

Teil I

Kohomologie der endlichen Gruppen

§ 1. G -Moduln

Die Kohomologie der endlichen Gruppen befasst sich mit einer allgemeinen Situation, die wir in den verschiedensten konkreten Formen immer wieder antreffen. Ist zum Beispiel $L|K$ eine endliche galoissche Körpererweiterung und G ihre Galoisgruppe, so operiert G auf der multiplikativen Gruppe L^\times des Oberkörpers L . Handelt es sich speziell um eine Erweiterung endlicher algebraischer Zahlkörper, so operiert G auf der Idealgruppe J des Oberkörpers L . Der Gruppenerweiterungstheorie entnehmen wir das folgende Beispiel: Ist G eine abstrakte endliche Gruppe und A ein abelscher Normalteiler, so operiert G auf A durch Konjugiertenbildung. In der Darstellungstheorie haben wir es mit Matrizen Gruppen G zu tun, die auf einem Vektorraum operieren. Allen diesen Fällen gemeinsam liegt der Begriff des G -Moduls zugrunde. Über ihn haben wir zunächst einige allgemeine Betrachtungen anzustellen, die zum Teil aus der Theorie der Moduln über beliebigen Ringen wohlvertraut sind.

Während unserer gesamten Ausführungen bedeutet G eine endliche multiplikative Gruppe, deren Einselement mit 1 bezeichnet wird.

(1.1) Definition. Ein **G -Modul** A ist eine abelsche (additive) Gruppe A , auf der die Gruppe G operiert, derart dass für $\sigma, \tau \in G$ und $a, b \in A$ gilt

- 1) $1a = a$,
- 2) $\sigma(a + b) = \sigma a + \sigma b$,
- 3) $(\sigma\tau)a = \sigma(\tau a)$.

Wiewohl wir es in den Anwendungen meistens mit multiplikativen G -Moduln A zu tun haben, ziehen wir in diesem Teil aus formalen Gründen die additive Schreibweise vor.

Der Begriff des G -Moduls ordnet sich dem üblichen Modulbegriff unter, wenn wir von der Gruppe G zum **Gruppenring** $\mathbb{Z}[G]$ übergehen. Dieser besteht aus allen formalen Summen

$$\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $n_\sigma \in \mathbb{Z}$. Mit anderen Worten:

$\mathbb{Z}[G]$ ist die freie abelsche (additive) Gruppe, die aus den Elementen von G gebildet ist:

$$\mathbb{Z}[G] = \left\{ \sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma \mid n_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Da man die Summen $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma$ miteinander multiplizieren kann, ist $\mathbb{Z}[G]$ ein Ring. Einen G -Modul A können wir hiernach direkt als einen Modul über

dem Ring $\mathbb{Z}[G]$ auffassen, indem wir die Operation von $\mathbb{Z}[G]$ auf A durch

$$\left(\sum_{\sigma \in G} n_{\sigma} \sigma\right)a = \sum_{\sigma \in G} n_{\sigma}(\sigma a), \quad a \in A,$$

festlegen. Natürlich ist $\mathbb{Z}[G]$ als additive Gruppe selbst ein G -Modul; er wird in unseren Betrachtungen eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Im Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ sind zwei Ideale ausgezeichnet:

$$I_G = \left\{ \sum_{\sigma \in G} n_{\sigma} \sigma \mid \sum_{\sigma \in G} n_{\sigma} = 0 \right\} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} \cdot N_G = \left\{ n \cdot \sum_{\sigma \in G} \sigma \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

I_G heißt das **Augmentationsideal** von $\mathbb{Z}[G]$. Es ist der Kern des Homomorphismus

$$\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \varepsilon\left(\sum_{\sigma \in G} n_{\sigma} \sigma\right) = \sum_{\sigma \in G} n_{\sigma},$$

der auch als **Augmentation** von $\mathbb{Z}[G]$ bezeichnet wird.

Das Element $N_G = \sum_{\sigma \in G} \sigma \in \mathbb{Z}[G]$ heißt die **Norm** (oder auch **Spur**) von $\mathbb{Z}[G]$. Für jedes $\tau \in G$ gilt $\tau N_G = \sum_{\sigma \in G} \tau \sigma = N_G$, und dies bedeutet, dass $\mathbb{Z} \cdot N_G$ ein Ideal von $\mathbb{Z}[G]$ ist. Die Abbildung

$$\mu : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \quad \text{mit} \quad \mu(n) = n \cdot N_G$$

heißt die **Koaugmentation** von $\mathbb{Z}[G]$. Wir setzen $J_G = \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z} \cdot N_G$. Wir erhalten mit diesen Bezeichnungen die **exakten Sequenzen**¹⁾

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow J_G \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

von Ringen und Ringhomomorphismen. Betrachten wir diese Ringe nur als additive Gruppen, so sehen wir sofort, dass es sich um lauter freie abelsche Gruppen handelt, und dass I_G und J_G als direkte Summanden von $\mathbb{Z}[G]$ auftreten:

(1.2) Satz. I_G ist die freie durch die Elemente $\sigma - 1$, $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, erzeugte und J_G die freie durch die Elemente $\sigma \bmod \mathbb{Z} \cdot N_G$, $\sigma \neq 1$, erzeugte abelsche Gruppe. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[G] &= I_G \oplus \mathbb{Z} \cdot 1 \cong I_G \oplus \mathbb{Z}, \\ \mathbb{Z}[G] &= \left(\bigoplus_{\sigma \neq 1} \mathbb{Z} \sigma\right) \oplus \mathbb{Z} \cdot N_G \cong J_G \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

¹⁾ Eine Sequenz $\cdots \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow \cdots$ von Gruppen, Moduln oder Ringen und Homomorphismen i, j, \dots heißt exakt, wenn das Bild der vorhergehenden Abbildung gleich dem Kern der nachfolgenden ist. Insbesondere haben wir es häufig mit den kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ zu tun. Sie besagen, dass wir einen surjektiven Homomorphismus j von B auf C mit dem Kern $iA \cong A$ vor uns haben.

Beweis. Ist $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma \in I_G$, so ist $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma = 0$, also $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G} n_\sigma (\sigma - 1)$, und wenn $\sum_{\sigma \in G, \sigma \neq 1} n_\sigma (\sigma - 1) = 0$, so ist $n_\sigma = 0$ für alle $\sigma \in G, \sigma \neq 1$.

Da jedes Element $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[G]$ die Darstellung

$$\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in G} n_\sigma (\sigma - 1) + \left(\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \right) \cdot 1$$

besitzt, haben wir die offenbar direkte Zerlegung $\mathbb{Z}[G] = I_G \oplus \mathbb{Z} \cdot 1$. Ist andererseits $\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma \bmod \mathbb{Z} \cdot N_G \in J_G$, so können wir schreiben

$$\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \neq 1} (n_\sigma - n_1) \sigma + n_1 \cdot \sum_{\sigma \in G} \sigma \equiv \sum_{\sigma \neq 1} (n_\sigma - n_1) \sigma \bmod \mathbb{Z} \cdot N_G,$$

und aus $\sum_{\sigma \neq 1} n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z} \cdot N_G$ folgt offenbar $n_\sigma = 0$ für alle $\sigma \neq 1$.

Daher ist J_G die freie durch die Elemente $\sigma \bmod \mathbb{Z} \cdot N_G, \sigma \neq 1$, erzeugte abelsche Gruppe. Wegen der eindeutigen Darstellung

$$\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \neq 1} (n_\sigma - n_1) \sigma + n_1 \cdot N_G$$

haben wir gleichzeitig die direkte Zerlegung $\mathbb{Z}[G] = (\bigoplus_{\sigma \neq 1} \mathbb{Z} \sigma) \oplus \mathbb{Z} \cdot N_G$.

Die Ideale I_G und $\mathbb{Z} \cdot N_G$ von $\mathbb{Z}[G]$ stehen sich in dem folgenden Sinne dual gegenüber.

(1.3) Satz. $I_G = \text{Ann } \mathbb{Z} \cdot N_G$ und $\mathbb{Z} \cdot N_G = \text{Ann } I_G$.

