

Kapitel 6

Finite-Differenzen-Methode

Das Ziel der Finite-Differenzen-Methode ist, die grundlegenden Differentialgleichungen der Strömungsmechanik in lösbar algebraische Gleichungen umzuwandeln. Dabei müssen die Differentiale dieser Gleichungen durch geeignete Differenzenausdrücke ersetzt werden (Robertson und Crowe 1995).

6.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Grundlage für die Überführung der Differentiale in finite Differenzen bildet die Taylor-Reihe, mit der z. B. ein gesuchter Funktionswert $y(x_{i+1})$ durch den benachbarten Wert $y(x_i)$ ausgedrückt werden kann (vgl. Abb. 6.1):

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{\partial(x_i)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2(x_i)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3(x_i)}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (6.1)$$

Mit der Näherung, dass von der Taylor-Reihe nur die ersten zwei Glieder berücksichtigt werden, findet man schließlich für das Differential

$$\frac{\partial(x_i)}{\partial x} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x}. \quad (6.2)$$

Schreibt man vereinfachend für $y(x_i) = y_i$ und für $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$, so ergibt sich aus Gl. (6.2)

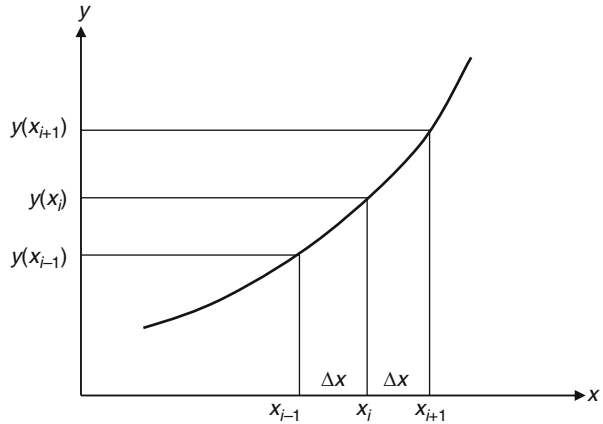
$$\frac{\partial(x_i)}{\partial x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (6.3)$$

und man erhält damit eine Genauigkeit 1. Ordnung. Das bedeutet, dass näherungsweise der Funktionsverlauf zwischen x_i und x_{i+1} durch eine Gerade ersetzt wird.

Analog folgt aus der Entwicklung der Taylor-Reihe in die negative Richtung

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{\partial(x_i)}{\partial x} \cdot \Delta x + \dots \quad (6.4)$$

Abb. 6.1 Änderung der Funktion $y(x)$



für das Differential

$$\frac{\partial(x_i)}{\partial x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}. \quad (6.5)$$

Man bezeichnet die Differenz nach Gl. (6.3) als Vorwärts-Differenz und die Differenz nach Gl. (6.5) als Rückwärts-Differenz. Sie besitzen beide die gleiche Genauigkeit.

Die Vorwärts-Differenz führt allerdings zu einer expliziten Lösungsmethode, während man mit der Rückwärts-Differenz immer eine implizite Lösungsmethode erhält, wie im Folgenden gezeigt wird:

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

mit der Randbedingung $y = y_0$ bei $x = x_0$.

Aus der Vorwärts-Differenz folgt

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i) \quad (6.6)$$

bzw.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i). \quad (6.7)$$

Der Wert y_{i+1} kann also direkt aus x_i und y_i berechnet werden. Die numerische Lösung kann somit mit den Anfangswerten x_0 und y_0 starten und über den gesamten Bereich der x -Werte fortschreiten, bis der gesamte Bereich von x erfasst ist.

Aus der Rückwärts-Differenz folgt dagegen

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = f(x_i, y_i) \quad (6.8)$$

bzw.

$$y_i - \Delta x \cdot f(x_i, y_i) = y_{i-1}. \quad (6.9)$$

Der Wert y_{i-1} ist dabei entweder aus der Randbedingung oder aus dem vorangegangenen Schritt bekannt. Der gesuchte Wert y_i ist dagegen nur implizit vorhanden.

Aus den Darlegungen ist daher zu vermuten, dass das explizite Rechenschema einfacher ist. Große Schrittweiten Δx führen bei diesem Schema aber schnell zu Instabilitäten und zu Schwingungen der Ergebnisse. Kleinere Schrittweiten führen dagegen zur Stabilität und zu genaueren Ergebnissen, erfordern jedoch längere Rechenzeiten.

Die Genauigkeit der numerischen Lösung kann erheblich durch Zentral-Differenzen verbessert werden, die ebenfalls durch Taylor-Reihen-Entwicklungen für y_{i+1} und y_{i-1} hergeleitet werden können:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 y_i}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots \quad (6.10)$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{\partial^3 y_i}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{4!} - \dots \quad (6.11)$$

Die Subtraktion dieser beiden Gleichungen und die Berücksichtigung von drei Gliedern der jeweiligen Taylor-Reihe führen zu

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2 \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x} \cdot \Delta x \quad (6.12)$$

bzw.

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}. \quad (6.13)$$

Die Zentral-Differenz könnte damit auch mit einer Parabel durch die Punkte y_{i-1} , y_i und y_{i+1} bestimmt werden, deren Neigung im Punkt i ermittelt wird. Mit diesem Differenzenausdruck wird eine Genauigkeit 2. Ordnung erzielt, wenn die Schrittweite Δx im gesamten x -Bereich konstant ist.

6.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Die Taylor-Reihe kann auch zur Bestimmung von Ableitungen höherer Ordnung herangezogen werden. Um eine zweite Ableitung durch finite Differenzen auszudrücken, sind mindestens drei Punkte einer Funktion erforderlich. Ein Zusammenhang für drei Punkte lässt sich z. B. durch die Addition von Gl. (6.10) und (6.11) finden. Man erhält

$$y_{i+1} + y_{i-1} - 2 \cdot y_i = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} \cdot \Delta x^2 + \dots, \quad (6.14)$$

Numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik
Grundlagen und Methoden

Martin, H.

2011, XII, 183 S. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-642-17207-6