 1$, so hat N genau ein Element, es ist also beispielsweise $N = \{x\}$. Also hat N die beiden Teilmengen $\emptyset$ und $\{x\}$. Sei $n = 2$ und $N = \{x, y\}$. Dann sind $\emptyset$ und $\{x\}$ ebenfalls Teilmengen von N und das sind alle Teilmengen, die y nicht enthalten. Folglich kommen noch die Teilmengen $\{y\}$ und $\{x, y\}$ hinzu, also genau die Teilmengen, die y enthalten. Falls nun $n = 3$ und $N = \{x, y, z\}$ ist, dann sind die eben angegebenen vier Teilmengen $\emptyset$, $\{x\}$, $\{y\}$ und $\{x, y\}$ Teilmengen von N. Hinzu kommen noch einmal so viele, die z enthalten, nämlich $\{z\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ und $\{x, y, z\}$. Kurz und gut: Mit jedem zusätzlichen Element verdoppelt sich die Anzahl der Teilmengen von N.

Sei also $n > 0$ und $x \in N$. Dann ist $N = N_1 \cup \{x\}$ für eine geeignete Menge N_1 (die notfalls eben die leere Menge ist). Die Anzahl der Teilmengen von N_1 ist A_{n-1}. Jede Teilmenge B von N, die x enthält, entspricht einer Teilmenge $B \cap N_1$ von N_1. Also gibt es genau A_{n-1} Teilmengen von N, die x enthalten (nämlich genau so viele wie Teilmengen, die x nicht enthalten). Das liefert

$$A_n = 2A_{n-1}\,.$$

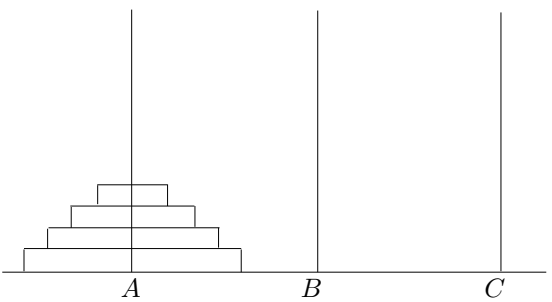
Es gilt übrigens $A_n = 2^n$, was man leicht durch Induktion beweisen kann. Der Induktionsanfang ist für $n = 0$ bereits erledigt. Wir nehmen also an, dass $A_k = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Nun ist aber $A_{k+1} = 2 \cdot A_k$ (wie wir oben gesehen haben) und $A_k = 2^k$ (nach Induktionsannahme). Also ist

$$A_{k+1} = 2 \cdot A_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

□

1.1.6 **Beispiel 1.1.6** *Der Turm von Hanoi*

Gegeben sind drei Stäbe A, B, C. Auf Stab A liegen n unterschiedlich große Scheiben der Größe nach geordnet übereinander, wobei die größte Scheibe unten ist.



Das Problem besteht nun darin, diesen Stapel in gleicher Anordnung von Stab A nach Stab C zu bringen. Dabei darf bei jedem Zug immer nur eine

Scheibe bewegt werden und niemals darf eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe liegen. Gesucht ist die minimale Anzahl von Zügen, die dazu nötig sind.

Sei M_n diese minimale Anzahl von Zügen bei einem Turm aus n Scheiben. Für $n = 1$ ist alles ganz einfach, denn es reicht ein einziger Zug. Also gilt offensichtlich $M_1 = 1$. Für $n = 2$ ist das Problem ebenfalls schnell gelöst. Man legt die kleinere Scheibe von A nach B, bewegt die größere Scheibe von A nach C und schließlich die kleinere Scheibe von B nach C. Gebraucht werden nun drei Züge, sodass $M_2 = 3$ ist. Nehmen wir also $n = 3$ an. Im Prinzip kann man mit so wenigen Scheiben etwas herumspielen und kommt schnell zu einer Lösung. Einfacher ist es allerdings, wenn man sich kurz die wesentlichen Schritte überlegt: Um die größte der drei Scheiben von Stab A nach Stab C zu bringen, muss man Stab B als Zwischenablage für die beiden kleineren (in der richtigen Anordnung) nutzen. Das Problem ist also zunächst, einen Turm aus zwei Scheiben von Stab A nach Stab B zu bewegen. Diese Aufgabe ist allerdings gerade gelöst worden (vergleiche den Fall $n = 2$). Also ist auch das Problem des Umschichtens von drei Scheiben ganz einfach. Man braucht dazu $3 + 1 + 3 = 7$ Züge, nämlich jeweils drei Züge für das Umschichten des Turms aus zwei Scheiben und einen Zug für das Umlegen der größten Scheibe.

Die Grundidee kann man verallgemeinern. Sei also $n > 1$. Um den Stapel von Stab A nach Stab C zu bringen, ist es notwendig, die obersten $n - 1$ Ringe zunächst auf Stab B umzuschichten. Dazu benötigt man M_{n-1} Züge. Nun kann der unterste Ring auf Stab C gelegt werden. Anschließend werden die $n - 1$ Ringe von Stab B auf Stab C gebracht, wozu wieder M_{n-1} Züge notwendig sind. Also ist

$$M_n = 2M_{n-1} + 1, \quad M_1 = 1.$$

Damit hat man eine *induktive* Formel für die Anzahl der Züge. Doch was macht man, wenn man tatsächlich zu gegebenem n die genaue Anzahl bestimmen will? Wie viele Züge braucht man, um einen *Turm von Hanoi* mit 1000 Scheiben umzuschichten? Die Antwort „ein bisschen mehr als doppelt so viele, wie man zum Umschichten eines Turms mit 999 Scheiben braucht“ ist nicht sonderlich nützlich. Besser ist hier eine *direkte* Formel. Eine solche gibt es auch. Es gilt nämlich $M_n = 2^n - 1$, was wir durch Induktion nach n beweisen wollen.

Behauptung: Um einen *Turm von Hanoi* mit n Scheiben umzuschichten, braucht man mindestens $M_n = 2^n - 1$ Züge.

Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n = 1$ richtig, da $M_1 = 1 = 2^1 - 1$ ist.
Induktionsannahme: Die Behauptung sei für $n - 1$ bereits gezeigt, es sei also $M_{n-1} = 2^{n-1} - 1$.
Induktionsschluss: Wenn die Behauptung für $n-1$ gilt, dann rechnet man $M_n = 2 \cdot M_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$ und der Schluss von $n - 1$ auf n ist gelungen.
Mit diesen drei Schritten ist der Induktionsbeweis abgeschlossen und die Behauptung ist gezeigt. □

Eine Variante der Bedingungen zum Umlegen von Scheiben ist die, dass nur Züge zwischen benachbarten Stäben erlaubt sind, also Züge von A nach B oder von B nach A und Züge von B nach C oder von C nach B. Sei dabei Q_n die minimale Zuganzahl. Dann müssen offensichtlich zuerst die $n - 1$ kleineren Scheiben auf Stab C gebracht werden, wozu Q_{n-1} Züge notwendig sind (und hier interessiert uns im Moment überhaupt nicht, wie viele Züge das genau sind). Dann kann man die unterste und somit größte Scheibe auf Stab B legen. Nun müssen die $n-1$ kleineren Scheiben auf Stab A zurückgebracht werden, wofür wiederum Q_{n-1} Züge benötigt werden. So ist Stab C frei, um die unterste Scheibe aufzunehmen. Man braucht dann noch einmal Q_{n-1} Züge, um alle $n-1$ kleineren Scheiben auf Stab C abzulegen. Also gilt $Q_n = 3 \cdot Q_{n-1} + 2$. Für $n = 1$ ist die konkrete Anzahl offensichtlich, denn hier legt man die Scheibe zuerst auf Stab B und dann auf Stab C. Es ist also $Q_1 = 2$.

Behauptung: Es ist $Q_n = 3^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was man (wie im Beispiel oben) durch Induktion nach n zeigen kann.

In den vorhergehenden Beispielen haben wir stets die rekursive Struktur der Probleme genutzt, um eine erste Lösungsidee zu bekommen. Die daraus resultierenden Formeln waren nicht sehr hilfreich, um konkrete Werte (etwa die Anzahl der Züge) zu bestimmen. Schöner und nützlicher sind jeweils die geschlossenen Formeln, die hier aber mehr oder minder geraten wurden. Allerdings ist Raten keine sonderlich gute Arbeitsmethode, denn nicht immer kommt man damit zu einem sinnvollen Ergebnis. So sei angemerkt, dass man in den genannten Beispielen auch ohne Raten zum Ziel gekommen wäre, doch übersteigen die dazu notwendigen mathematischen Grundlagen (z. B. die Theorie der erzeugenden Funktionen) den Rahmen dieses Buches. Wer sich hier näher einarbeiten möchte, sei daher auf [2] verwiesen.

1.2 Das Schubfachprinzip

1.2

Wir wollen uns nun dem zweiten Beweisprinzip zuwenden, das in in den Vorbemerkungen zu diesem Kapitel angesprochen wurde. Es handelt sich um das *Schubfachprinzip*, das in seiner Grundidee ganz leicht zu erklären und zu verstehen ist.

Das Schubfachprinzip: Version für Hausfrauen und –männer.
Wenn sechs hungrige Personen am Tisch sitzen und sieben Kuchenstücke in der Mitte stehen, dann gibt es eine Person, die mindestens zwei Stücke Kuchen isst (nein, geteilt wird nicht, denn wir haben es nur mit natürlichen Zahlen zu tun).

In der üblichen Formulierung würde man es so in Worte fassen: Sei n eine natürliche Zahl. Sind $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es ein Schubfach, in dem mindestens zwei Objekte liegen.

1.2.1 Anwendungen des Schubfachprinzips

Das Schubfachprinzip werden wir weiter unten als Satz 1.2.10 formulieren und beweisen. Obwohl es so selbstverständlich klingt, bedarf sein Beweis einiger Vorbereitung. Wir wollen deshalb zunächst aufzeigen, wie das Prinzip (wenn es bewiesen ist) angewendet werden kann. Wir werden sehen, dass es ein wichtiges Prinzip ist, und zum Beispiel Verwendung findet, wenn es darum geht, in einer bestimmten Menge die *Existenz* eines Elements x mit einer gewissen Eigenschaft nachzuweisen.

Im folgenden Satz 1.2.2 geht es genau darum. Wir wollen seine Aussage zunächst an einem Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 1.2.1 Die Menge $M = \{2, 3, 4, 7, 9, 10\}$ hat sechs Elemente, die alle nicht größer als 10 sind. Nun sieht man, dass in dieser Menge Zahlenpaare zu finden sind, bei denen eine Zahl die andere teilt: 2 teilt 4, 2 teilt 10 und 3 teilt 9. Ist das immer so, wenn man sechs Zahlen beliebig aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ herausnimmt und zu einer Menge M zusammenfasst? Versuchen wir es systematisch. Ist $1 \in M$, dann sind wir fertig, denn 1 teilt jede andere natürliche Zahl. Falls $2 \in M$ die kleinste Zahl der Menge ist, dann gibt es sicherlich noch eine weitere gerade Zahl in M, den es gibt nur vier ungerade Zahlen, die größer als 1 und kleiner als 10 sind. Ist nun $3 \in M$ die kleinste Zahl der Menge und sind $6, 9 \notin M$, dann ist $M = \{3, 4, 5, 7, 8, 10\}$, denn mehr Möglichkeiten gibt es nicht. Da zum Beispiel 4 ein Teiler von 8 ist, haben wir auch hier ein solches Zahlenpaar. Ist

1.2.1

$4 \in M$ das kleinste Element, dann enthält M entweder 4 und 8 oder 5 und 10. Es bleibt noch der Fall $M = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, wobei M offensichtlich das entsprechende Paar (5,10) umfasst.
Hätte M nur fünf Elemente, dann wäre es allerdings nicht immer möglich, solche Zahlenpaare zu finden. In der Menge $M = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ ist keine Zahl Teiler einer anderen Zahl der Menge. Offensichtlich braucht man mehr als die Hälfte der Elemente zwischen 1 und 10, um ganz sicher ein geeignetes Paar zu finden. Das ist die Aussage von Satz 1.2.2.