Beweis. Es ist $(\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma) \cdot N_G = \sum_{\sigma \in G} n_\sigma (\sigma \cdot N_G) = \sum_{\sigma \in G} n_\sigma N_G = (\sum_{\sigma \in G} n_\sigma) \cdot N_G = 0 \iff \sum_{\sigma \in G} n_\sigma = 0$. Also ist $\text{Ann } \mathbb{Z} \cdot N_G = I_G$. Andererseits wird I_G nach (1.2) durch die Elemente $\sigma - 1, \sigma \in G$, erzeugt. Daher ist $\sum_{\tau \in G} n_\tau \tau \in \text{Ann } I_G \iff (\sum_{\tau \in G} n_\tau \tau)(\sigma - 1) = 0$ für alle $\sigma \in G \iff \sum_{\tau \in G} n_\tau \tau \sigma = \sum_{\tau \in G} n_\tau \tau$ für alle $\sigma \in G \iff n_\tau = n_1$ für alle $\tau \in G \iff \sum_{\tau \in G} n_\tau \tau = n_1 \cdot N_G \in \mathbb{Z} \cdot N_G$. Daher ist $\mathbb{Z} \cdot N_G = \text{Ann } I_G$.

Nach diesen Bemerkungen über den Gruppenring wenden wir uns den allgemeinen G -Moduln wieder zu. Ist A ein G -Modul, so sind in ihm unmittelbar vier Untermoduln ausgezeichnet. Es sind dies die Moduln

$$\begin{aligned} A^G &= \{a \in A \mid \sigma a = a \text{ für alle } \sigma \in G\}, \text{ die } \mathbf{Fixgruppe} \text{ von } A, \\ N_G A &= \{N_G a = \sum_{\sigma \in G} \sigma a \mid a \in A\}, \text{ die } \mathbf{Normengruppe} \text{ von } A^2), \end{aligned}$$

²⁾ Für die Elemente $\sum_{\sigma \in G} \sigma a$ scheint eher die Bezeichnung **Spur** angebracht zu sein. Im Hinblick auf die späteren Anwendungen, in denen wir es hauptsächlich mit multiplikativen G -Moduln zu tun haben, entscheiden wir uns jedoch schon hier für die Bezeichnung **Norm**.

$$N_G A = \{a \in A \mid N_G a = 0\},$$

$$I_G A = \{\sum_{\sigma \in G} n_{\sigma}(\sigma a_{\sigma} - a_{\sigma}) \mid a_{\sigma} \in A\}.$$

Da I_G der durch die Elemente $\sigma - 1$, $\sigma \in G$, erzeugte Modul ist, ist offenbar $A^G = \{a \in A \mid I_G a = 0\}$. $I_G A$ hingegen ist der durch alle Elemente $\sigma a - a$, $a \in A$, $\sigma \in G$, erzeugte Modul. Dem Satz (1.3) entnehmen wir die Inklusionen

$$N_G A \subseteq A^G \quad \text{und} \quad I_G A \subseteq N_G A,$$

und wir können die Faktorgruppen

$$A^G/N_G A \quad \text{und} \quad N_G A/I_G A$$

bilden. Sie werden sich später als die Kohomologiegruppen der Dimensionen 0 und -1 des G -Moduls A erweisen.

Ist A ein G -Modul und g eine Untergruppe von G , so ist A natürlich auch ein g -Modul. Ist insbesondere g invariant in G , so ist der Fixmodul A^g offenbar ein G/g -Modul.

Im folgenden haben wir uns mit den wichtigsten funktoriellen Verhaltensweisen der G -Moduln zu beschäftigen.

Sind A und B zwei G -Moduln, so heißt ein Homomorphismus

$$f : A \longrightarrow B$$

ein **G -Homomorphismus**, wenn $f(\sigma a) = \sigma f(a)$ für alle $\sigma \in G$ gilt. Oftmals kommt es vor, dass wir einen G -Modul A einfach nur als abelsche Gruppe betrachten. Wir sprechen dann von **\mathbb{Z} -Moduln** und **\mathbb{Z} -Homomorphismen** im Unterschied zu den G -Moduln und G -Homomorphismen.

Je zwei G -Moduln A und B ist ein dritter zugeordnet, nämlich der Modul

$$\text{Hom}(A, B)$$

aller \mathbb{Z} -Homomorphismen $f : A \rightarrow B$, auf dem die Elemente $\sigma \in G$ in der folgenden Weise operieren:

$$\sigma(f) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}, \quad \text{also} \quad \sigma(f)(a) = \sigma f(\sigma^{-1}a), \quad a \in A.$$

Die Gruppe $\text{Hom}_G(A, B)$ aller G -Homomorphismen von A in B ist eine Untergruppe von $\text{Hom}(A, B)$; offenbar ist sie der Fixmodul des G -Moduls $\text{Hom}(A, B)$:

$$\text{Hom}_G(A, B) = \text{Hom}(A, B)^G.$$

Neben $\text{Hom}(A, B)$ haben wir einen weiteren G -Modul in dem **Tensorprodukt**

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Dieses besteht grob gesagt aus allen formalen Produktsummen $\sum_i a_i \cdot b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$. Um genau zu sein, haben wir die folgende Definition einzuführen:

(1.4) Definition. Sind A, B zwei abelsche Gruppen (\mathbb{Z} -Moduln), so sei F die freie, durch alle Paare (a, b) , $a \in A$, $b \in B$, erzeugte abelsche Gruppe. In ihr sei R die durch die Elemente der Form

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b) \text{ und } (a, b + b') - (a, b) - (a, b')$$

erzeugte Untergruppe. Dann ist die Faktorgruppe

$$F/R = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$$

das **Tensorprodukt** von A und B über \mathbb{Z} .

Da wir ausschließlich Tensorprodukte über dem Ring \mathbb{Z} betrachten, schreiben wir kurz $A \otimes B$ statt $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. Mit $a \otimes b$ bezeichnen wir die Klasse

$$a \otimes b = (a, b) + R \in A \otimes B.$$

$A \otimes B$ besteht definitionsgemäß aus allen Elementen

$$\sum_i a_i \otimes b_i, \quad a_i \in A, \quad b_i \in B,$$

wird also durch die Elemente $a \otimes b$ erzeugt.

Ist speziell $A = \mathbb{Z}$, so werden wir häufig $\mathbb{Z} \otimes B$ und B als nicht verschieden ansehen, indem wir $n \otimes b$ und $n \cdot b$, $n \in \mathbb{Z}$, $b \in B$, miteinander identifizieren³⁾.

Sind A, B zwei abelsche Gruppen, so werden wir die Gruppen $A \otimes B$ und $B \otimes A$ durch den Isomorphismus

$$f : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A \quad \text{mit} \quad f(a \otimes b) = b \otimes a$$

miteinander identifizieren. Ebenso werden wir, wenn A, B, C drei abelsche Gruppen sind, die Gruppen $(A \otimes B) \otimes C$ und $A \otimes (B \otimes C)$ vermöge des Isomorphismus

$$f : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C) \quad \text{mit} \quad f((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c)$$

als gleich ansehen.

Sind A, B zwei G -Moduln, so wird $A \otimes B$ durch die Festlegung

$$\sigma(a \otimes b) = \sigma a \otimes \sigma b, \quad a \in A, \quad b \in B; \quad \sigma \in G, \quad ^4)$$

³⁾ Von diesem Fall ausgehend kann man sich die Bildung des allgemeinen Tensorproduktes $A \otimes B$ als eine formale Änderung des natürlichen Multiplikatorenbereiches \mathbb{Z} von B zu A vorstellen. So kann man z.B. jede abelsche Gruppe B zu einem \mathbb{Q} -Vektorraum erweitern, indem man von B zu $\mathbb{Q} \otimes B$ übergeht. Dieser Übergang bedeutet gerade die formale Erweiterung des Multiplikatorenbereiches \mathbb{Z} zu \mathbb{Q} , und die Multiplikation von $b \in B$ mit einer rationalen Zahl $r \in \mathbb{Q}$ erfolgt einfach durch die Bildung von $r \otimes b \in \mathbb{Q} \otimes B$.

