Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

darf ein Vorwort mit einer mathematischen Fragestellung anfangen? Warum nicht, wenn man genau so am besten erklären kann, worum es in einem Buch geht. Hier ist die Frage: „Seien a_1, a_2, a_3 drei Punkte in der Ebene. Wie viele Wege mit Anfangspunkt a_1 gibt es, bei denen jeder der anderen Punkte genau einmal vorkommt?“ Es ist nicht besonders schwierig, eine Antwort zu geben. Einerseits existiert auf jeden Fall eine Lösung, denn (a_1, a_2, a_3) ist ein solcher Weg, andererseits gibt es nur noch (a_1, a_3, a_2) als weiteren Weg, sodass man genau zwei Lösungen bekommt. Auch bei vier in der Ebene gegebenen Punkten a_1, a_2, a_3, a_4 kann man unschwer alle Möglichkeiten aufschreiben. Wir bekommen mit etwas Systematik (a_1, a_2, a_3, a_4), (a_1, a_2, a_4, a_3), (a_1, a_3, a_2, a_4), (a_1, a_3, a_4, a_2), (a_1, a_4, a_2, a_3) und (a_1, a_4, a_3, a_2), also sechs mögliche Wege. Wie sieht es aber bei 15, 16 oder 17 Punkten aus? Hier alle Möglichkeiten aufzuschreiben ist mühsam und fehleranfällig. Außerdem kann es nicht wirklich sinnvoll sein, jeden Einzelfall separat zu betrachten. Ist es nicht viel einfacher, sich zu überlegen, dass man für n Punkte genau $(n-1)!$ verschiedene Wege finden kann? Das ist eine der Fragen, um die es in diesem Buch gehen soll. Existieren gewisse Strukturen überhaupt? Wie viele sind es gegebenenfalls? Im Beispiel überlegt man sich darüber hinaus, dass die Punkte ja irgendwie in der Ebene verteilt liegen. Vielleicht suchen wir gar nicht alle Wege, sondern beispielsweise die von kürzester Länge. Solche gibt es sicherlich, da es ja insgesamt nur endlich viele Wege gibt. Nun ist es vermutlich nicht wirklich sinnvoll, erst alle Wege aufzuschreiben und dann die kürzesten auszuwählen. Auch hier suchen wir also eine *gute* Methode. Dies ist der zweite Typ von Fragen, mit denen wir uns in diesem Buch beschäftigen werden, und bei dem es um die Konstruktion gewisser Strukturen geht.

Wir betrachten also mathematische Modelle, mit deren Hilfe man Fragen zur Existenz von Strukturen beantworten kann oder die eine Konstruktion gewisser Konfigurationen dieser (oder auch anderer) Art effektiv und schnell unterstützen. Wir werden aber auch erkennen, dass sich nicht jedes Problem zu einer guten Lösung zwingen lässt. Manchmal weiß man, dass effektive Lösungen prinzipiell unmöglich sind, manchmal kennt man keine sinnvolle Theorie, die eine solche Lösung ermöglicht. Das eingangs beschriebene Problem der kürzesten Rundreisen gehört (leider) dazu.

Bei der Betrachtung der entsprechenden mathematischen Modelle gibt es in diesem Buch eine Beschränkung, nämlich die auf *endliche* Strukturen. In ganz unterschiedlichen mathematischen Gebieten sollen Probleme untersucht werden, die sich auf eine endliche Anzahl von Elementen beziehen. Dabei sind es verschiedene Aspekte, die im Vordergrund stehen können. So geht es oft darum, zunächst einmal die *Existenz* von gewissen Konfigurationen zu klären, und damit um die prinzipielle Möglichkeit, ein (endliches) Problem überhaupt zu lösen. Darüber hinaus ist in der Regel von Interesse, *alle* Lösungen einer Fragestellung zu kennen und zu sehen, ob sie Prinzipien folgen und wenn ja, welchen. Vielleicht gibt es dann sogar eine Lösung, die optimal ist – nach welchen Kriterien das im Einzelfall auch zu beurteilen ist.

Mit den eben genannten Aspekten haben wir die wesentlichen Ideen angerissen, mit denen wir uns in fünf Kapiteln und in unterschiedlichen mathematischen Gebieten beschäftigen werden. Im ersten Kapitel geht es um Grundlagen mathematischen Arbeitens (und das nicht nur im Hinblick auf endliche Fragestellungen). Wir erinnern an Beweismethoden und geben einen Überblick über Techniken des Zählens. Die Begriffe aus diesem Kapitel und die hier eingeführten Arbeitsweisen und mathematischen Prinzipien werden im ganzen Buch benötigt. Das zweite Kapitel thematisiert mit Gruppen, Ringen und Körpern grundlegende algebraische Strukturen. Besondere Bedeutung haben die Polynomringe, die in diesem Kapitel eingeführt werden und die im Rahmen der Codierungstheorie eine Anwendung finden. Der Begriff der Gruppe und damit die Modellierung von *Symmetrie* spielt dann im dritten Kapitel die zentrale Rolle. Grundlagen der Gruppentheorie werden dabei anhand geeigneter Probleme entwickelt. Ein wichtiges Ziel des Kapitels (natürlich neben der Bereitstellung von Grundlagen) ist es, einen Einblick in die Galoistheorie zu geben. Diese Theorie erlaubt es, Aussagen über die (endlich vielen) Nullstellen von Polynomen zu machen und kann als ein Zusammenspiel von Wissen über Gruppen, Körper und Polynomringe angesehen werden. Das zweite und dritte Kapitel umfassen übrigens Inhalte, die als zentral für die Lehramtsausbildung (und damit auch für schriftliche Prüfungen) angesehen werden können. Die Darstellung der Anwendung der Galoistheorie auf Polynomgleichungen ist eine verkürzte Version derjenigen in dem neuen Buch des zweiten Autors „Elementare Algebra und Zahlentheorie“, das 2011 im Birkhäuser Verlag erscheinen wird. Dem Birkhäuser Verlag sei Dank für die Genehmigung, dies im vorliegenden Buch verwenden zu dürfen. Das vierte Kapitel behandelt Grundlagen der Codierungstheorie und zeigt einfache Methoden der Übertragung von Nachrichten auf. Endliche Körper und Polynomringe (und damit die Inhalte des zweiten Kapitels) bilden hier den Ausgangspunkt der Modellierungen. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich schließlich mit der Tourenplanung,