1.2.2 **Satz 1.2.2** Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben sei eine Menge von $n + 1$ natürlichen Zahlen, die alle nicht größer als $2n$ sein sollen. Dann gibt es Zahlen a und b in dieser Menge so, dass $a \neq b$ und a ein Teiler von b ist.

Beweisidee 1.2.2 Die $n+1$ natürlichen Zahlen werden als Produkt einer ungeraden Zahl und einer Potenz der Zahl 2 geschrieben, also, locker ausgedrückt, in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegt. Das geht immer. Eventuell ist eben nur „1“ der ungerade Anteil bzw. „$2^0 = 1$“ der „gerade“ Anteil (was natürlich keine gerade Zahl, aber eine Zweierpotenz ist). Betrachtet werden zunächst die ungeraden Teiler der $n+1$ Zahlen. Da es zwischen 0 und $2n$ nur n ungerade Zahlen gibt, können diese Teiler nicht alle verschieden sein, und es gibt mindestens zwei (verschiedene) Zahlen mit demselben ungeraden Teiler. Auf diese zwei Zahlen konzentriert man sich jetzt und weist nach, dass eine der beiden die andere teilt.

Beweis 1.2.2 Wir bezeichnen mit $x_1, \ldots, x_{n+1}$ die gegebenen $n+1$ natürlichen Zahlen. Für $i = 1, \ldots, n + 1$ schreiben wir $x_i = 2^{n_i} y_i$, wobei y_i jeweils eine ungerade Zahl ist.

Die y_i sind also $n + 1$ ungerade Zahlen mit $y_i \leq 2n$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Da es zwischen 1 und $2n$ nur die n ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1$ gibt, folgt mit dem Schubfachprinzip, dass zwei der y_i gleich sein müssen, dass also $y_k = y_m$ für zwei verschiedene Indizes k und m ist. Es ist $x_k = 2^{n_k} y_k$ und $x_m = 2^{n_m} y_m$. Ist $n_k \leq n_m$, so wird x_m von x_k geteilt, sonst wird x_k von x_m geteilt. □

1.2.3 **Beispiel 1.2.3** Sei S eine Menge, die aus zehn verschiedenen Zahlen zwischen 1 und 99 besteht. Dann gibt es zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 von S so, dass die Summe über alle Zahlen in S_1 gleich der Summe über alle Zahlen in S_2 ist.

Es gibt insgesamt $2^{10}-1 = 1023$ nicht leere Teilmengen der gewählten Menge S von 10 Zahlen (und das wurde auf Seite 9 gezeigt). Die größtmögliche Summe der Elemente von S ist $90 + 91 + \ldots + 99 = 945$. Insbesondere ist $90 + 91 + \ldots + 99 < 1023$, also ist jede Summe über jede dieser Teilmengen kleiner als 1023. Nach dem Schubfachprinzip gibt es daher zwei Teilmengen A und B von S, die zwar verschieden sind, aber in der Summe ihrer Elemente übereinstimmen. Indem wir aus A und B jeweils die gemeinsamen Zahlen $A \cap B$ herausnehmen, erhalten wir die gesuchten Mengen S_1 und S_2.

1.2.2 Abbildungen und das Zählen

Dem Schubfachprinzip liegt das Zählen zu Grunde. Um es zu beweisen, müssen wir uns entsprechend darüber verständigen, was Zählen bedeutet und wann wir sagen, dass eine Menge X genau n Elemente hat. Kinderkram? Ja sicher, denn Kinder wissen, wie es geht. Kleine Kinder zeigen mit den Fingern, wie alt sie sind oder wie viele Kuchenstücke auf dem Teller liegen. Sie stellen dabei eine Beziehung zwischen den Fingern ihrer Hand und ihrem Alter bzw. den Kuchenstücken her. Etwas abgehoben könnte man sagen, dass sie eine Abbildung zwischen der Anzahl der Finger und der Anzahl der Jahre bzw. der Kuchenstücke herstellen. Nicht viel anders wird es in der Mathematik gemacht und das soll im Folgenden aufgezeigt werden.

Definition 1.2.4 Seien A, B Mengen. Eine Teilmenge f des kartesischen Produkts $A \times B = \{(a,b) | a \in A,\ b \in B\}$ heißt *Abbildung*, falls es für jedes $a \in A$ genau ein Paar $(a,b) \in f$ gibt. Man schreibt $f : A \longrightarrow B$ und $b = f(a)$. Das Element b heißt *Bild* von a, das Element a *Urbild* von b (jeweils unter f). **1.2.4**

Durch eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ wird somit jedem Element $a \in A$ eindeutig ein Element $b = f(a) \in B$ zugeordnet. Es ist nicht zwingend, aber in vielen Fällen (und gerade in denen, die man aus der Schule kennt) gibt es irgendeine Vorschrift, durch die eine Abbildung beschrieben wird. Beispiele sind etwa die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die Wurzelfunktion $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ für alle nicht negativen reellen Zahlen x oder die Vorzeichenfunktion (Signumfunktion)

$$sgn : \mathbb{Z} \longrightarrow \{-1, 0, 1\},$$

mit der Abbildungsvorschrift $sgn(z) = 1$ für alle $z > 0$, $sgn(z) = 0$ für $z = 0$ und $sgn(z) = -1$ für alle $z < 0$. Dabei soll mit $\mathbb{R}_0^+$ die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen bezeichnet sein, also $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Hinter einer Abbildung muss allerdings nicht unbedingt eine explizite Vorschrift stecken. So ist $f = \{(1,2),(2,3),(3,2),(4,2)\}$ eine Abbildung von $A = \{1,2,3,4\}$ nach $B = \{1,2,3,4\}$, denn $f \subseteq A \times B$ erfüllt die Bedingung, dass jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zugeordnet ist. Schließlich sei noch angemerkt, dass der Begriff „Vorschrift“ keinesfalls ordentlich definiert ist. Wählt man etwa $A = \{1,2\}$ und $B = \{1,4\}$, dann kann man die unterschiedlichen Vorschriften $f_1 : A \to B$ und $f_2 : A \to B$ mit $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = 3x - 2$ festlegen, die auf diesen Mengen aber jeweils dieselbe Abbildung beschreiben. Durch die Definition 1.2.4 der Abbildung als Teilmenge des kartesischen Produktes ist die Gleichheit von zwei Abbildungen dagegen eindeutig festgelegt, nämlich als Gleichheit der entsprechenden Teilmengen (und dafür braucht man keine wie auch immer geartete „Vorschrift“).

Interessant sind nun für den folgenden Abschnitt vor allem solche Abbildungen $f : A \longrightarrow B$, die eine eindeutige Zuordnung zwischen Mengen festlegen, bei denen also nicht nur jedem Element $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ zugeordnet ist (und das ist nach Definition 1.2.4 zwingend), sondern bei denen es umgekehrt zu jedem $b \in B$ auch genau ein Urbild a mit $f(a) = b$ gibt. Sie bekommen wegen ihrer Bedeutung in der folgenden Definition 1.2.5 unter (c) einen eigenen Namen.

1.2.5 **Definition 1.2.5** Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt
(a) **injektiv**, wenn aus $f(a_1) = f(a_2)$ für $a_1, a_2 \in A$ stets $a_1 = a_2$ folgt,
(b) **surjektiv**, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt, und
(c) **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bei einer injektiven Abbildung $f : A \longrightarrow B$ haben unterschiedliche Elemente aus A also auch unterschiedliche Bilder in B (und das ist logisch äquivalent zur oben gewählten Formulierung). Bei einer surjektiven Abbildung $f : A \longrightarrow B$ kommt jedes Element aus B als Bild vor und hat somit ein Urbild. Verbindet man die beiden Eigenschaften, dann wird die Zuordnung im Hinblick auf beide Richtungen eindeutig. Für eine bijektive Abbildung $f : A \longrightarrow B$ gilt also, dass unter f jedes Element aus A genau ein Bild in B und jedes Element in B genau ein Urbild in A hat.

1.2.6 **Beispiele 1.2.6** (a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ ist eine Abbildung, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Sie ist injektiv, da aus $x^2 = y^2$ für natürliche Zahlen x und y immer $x = y$ folgt. Die Abbildung ist nicht surjektiv, da nicht jede natürliche Zahl eine Quadratzahl ist und folglich nicht jede natürliche Zahl als Bild vorkommt oder, anders ausgedrückt, ein Urbild hat.

(b) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, da beispielsweise $f(3) = f(-3) = 9$ ist.

(c) $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist eine bijektive Abbildung. Einerseits folgt aus $x^2 = y^2$ immer $x = y$, andererseits gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}_0^+$ ein $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = y$, nämlich $x = \sqrt{y}$.

Denken Sie noch einmal an die Kinder. Sie stellen (mathematisch gesprochen) zwischen ihren Fingern und ihrem Alter bzw. den Kuchenstücken eine bijektive Abbildung her. Jedem Jahr bzw. jedem Kuchenstück wird ein Finger zugeordnet. Weiter als bis zur Zahl 10 geht diese Zuordnung allerdings nicht aber das ist wohl auch nicht nötig. In der Mathematik hat man es besser, denn der Vorrat ist unbegrenzt: Die mathematischen Finger sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Definition 1.2.7 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\mathbb{N}_n = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq n\}$. Wir sagen, eine Menge X hat n Elemente, falls es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow X$ gibt. **1.2.7**

Nun könnte es (theoretisch) allerdings sein, dass es für verschiedene natürliche Zahlen n und m bijektive Abbildungen

$$f_n : \mathbb{N}_n \longrightarrow X, \quad f_m : \mathbb{N}_m \longrightarrow X$$

gibt, dass also X sowohl n als auch m Elemente hat. Dies würde man vermutlich als unerfreulich ansehen, obwohl jeder von uns schon einmal die Erfahrung gemacht hat, dass zweimaliges Abzählen einer Menge verschiedene Resultate ergab. Man glaubt nicht, dass beide Ergebnisse korrekt sind, sondern geht vielmehr davon aus, dass man sich verzählt hat. Warum eigentlich? Aus mathematischer Sicht braucht auch diese Idee eine Begründung.

Satz 1.2.8 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Dann gibt es keine injektive Abbildung von $\mathbb{N}_n$ nach $\mathbb{N}_m$. **1.2.8**

Beweisidee 1.2.8 Man nimmt an, dass die Behauptung des Satzes falsch ist und es irgendwelche Mengen mit m bzw. n Elementen gibt, zwischen denen man (trotz $m \neq n$) eine bijektive Zuordnung beschreiben kann. Das kann natürlich nicht klappen und man steuert recht schnell auf einen Widerspruch zu. Im Kern der Argumentation steht, dass es (wenn es denn überhaupt eine

solche Zahl gibt) eine kleinste Zahl $n = k$ geben muss, für die man eine solche Abbildung konstruieren kann. Man verstrickt sich in allerlei Randbedingungen und folgert dann, dass auch $k - 1$ die Bedingung erfüllt, was nicht sein darf. Kurz und gut: Es gibt einfach nicht genügend Bilder, wenn man eine größere auf eine kleinere Menge injektiv abbilden möchte.