⁴⁾ Da die Produkte $a \otimes b$ den Modul $A \otimes B$ erzeugen, erhalten wir hieraus die Operation von σ auf dem ganzen Modul durch lineare Fortsetzung.

zu einem G -Modul. Es ist i.a. falsch, dass $A^G \otimes B^G$ der Fixmodul von $A \otimes B$ ist. Man muss sich sogar davor hüten, $A^G \otimes B^G$ als Untermodul von $A \otimes B$ anzusehen. Wir haben nur den kanonischen (i.a. weder injektiven noch surjektiven) Homomorphismus

$$A^G \otimes B^G \longrightarrow (A \otimes B)^G.$$

Eine mühelos zu verifizierende Tatsache ist die Additivität der Funktoren Hom_G und \otimes :

(1.5) Satz. *Ist $\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ eine Familie von G -Moduln und X ein weiterer G -Modul, so ist in kanonischer Weise⁵⁾*

$$X \otimes \left(\bigoplus_{\iota} A_{\iota} \right) \cong \bigoplus_{\iota} (X \otimes A_{\iota}),$$

$$\text{Hom}_G\left(\bigoplus_{\iota} A_{\iota}, X\right) \cong \prod_{\iota} \text{Hom}_G(A_{\iota}, X), \quad \text{Hom}_G\left(X, \prod_{\iota} A_{\iota}\right) \cong \prod_{\iota} \text{Hom}_G(X, A_{\iota}).$$

Ist X überdies als abelsche Gruppe endlich erzeugt, so gilt

$$X \otimes \left(\prod_{\iota} A_{\iota} \right) \cong \prod_{\iota} (X \otimes A_{\iota}), \quad \text{Hom}_G\left(X, \bigoplus_{\iota} A_{\iota}\right) \cong \bigoplus_{\iota} \text{Hom}_G(X, A_{\iota}).$$

Sei A, B ein Paar von G -Moduln und

$$A \xrightarrow{h} A'$$

ein G -Homomorphismus. Dieser induziert einen G -Homomorphismus

$$\text{Hom}(A, B) \longleftarrow \text{Hom}(A', B)$$

in umgekehrter Richtung durch die Hintereinanderschaltung $f \mapsto f \circ h$ ($f \in \text{Hom}(A', B)$), und einen G -Homomorphismus

$$A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B$$

durch die Zuordnung $a \otimes b \mapsto h(a) \otimes b$. Betrachten wir andererseits einen G -Homomorphismus

$$B \xrightarrow{g} B',$$

so erhalten wir in analoger Weise G -Homomorphismen

$$\text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(A, B')$$

und

$$A \otimes B \longrightarrow A \otimes B'.$$

⁵⁾ Mit dem Zeichen \bigoplus ist die **direkte Summe** gemeint, d.h. die Gruppe der Familien $(\dots, a_{\iota}, \dots)$, bei denen nur endlich viele von 0 verschiedene Komponenten a_{ι} auftreten. Dagegen bedeutet \prod das **direkte Produkt**, d.h. die Gruppe aller Familien $(\dots, a_{\iota}, \dots)$.

Wegen dieses Verhaltens nennt man Hom auch einen im ersten Argument kontra-, im zweiten Argument kovarianten Funktor und \otimes einen in beiden Argumenten kovarianten Funktor.

Haben wir gleichzeitig zwei G -Homomorphismen

$$A' \xrightarrow{h} A \quad \text{und} \quad B \xrightarrow{g} B',$$

so erhalten wir durch die Zuordnung $f \mapsto g \circ f \circ h$ ($f \in \text{Hom}(A, B)$) einen G -Homomorphismus

$$(h, g) : \text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(A', B'),$$

und für zwei G -Homomorphismen

$$A \xrightarrow{h} A' \quad \text{und} \quad B \xrightarrow{g} B'$$

den G -Homomorphismus

$$h \otimes g : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B',$$

der durch $h \otimes g(a \otimes b) = h(a) \otimes g(b)$ festgelegt ist.

Eine im folgenden wichtige Rolle spielen die G -freien G -Moduln. Ein G -Modul A heißt **G -frei**, oder auch **$\mathbb{Z}[G]$ -frei**, wenn er die direkte Summe von zu $\mathbb{Z}[G]$ isomorphen G -Moduln ist. Über die G -freien Moduln haben wir den folgenden

(1.6) Satz. *Ist X ein G -freier G -Modul und*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln A, B, C und G -Homomorphismen h, g , so ist die hieraus entstehende Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_G(X, A) \longrightarrow \text{Hom}_G(X, B) \longrightarrow \text{Hom}_G(X, C) \longrightarrow 0$$

exakt.

Zum Beweis sei $X = \bigoplus_{\iota} \Gamma_{\iota}$, $\Gamma_{\iota} \cong \mathbb{Z}[G]$. Nach (1.5) haben wir die Zerlegung

$$\text{Hom}_G(X, A) = \prod_{\iota} \text{Hom}_G(\Gamma_{\iota}, A).$$

Setzen wir $A_{\iota} = \text{Hom}_G(\Gamma_{\iota}, A) \cong \text{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) \cong A$ (vermöge $f \in \text{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) \mapsto f(1) \in A$) und entsprechend B_{ι}, C_{ι} , so erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A_{\iota} \longrightarrow B_{\iota} \longrightarrow C_{\iota} \longrightarrow 0,$$

aus der sich die Behauptung des Satzes ergibt.

Anmerkung. Der Satz (1.6) gilt allgemeiner für die sogenannten **projektiven** G -Moduln X . Es sind dies die G -Moduln mit der Eigenschaft, dass sich jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f \downarrow & \searrow f' & \\ B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit G -Moduln B, C und G -Homomorphismen g, f', g surjektiv, kommutativ durch einen G -Homomorphismus $f : X \rightarrow B$ ergänzen lässt.

Lässt man in der Sequenz für Hom_G die rechte Abbildung $\rightarrow 0$ weg, so gilt die Exaktheit für beliebige G -Moduln. Dies alles ist mit Leichtigkeit nachzuprüfen.

Ein G -freier G -Modul ist natürlich auch **\mathbb{Z} -frei**, also eine freie abelsche Gruppe, da $\mathbb{Z}[G]$ die freie abelsche durch die Elemente aus G erzeugte Gruppe ist. Bei den meisten Exaktheitsfragen kommt es lediglich auf Betrachtungen über **\mathbb{Z} -Moduln** und **\mathbb{Z} -Homomorphismen** an. Im Hinblick auf spätere Anwendungen geben wir die folgenden drei Lemmata an.

(1.7) Lemma. *Ist*

$$\cdots \longleftarrow X_{q-1} \xleftarrow{d_q} X_q \xleftarrow{d_{q+1}} X_{q+1} \longleftarrow \cdots$$

eine exakte Sequenz von \mathbb{Z} -freien Moduln und D ein beliebiger \mathbb{Z} -Modul, so ist die hieraus entstehende Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}(X_{q-1}, D) \longrightarrow \text{Hom}(X_q, D) \longrightarrow \text{Hom}(X_{q+1}, D) \longrightarrow \cdots$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Sei $C_q = \text{Kern } d_q = \text{Bild } d_{q+1}$. Da C_{q-1} als Untergruppe von X_{q-1} frei ist, gibt es für die exakte Sequenz $0 \leftarrow C_{q-1} \leftarrow X_q \leftarrow C_q \leftarrow 0$ einen Homomorphismus $\varepsilon : C_{q-1} \rightarrow X_q$ mit $d_q \circ \varepsilon = \text{Id}$, d.h. C_q ist direkter Summand von $X_q : X_q = C_q \oplus X'_q$ für alle q . Liegt nun das Element f im Kern der Abbildung $\text{Hom}(X_q, D) \rightarrow \text{Hom}(X_{q+1}, D)$, so verschwindet f auf C_q und induziert einen Homomorphismus $g' : C_{q-1} \rightarrow D$ mit $f = g' \circ d_q$. Da C_{q-1} direkter Summand von X_{q-1} ist, können wir g' zu einem Homomorphismus $g \in \text{Hom}(X_{q-1}, D)$ fortsetzen, und es wird f das Bild von g unter dem Homomorphismus $\text{Hom}(X_{q-1}, D) \rightarrow \text{Hom}(X_q, D)$. Liegt andererseits $f \in \text{Hom}(X_q, D)$ im Bild von $\text{Hom}(X_{q-1}, D) \rightarrow \text{Hom}(X_q, D)$, ist also $f = f' \circ d_q$, $f' \in \text{Hom}(X_{q-1}, D)$, so ist $f \circ d_{q+1} = f' \circ d_q \circ d_{q+1} = 0$, d.h. f liegt im Kern von $\text{Hom}(X_q, D) \rightarrow \text{Hom}(X_{q+1}, D)$.