also mit einem Optimierungsproblem. In diesem Fall werden wir Graphen als Objekte der Modellierung nutzen und (wieder am Problem) eine geeignete Theorie zu Möglichkeiten der Optimierung von Touren entwickeln. Man wird hier sehen, dass es nicht immer wirklich schlagkräftige Methoden gibt, um ein Problem zu lösen, sodass ein einfaches Abzählen in diesem Fall nicht unbedingt schlechter als die mathematische Theorie ist.
Mit diesem Buch verbinden wir ein Anliegen, das wir hier noch einmal zusammenfassen möchten. Wir wollen am Beispiel endlicher Strukturen aufzeigen, wie Teilgebiete der Mathematik, etwa die Graphentheorie und die nicht gerade als angewandt bekannte Algebra, eingesetzt werden können, um konkrete Fragestellungen wie zum Beispiel das Abzählen von Mustern, die Codierung von Nachrichten oder das Aufstellen von Tourenplänen zu bearbeiten. Wir wollen dabei nicht nur die Anwendung darstellen, sondern auch die Theorie am konkreten Problem entwickeln. Insofern ist das Buch in sich abgeschlossen. Es geht allerdings nicht darum, die besten Algorithmen oder den neusten Stand der Forschung darzustellen. Vielmehr steht die Mathematik im Vordergrund, die sich ganz allgemein in den Problemen verbirgt. Diese müsste wiederum im konkreten Anwendungsproblem weiterentwickelt und optimiert werden. Das ist dann eine andere Herausforderung, der wir uns hier nicht stellen können und wollen.

Verschiedene Teile des Buches kann man durchaus unabhängig voneinander lesen. So baut das letzte Kapitel im Wesentlichen nicht auf den Inhalten der Kapitel 2, 3 und 4 auf. Genauso benötigt Kapitel 4 nicht Kapitel 3 als Voraussetzung und nur wenige Resultate aus Kapitel 2. Solange man nicht an dem Ausblick in die Galoistheorie in Kapitel 3 interessiert ist, ist auch dieses Kapitel unabhängig vom Rest zu erarbeiten. Jedes einzelne Kapitel könnte man in einer zweistündigen Vorlesung oder einem Proseminar behandeln.

Das Buch basiert auf Vorlesungen für Schülerinnen und Schüler, die zunächst an der Freien Universität Berlin und später an der Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg gehalten wurden. Hier wurden sie dann auch für Studierende weiterentwickelt. Der mathematische Stoff ist nicht neu und findet sich so oder ähnlich in vielen Lehrbüchern. Insbesondere das zweite und dritte Kapitel lehnt sich an das Buch des zweiten Autors [14] an. Genaue Referenzen sind bei einem Stoff, der sich über viele Jahre angesammelt hat, häufig nicht mehr möglich. Kollegen, die uns irgendwann einen trickreichen Beweis oder eine besonders schöne Übungsaufgabe mitgeteilt haben, sich aber hier nicht zitiert finden, bitten wir um Entschuldigung. Wir wären dann für eine kurze Mitteilung dankbar, damit wir das in einer späteren Auflage nachholen können.

Kein Buch und schon gar kein Mathematikbuch entsteht ohne die Beteiligung von netten, kompetenten Menschen, die in der einen oder anderen Form vorläufige Texte lesen und kommentieren. Das gilt natürlich auch für dieses Buch. Wir bedanken uns daher ganz herzlich bei unseren Studentinnen und Studenten in Halle und München, die uns in Seminaren und Vorlesungen auf Unstimmigkeiten, Fehler und schlecht lesbare Passagen aufmerksam gemacht haben.
Fachlich und stilistisch Korrektur gelesen haben Barbara Haußmann (Augsburg), Elisabeth Lorenz (München) und Juniorprofesssorin Rebecca Waldecker (Halle), wofür wir ebenfalls vielen Dank sagen. Die Umsetzung des Manuskripts in den Stil dieser Buchreihe des Springer-Verlags wurde von Karin Helbich mit viel Sorgfalt und Sachverstand durchgeführt. Auch dafür sind wir sehr dankbar. Schließlich sei dem Stadtvermessungsamt der Stadt Halle für die Erlaubnis gedankt, einen Ausschnitt des Stadtplans von Halle in das Buch aufnehmen zu dürfen.

Die vielen kleineren und größeren Fehler, die der Text nun noch enthalten könnte, nehmen Sie bitte als Herausforderung. Wir freuen uns über jede Rückmeldung, wünschen Ihnen aber zunächst viel Spaß bei der Auseinandersetzung mit den *Endlichen Strukturen*.

Halle und München im August 2010

Kristina Reiss und Gernot Stroth

http://www.springer.com/978-3-642-17181-9

Endliche Strukturen
Reiss, K.; Stroth, G.
2011, X, 325 S. 65 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-17181-9