Beweis 1.2.8 Sei S die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die es eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}_n$ in ein $\mathbb{N}_m$ mit $m < n$ gibt. Wir wollen annehmen, dass $S \neq \emptyset$ ist. Nach Satz 1.1.1 hat S dann ein kleinstes Element k. Damit gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell < k$ und eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_\ell$.
Sei $\ell = 1$, also $\mathbb{N}_\ell = \{1\}$. Jede Abbildung von $\mathbb{N}_k$ nach $\mathbb{N}_\ell$ kann einem beliebigem Element aus $\mathbb{N}_k$ also nur den Wert 1 zuordnen. Da $k > 1$ ist, kann f somit nicht injektiv sein.
Also ist $\ell > 1$ und damit $(\ell - 1) \geq 1$. Wir betrachten die Bilder der Elemente $1, 2, \ldots, k - 1 \in \mathbb{N}_k$, wobei diese Elemente nach Definition die Menge $\mathbb{N}_{k-1}$ bilden. Falls $f(1), f(2), \ldots, f(k-1) \neq \ell$ gilt, müssen die Bilder der ersten $k - 1$ natürlichen Zahlen unter f aus der Menge $\mathbb{N}_{\ell-1} = \{1, 2, \ldots, l - 1\}$ sein. Damit ist aber auch $f(\mathbb{N}_{k-1}) \subseteq \mathbb{N}_{\ell-1}$. Also ist $f_{|\mathbb{N}_{k-1}} : \mathbb{N}_{k-1} \longrightarrow \mathbb{N}_{\ell-1}$, die Einschränkung von f auf $\mathbb{N}_{k-1}$, injektiv und das bedeutet $k - 1 \in S$ im Widerspruch zur Minimalität von k.
Es gibt also ein b mit $1 \leq b \leq k-1$ und $f(b) = \ell$. Da f injektiv ist, tritt ℓ nur einmal als Bild auf und es ist insbesondere $f(k) = c \neq \ell$. Nun konstruiert man eine Abbildung $f^* : \mathbb{N}_{k-1} \longrightarrow \mathbb{N}_{\ell-1}$ folgendermaßen: Für $r \in \mathbb{N}_{k-1}$ und $r \neq b$ wählt man $f^*(r) = f(r)$, im Fall $r = b$ setzt man $f^*(b) = c$. Diese Abbildung ist injektiv, denn jedes Element aus $\mathbb{N}_{\ell-1}$ kommt höchstens einmal als Bild vor. Damit folgt dann aber auch in diesem Fall $k - 1 \in S$ und das ist ein Widerspruch. □

Satz 1.2.8 zeigt insbesondere, dass die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge eindeutig bestimmt ist (warum?). Wir können daher die folgenden Schreibweisen und Begriffe sinnvoll einführen.

1.2.9 **Definition 1.2.9** Sei X eine Menge. Ist $X = \emptyset$, so schreibt man $|\emptyset| = 0$. Gibt es ein bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow X$, so schreibt man $|X| = n$. Gibt es für kein $n \in \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow X$ und ist $X \neq \emptyset$, so schreibt man $|X| = \infty$.

Man nennt $|X|$ die *Mächtigkeit* der Menge X. Ist $|X| \neq \infty$, so heißt X endlich. Ist X endlich oder gibt es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X, so heißt X *abzählbar*, sonst *überabzählbar*.

1.2.3 Der Beweis des Schubfachprinzips

Mit den letzten Abschnitten sind die Grundlagen für den Beweis des Schubfachprinzips gelegt. Der Satz soll dazu noch einmal genannt werden und eine eigene Nummer bekommen. Insbesondere das Ergebnis von Satz 1.2.8 wird benötigt und führt zu einem kurzen und eleganten Beweis.

Satz 1.2.10 (Schubfachprinzip) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es ein Schubfach, in dem mindestens zwei Objekte liegen. **1.2.10**

Beweis 1.2.10 Sei X die Menge der Schubfächer und Y die Menge der Objekte. Dann ist $|X| = n$ und $|Y| = n + 1$. Das Verteilen von Objekten auf die Schubfächer kann man als eine Abbildung $f : Y \longrightarrow X$ auffassen. Nach Satz 1.2.8 kann diese Abbildung nicht injektiv sein. Also gibt es zwei Objekte, die im gleichen Schubfach liegen. □

Das Schubfachprinzip hat zahlreiche und sehr unterschiedliche Anwendungen. Die folgenden beiden Beispiele zum Zählen und Rechnen sollen das exemplarisch belegen.

Beispiel 1.2.11 Sei X eine Menge von mindestens zwei Menschen. Dann gibt es in X zwei Menschen mit der gleichen Anzahl von Freunden (wobei stillschweigend die Symmetrie der Relation „ist Freund von“ angenommen wird, sodass aus „x ist Freund von y“ immer auch „y ist Freund von x“ folgt; und natürlich ist man auch nicht mit sich selbst befreundet). **1.2.11**

Begründung: Sei $x \in X$. Wir bezeichnen mit $f(x)$ die Anzahl der Freunde von x. Ist $|X| = m$, so ist $f(x) \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Damit ist

$$f : X \to Y = \{0, \ldots, m-1\}$$

eine Abbildung, denn jeder Person kann die Anzahl ihrer Freunde eindeutig zugeordnet werden. Nun ist aber $|X| = |Y|$, sodass wir das Schubfachprinzip nicht unmittelbar anwenden können.

Allerdings hilft die folgende Überlegung, bei der die Symmetrie genutzt wird. Angenommen, $x \in X$ ist eine Person, die $m-1$ Freunde hat. Dann ist jede andere Person aus der Menge X ein Freund von x und es ist folglich $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Somit können 0 und $m-1$ nicht gleichzeitig Bilder unter f sein.

Also ist entweder

$$f(X) \subseteq \{1, \ldots, m-1\}$$

oder

$$f(X) \subseteq \{0, \ldots, m-2\}$$

(wobei selbstverständlich nicht alle Elemente von $\{1, \ldots, m-1\}$ bzw. im zweiten Fall von $\{0, \ldots, m-2\}$ auch tatsächlich Bilder unter f sein müssen). Das Schubfachprinzip (Satz 1.2.10) besagt in diesem Fall aber, dass es x_1, x_2 in X mit $f(x_1) = f(x_2)$ gibt. □

1.2.12 **Beispiel 1.2.12** Es gibt $a, b, c \in \mathbb{N}_0$, die nicht alle gleich 0 sind (für die also $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ist) mit $|a|$, $|b|$, $|c| < 10^6$ und so, dass die Ungleichung $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$ gilt.

Begründung: Man betrachtet alle Terme der Form

$$r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} \text{ mit } r, s, t \in \mathbb{N}_0 \text{ und } r, s, t \leq 10^6 - 1.$$

Es gibt genau 10^{18} solcher Terme, da man für a, b und c jeweils 10^6 Möglichkeiten hat. Man setzt nun

$$d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 10^6.$$

Dann gilt $0 \leq x < d$ für jedes $x = r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$, also für jede ganze Zahl x der gegebenen Form. Sei

$$k = \frac{d}{10^{18} - 1}.$$

Man teilt das Intervall der reellen Zahlen y mit $0 \leq y \leq d$ in $10^{18} - 1$ Teilintervalle der Länge k. Nach dem Schubfachprinzip gibt es dann zwei verschiedene Zahlen x_1, x_2 der gegebenen Form, die in einem gemeinsamen Teilintervall liegen. Seien

$$x_1 = r_1 + s_1\sqrt{2} + t_1\sqrt{3} \text{ und } x_2 = r_2 + s_2\sqrt{2} + t_2\sqrt{3}$$

diese beiden Zahlen. Für ihren Abstand gilt

$$|x_1 - x_2| = |(r_1 - r_2) + (s_1 - s_2)\sqrt{2} + (t_1 - t_2)\sqrt{3}| < k,$$

da $x_1 \neq x_2$ ist. Nun ist aber

$$k < \frac{10^7}{10^{18}} = 10^{-11}.$$

Das war gerade die Behauptung. □

Mit dem Schubfachprinzip kann man schließlich auch den folgenden Satz 1.2.13 begründen. Er besagt, dass man bijektive Abbildungen auf endlichen Mengen relativ einfach in den Griff bekommen kann. Es genügt nämlich in diesem Fall, wenn man *entweder* ihre Injektivität *oder* ihre Surjektivität zeigt.

Satz 1.2.13 Sei N eine Menge mit $|N| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : N \longrightarrow N$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. **1.2.13**

Beweis 1.2.13 Sei f injektiv, sodass also aus $x \neq y$ stets $f(x) \neq f(y)$ folgt. Falls es nun ein $z \in N$ geben sollte, das kein Urbild bezüglich f hat, dann gibt es nach dem Schubfachprinzip (Satz 1.2.10) zwei Elemente in N, die dasselbe Bild unter f haben müssen. Das ist ein Widerspruch zur Injektivität der Abbildung. Sei andererseits f surjektiv, sodass es also zu jedem $y \in N$ ein $x \in N$ mit $f(x) = y$ gibt. Man kann dann genauso argumentieren. Wenn es nämlich $x, y \in N$ mit $x \neq y$, aber $f(x) = f(y)$ gibt, dann können nach dem Schubfachprinzip höchstens $n - 1$ Elemente als Bilder unter f vorkommen. Das widerspricht der Surjektivität der Abbildung. □

1.3 Grundprinzipien der Kombinatorik **1.3**

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, in dem es um die Anordnung und Auswahl von Objekten geht. Dahinter stehen nicht selten praktische (oder praktisch anmutende) Fragestellungen wie etwa die folgende Verallgemeinerung des Schubfachprinzips.

1.3.1 Eine Verallgemeinerung des Schubfachprinzips

Satz 1.3.1 Seien n, ℓ, r natürliche Zahlen und $n \geq 1 + r(\ell - 1)$. Es seien n Objekte mit r Farben angemalt. Dann gibt es (mindestens) ℓ Objekte von gleicher Farbe. **1.3.1**

Beweisidee 1.3.1 Wenn es nicht mindestens ℓ Objekte von einer (beliebigen) Farbe gibt, dann sind es eben höchstens $\ell - 1$ Objekte einer Farbe. Die Multiplikation mit der Anzahl r möglicher Farben gibt das gewünschte Ergebnis.

Beweis 1.3.1 Angenommen, es gibt höchstens jeweils $\ell - 1$ Objekte von der gleichen Farbe. Dann gibt es höchstens $r(\ell - 1)$ Objekte, die mit r Farben angemalt sind. □

Dieser Satz hat sinnvolle Anwendungen, von denen zwei aufgezeigt werden sollen. Dabei geht es zunächst um ein Spiel und dann um monotone Teilfolgen einer Folge reeller Zahlen.

Das Ramsey - Spiel
Das Ramsey-Spiel[1] wird von zwei Spielern A und B gespielt. Man zeichnet zunächst sechs Punkte so auf ein Blatt Papier, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Jeder Spieler hat eine Farbe (sagen wir rot für A und blau für B). In jedem Zug zeichnet ein Spieler eine Strecke zwischen zwei noch nicht verbundenen Punkte in seiner Farbe. Verloren hat derjenige Spieler, der gezwungen ist, als erster ein Dreieck in seiner Farbe zu zeichnen. Wenn man das Spiel mehrfach spielt, so fällt auf, dass es eigentlich nie zu einem Unentschieden kommt. Die Beobachtung ist richtig, und dass tatsächlich stets einer der Spieler verliert, können wir beweisen.

Behauptung: Beim Ramsey-Spiel gibt es keinen unentschiedenen Ausgang, sondern es wird immer einer der beiden Spieler gewinnen.
Begründung: Die sechs Punkte seien mit 1,2,3,4,5 und 6 bezeichnet. Die Behauptung ist somit, dass bei jeder Färbung der 2-Mengen $\{i, j\}$ stets ein Tripel $(\{i, j\}, \{j, k\}, \{i, k\})$ entsteht, bei dem alle Elemente die gleiche Farbe haben (mit $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Dazu betrachten wir zunächst die Mengen $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$. Wenn diese Mengen mit zwei Farben eingefärbt werden, dann gibt es nach Satz 1.3.1 (mindestens) drei Mengen mit gleicher Farbe. Wir können also annehmen, dass $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{1, 4\}$ alle rot sind. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Ist eine der folgenden Mengen $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ rot, so haben wir ein rotes Dreieck. Ist keine davon rot, so sind sie alle blau und bilden ein blaues Dreieck. □

Übrigens kann man das Spiel nicht für jede Anzahl von Punkten in gleicher Weise spielen. Angenommen, man zeichnet fünf Punkte 1,2,3,4 und 5 so auf, dass keine drei auf einer Geraden liegen. Man färbt nun $\{1, 2, \}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 5\}$ rot und die restlichen Paare blau ein. Dann gibt es in dieser Zeichnung kein einfarbiges Dreieck.

[1] Frank P. Ramsey *22.3.1903 Cambridge †19.1.1930 Cambridge, Mathematiker und Philosoph, wurde bereits mit 21 Jahren Professor am King's College in Cambridge. Er leistete insbesondere Beiträge zur Ökonomie und zur Logik.

Monotone Teilfolgen von Folgen reeller Zahlen
In einer Folge von reellen Zahlen sollen bestimmte monotone Teilfolgen identifiziert werden. Aber Vorsicht, das Beispiel ist schon ein wenig übel. Warum, das wird weiter unten in einem Hinweis deutlich. Die folgende Behauptung findet sich, leicht abgeändert, in [2, Seite 25].