(1.8) Lemma. *Ist $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz freier \mathbb{Z} -Moduln, und ist A ein beliebiger \mathbb{Z} -Modul, so ist auch die Sequenz*

$$0 \longrightarrow X \otimes A \longrightarrow Y \otimes A \longrightarrow Z \otimes A \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Die Exaktheit der Sequenz $X \otimes A \rightarrow Y \otimes A \rightarrow Z \otimes A \rightarrow 0$ ist völlig trivial und gilt sogar ohne die Freiheitsvoraussetzungen. Es kommt also nur auf den Nachweis der Injektivität von $X \otimes A \rightarrow Y \otimes A$ an. Da Z frei ist, gibt es einen Homomorphismus $Z \rightarrow Y$, der durch Nachschaltung der Abbildung $Y \rightarrow Z$ die Identität von Z liefert. Das bedeutet, dass das Bild X' von X in Y ein direkter Summand ist: $Y = X' \oplus X''$. Wir erhalten daher $Y \otimes A = (X' \otimes A) \oplus (X'' \otimes A)$, und dies beinhaltet gerade die besagte Injektivität.

(1.9) Lemma. *Ist $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von \mathbb{Z} -Moduln und X ein \mathbb{Z} -freier \mathbb{Z} -Modul, so ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow X \otimes A \longrightarrow X \otimes B \longrightarrow X \otimes C \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Es ist $X = \bigoplus_{\iota} Z_{\iota}$, $Z_{\iota} \cong \mathbb{Z}$. Wegen der Additivität des Funktors \otimes haben wir die kanonische Isomorphie

$$X \otimes A \cong \bigoplus_{\iota} (Z_{\iota} \otimes A) \cong \bigoplus_{\iota} A_{\iota} \quad \text{mit} \quad A_{\iota} = Z_{\iota} \otimes A \cong A$$

und entsprechend für B, C . Aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow A_{\iota} \longrightarrow B_{\iota} \longrightarrow C_{\iota} \longrightarrow 0$$

folgt dann unmittelbar die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow X \otimes A \longrightarrow X \otimes B \longrightarrow X \otimes C \longrightarrow 0.$$

§ 2. Die Definition der Kohomologiegruppen

Es ist bezeichnend für die Kohomologietheorie, dass zur Herleitung selbst einfacher Definitionen und Sätze ein ausgedehnter Formalismus von Homomorphismen, Funktoren und Sequenzen herangezogen werden muss, der auf den ersten Blick wohl den Eindruck hervorzurufen vermag, es handele sich hier um eine besonders schwierige und hohe mathematische Disziplin. Hat man sich jedoch mit den Methoden etwas vertraut gemacht, so wird man erkennen, dass die hier angewandten Schlüsse und Überlegungen von besonderer Einfachheit sind, dass sie im einzelnen sogar etwas blutleer erscheinen mögen,

jedoch durch ihre häufige Wiederholung zu jenen Begriffen und Sätzen führen, die sich einem elementaren Vorgehen nur schwerlich erschließen würden. Bei der Einführung der Kohomologiegruppen beginnen wir daher von vornherein mit solchen formalen Überlegungen, obgleich ihre Definition auch in direkter, elementarer Weise gegeben werden kann⁶⁾.

Sei G eine endliche Gruppe. Unter einer **vollständigen freien Auflösung** der Gruppe G , oder auch des G -Moduls \mathbb{Z} ⁷⁾ verstehen wir einen Komplex

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xleftarrow{d_{-2}} & X_{-2} & \xleftarrow{d_{-1}} & X_{-1} & \xleftarrow{d_0} & X_0 & \xleftarrow{d_1} & X_1 & \xleftarrow{d_2} & X_2 & \xleftarrow{d_3} & \cdots \\ & & & & \swarrow \mu & & \nwarrow \varepsilon & & & & & & \\ & & & & \mathbb{Z} & & & & & & & & \\ & & & & \swarrow & & \nwarrow & & & & & & \\ & & & & 0 & & 0 & & & & & & \end{array}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Die X_q sind freie G -Moduln,
- (2) ε, μ, d_q sind G -Homomorphismen,
- (3) $d_0 = \mu \circ \varepsilon$,
- (4) an jeder Stelle herrscht Exaktheit.

Bei einer vollständigen freien Auflösung handelt es sich also um zwei zusammengesetzte exakte Sequenzen

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} \cdots$$

und

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} X_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} X_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \cdots$$

von freien G -Moduln. Ursprünglich wurden von der ersten die Kohomologie-, von der zweiten die Homologiegruppen abgeleitet. In der Zusammensetzung dieser beiden Sequenzen liegt jedoch ein entscheidender Schritt, denn sie führt zu einer einheitlichen und im Hinblick auf das funktorielle Verhalten harmonischen Verschmelzung der Homologie und der Kohomologie.

Bei der Herleitung der Kohomologiegruppen eines G -Moduls könnten wir an sich von einer beliebigen vollständigen Auflösung ausgehen, ja sogar von einer solchen, in der die X_q nur projektive G -Moduln zu sein brauchen. Es käme dann darauf an, im Anschluss an die Definition ihre Unabhängigkeit von der an den Anfang gestellten Auflösung zu zeigen. Um uns dieser, nur der theoretischen Abrundung dienenden Mühe zu entheben, gehen wir von einer ganz speziellen vollständigen Auflösung von G aus, der sogenannten **Standardauflösung**, die ihr Vorbild in der algebraischen Topologie hat und in der folgenden Weise entsteht.

⁶⁾ Vgl. [16], 15.7, S. 236.

⁷⁾ Wir fassen \mathbb{Z} stets als einen G -Modul auf, auf dem die Gruppe G in trivialer Weise (d.h. identisch) operiert.

Für jedes $q \geq 1$ bilden wir alle q -Tupel $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$, wobei die σ_i die Gruppe G durchlaufen; wir bezeichnen sie als **q -Zellen** (mit den „Ecken“ $\sigma_1, \dots, \sigma_q$). Diese q -Zellen benutzen wir als freie Erzeugende unserer G -Moduln, d.h. wir setzen

$$X_q = X_{-q-1} = \bigoplus \mathbb{Z}[G](\sigma_1, \dots, \sigma_q).$$

Für $q = 0$ setzen wir

$$X_0 = X_{-1} = \mathbb{Z}[G],$$

indem wir als erzeugende „Nullzelle“ das Einselement $1 \in \mathbb{Z}[G]$ wählen. Die Moduln

$$\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots$$

sind dann freie G -Moduln.

Die G -Homomorphismen $\varepsilon : X_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ und $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow X_{-1}$ werden durch

$$\varepsilon(\sum_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma) = \sum_{\sigma \in G} n_\sigma \quad (\text{Augmentation})$$

$$\mu(n) = n \cdot N_G \quad (\text{Koaugmentation})$$

definiert (vgl. §1, S. 4).