Behauptung: Sei $a_1, \ldots, a_{mn+1}$ eine Folge von $mn+1$ paarweise verschiedenen reellen Zahlen. Dann enthält diese Folge eine streng monoton wachsende Teilfolge $a_{k_1} < \ldots < a_{k_{m+1}}$ (mit $k_1 < \ldots < k_{m+1}$) der Länge $m+1$ oder eine streng monoton fallende Teilfolge $a_{\ell_1} > \ldots > a_{\ell_{n+1}}$ (mit $\ell_1 < \ldots < \ell_{n+1}$) der Länge $n+1$.

Hinweis: Bei der Begründung dieser Behauptung muss man immer wieder zwischen zwei Mengen von Zahlen unterscheiden. Da gibt es einerseits eine Menge von reellen Zahlen. Diese Zahlen bilden eine Menge (weil sie alle voneinander verschieden sind), hier sind sie allerdings als Folge gegeben. Es ist also bedeutsam, an welcher Stelle dieser Folge ein bestimmtes Element (oder besser Glied der Folge) steht. Andererseits gibt es Mengen von Indizes. Bei diesen Mengen kommt es darauf an, welche Ordnungsnummer ein Element der eben beschriebenen Folge hat. Insbesondere werden hier nur ganz bestimmte Ordnungsnummern („Indizes“) zu einer Menge zusammengefasst. Dabei spielt die Reihenfolge (wie bei allen Mengen) keine Rolle.

Begründung: Wir nehmen an, dass es keine aufsteigende Folge der Länge $m+1$ gibt. Für $i = 1, \ldots, m$ setzt man

$K_i = \{k \mid \text{Die längste aufsteigende Folge, die bei } a_k \text{ endet, hat die Länge } i.\}$

Da es streng monoton steigende Folgen höchstens bis zur Länge m gibt, kann man über alle Elemente a_k eine Aussage machen, in welcher Menge K_i der zu diesem Element gehörende Index k liegt. Das liefert

$$K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m = \{1, 2 \ldots, mn+1\}.$$

Weiter ist $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Nach Satz 1.3.1 gibt es also ein i mit $|K_i| \geq n+1$. Wir behaupten, dass es in K_i eine monoton fallende Teilfolge von Indizes gibt, zu denen wiederum eine monoton fallende Teilfolge der a_j (ebenfalls mit der Länge $n+1$) gehört.

Seien $k, \ell \in K_i$ mit $k < \ell$. Wir nehmen außerdem an, dass $a_k < a_\ell$ ist. Da $k \in K_i$ ist, gibt es eine monoton wachsende Folge der Länge i, die in a_k endet. Diese können wir nun (laut Annahme) um a_ℓ verlängern, was eine monoton

wachsende Folge der Länge $i+1$ liefert. Somit ist $\ell \in K_{i+1} \cap K_i$, was aber wegen $K_{i+1} \cap K_i = \emptyset$ nicht möglich ist.
Damit ist $a_k > a_l$ für alle $k, l \in K_i$ mit $k < l$. Also ist die Folge der a_j mit $j \in K_i$ eine monoton fallende Folge der Länge $n+1$. □

Die minimale Anzahl $mn+1$ von Elementen ist übrigens wirklich zwingend als Voraussetzung. Betrachten wir etwa in der Rolle der a_j die nm Zahlen $n-1, 2n-1, \ldots, nm-1, n-2, 2n-2, \ldots, nm-2, \ldots, 0, n, \ldots, (m-1)n$. Hier gibt es keine monoton steigende Teilfolge der Länge $m+1$ (und das muss man sich in Ruhe und mit hartnäckigem Zählen klar machen), aber auch keine monoton fallende Teilfolge der Länge $m+1$ (wobei man zum Verstehen die gleiche Ruhe und gleichermaßen hartnäckiges Zählen braucht).

1.3.2 Permutationen, Variationen, Kombinationen

Wir wollen nun einen Spezialfall der bijektiven Abbildung betrachten, nämlich eine bijektive Abbildung auf einer endlichen Menge. Diese Art der bijektiven Abbildung bekommt in der folgenden Definition einen eigenen Namen.

1.3.2 **Definition 1.3.2** Sei N eine endliche Menge und $|N| = n$. Eine bijektive Abbildung $f : N \to N$ nennt man *Permutation*. Die Menge aller Permutationen von N wird mit S_n bezeichnet.

Wenn man S_n untersucht, dann macht man sich das Leben oft einfach, indem man $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ setzt. Im Grunde kommt es ja nur darauf an, dass die einzelnen Elemente unterscheidbar sind. Das soll auch im folgenden Beispiel so gemacht werden.

1.3.3 **Beispiel 1.3.3** Sei $n = 3$. Wir wollen die Elemente von S_3 bestimmen, nämlich alle bijektiven Abbildungen der Menge $N = \{1, 2, 3\}$ auf sich selbst. Das kann man ganz systematisch angehen, indem man nacheinander die Permutationen betrachtet, die alle Elemente bzw. kein Element bzw. ein Element bzw. zwei Elemente festlassen.

Wenn eine Permutation alle Elemente festlässt, dann wird 1 auf 1, 2 auf 2 und 3 auf 3 abgebildet. Wir nennen diese Permutation s_1 und wählen für sie eine übersichtliche Schreibweise in zwei Reihen, bei der oben das Urbild und direkt darunter das Bild dieses Elements steht. Damit ist

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Andere Permutationen in S_3, die alle Elemente festlassen, kann es nicht geben. Wenn eine Permuation kein Element festlässt, dann muss 1 auf 2 oder 3 abgebildet werden (mehr Auswahl gibt es nicht). Wenn 1 auf 2 geht, dann muss 2 auf 3 gehen (sonst wäre 3 fest) und folglich 3 auf 1. Wenn 1 auf 3 geht, dann wird 2 auf 1 und 3 auf 2 abgebildet (auch das ist eindeutig). Wir nennen diese Permutationen s_2 bzw. s_3 und stellen sie in der oben gegebenen Form dar. Also ist

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn eine Permutation in S_3 genau ein Element festlässt, dann ist alles ganz einfach. Es gibt offensichtlich drei Möglichkeiten, bei denen jeweils ein Element auf sich selbst abgebildet wird und die beiden anderen vertauscht werden. Man kann somit

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

festlegen. Der letzte Fall, bei dem zwei Elemente festbleiben sollen, ist allerdings keine weitere Möglichkeit. In diesem Fall muss (notgedrungen) auch das dritte Element auf sich selbst abgebildet werden. Damit gilt $|S_3| = 6$, es gibt sechs bijektive Abbildungen einer Menge mit drei Elementen auf sich selbst.

Auf der Menge S_n der Permutationen kann man eine sinnvolle Verknüpfung festlegen, nämlich die Hinterausführung von zwei solchen Abbildungen. Sind $g, f \in S_n$, so definiert man (ganz naheliegend) gf durch $gf(i) = g(f(i))$ für $i \in N$ (und N soll hier und im folgenden Text wie in Definition 1.3.2 gewählt sein).

Satz 1.3.4 Seien $g, f \in S_n$ und deren Hintereinanderausführung gf durch $gf(i) = g(f(i))$ für $i \in N$ definiert. Dann ist auch gf eine Permutation. **1.3.4**

Beweisidee 1.3.4 Da gf eine Abbildung einer endlichen Menge auf sich ist, genügt es, die Injektivität zu zeigen. Und das macht man ganz direkt.

Beweis 1.3.4 Es ist klar, dass gf eine Abbildung ist, denn mit $i \in N$ ist $f(i) \in N$ und somit auch $g(f(i)) \in N$.

So bleibt nur zu zeigen, dass gf bijektiv ist. Nach Satz 1.2.13 ist das insbesondere dann der Fall, wenn gf injektiv ist. Sei also $gf(i) = gf(j)$ für $i, j \in N$. Dann ist $f(i) = f(j)$, weil g injektiv ist und somit $i = j$, weil f injektiv ist. Also ist gf eine bijektive Abbildung und somit $gf \in S_n$. □

Was im Satz vielleicht abstrakt klingt, wird in einer Menge wie S_3 sehr leicht konkret. Wir betrachten dazu die Elemente s_4 und s_5 (mit den Bezeichnungen wie im Beispiel auf Seite 24 und in genau dieser Schreibweise). Wir legen nun fest, wie die Hintereinanderausführung zu lesen ist. Es soll $s_4 s_5$ bedeuten, dass erst die Abbildung s_5 und dann die Abbildung s_4 ausgeführt wird, also soll

$$s_4 s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = s_2$$

sein, denn 1 wird zunächst (unter s_5) auf 3 und dann (unter s_4) auf 2 abgebildet, 2 geht auf 2 und dann auf 3, 3 geht auf 1 und 1 dann wieder auf 1. Das Ergebnis ist s_2, also wieder eine Permutation der Zahlen 1, 2 und 3.

Mit genau der gleichen Methode kann man beliebige Permutationen hintereinander ausführen. Man sieht dann insbesondere, dass es zu jeder Permutation eine so genannte Umkehrung gibt. Zum Beispiel ist

$$s_2 s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = s_1$$

oder

$$s_4 s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = s_1.$$

Was hier für S_3 exemplarisch gerechnet ist, kann man auf jede beliebige Permutation (und sogar auf jede bijektive Abbildung) verallgemeinern. Man kann eine Umkehrabbildung definieren.

1.3.5 **Definition 1.3.5** Sei $f \in S_n$. Die Abbildung $f^{-1} \in S_n$, die durch $f^{-1}(i) = j$ für $f(j) = i$ definiert ist, heißt *Umkehrabbildung* von f.

Mit dieser Festlegung gilt insbesondere $f^{-1} f(i) = i = f\, f^{-1}(i)$, d. h., $f^{-1} f$ ist die *identische Abbildung* (oder *Identität*), die jedes Element auf sich selbst abbildet.

Die Anzahl der Permutationen $|S_n|$ zu einer gegebenen natürlichen Zahl n ist mit diesem begrifflichen Wissen erstaunlich leicht zu bestimmen. Die Methode soll dabei zunächst an einem Beispiel geklärt werden. Betrachten wir etwa S_4, die Menge aller Permutationen von vier Elementen. Wir wissen bereits, dass $|S_3| = 6$ ist, denn wir haben alle entsprechenden Abbildungen im Beispiel auf Seite 24 bestimmt. Im Prinzip finden wir diese bijektiven Abbildungen auch in S_4 wieder, wenn man jeweils die 4 auf sich selbst abbildet. Das könnte (wie gesagt, im Prinzip, und mit den Bezeichnungen aus dem Beispiel) so aussehen:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nun kann die 4 aber auch auf jede andere der drei verbleibenden Zahlen abgebildet werden, also auf die 1, die 2 oder die 3. Was passiert dann mit den restlichen Zahlen? Überraschungen kann es nicht geben, vielmehr wird für diese verbleibenden Zahlen jede der sechs Möglichkeiten vorkommen, die man aus S_3 bereits prinzipiell kennt (eben jeweils mit den drei verbleibenden Zahlen). Weil es für die Zahl 4 genau vier Möglichkeiten gibt, hat S_4 viermal so viele Elemente wie S_3 und es gilt $|S_4| = 4 \cdot 6 = 24$. Diese Überlegung wird im folgenden Satz und seinem Beweis verallgemeinert.

Satz 1.3.6 Es ist $|S_n| = n!$, wobei $n! = \Pi_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$ das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen ist. **1.3.6**

Beweisidee 1.3.6 Die Beweismethode ist im Kern induktiv, wobei $|S_n|$ und $|S_{n-1}|$ miteinander verglichen werden. Man stellt fest, dass sie sich um den Faktor n unterscheiden, also $|S_n| = n \cdot |S_{n-1}|$ ist. Der Induktionsanfang $|S_1| = 1$ ist offensichtlich gegeben. Also geht es nur darum, zu erkennen, warum sich die Mächtigkeit der beiden Mengen um genau diesen Faktor n unterscheiden. Dazu betrachtet man eine beliebige Permutation f_1 aus S_n und das Bild x von n unter f_1. Nun wird zweifach gezählt. Einerseits überlegt man sich, dass es für dieses Bild x genau n Möglichkeiten gibt, nämlich alle Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$. Andererseits gibt es $|S_{n-1}|$ bijektive Abbildungen,

die n genau das x zuordnen. Man stelle sich einfach vor, dass dieses eine Paar aus n und x festbleibt und alle anderen $n-1$ Elemente beliebig permutiert werden dürfen.

Beweis 1.3.6 Sei $N = \{1, \ldots, n\}$. Seien $f_1, f_2 \in S_n$ mit $f_1(n) = x = f_2(n)$. Dann ist $f_1^{-1} f_2(n) = n$. Also unterscheiden sich f_1 und f_2 um eine bijektive Abbildung aus S_{n-1}. Da es n Möglichkeiten für $f_1(n)$ gibt, gilt

$$|S_n| = n \cdot |S_{n-1}|.$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes. □

Den Begriff der Permutation kann man verallgemeinern, wenn man Abbildungen auch zwischen endlichen Mengen unterschiedlicher Mächtigkeit zulässt und statt der Bijektivität nur die Injektivität fordert. Man kommt so zum Begriff der *k–Variation* (oder auch *k–Permutation*).

1.3.7 **Definition 1.3.7** Eine k–Variation f ist eine injektive Abbildung einer Menge M mit k Elementen in die Menge $N = \{1, \ldots, n\}$. Man bezeichnet die Anzahl der k–Variationen mit $P(n, k)$.

Konkret sieht das so aus: Betrachten wir ein Pferderennen, bei dem sechs Startplätze vergeben sind. Wie viele Tippzettel muss man ausfüllen, wenn drei Plätze gesetzt werden und man auf jeden Fall gewinnen möchte? Nun, für den ersten Platz gibt es sechs, für den zweiten Platz jeweils noch fünf und für den dritten Platz jeweils noch vier Möglichkeiten. Die Reihenfolge der weiteren Plätze hat keinen Einfluss mehr, also genügt es, $6 \cdot 5 \cdot 4$ Tippzettel abzugeben.

Man kann es sich auch anders überlegen: Wenn es sechs Startplätze gibt, dann gibt es 6! Möglichkeiten, wie die Pferde ins Ziel gehen können. Dabei sind aber jeweils die Permutationen der letzten drei Plätze ohne Belang. Also gibt es $\frac{6!}{3!}$ unterschiedliche Tippzettel.

Ganz offensichtlich muss im allgemeinen Fall $k \leq n$ sein, da ansonsten keine injektive Abbildung von einer Menge mit k Elementen in eine Menge mit n Elementen möglich ist (und das folgt aus dem Schubfachprinzip Satz 1.2.10). Also ist insbesondere $n - k \geq 0$. Und da nach Definition $0! = 1$ ist, darf man den folgenden Satz formulieren.

Satz 1.3.8 Es ist $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$. **1.3.8**

Beweisidee 1.3.8 Wieder ist es ein induktives Argument, das zum Erfolg führt. Man schränkt das Problem ein und überlegt sich, wie viele solche Abbildungen es gibt, wenn man erst einmal einem einzigen Element ein Bild zugeordnet hat und dieses Paar aus Urbild und Bild festlässt. Für $n = 1$ ist natürlich alles problemlos, denn dann ist $k = 1$ und es gibt genau $1 = \frac{1!}{(1-1)!}$ Möglichkeiten, dieses eine Element abzubilden.

Beweis 1.3.8 Für das erste Element aus M kann man als Bild jedes der n Elemente aus N wählen. Dann gibt es noch $P(n-1,k-1)$ viele Möglichkeiten für die restlichen Elemente. Also ist

$$P(n,k) = n \cdot P(n-1,k-1) = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \ .$$

Die Aussage ist damit bewiesen. □

Manchmal kommt es bei Problemen dieser Art gar nicht so sehr auf die Reihenfolge an, sondern nur darauf, ob bestimmte Elemente berücksichtigt werden oder nicht. Vermutlich sind Pferderennen eher selten, bei denen Dabeisein alles ist. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass dies in anderen Situationen nicht ungewöhnlich ist.

Beispiel 1.3.9 Skat wird mit 32 Karten gespielt, wobei jeder der drei Spieler zu Beginn 10 Karten bekommt. Wie viele unterschiedliche Skathände mit 10 Karten kann man aus diesen 32 Karten verteilen? **1.3.9**

Es gibt für 10 Karten zunächst einmal genau $P(32,10)$ Möglichkeiten der Verteilung. Allerdings kommt es beim Geben nicht auf die Reihenfolge an, sodass diese Möglichkeiten auf der Hand nicht alle wirklich unterschiedlich sind. Mathematisch gesprochen, kann man alle Permutationen der 10 Karten als gleichwertig betrachten. Für 10 Karten gibt es somit jeweils 10! Anordnungen, die als Menge („auf der Hand“) identisch sind. Es gibt somit

$$\frac{32!}{22!\,10!} = 64512240$$

unterschiedliche Skathände. □

Definition 1.3.10 Wir nennen eine Auswahl von k aus n Objekten, bei der es auf die Reihenfolge nicht ankommt, eine *Kombination*. Die Anzahl der Kombinationen von k aus n Objekten wird mit $C(n,k)$ bezeichnet. **1.3.10**

1.3.11 **Satz 1.3.11** Für alle $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, gilt

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\ .$$

Beweisidee 1.3.11 Der Beweis nutzt genau die Kernidee, die im vorherigen Beispiel für den konkreten Fall $n = 32$ und $k = 10$ zur Lösung führte.

Beweis 1.3.11 Es gibt $P(n,k)$ k–Variationen, also injektive Abbildungen einer Menge mit k Elementen in eine Menge mit n Elementen. Dabei unterscheiden sich Abbildungen mit derselben k–elementigen Bildmenge nur um eine bijektive Abbildung. Da es zu $k \in \mathbb{N}$ genau $k!$ Permutationen gibt, folgt die Behauptung. □

Man schreibt abkürzend $\frac{n!}{(n-k)!k!} =: \binom{n}{k}$ und nennt $\binom{n}{k}$ *Binomialkoeffizient*. Gelesen wird $\binom{n}{k}$ als „n über k“ oder als „k aus n“. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass man

$$\binom{1}{1} = \binom{1}{0} = \binom{0}{0} = 1$$

setzt.

1.3.3 Der Binomische Lehrsatz

Die im vorigen Abschnitt eingeführten Binomialkoeffizienten spielen bei der Entwicklung von $(a+b)^n$ ein wichtige Rolle. Es gilt der folgende Satz, der so genannte *Binomische Lehrsatz*, der zumindest für $n = 2$ bestens bekannt sein dürfte.

1.3.12 **Satz 1.3.12 (Binomischer Lehrsatz)** Für alle $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\ .$$

Beweisidee 1.3.12 Es wird $(a+b)^n$ betrachtet. Was konkret gemacht wird, können wir uns am Beispiel $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ überlegen. Multiplizieren wir nämlich diese vier Faktoren, so bekommen wir Summanden, die Vielfache von a^4 bzw. a^3b bzw. a^2b^2 bzw. ab^3 bzw. b^4 sein müssen, denn aus jeder Klammer geht entweder ein a oder ein b in jeden einzelnen Summanden ein. Interessant ist nun, welche Vielfache das tatsächlich sind und das bestimmen wir mit Hilfe kombinatorischen Zählens. Es ist eine Fra-

ge der Betrachtungsweise: Der Faktor vor a^3b wird so gesehen, dass aus drei Klammern (welche auch immer das sind) ein a und aus einer Klammer ein b ausgewählt wird. Damit sind wir genau bei den Kombinationen, die in Definition 1.3.10 vorkommen.

Beweis 1.3.12 Wir betrachten den Term

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n}\,.$$

Beim Ausmultiplizieren bekommen wir die einzelnen Summanden, indem wir aus jeder Klammer ein a bzw. ein b wählen. Also entsteht $a^{n-k}b^k$ dadurch, dass wir aus k Klammern b und aus den restlichen $n-k$ Klammern a wählen. Nun gibt es genau $C(n,k)$ Möglichkeiten, b aus k Klammern zu wählen, das heißt, wir erhalten den Summanden $a^{n-k}b^k$ genau $C(n,k)$ mal. □

Die Binomialkoeffizienten erweisen sich in vielen Situationen als nützlich. Es ist daher sehr sinnvoll, sich einige Rechenregeln für den Umgang mit ihnen einzuprägen.

Satz 1.3.13 Für $k,n\in\mathbb{N}$, $k\le n$, gilt **1.3.13**

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Beweisidee 1.3.13 Auch hier ist alles nur eine Frage der richtigen (kombinatorischen) Betrachtungsweise.

Beweis 1.3.13 Jede Wahl von k Objekten liefert automatisch eine Wahl von $n-k$ Objekten und umgekehrt. □

Satz 1.3.14 Seien $k,n\in\mathbb{N}$ und $k\le n$. Dann gilt **1.3.14**

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}.$$

Beweisidee 1.3.14 Dieser Beweis beruht auf zweifachem Zählen, wobei das Ergebnis einmal die (a) linke und einmal die (b) rechte Seite der Gleichung ist. Insbesondere teilt man die Menge beim zweiten Mal so auf, dass man genau die beiden gewünschten Summanden bekommt.

(a) Man betrachtet eine Menge mit $n+1$ Objekten und wählt k davon aus. Definition 1.3.10 sagt aus, wie viele Möglichkeiten es dabei geben kann. Man bekommt so den Term auf der linken Seite.
(b) Es wird ein Element aus den $n+1$ Objekten fest ausgewählt. Nun werden alle Teilmengen der Menge von $n+1$ Objekten betrachtet, die aus k Elementen bestehen. Man kann sie aufteilen in solche, in denen sich dieses feste Element befindet, und solche, in denen es nicht vorkommt, und zählt jeweils die Anzahl dieser Teilmengen. Das Ergebnis sind genau die Summanden auf der rechten Seite der Gleichung.

Beweis 1.3.14 Sei X eine Menge mit $n+1$ Objekten. Dann gibt es nach Definition 1.3.10 genau $C(n+1,k) = \binom{n+1}{k}$ Möglichkeiten, k Objekte aus X auszuwählen.
Diese Anzahl wird nun auf eine weitere Art bestimmt. Sei dazu ein $a \in X$ fest gewählt. Wir teilen die k–elementigen Teilmengen von X in zwei Klassen, nämlich solche, die a enthalten und solche, die a nicht enthalten. Unmittelbar einsichtig ist, dass es $C(n,k) = \binom{n}{k}$ viele k-elementige Teilmengen gibt, die a nicht enthalten, denn $|X \setminus \{a\}| = n$. Wir betrachten also die k-elementigen Teilmengen, die a enthalten. Jede dieser Mengen hat nun aber $k-1$ Elemente, die von a verschieden sind. Damit bestimmt jede dieser Mengen eine Menge mit $k-1$ Elementen und von diesen Mengen muss es $C(n,k-1) = \binom{n}{k-1}$ viele geben. Also hat X tatsächlich $C(n,k) + C(n,k-1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ viele k-elementige Teilmengen. □

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	…	…
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
⋮										
⋮										

Mit dem Ergebnis von Satz 1.3.14 können wir nun das so genannte *Pascal'sche Dreieck* für die konkreten Werte von $\binom{n}{k}$ aufschreiben. Wir tragen k in der ersten Reihe und n in der ersten Spalte ab und bekommen entsprechend die Einträge.

Nützlich ist das Pascal'sche Dreieck bei der Bestimmung von $(a+b)^n$ für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Man kann etwa

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

unschwer (und vor allem ohne zu Rechnen) ablesen.

Wir wollen nun einige weitere nützliche Gesetzmäßigkeiten in Bezug auf die Binomialkoeffizienten zeigen. Dabei sind die Beweise nicht kompliziert, erfordern aber einige Überlegungen. Sinnvoll für das Verständnis ist es, wenn man sich die Koeffizienten im Pascal'schen Dreieck angeordnet denkt. Im Grunde kann man gerade diese Eigenschaften dann fast ablesen oder zumindest kontrollieren (auch wenn das selbstverständlich einen ordentlichen Beweis nicht ersetzt).