Zur Festlegung der G -Homomorphismen d_q haben wir natürlich nur deren Werte auf den freien Erzeugenden $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ anzugeben. Wir setzen

$$d_0 1 = N_G \quad \text{für } q = 0,$$

$$d_1(\sigma) = \sigma - 1 \quad \text{für } q = 1,$$

$$\begin{aligned} d_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q) &= \sigma_1(\sigma_2, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + (-1)^q (\sigma_1, \dots, \sigma_{q-1}) \end{aligned} \quad \text{für } q > 1,$$

$$d_{-1} 1 = \sum_{\sigma \in G} [\sigma^{-1}(\sigma) - (\sigma)] \quad \text{für } q = -1,$$

$$\begin{aligned} d_{-q-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_q) &= \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G} \sum_{i=1}^q (-1)^i (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i \sigma, \sigma^{-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in G} (-1)^{q+1} (\sigma_1, \dots, \sigma_q, \sigma) \end{aligned} \quad \text{für } -q-1 < -1.$$

Mit diesen Definitionen erhalten wir einen Komplex

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xleftarrow{d_{-2}} & X_{-2} & \xleftarrow{d_{-1}} & X_{-1} & \xleftarrow{d_0} & X_0 & \xleftarrow{d_1} & X_1 & \xleftarrow{d_2} & X_2 & \xleftarrow{d_3} & \dots \\ & & & & \swarrow \mu & & \nwarrow \varepsilon & & & & & & \\ & & & & \mathbb{Z} & & & & & & & & \\ & & & & \swarrow & & \nwarrow & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & 0, & & & & \end{array}$$

den wir den **Standardkomplex** der Gruppe G nennen. Wir werden sogleich sehen, dass es sich bei diesem Komplex um eine vollständige freie Auflösung von G handelt. Die Bedingungen (1)–(3) sind trivialerweise erfüllt: Nach Konstruktion sind die X_q freie G -Moduln, die ε, μ, d_q G -Homomorphismen, und wegen $\mu \circ \varepsilon(1) = \mu(1) = N_G = d_0 1$ ist $d_0 = \mu \circ \varepsilon$. Es kommt daher nur

noch darauf an zu zeigen, dass an jeder Stelle Exaktheit herrscht. Zum Beweis dieser Tatsache ziehen wir Rechnungen heran, die sich an entsprechende Überlegungen in der algebraischen Topologie anlehnen. Wir zeigen zunächst die Exaktheit der Sequenz

$$(*) \quad 0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} X_2 \xleftarrow{d_3} \dots$$

Hierzu definieren wir die folgenden \mathbb{Z} -Homomorphismen:

$$\begin{aligned} E : \mathbb{Z} &\longrightarrow X_0 && \text{mit } E(1) = 1, \\ D_0 : X_0 &\longrightarrow X_1 && \text{mit } D_0(\sigma) = (\sigma), \\ D_q : X_q &\longrightarrow X_{q+1} && \text{mit } D_q(\sigma_0(\sigma_1, \dots, \sigma_q)) = (\sigma_0, \dots, \sigma_q) \text{ für } q \geq 1. \end{aligned}$$

Eine elementare Rechnung zeigt nun, dass

$$E \circ \varepsilon + d_1 \circ D_0 = \text{Id} \quad \text{und} \quad D_{q-1} \circ d_q + d_{q+1} \circ D_q = \text{Id}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich einmal

$$\text{Kern } \varepsilon \subseteq \text{Bild } d_1 \quad \text{und} \quad \text{Kern } d_q \subseteq \text{Bild } d_{q+1} \quad \text{für } q \geq 1;$$

ist nämlich $x \in \text{Kern } \varepsilon$ bzw. $x \in \text{Kern } d_q$, so ist $x = d_1 D_0 x \in \text{Bild } d_1$ bzw. $x = d_{q+1} D_q x \in \text{Bild } d_{q+1}$.

Andererseits rechnet man unmittelbar nach, dass $\varepsilon \circ d_1 = 0$ ist, dass also $\text{Kern } \varepsilon \supseteq \text{Bild } d_1$. Mit vollständiger Induktion beweisen wir nun $d_q \circ d_{q+1} = 0$ und setzen dazu $d_{q-1} \circ d_q = 0$ voraus. (Für $q = 1$ ersetzen wir in diesen Überlegungen d_0 durch ε und D_{-1} durch E .) Wir haben einerseits

$$d_q = (D_{q-2} \circ d_{q-1} + d_q \circ D_{q-1}) \circ d_q = d_q \circ D_{q-1} \circ d_q,$$

und andererseits

$$d_q = d_q \circ (D_{q-1} \circ d_q + d_{q+1} \circ D_q) = d_q \circ D_{q-1} \circ d_q + d_q \circ d_{q+1} \circ D_q.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir

$$d_q \circ d_{q+1} \circ D_q = 0.$$

Da aber jede Zelle von X_{q+1} im Bild von D_q liegt, hat dies

$$d_q \circ d_{q+1} = 0,$$

also $\text{Kern } d_q \supseteq \text{Bild } d_{q+1}$ für $q \geq 1$ zur Folge. Damit ist die Exaktheit der Sequenz $(*)$ bewiesen.

Die Sequenz

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} X_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} X_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} X_{-3} \xrightarrow{d_{-3}} \dots$$

ist nun gerade so angelegt, dass sie durch Dualisierung aus $(*)$ entsteht. Aus $(*)$ erhalten wir nämlich zunächst die Sequenz

$$(***) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(X_0, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(X_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots,$$

welche nach (1.7) exakt ist.

Sei $\{x_i\}$ das aus allen q -Zellen bestehende $\mathbb{Z}[G]$ -freie Erzeugendensystem von X_q . Wir erhalten dann ein $\mathbb{Z}[G]$ -freies Erzeugendensystem von $\text{Hom}(X_q, \mathbb{Z})$ durch die zu $\{x_i\}$ „duale Basis“ $\{x_i^*\}$, welche durch

$$x_i^*(\sigma x_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma = 1 \text{ und } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Die G -Moduln $\text{Hom}(X_q, \mathbb{Z})$ und X_q sind also kanonisch isomorph. Identifizieren wir x_i mit x_i^* , so können wir schreiben

$$X_{-q-1} = \text{Hom}(X_q, \mathbb{Z}) \quad (q \geq 0) \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} = \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

Eine elementare Rechnung zeigt nun, dass in der Tat nach dieser Identifizierung die Sequenz (***) in die Sequenz (**) übergeht, die sich daher als exakt erweist.

Schließlich folgt aus der Injektivität von μ , der Surjektivität von ε und aus $d_0 = \mu \circ \varepsilon$, dass $\text{Kern } d_0 = \text{Kern } \varepsilon$, $\text{Bild } d_0 = \text{Bild } \mu$, und also

$$\text{Kern } d_0 = \text{Bild } d_1 \quad \text{und} \quad \text{Bild } d_0 = \text{Kern } d_{-1}.$$

Damit ist die Exaktheit des Standardkomplexes an allen Stellen erwiesen.

Vom Standardkomplex leiten wir nun unsere Kohomologiegruppen ab. Ist A ein G -Modul, so setzen wir

$$A_q = \text{Hom}_G(X_q, A).$$

Die Elemente aus A_q , also die G -Homomorphismen $x : X_q \rightarrow A$ nennen wir die **q -Koketten** von A . Aus der exakten Sequenz

$$\cdots \xleftarrow{d_{-2}} X_{-2} \xleftarrow{d_{-1}} X_{-1} \xleftarrow{d_0} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} X_2 \xleftarrow{d_3} \cdots$$

erhalten wir die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{-2}} A_{-2} \xrightarrow{\partial_{-1}} A_{-1} \xrightarrow{\partial_0} A_0 \xrightarrow{\partial_1} A_1 \xrightarrow{\partial_2} A_2 \xrightarrow{\partial_3} \cdots,$$

in welcher wegen $d_q \circ d_{q+1} = 0$ trivialerweise $\partial_{q+1} \circ \partial_q = 0$ ist, also

$$\text{Bild } \partial_q \subseteq \text{Kern } \partial_{q+1}.$$

Im Gegensatz zur ersten Sequenz ist die zweite i.a. nicht exakt, und die Kohomologiegruppen „messen“ gewissermaßen die Abweichung von der Exaktheit. Wir setzen

$$Z_q = \text{Kern } \partial_{q+1}, \quad R_q = \text{Bild } \partial_q,$$

nennen die Elemente aus Z_q bzw. R_q die **q -Kozykeln** bzw. **q -Koränder** und kommen zu der folgenden

(2.1) Definition. Die Faktorgruppe

$$H^q(G, A) = Z_q / R_q$$

heißt die **Kohomologiegruppe der Dimension q** ($q \in \mathbb{Z}$) des G -Moduls A . Wir sagen auch kurz, $H^q(G, A)$ ist die q -te Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in A .

Es sei erwähnt, dass die Kohomologiegruppen $H^{-q-1}(G, A)$ nichts anderes sind als die üblicherweise als **Homologiegruppen** bezeichneten Gruppen $H_q(G, A)$ ($q \geq 1$). Ursprünglich erhielt man in der algebraischen Topologie die Kohomologiegruppen (mit Koeffizienten in \mathbb{Z}) als die Charaktergruppen der Homologiegruppen. Dieser Ursprung findet seinen Niederschlag in der Tatsache, dass man die linke Seite des Standardkomplexes aus der rechten durch Dualisierung gewinnt. Wir weisen noch einmal darauf hin, dass in der Zusammenfügung beider Seiten zu einer vollständigen Auflösung, die die Deutung der Homologiegruppen als Kohomologiegruppen negativer Dimensionen ermöglicht, ein entscheidender Schritt liegt, der nicht nur eine formale Vereinheitlichung bringt⁸⁾.

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, die konkrete Bedeutung der Kohomologiegruppen zu analysieren. Die Kokettengruppe

$$A_q = A_{-q-1} = \text{Hom}_G(X_q, A), \quad q \geq 1,$$

besteht aus allen G -Homomorphismen $x : X_q \rightarrow A$. Da die X_q die q -Zellen $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ als freie Erzeugende haben, ist der G -Homomorphismus $x : X_q \rightarrow A$ durch seine Werte auf den q -Tupeln $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ eindeutig bestimmt. Dies besagt, dass wir jede Kokette einfach als eine Funktion mit Argumenten aus G und Werten in A , also die Abbildung

$$x : \underbrace{G \times \dots \times G}_{q\text{-mal}} \longrightarrow A$$

auffassen können. Schließen wir uns dieser Auffassung an, so kommen wir zu der Identifizierung

$$A_q = A_{-q-1} = \{x : \underbrace{G \times \dots \times G}_{q\text{-mal}} \longrightarrow A\}, \quad q \geq 1,$$

und in evidenter Weise

$$A_0 = A_{-1} = \text{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) = A.$$

Aus der Definition der Homomorphismen d_q des Standardkomplexes ergeben sich für die Abbildungen ∂_q der Sequenz

⁸⁾ Diese Verschmelzung der Homologie und der Kohomologie geht auf J. TATE zurück.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{-2}} A_{-2} \xrightarrow{\partial_{-1}} A_{-1} \xrightarrow{\partial_0} A_0 \xrightarrow{\partial_1} A_1 \xrightarrow{\partial_2} A_2 \xrightarrow{\partial_3} \cdots$$

die Formeln

$$\begin{aligned} \partial_0 x &= N_G x && \text{für } x \in A_{-1} = A, \\ (\partial_1 x)(\sigma) &= \sigma x - x && \text{für } x \in A_0 = A, \\ (\partial_q x)(\sigma_1, \dots, \sigma_q) &= \sigma_1 x(\sigma_2, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i x(\sigma_1, \dots, \sigma_i \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + (-1)^q x(\sigma_1, \dots, \sigma_{q-1}) && \text{für } x \in A_{q-1}, \quad q \geq 1, \\ \partial_{-1} x &= \sum_{\sigma \in G} (\sigma^{-1} x(\sigma) - x(\sigma)) && \text{für } x \in A_{-2}, \\ (\partial_{-q-1} x)(\sigma_1, \dots, \sigma_q) &= \sum_{\sigma \in G} [\sigma^{-1} x(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^i x(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i \sigma, \sigma^{-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_q) \\ &\quad + (-1)^{q+1} x(\sigma_1, \dots, \sigma_q, \sigma)] && \text{für } x \in A_{-q-2}, \quad q \geq 0. \end{aligned}$$

q -Kozykeln sind also alle Abbildungen

$$x : G \times \cdots \times G \longrightarrow A$$

mit $\partial_{q+1} x = 0$, q -Koränder solche unter diesen, für die es ein $y \in A_{q-1}$ mit $x = \partial_q y$ gibt.

Es ist ein bemerkenswerter Umstand, dass in den algebraischen Anwendungen nur die Kohomologiegruppen in den niedrigen Dimensionen auftreten. Dies liegt daran, dass man nur für sie eine konkrete algebraische Interpretation kennt. Der kohomologische Kalkül würde an Bedeutung zweifellos erheblich gewinnen, wenn man auch für die Kohomologiegruppen der höheren Dimensionen greifbare Deutungen hätte. In den kleinen Dimensionen sehen die Kohomologiegruppen folgendermaßen aus:

Die Gruppe $H^{-1}(G, A)$. Es ist

$$\begin{aligned} Z_{-1} &= \text{Kern } \partial_0 = {}_{N_G} A && ((-1)\text{-Kozykeln}), \\ R_{-1} &= \text{Bild } \partial_{-1} = I_G A && ((-1)\text{-Koränder}). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$H^{-1}(G, A) = {}_{N_G} A / I_G A$$

(vgl. hierzu §1, S. 6).

Die Gruppe $H^0(G, A)$. Es ist

$$\begin{aligned} Z_0 &= \text{Kern } \partial_1 = A^G && (0\text{-Kozykeln}), \\ R_0 &= \text{Bild } \partial_0 = N_G A && (0\text{-Koränder}). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$H^0(G, A) = A^G / N_G A,$$

die **Normrestgruppe** des G -Moduls A ; sie steht in der Klassenkörpertheorie im Vordergrund des Interesses.

Die Gruppe $H^1(G, A)$. Die **1-Kozykeln** sind die Funktionen $x : G \rightarrow A$ mit $\partial_2 x = 0$, also mit der Eigenschaft

$$x(\sigma\tau) = \sigma x(\tau) + x(\sigma) \quad \text{für } \sigma, \tau \in G.$$

Aufgrund dieser der Homomorphieeigenschaft ähnelnden Relation werden die 1-Kozykeln oft auch als **gekreuzte Homomorphismen** bezeichnet.

Die **1-Koränder** sind offenbar die Funktionen

$$x(\sigma) = \sigma a - a, \quad \sigma \in G,$$

mit festem $a \in A = A_0$ (d.h. $x = \partial_1 a$).

Operiert die Gruppe G trivial (d.h. identisch) auf A , so wird offensichtlich $Z_1 = \text{Hom}(G, A)$ und $R_1 = 0$, also

$$H^1(G, A) = \text{Hom}(G, A).$$

Insbesondere erhalten wir für den Fall $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ die **Charaktergruppe** von G :

$$H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \chi(G).$$

Auf die Kohomologiegruppe $H^1(G, A)$ wird man bei der Betrachtung der G -Moduln in der folgenden unmittelbaren Weise geführt.

Geht man von einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

von G -Moduln A, B, C zu der mit den Fixmoduln A^G, B^G, C^G gebildeten Sequenz über, so geht die Exaktheit i.a. verloren. Lediglich die Sequenz

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{i} B^G \xrightarrow{j} C^G$$

ist immer exakt, der Homomorphismus j i.a. jedoch nicht mehr surjektiv. Die Frage, woran das liegt, führt unmittelbar zu einem kanonischen Homomorphismus $C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A)$.