Satz 1.3.15 Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Dann gilt: **1.3.15**

(a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.
(b) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$.
(c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ für ein festes k.

Beweisidee 1.3.15 Bei Formel (a) wird jeweils die Anzahl der Teilmengen einer Menge mit n Elementen betrachtet und sinnvoll interpretiert. Es hilft ein Ergebnis, das wir bereits in einem Beispiel behandelt hatten. Im Fall (b) wird eine bijektive Abbildung auf der Menge aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen so definiert, dass man das Ergebnis mehr oder minder direkt bekommt. Dabei wird einer Menge mit einer ungeraden Anzahl von Elementen eine Menge mit einer geraden Anzahl von Elementen (und umgekehrt) zugeordnet. Diese Abbildung wird passend „gebastelt". Formel (c) wird schließlich durch Induktion nach n bewiesen.

Beweis 1.3.15
(a) Wir wissen, dass $\binom{n}{i}$ die Anzahl von i–elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist. Also ist $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ die Anzahl aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen und diese Anzahl ist 2^n (man vergleiche das Beispiel auf Seite 9).

(b) Die Formel besagt, dass es genau so viele Teilmengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen gibt, wie es Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen gibt.

Sei M eine Menge mit n Elementen. Da nach Voraussetzung $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt $n > 0$ und somit $M \neq \emptyset$. Wir können also ein Element $a \in M$ wählen. Nun sortieren wir (wieder einmal) die Teilmengen von M in zwei Klassen, nämlich solche, die a enthalten, und solche, die a nicht enthalten.
Sei $K \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge von M mit $a \notin K$. Wir setzen $K_a = K \cup \{a\}$. Dann ist (selbstverständlich) K_a eine Teilmenge von M, die a enthält. Wir definieren nun eine Abbildung f von der Menge aller Teilmengen von M, die a nicht enthalten, in die Menge aller Teilmengen, die a enthalten. Dabei gehen wir so vor, dass $f(K) = K_a$ ist (wie gesagt, für alle Teilmengen K von M, die a nicht enthalten, und $K_a = K \cup \{a\}$).
Offensichtlich ist f bijektiv, denn mit $K \subseteq M$ ist auch $K_a \subseteq M$ eindeutig bestimmt (und umgekehrt). Man kann also auch eine Abbildung g mit $g(K_a) = K_a \setminus \{a\}$ (und den bereits gewählten Bezeichnungen) definieren, die wiederum eine bijektive Abbildung ist. Sie geht von der Menge der Teilmengen von M, die a enthalten, in die Menge der Teilmengen von M, die a nicht enthalten.
Aus f und g setzen wir nun eine Abbildung σ zusammen, mit der die Menge aller Teilmengen von M auf sich selbst abgebildet wird. Für $X \subseteq M$ sei

$$\sigma(X) = \begin{cases} f(X), \text{ falls } \ a \notin X\,, \\ g(X), \text{ falls } \ a \in X\,. \end{cases}$$

Mit f und g ist auch σ bijektiv. Außerdem unterscheiden sich eine Teilmenge von M und ihr Bild unter σ jeweils um ein Element, es ist also $|\sigma(X)| = |X|+1$ oder $|X| - 1$. Insbesondere ist $|X|$ gerade, falls $|\sigma(X)|$ ungerade ist, und $|X|$ ungerade, falls $|\sigma(X)|$ gerade ist. Wegen der Bijektivität von σ gibt es somit genauso viele Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen, wie es Teilmengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen gibt.

(c) Diese Formel wollen wir durch Induktion nach n beweisen. Sei also $n = 1$. Dann rechnen wir einerseits

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} = \begin{cases} 1+1 & \text{im Falle } \ k = 0 \\ 0+1 & \text{im Falle } \ k = 1 \\ 0+0 & \text{im Falle } \ k > 1 \end{cases}$$

und

$$\binom{2}{k+1} = \begin{cases} 2 & \text{im Falle } \ k = 0 \\ 1 & \text{im Falle } \ k = 1 \\ 0 & \text{im Falle } \ k > 1 \end{cases}$$

andererseits. Damit ist der Induktionsanfang (und die Basis für den Beweis) geglückt.

Sei also per Induktionsannahme die Behauptung bereits für ein n bewiesen. Wir folgern damit die Gültigkeit der Behauptung für $n+1$. Es ist

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k}$$

$$\underset{\text{Annahme}}{=} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \underset{\text{Satz 1.3.14}}{=} \binom{n+2}{k+1} .$$

□

Auch der folgende kleine Satz betrachtet eine Rechenregel für den Umgang mit Binomialkoeffizienten.

Satz 1.3.16 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: **1.3.16**

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} .$$

Beweis 1.3.16 Wir benutzen den Binomischen Lehrsatz 1.3.12, setzen $b = 1$ und wählen a als zweiten Summanden. Es ist

$$(1+a)^{2n} = (1+a)^n \cdot (1+a)^n,$$

also gilt (wie gesagt, mit Satz 1.3.12)

$$(1+a)^{2n} = \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\Big) .$$

Um zu bestimmen, wie oft a^n nach dem Ausmultiplizieren in der Summe vorkommt, muss man $\binom{n}{k}a^k$ aus dem ersten Faktor mit $\binom{n}{n-k}a^{n-k}$ aus dem zweiten Faktor für alle k zwischen 0 und n multiplizieren. Damit ist der Koeffizient von a^n gleich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \underset{\text{Satz 1.3.13}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

Andererseits kann man diesen Koeffizienten (wiederum mit Hilfe von Satz 1.3.12) auch direkt angeben.

Es ist

$$(1+a)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k ,$$

sodass man für $k = n$ den Koeffizienten $\binom{2n}{n}$ ablesen kann (und der gehört damit zu a^n). □

Dieser Abschnitt zu Grundprinzipien der Kombinatorik soll mit einem Anwendungsbeispiel abgeschlossen werden. Dabei geht es um die Formulierung und den Beweis eines kleinen Satzes, der eine spezielle Eigenschaft bei einem Produkt aus natürlichen Zahlen herausstellt. Es soll ein sehr großer (und sehr einfacher) Teiler eines Produkts aufeinander folgender natürlicher Zahlen identifiziert werden.
Betrachten wir das Produkt $n!$ der ersten n natürlichen Zahlen, dann ist $n!$ ein (trivialer) Teiler von $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$. Probiert man nun in einem konkreten Fall weitere Teiler, dann sieht man, dass beispielsweise nicht nur $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$ durch $4!$ teilbar, sondern auch $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840 = 35 \cdot 4!$ oder $19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 = 175560 = 7315 \cdot 4!$ oder $32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 = 1256640 = 52360 \cdot 4!$ ist. Das ist kein Zufall, wie der folgende Satz belegt.

1.3.17 **Satz 1.3.17** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das Produkt von n aufeinander folgenden Zahlen durch $n!$ teilbar.

Beweis 1.3.17 Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{n!}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist. Diese Zahl ist genau $C(k+n-1, n)$ und damit insbesondere eine natürliche Zahl. □

1.4

1.4 Das Inklusions-Exklusions-Prinzip

Auch dieser Abschnitt befasst sich mit dem Zählen. Dabei geht es dieses Mal um Mengen, die gewisse Elemente gemeinsam haben. Wie bekommt man die Anzahl unterschiedlicher Elemente und vermeidet Überschneidungen? Die Antwort gibt das Inklusions-Exklusions-Prinzip, das zunächst mit einer kleinen Folge von Fragestellungen („Problemen“) vorbereitet werden soll.

1.4.1 Eine Hinführung zum Inklusions-Exklusions-Prinzip

Problem 1: Skat spielt man mit 32 Karten, von denen jeweils 8 Karten die Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo haben. Wie viele Skathände zu 10 Karten (was eine Skathand ist, steht auf Seite 29) gibt es mit der Einschränkung, dass 6 Karten die Farbe Pik, 2 Karten die Farbe Kreuz und 2 Karten die Farbe Karo haben?
Wir wählen zunächst sechsmal Pik von den 8 möglichen Karten dieser Farbe, dann zweimal Kreuz von den 8 möglichen Karten der Farbe Kreuz und schließlich zweimal Karo von den (ebenfalls) 8 möglichen Karten der Farbe Karo. Mit Satz 1.3.11 bekommt man

$$\binom{8}{6} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} = 28 \cdot 28 \cdot 28 = 21952$$

als Anzahl von Möglichkeiten, die gewünschte Auswahl von Karten in der Hand zu haben.

Problem 2: Eine Skathand mit 6 Karten in einer Farbe, 2 Karten in einer anderen Farbe, 2 Karten in der dritten Farbe und keiner Karte in der vierten Farbe nennt man eine „$6-2-2-0$“ Hand. Dazu gehören die Möglichkeiten aus Problem 1, aber beispielsweise auch eine Skathand mit 6 Karten der Farbe Karo, 2 Karten der Farbe Kreuz und 2 Karten der Farbe Herz. Wie viele „$6-2-2-0$“ Hände gibt es?

Wir haben im ersten Problem gesehen, dass es 21952 Möglichkeiten für eine Auswahl von sechsmal Pik, zweimal Kreuz und zweimal Karo gibt. Diese Anzahl kann man unschwer auf beliebige Farben verallgemeinern. Bei jeder fest gewählten Zusammenstellung von drei Farben muss es genau diese 21952 Möglichkeiten geben. Wir müssen entsprechend also nur die möglichen Farbwahlen zählen. Das geht ganz einfach: Es gibt 4 Möglichkeiten für die erste Farbe und die zwei Farben mit jeweils zwei Karten können auf $\binom{3}{2}$ Arten gewählt werden. Also gibt es $4 \cdot \binom{3}{2} = 12$ Wahlmöglichkeiten für die drei Farben. Damit haben wir insgesamt $21952 \cdot 12 = 263424$ verschiedene Möglichkeiten für eine „$6-2-2-0$“ Hand.

Problem 3: Das zweite Problem kann man ebenso verallgemeinern. Die Frage ist, wie viele Skathände es gibt, in denen (mindestens) eine Farbe fehlt. Wie viele „$a-b-c-0$“ Hände (mit $0 \leq a, b, c \leq 10$) gibt es?
Eine Lösung scheint mühselig zu sein, doch etwas Nachdenken hilft sehr. Seien V_{Kr}, V_P, V_H, V_{Ka} die Hände, die jeweils *keine* Karten der Farbe Kreuz, der Farbe Pik, der Farbe Herz bzw. der Farbe Karo enthalten.

Da V_{Kr} keine Karte der Farbe Kreuz enthält, stehen diese 8 Karten nicht zur Verfügung. Somit setzt sich eine solche Hand aus den restlichen 24 Karten zusammen. Jede Hand umfasst 10 Karten, also gibt es dafür $\binom{24}{10} = 1961256$ Möglichkeiten. Nun gibt es neben Kreuz drei weitere Farben, sodass man auf $1961256 \cdot 4 = 7845024$ Möglichkeiten kommt.

Das klingt gut, ist aber noch nicht ganz die Lösung. Man muss nämlich beachten, dass es Skathände gibt, bei denen mehr als eine Farbe nicht vorkommt, die also beispielsweise weder Karten der Farbe Herz noch der Farbe Karo haben. Kurz und gut: Die einzelnen Mengen, die wir betrachtet haben, sind nicht disjunkt und wir haben einige Hände doppelt gezählt. Wir werden im Folgenden sehen, dass 7796976 Möglichkeiten übrig bleiben, dazu braucht es allerdings noch etwas mehr Theorie.

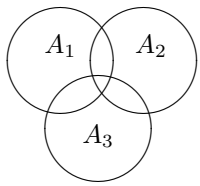
1.4.2 Der Beweis des Inklusions-Exklusions-Prinzips

Wenn man die Anzahl der Elemente bei einer Vereinigung nicht disjunkter Mengen zählt, dann muss man (ganz einfach) doppelt gezählte Elemente bestimmen. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, bei dem zwei Mengen A und B gegeben sind und $|A \cup B|$ bestimmt werden soll. Wir zählen $|A|$ und wir zählen $|B|$. Dann haben wir (wenig überraschend) die Elemente in $A \cap B$ doppelt gezählt. Also ist

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

die Anzahl der Elemente in der Vereinigungsmenge $A \cup B$.

Was macht man aber, wenn mehr als zwei Mengen gegeben sind? Gibt es auch hier eine Formel? Es gibt sie und das Grundprinzip kann man sich an der Vereinigung dreier Mengen unschwer klar machen. Seien also A_1, A_2 und A_3 beliebige Mengen. Die folgende Abbildung veranschaulicht, wie gezählt werden kann.



Man sieht sofort, dass die einfache Übertragung „Elemente aller Mengen zählen, jeweils Durchschnitt bilden und die Anzahl gemeinsamer Elemente subtrahieren“ nicht funktionieren kann.

Würde man nämlich

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3|$$

setzen, so hätte man die Elemente in $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ zunächst dreimal mitgezählt, dann aber auch gleich dreimal wieder herausgenommen. Also muss noch einmal $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ hinzugezählt werden.

Die Überlegungen zur Bestimmung der Elementeanzahl bei der Vereinigung von zwei oder drei Mengen kann man verallgemeinern. Aber Vorsicht, weiter unten wird die Beschreibung leicht unverdaulich. Also: Will man bei n Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Mächtigkeit $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ bestimmen, so muss man auf jeden Fall zunächst von jeder einzelnen Menge A_i ihre Mächtigkeit bestimmen und diese Zahlen $|A_i|$ addieren. Dann geht es daran zu bestimmen, was doppelt gezählt wurde, sodass $|A_i \cap A_j|$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ subtrahiert wird. Dabei passiert für jedes $n \geq 3$ genau das, was wir aus dem Fall $n = 3$ bereits kennen: Es wurde zu schwungvoll und damit zu viel subtrahiert. Also müssen alle Durchschnitte von drei Mengen $A_i \cap A_j \cap A_k$ mit $i, j, k = 1, \ldots, n$ gezählt und ihre Mächtigkeiten jeweils addiert werden. Nun wird es leider unübersichtlich. Wenn nämlich $n > 3$ ist, dann hat man wiederum einen Fehler gemacht, indem man alle Durchschnitte von vier Mengen durch den letzten Schritt doppelt gezählt hat. Beim Subtrahieren fallen dann für $n > 4$ leider alle Elemente weg, die in mindestens fünf Mengen liegen. Und so geht es weiter. Nach dem Addieren der Mächtigkeiten der A_i fallen $n - 1$ „Korrekturschritte“ an, bei denen entweder Elemente hinzugenommen oder wieder herausgenommen werden.

Was wir gerade beschrieben haben, bekommt nun einen Namen und wird nicht nur veranschaulicht, sondern ordentlich bewiesen. Dabei sehen die Indizes etwas wild aus, was leider vom Hin und Her beim Hineinnehmen und Herausnehmen kommt: Erst werden alle gezählt, dann jeweils die Durchschnitte von $2, 3, 4, \ldots, n$ Mengen abwechselnd herausgenommen oder hinzugezählt.

Satz 1.4.1 (Inklusions–Exklusions–Prinzip) Seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Dann gilt: **1.4.1**

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \Big) .$$

Beweisidee 1.4.1 Die Aussage ist vielleicht (trotz der Hinführung) besser zu verstehen, wenn man zunächst einmal (und nur an dieser Stelle)

$$a_k := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

setzt, wobei k über alle Zahlen $1 \le k \le n$ läuft. Dann steht auf der rechten Seite nichts anderes als

$$(-1)^2 a_1 + (-1)^3 a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n,$$

was die Idee des Hinzukommens und Wegnehmens recht gut veranschaulicht. Aber nun zur eigentlichen Beweisidee: Man betrachtet ein beliebiges Element $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ und weist nach, dass es durch den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung genau einmal erfasst wird. Als Randbedingung wird angenommen, dass x in einer gegebenen Anzahl m von Teilmengen vorkommt. Lässt man m jeden Wert zwischen 1 und n annehmen, dann wird man ausnahmslos jedes Element aus $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ mitzählen.

Beweis 1.4.1 Sei $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Angenommen x liegt in genau m der A_i, also (mit geeigneten Indizes) $x \in A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}$. Dann ist

$$(*) \quad x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_m\}.$$

Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn k nicht größer als m ist, also $1 \le k \le m$ gilt. In diesem Fall gibt es aber $\binom{m}{k}$ Möglichkeiten $i_1, \ldots, i_k$ so zu wählen, dass $(*)$ erfüllt ist.
Also wird das Element x genau $\binom{m}{k}$–mal in

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

gezählt. Nun steht auf der rechten Seite der Gleichung vor dieser Summe ein alternierendes Vorzeichen, sodass x genau

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} - \text{ mal}$$

gezählt wird. Zu zeigen ist damit, dass dieser Wert gerade 1 ist. Nach Satz 1.3.15 (b) ist

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0\,.$$

Damit ist

$$0 = \binom{m}{0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = -1\,.$$

Durch Multiplikation mit (-1) bekommt man daraus

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = 1\,.$$

Also wird das Element x tatsächlich genau einmal gezählt. Damit wird aber durch die Summe auf der rechten Seite der Gleichung jedes Element aus $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ genau einmal gezählt. □

Mit diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, auch das dritte Problem (man vergleiche Seite 37) zu lösen. Es ging um die Frage, wie viele Skathände es gibt, in denen (mindestens) eine Farbe fehlt. Mit den oben bereits gewählten Bezeichnungen und nach Satz 1.4.1 gilt:

$$\begin{aligned}
&|V_{K_r} \cup V_P \cup V_H \cup V_{K_a}| = |V_{K_r}| + |V_P| + |V_H| + |V_{K_a}| \\
&-\big(|V_{K_r} \cap V_P| + |V_{K_r} \cap V_H| + |V_{K_r} \cap V_{K_a}| + |V_P \cap V_H| + |V_P \cap V_{K_a}| \\
&+|V_H \cap V_{K_a}|\big) + \big(|V_{K_r} \cap V_P \cap V_H| + |V_{K_r} \cap V_P \cap V_{K_a}| + \\
&|V_{K_r} \cap V_H \cap V_{K_a}| + |V_P \cap V_H \cap V_{K_a}|\big) - |V_{K_r} \cap V_P \cap V_H \cap V_{K_a}|\,.
\end{aligned}$$

Da es keine Skathand gibt, die nur eine oder gar keine Farbe enthält, sind die letzten Durchschnitte aus drei bzw. vier Mengen leer. Weiter ist $|V_x \cap V_y|$ für jede Wahl von x und y gleich. So gehören zu $|V_{K_r} \cap V_P|$ alle Skathände, bei denen nur die Farben Herz und Karo vorkommen. Es gibt 16 Karten mit dieser Eigenschaft, also kann man $\binom{16}{10}$ Möglichkeiten finden. Damit rechnet man

$$|V_{K_r} \cup V_P \cup V_H \cup V_{K_a}| = 4 \cdot \binom{24}{10} - 6 \cdot \binom{16}{10} = 7845024 - 48048 = 7796976$$

und hat das Problem gelöst.

1.4.3 Anwendungen des Inklusions-Exklusions-Prinzips

Das Inklusions–Exklusions–Prinzip ist eine sehr nützliche Grundlage für vielfältige Problemlösungen. Insbesondere kann man es auch bei der Beurteilung

von zufälligen Ereignissen sinnvoll anwenden. Für die folgenden Überlegungen brauchen wir deshalb auch den Begriff der *Wahrscheinlichkeit*. Wir wählen einen naiven Zugang, der mit wenigen anderen Begriffen auskommt. Grundlegend ist ein *Zufallsexperiment*, dessen mögliche Ausgänge bekannt sind. Unter der Wahrscheinlichkeit p für ein bestimmtes Ereignis wollen wir nun einfach das Verhältnis der günstigen zu den möglichen Ausgängen eines Zufallsexperiments verstehen. Damit wird

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl aller möglichen Ausgänge}}$$

definiert. Wenn etwa mit einem Würfel geworfen wird und das Ergebnis eine 6 sein soll, dann gibt es 6 mögliche Ausgänge $1, 2, 3, 4, 5, 6$ und (darunter) einen günstigen (gewünschten) Ausgang. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu werfen, gerade einmal $\frac{1}{6}$. Nicht immer ist es allerdings so einfach, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu bestimmen, wie das nächste Beispiel zeigt.

1.4.2 **Beispiel 1.4.2** Mit einem Würfel wird zehnmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die Zahlen 1 und 6 mindestens je einmal auf?

Offensichtlich gilt es, zunächst mögliche und günstige Ausgänge zu bestimmen. Dazu ist es notwendig, alle Folgen von 10 Zahlen aufzuschreiben, die aus den Zahlen 1,2,3,4,5,6 gebildet werden können (1233434456, 6223124355, 2356563446 usw.). Es wird sofort klar, dass dies ein äußerst mühsames (und damit fehleranfälliges) Unterfangen ist. Es hilft nichts, wir müssen nach einer systematischen Lösung suchen. Und diese Lösung klappt bei Anwendung des Inklusions–Exklusions–Prinzips (Satz 1.4.1). Wir formulieren das Problem zunächst in einer allgemeineren Form.

Aus einer Menge mit n Elementen wird per Zufall jeweils ein Objekt gezogen und wieder zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach s Zügen jedes Objekt mindestens einmal gezogen wurde?
Zu bestimmen ist damit die (von n und s abhängige) Wahrscheinlichkeit $p_n(s)$, die durch

$$p_n(s) = \frac{X_s}{Y_s}$$

gegeben ist. Dabei sei X_s die Anzahl der Folgen von s Elementen, in denen jedes Objekt mindestens einmal vorkommt, und Y_s die Anzahl aller möglichen Folgen von s Elementen.

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall $n > s$. Dann ist offensichtlich $p_n(s) = 0$, weil $X_s = 0$ ist.
Man kann in jedem Fall Y_s einfach bestimmen, denn für jeden der s Plätze in der Folge gibt es n Möglichkeiten, in denen $Y_s = n^s$ ist. Um X_s zu zählen, werden wir Satz 1.4.1 anwenden. Wir bestimmen mit Hilfe dieses Satzes die Anzahl von Folgen der Länge s (kurz: s–Folgen), in denen mindestens ein Objekt nicht vorkommt.

Sei A_i die Menge der s–Folgen, in denen das i–te Objekt nicht vorkommt. Dann ist

$$X_s = n^s - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$$

(damit ist allerdings noch nichts gelöst). Nach Satz 1.4.1 ist nun

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \Big) .$$

Dabei ist $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ die Menge der Folgen, in denen jeweils k der Objekte nicht vorkommen. Also können die Folgen der Länge s aus $(n-k)$ Objekten gewählt werden. Das liefert

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)^s .$$

Nun gibt es $\binom{n}{k}$ solche Durchschnitte von k Mengen. Also ist

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^s$$

und somit

$$X_s = n^s - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^s = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^s .$$

Folglich ist

$$p_n(s) = \frac{1}{n^s} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^s .$$

Mit diesem Ergebnis kann man dann auch das ursprüngliche, konkrete Problem lösen. Es ist

$$p_6(10) = \frac{1}{6^{10}} \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^{10} \approx 0.2718 ,$$

also eine recht geringe Wahrscheinlichkeit von wenig mehr als $\frac{1}{4}$.

Würde man nur siebenmal werfen, dann müsste man

$$p_6(7) = \frac{1}{6^7} \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^7 \approx 0,0540$$

rechnen und würde man genau sechsmal werfen, dann wäre

$$p_6(6) = \frac{1}{6^6} \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^6 \approx 0,0154$$

das Ergebnis. Bei 16 Würfen ist die Wahrscheinlickeit mit

$$p_6(16) = \frac{1}{6^{16}} \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^{16} \approx 0,6980$$

dann langsam angemessen hoch.

Wir wollen noch zwei wichtige Spezialfälle betrachten, die sich ganz einfach aus dem Beispiel folgern lassen.