Sei nämlich $c \in C^G$. Da der Homomorphismus $B \xrightarrow{j} C$ surjektiv ist, gibt es jedenfalls ein $b \in B$ mit $jb = c$, es ist jedoch nicht sicher, ob dieses Element b aus B^G gewählt werden kann, d.h. so, dass $\sigma b - b$ für alle $\sigma \in G$ gleich 0 ist. Man kann nur sagen, dass $\sigma b - b$ wegen

$$j(\sigma b - b) = \sigma(jb) - jb = \sigma c - c = 0$$

im Kern von $B \xrightarrow{j} C$ also im Bild von $A \xrightarrow{i} B$ liegt, so dass

$$ia_\sigma = \sigma b - b, \quad a_\sigma \in A.$$

Durch a_σ erhält man nun, was mühelos nachzurechnen ist, einen 1-Kozykel mit Koeffizienten in A . Die einzige Willkür bei der Zuordnung $c \mapsto a_\sigma$ lag in der Wahl von b mit $jb = c$. Wählt man ein anderes Element b' , so gelangt man zu einem 1-Kozykel a'_σ , der sich von a_σ lediglich um einen 1-Korand unterscheidet. Jedem $c \in C^G$ ist also in eindeutiger Weise eine Kohomologieklassse $\bar{a}_\sigma \in H^1(G, A)$ zugeordnet, und man rechnet sofort nach, dass c genau dann im Bild von $B^G \rightarrow C^G$ liegt, wenn $\bar{a}_\sigma = 0$ ist. Mit anderen Worten: Wir haben einen kanonischen Homomorphismus $C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A)$ und die Sequenz

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{i} B^G \xrightarrow{j} C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A)$$

ist exakt. Diese Überlegungen werden wir im nächsten Paragraphen in einem größeren Rahmen wiederbegegnen.

Die Gruppe $H^2(G, A)$. Wir erhalten als **2-Kozykeln** alle Funktionen $x : G \times G \rightarrow A$, die die Gleichung $\partial_3 x = 0$, also die Gleichung

$$x(\sigma\tau, \rho) + x(\sigma, \tau) = \sigma x(\tau, \rho) + x(\sigma, \tau\rho), \quad \sigma, \tau, \rho \in G,$$

erfüllen. Unter diesen finden wir die **2-Koränder** als die Funktionen

$$x(\sigma, \tau) = \sigma y(\tau) - y(\sigma\tau) + y(\sigma)$$

mit beliebiger 1-Kokette $y : G \rightarrow A$.

Die 2-Kozykeln waren in der Gruppen- und Algebrentheorie längst vor der Entwicklung der Kohomologietheorie als sogenannte **Faktorensysteme** bekannt, und man kann wohl sagen, dass sie historisch den Ausgangspunkt kohomologischer Betrachtungen in der Algebra darstellten. Wir wollen daher in kurzen Zügen erläutern, wie diese Faktorensysteme in der Theorie der **Gruppenerweiterungen** auftreten. Es handelt sich dort um die folgende Problemstellung.

Vorgegeben seien eine abelsche multiplikative Gruppe A und eine beliebige Gruppe G . Gesucht sind alle Obergruppen \hat{G} von A (genauer: alle Gruppen \hat{G} mit zu A isomorpher Untergruppe), derart dass A invariant in \hat{G} ist und eine zu G isomorphe Faktorgruppe $\hat{G}/A \cong G$ besitzt. Wir fragen, wodurch die verschiedenen möglichen Lösungen dieses Problems (außer durch A und durch G) bestimmt sind.

Nehmen wir zunächst an, wir hätten eine Lösung \hat{G} , so dass also $A \triangleleft \hat{G}$ und $\hat{G}/A \cong G$. Wählen wir ein Rechtsrepräsentantensystem für die Faktorgruppe $\hat{G}/A \cong G$, d.h. wählen wir zu jedem $\sigma \in G$ ein Urbild $u_\sigma \in \hat{G}$, so lässt sich jedes Element aus \hat{G} in eindeutiger Weise in der Form

$$(1) \quad a \cdot u_\sigma, \quad a \in A, \sigma \in G,$$

schreiben. Um die vollständige Multiplikationstafel für die Gruppe \hat{G} zu erhalten, genügt es offensichtlich zu wissen, wie sich die Produkte $u_\sigma \cdot a$ ($\sigma \in G, a \in A$) und $u_\sigma \cdot u_\tau$ ($\sigma, \tau \in G$) in der Form (1) darstellen.

Nun liegt $u_\sigma \cdot a$ wegen der Invarianz von A in \hat{G} in der gleichen Rechtsnebenklasse wie u_σ , d.h. es ist

$$(2) \quad u_\sigma \cdot a = a^\sigma \cdot u_\sigma$$

mit einem $a^\sigma \in A$. Hierdurch wird die abelsche Gruppe A in natürlicher Weise zu einem G -Modul, denn die Elemente $\sigma \in G$ operieren auf A (unabhängig von der Auswahl der u_σ) durch die Zuordnung $a \mapsto a^\sigma = u_\sigma \cdot a \cdot u_\sigma^{-1}$.

Das Produkt $u_\sigma \cdot u_\tau$ liegt in der gleichen Nebenklasse wie $u_{\sigma\tau}$, d.h. es ist

$$(3) \quad u_\sigma \cdot u_\tau = x(\sigma, \tau) \cdot u_{\sigma\tau} \quad \text{mit } x(\sigma, \tau) \in A.$$

In dieser Gleichung tritt nun das Faktorensystem $x(\sigma, \tau)$ auf, das sich sofort als ein 2-Kozykel des G -Moduls A erweist. Aus dem Assoziativgesetz

$$(u_\sigma \cdot u_\tau) \cdot u_\rho = u_\sigma \cdot (u_\tau \cdot u_\rho)$$

in der Gruppe \hat{G} erhalten wir nämlich die Gleichung

$$\begin{aligned} (u_\sigma \cdot u_\tau) \cdot u_\rho &= x(\sigma, \tau) \cdot u_{\sigma\tau} \cdot u_\rho = x(\sigma, \tau) \cdot x(\sigma\tau, \rho) \cdot u_{\sigma\tau\rho} = \\ u_\sigma \cdot (u_\tau \cdot u_\rho) &= u_\sigma \cdot x(\tau, \rho) \cdot u_{\tau\rho} = x^\sigma(\tau, \rho) \cdot u_\sigma \cdot u_{\tau\rho} = x^\sigma(\tau, \rho) \cdot x(\sigma, \tau\rho) \cdot u_{\sigma\tau\rho}, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$x(\sigma, \tau) \cdot x(\sigma\tau, \rho) = x^\sigma(\tau, \rho) \cdot x(\sigma, \tau\rho).$$

Dies ist aber gerade die Kozykeleigenschaft.

Bei der obigen Analyse liegt in der Wahl des Repräsentantensystems u_σ noch eine Willkürlichkeit. Gehen wir von einem anderen Repräsentantensystem u'_σ aus, so erhalten wir durch die Gleichung

$$u'_\sigma \cdot u'_\tau = x'(\sigma, \tau) \cdot u'_{\sigma\tau}$$

auch ein anderes Faktorensystem $x'(\sigma, \tau)$. Dieses unterscheidet sich jedoch von $x(\sigma, \tau)$, wie man mühelos nachrechnet, nur durch einen 2-Korand, nämlich durch den 2-Korand $\partial_2(u'_\sigma \cdot u_\sigma^{-1})$. Da die Gruppe \hat{G} durch die Relationen (2) und (3) (und durch die Relationen der Gruppen A und G) vollständig bestimmt ist, können wir hiernach sagen:

Die Lösung \hat{G} des Gruppenerweiterungsproblems ist eindeutig bestimmt durch die Art und Weise, wie die Gruppe G auf A operiert, und durch eine Klasse äquivalenter Faktorensysteme $x(\sigma, \tau)$, also durch eine Kohomologieklassse aus $H^2(G, A)$.