1.4.3 **Satz 1.4.3** Seien $s, n \in \mathbb{N}$ mit $s < n$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^s = 0.$$

Beweis 1.4.3 Ist $s < n$, so gibt es keine s–Folge, die jedes Element enthält. Also ist $p_n(s) = 0$. □

1.4.4 **Satz 1.4.4** Es ist

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

Beweis 1.4.4 Wir betrachten Folgen der Länge n, deren einzelne Einträge aus n Elementen ausgewählt sind. In der bisherigen Diktion bedeutet das $n = s$. In diesem Fall ist aber eine Folge, die jedes Element (genau einmal) enthält, eine Permutation. Davon gibt es nun genau $n!$ (man vergleiche Satz 1.3.6). Also ist $n^n \cdot p_n(n) = n!$ und die Behauptung folgt. □

Eine letzte Anwendung des Inklusions-Exklusions-Prinzip gibt das folgende Beispiel. Es ist in einen klassischen Kontext eingebaut („Briefe vertauschen“) und führt auf den Begriff des *Derangements*.

Beispiel 1.4.5 Gegeben sind n (individuell geschriebene) Briefe und n passende (bereits adressierte) Briefumschläge. Auf wie viele Arten kann man es schaffen, jeden Brief in einen falschen Umschlag zu stecken? **1.4.5**

Die Briefe und Umschläge seien mit $\{1,\dots,n\}$ so bezeichnet, dass Brief i in Umschlag i gehört. Jedes Eintüten aller Briefe in alle Umschläge kann man nun als Permutation ansehen. Durch die Permutation π mit $\pi(i)=j$ soll der i–te Brief in den j–ten Umschlag gegeben werden. Entsprechend sind also alle Permutationen π abzuzählen, bei denen $\pi(i)\neq i$ für alle i ist („fixpunktfreie Permutationen“). Auch hier hilft es, Satz 1.4.1 anzuwenden.

Für $i=1,\dots,n$ sei A_i die Teilmenge von S_n (und in Bezug auf die Bezeichnung vergleiche man Satz 1.3.6), die aus allen Permutationen π mit $\pi(i)=i$ besteht. Also ist die gesuchte Anzahl

$$n! - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|.$$

Nach Satz 1.4.1 gilt

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Big(\sum_{1\le i_1\dots<i_k\le n} |A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|\Big),$$

wobei $|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|$ die Anzahl der Permutationen ist, die $i_1,\dots,i_k$ festlassen. Das ist nun aber genau $(n-k)!$, nämlich die Anzahl der Permutationen auf den restlichen Symbolen.

Es gibt $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen. Also folgt

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!},$$

und

$$n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

ist die gesuchte Zahl. □

Die Zahl, die wir gerade berechnet haben, nennt man *Derangement-Zahl*. Und wenn man den Begriff ganz ordentlich definiert, dann sieht es so aus:

1.4.6 **Definition 1.4.6** Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt *fixpunktfrei* oder *Derangement*, falls $\pi(i) \neq i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist.

Wir haben mit dieser Bezeichnung und durch das Beispiel den folgenden Satz bereits bewiesen.

1.4.7 **Satz 1.4.7** Die Anzahl der Derangements von n Objekten ist

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} .$$

Beweis 1.4.7 Wie bereits gesagt, der Beweis steckt in der Behandlung des Beispiels auf Seite 45. □

Für großes n ist $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ ungefähr e^{-1}. Also ist für großes n (und alles andere ist nicht wirklich interessant) die in Satz 1.4.7 gegebene Zahl ungefähr $n!/e$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Briefe falsch eingetütet werden, ungefähr $e^{-1} > 1/3$, was im Grunde überraschend hoch ist.

Wir wollen nun noch einige Variationen des Inklusions-Exklusions-Prinzips betrachten. Sie zeigen, dass eine gute Idee in der Mathematik in vielen unterschiedlichen Bereichen nützlich sein kann. Ohne Zweifel lohnt es sich häufig, Theorien auf ihren Anwendungsbereich und ihre Tragfähigkeit für andere (benachbarte oder auch entfernte) Gebiete zu prüfen.

Der folgende Satz 1.4.8 hilft dabei zu zählen, wie viele Elemente nicht in einer bestimmten Vereinigung von Teilmengen liegen. Genau wie in Satz 1.4.1 geht es dabei um geschicktes und einmaliges Berücksichtigen aller (wesentlichen) Elemente.

1.4.8 **Satz 1.4.8** Es sei X eine Menge und $A_1, \ldots, A_n$ seien Teilmengen von X. Für $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ setzen wir $A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$ und $A_\varnothing = X$. Dann ist

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

die Anzahl der Elemente von X, die in keiner der Mengen A_i für $i = 1, \ldots, n$ liegen.

Beweisidee 1.4.8 Im ersten Teil suchen wir uns ein Element x, das in keiner der Teilmengen A_i enthalten ist. Entsprechend ist x auch nicht in irgendeiner Schnittmenge enthalten, die nur durch die A_i bestimmt ist. Damit wird x in der Summe nur ein einziges Mal berücksichtigt, nämlich für die leere Menge als Teilmenge I von $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Im zweiten Teil wählen wir ein Element x, das in (mindestens) einer der Teilmengen A_i enthalten ist und weisen nach, dass es in der Summe überhaupt nicht berücksichtigt wird. Dazu zählt man es in jedem A_I, in dem es liegt, erst einmal mit und weist dann nach, dass die entstehende Summe gleich 0 ist. Dies ist etwas trickreich, zugegeben, vor allem wegen der unübersichtlichen, aber notwendigen Bezeichnungen der unterschiedlichen Teilmengen.

Beweis 1.4.8 Ist $x \in X$ und liegt x in keinem der A_i, so ist $x \in A_I$ für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ genau für $I = \varnothing$. Also ist der Beitrag zu der Summe

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

gerade 1, ein solches x wird also genau einmal gezählt.
Sei nun x so gewählt, dass es in (mindestens) einem der A_i enthalten ist, also $J = \{i \mid 1 \leq i \leq n,\, x \in A_i\} \neq \varnothing$. Dann ist $x \in A_I$ genau dann, wenn $I \subseteq J$ ist. Also ist der Beitrag von x zur Summe

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

genau

$$\sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^{|J|} \binom{|J|}{i} (-1)^i \underset{\text{Satz 1.3.15 (b)}}{=} 0 \,.$$

Damit zählt die obige Summe genau die x, die in keinem der A_i für ein $i = 1, \ldots, n$ liegen und jedes solche wird genau einmal gezählt. □

Dieses Ergebnis können wir sogar noch etwas verallgemeinern, was uns zum letzten Satz dieses Kapitels führt.

Satz 1.4.9 Seien $A_1, \ldots, A_n$ Teilmengen von X und $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Dann ist die Anzahl der $x \in X$, die in den A_i (mit $i \in I$), aber keinem weiteren A_j liegen, genau **1.4.9**

$$\sum_{I \subseteq J \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J \setminus I|} |A_J| \,.$$

Beweis 1.4.9 Sei $N = \{1, \ldots, n\}$. Wir führen eine neue Familie von Teilmengen ein, die durch $N \setminus I$ durchnummeriert werden und setzen

$$B_k = A_{I \cup \{k\}}, \quad k \in N \setminus I \; .$$

Wir müssen also genau die x zählen, die in A_I, aber in keinem der B_k liegen. Mit der Bezeichnung $B_K := A_{I \cup K}$, $K \subseteq N \setminus I$ und nach Satz 1.4.8 ist diese Anzahl genau

$$\sum_{K \subseteq N \setminus I} (-1)^{|K|} |B_K|$$

mit $B_\varnothing = A_I$.
Offenbar ist die Zuordnung von K zu $J = I \cup K$ eine bijektive Zuordnung zwischen den Teilmengen von $N \setminus I$ und den Teilmengen von N, die I enthalten. Also ist $B_K = A_J$ genau dann, wenn K und J in diesem Sinne zusammengehören. Dies ist genau die Behauptung. □

1.5 Übungsaufgaben

1) Zeigen Sie:
(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, .$$

(b) Ist n eine natürliche Zahl, so ist stets

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

eine ganze Zahl.
(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 \cdots + n)^2 \, .$$

2) Sieben Pilzsammler haben 100 Pilze gesammelt. Alle haben eine unterschiedliche Anzahl von Pilzen gefunden. Zeigen Sie, dass es drei Sammler gibt, die zusammen nicht weniger als 50 Pilze gefunden haben.

3) Beweisen Sie den Binomischen Lehrsatz 1.3.12 durch vollständige Induktion.

4) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ stets

$$2^n > n^3$$

gilt.

5) Wir betrachten die so genannte Fibonacci-Folge $(f_n), n \in \mathbb{N}$, mit $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

6) Sei (f_n) wie in 5) die Fibonacci-Folge. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{5} \cdot f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

7) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, gilt

$$(n-1)a^n + b^n \geq na^{n-1}b\,.$$

8) (a) Im Inneren eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 cm werden fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 willkürlich markiert. Sei d_{ij} der Abstand von P_i zu P_j. Zeigen Sie: Es gibt Punkte $P_i, P_j, i \neq j$, mit $d_{ij} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
(b) Auf einem 3×7 - Schachbrett werden die Felder im gewohnten „Schachbrettmuster“ mit den Farben schwarz und weiß markiert. Zeigen Sie: Es gibt ein $a \times b$ - Rechteck (mit $a > 1$ und $b > 1$) so, dass alle Ecken auf Feldern gleicher Farbe liegen.

9) Eine Münze wird n-mal geworfen. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zweimal nacheinander „Kopf“ fällt?

10) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ an, damit

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ eine ganze Zahl ist.

11) Seien $m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

12) Es seien $2n$ Punkte in der Ebene gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Es seien n Punkte rot und n Punkte blau markiert. Wir verbinden die n roten Punkte mit den n blauen Punkten. Zeigen Sie, dass es dabei stets eine Möglichkeit gibt, bei der sich die Geraden nicht schneiden.

13) Eine k-Zerlegung einer n-elementigen Menge ist eine Zerlegung dieser Menge in k paarweise disjunkte nicht leere Teilmengen. Sei $s_{n,k}$ die Anzahl der k-Zerlegungen einer n-Menge. Zeigen Sie, dass

$$s_{n+1,k} = s_{n,k-1} + k s_{n,k}$$

ist und berechnen Sie $s_{8,6}$.

14) Sei $x \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Anzahl der n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mit $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$ ist

$$\binom{x+n-1}{n-1}.$$

15) Berechnen Sie:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{j}.$$

16) Von 67 Schülerinnen und Schülern sprechen 47 Englisch und 35 Französisch, 23 sprechen beide Sprachen. Wie viele sprechen keine der beiden Sprachen? Es gibt außerdem 20 Schülerinnen bzw. Schüler, die Russisch können. Von diesen sprechen 12 auch Englisch, 11 Französisch und 5 alle drei Sprachen. Wie viele Schülerinnen und Schüler sprechen keine dieser Sprachen?

17) Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1000000 sind weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar?

18) Zwei Kartenspiele zu je 32 Karten werden simultan ausgeteilt (innerhalb eines Spiels aber jeweils eine Karte nach der anderen Karte). Wie groß

ist die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest einmal gleichzeitig die gleiche Karte ausgeteilt wird? Welches Ergebnis bekommt man, wenn die Kartenspiele nur 6 Karten enthalten?

19) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p_u(n)$ die Anzahl der Summen natürlicher Zahlen, die n ergeben und bei denen alle Summanden ungerade sind. Dabei kann eine Summe auch nur einen Summanden haben. Zum Beispiel gibt es für $n = 7$ die Möglichkeiten 7, $5 + 1 + 1$, $3 + 1 + 1 + 1 + 1$, $3 + 3 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Sei $p_v(n)$ die Anzahl der Summen, in denen alle Summanden verschieden sind. Zum Beispiel gibt es für $n = 7$ die Möglichkeiten 7, $6 + 1$, $4 + 2 + 1$, $5 + 2$, $4 + 3$. Stellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang von $p_u(n)$ und $p_v(n)$ auf und beweisen Sie diese.

20) Man schreibe 1 und subtrahiere 1, multipliziere das Ergebnis mit 2 und addiere 1, multipliziere mit 3 und subtrahiere 1, multipliziere mit 4 und addiere 1. Schließlich: Man multipliziere mit n und addiere $(-1)^n$. Geben Sie eine Formel für die Zahl an, die man so erhält.

http://www.springer.com/978-3-642-17181-9

Endliche Strukturen
Reiss, K.; Stroth, G.
2011, X, 325 S. 65 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-17181-9