Haben wir umgekehrt die Gruppe A in irgendeiner Weise zu einem G -Modul gemacht⁹⁾, und geben wir eine Klasse $c \in H^2(G, A)$ vor, so erhalten wir stets eine Lösung des Erweiterungsproblems, wenn wir den $\sigma \in G$ erzeugende Elemente u_σ zuordnen und die durch die Elemente aus A und durch die u_σ

⁹⁾ Man kann dies noch etwas straffer formulieren. Bedenkt man nämlich, dass bei einem G -Modul A jedes $\sigma \in G$ einen Automorphismus der Gruppe A liefert, so sieht man, dass ein G -Modul A nichts anderes ist als ein Paar von Gruppen A und G zusammen mit einem Homomorphismus $h : G \rightarrow \text{Aut}(A)$. Die Operation von $\sigma \in G$ auf A erhält man durch $\sigma a = h(\sigma)a$. Die Gruppe A zu einem G -Modul zu machen bedeutet also nichts anderes, als einen Homomorphismus von G in die Automorphismengruppe $\text{Aut}(A)$ zu wählen.

erzeugte Gruppe \hat{G} mit den Relationen

$$a^\sigma = u_\sigma \cdot a u_\sigma^{-1} \text{ und } u_\sigma \cdot u_\tau = x(\sigma, \tau) \cdot u_{\sigma\tau} \quad (x(\sigma, \tau) \text{ 2-Kozykel aus c})$$

bilden. Dies kann in einfachster Weise verifiziert werden.

Neben den Gruppen $H^q(G, A)$ der Dimensionen $q = -1, 0, 1, 2$ spielt noch die Kohomologiegruppe $H^{-2}(G, \mathbb{Z})$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z} eine besondere Rolle. Wir werden nämlich später zeigen, dass sie in kanonischer Weise zur **Faktorkommutatorgruppe** $G^{\text{ab}} = G/G'$ (G' Kommutatorgruppe) von G isomorph ist. Dieses Faktum ist für die Klassenkörpertheorie von großer Bedeutung. Der Hauptsatz dieser Theorie betrifft nämlich eine Isomorphie zwischen der Faktorkommutatorgruppe G^{ab} und der Normrestgruppe $A^G/N_G A$ eines gewissen G -Moduls A . Er kann also rein kohomologisch durch $H^{-2}(G, \mathbb{Z}) = H^0(G, A)$ formuliert und unter gewissen Voraussetzungen auch abstrakt bewiesen werden (vgl. (7.3)).

§ 3. Die exakte Kohomologiesequenz

Nach der Einführung der Kohomologiegruppen $H^q(G, A)$ kommt es nun darauf an, ihr Verhalten beim Wechsel des Moduls A einerseits und beim Wechsel der Gruppe G andererseits zu untersuchen. In diesem Paragraphen werden wir den ersten Fall behandeln.

Sind A und B zwei G -Moduln, und ist

$$f : A \longrightarrow B$$

ein G -Homomorphismus, so induziert dieser in kanonischer Weise einen Homomorphismus

$$\bar{f}_q : H^q(G, A) \longrightarrow H^q(G, B).$$

Er entsteht folgendermaßen. Durch die Zuordnung

$$x(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \longmapsto f x(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$$

erhalten wir einen Homomorphismus

$$f_q : A_q \longrightarrow B_q$$

der Kokettengruppe A_q von A in die Kokettengruppe B_q von B , und man sieht mit einem Blick, dass

$$\partial_{q+1} \circ f_q = f_{q+1} \circ \partial_{q+1},$$

dass also das unendliche Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_q & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & A_{q+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_q \downarrow & & f_{q+1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_q & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & B_{q+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

kommutativ ist. Dies bedeutet also gerade, dass bei der Zuordnung

$$x(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \mapsto fx(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$$

Kozykeln in Kozykeln und Koränder in Koränder übergehen. Daher induziert der Homomorphismus $f_q: A_q \rightarrow B_q$ einen Homomorphismus

$$\bar{f}_q: H^q(G, A) \longrightarrow H^q(G, B).$$

Ist $c \in H^q(G, A)$, so erhält man das Bild $\bar{f}_q c$, indem man aus der Klasse c einen Kozykel x herausnimmt, den Kozykel fx des Moduls B bildet und anschließend wieder zur Kohomologieklassse übergeht.

Für den Homomorphismus \bar{f}_q haben wir also eine höchst einfache explizite Beschreibung. Dies ist ein Vorzug, dem man in der Kohomologietheorie nicht allzu häufig begegnet. Von vielen kohomologischen Abbildungen kennt man nur ihre Existenz, d.h. ihre kanonische Gegebenheit, und ihr funktorielles Verhalten, hat aber kaum eine Möglichkeit sie explizit zu beschreiben. Es ist jedoch ebenso bezeichnend, dass in der ganzen Theorie fast ausschließlich nur dieses funktorielle Verhalten der betreffenden Abbildungen ins Spiel gebracht wird, und dass eine explizite Kenntnis derselben nur in wenigen Fällen erforderlich ist.

Ein erstes Beispiel dieses für die Kohomologie typischen Sachverhalts liefert der die gesamte Theorie beherrschende **Verbindungshomomorphismus** δ . Dieser wird zwar noch in expliziter Weise angegeben, jedoch hinterlässt seine Definition nicht gerade den Eindruck großer Übersichtlichkeit und Unmittelbarkeit.

(3.1) Satz. *Ist*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln und G -Homomorphismen, so gibt es einen kanonischen Homomorphismus

$$\delta_q: H^q(G, C) \longrightarrow H^{q+1}(G, A).$$

δ_q heißt der **Verbindungshomomorphismus** oder auch **δ -Homomorphismus**.

Zur Konstruktion von δ_q orientieren wir uns an dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_{q-1} & \xrightarrow{i} & B_{q-1} & \xrightarrow{j} & C_{q-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_q & \xrightarrow{i} & B_q & \xrightarrow{j} & C_q & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_{q+1} & \xrightarrow{i} & B_{q+1} & \xrightarrow{j} & C_{q+1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

(Der Einfachheit halber haben wir die Indizes an den Abbildungen i, j, ∂ fortgelassen). Das Diagramm hat exakte Zeilen; diese entstehen nämlich aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ durch Anwendung des Funktors $\text{Hom}_G(X_i, \quad)$ ($i = q-1, q, q+1$) mit den G -freien Moduln X_i (vgl. (1.6)).

Mit a_q, b_q, c_q bezeichnen wir die Elemente der Kokettengruppen A_q, B_q, C_q und mit $\bar{a}_q, \bar{b}_q, \bar{c}_q$ ihre Bilder in den Kohomologiegruppen $H^q(G, A), H^q(G, B), H^q(G, C)$.

Sei nunmehr $\bar{c}_q \in H^q(G, C)$, so dass $\partial c_q = 0$. Wir wählen ein b_q mit

$$c_q = j b_q.$$

Es ist $j \partial b_q = \partial j b_q = \partial c_q = 0$ und damit $\partial b_q \in \text{Kern } j_{q+1}$. Es gibt daher ein a_{q+1} mit $\partial b_q = i a_{q+1}$. Wegen $i \partial a_{q+1} = \partial i a_{q+1} = \partial \partial b_q = 0$, d.h. $\partial a_{q+1} = 0$, ist a_{q+1} ein $(q+1)$ -Kozykel von A . Wir setzen nun

$$\delta_q \bar{c}_q = \bar{a}_{q+1}.$$

Bei diesem Vorgehen liegt natürlich in der Wahl des Repräsentanten c_q von \bar{c}_q und dessen Urbild b_q noch eine Willkür. Führen wir jedoch den gleichen Prozess mit einem c'_q und einem Urbild b'_q von c'_q ($j b'_q = c'_q$), so gelangen wir zu einer Klasse \bar{a}'_{q+1} , und es gilt

$$\begin{aligned}
\bar{c}_q = \bar{c}'_q &\Rightarrow c_q - c'_q = \partial c_{q-1} \text{ für ein } c_{q-1} \Rightarrow c_q - c'_q = \partial j b_{q-1} \text{ für ein } b_{q-1} \\
&\Rightarrow j b_q - j b'_q = j \partial b_{q-1} \Rightarrow b_q - b'_q - \partial b_{q-1} \in \text{Kern } j_q = \text{Bild } i_q \Rightarrow i a_q = \\
&= b_q - b'_q - \partial b_{q-1} \text{ für ein } a_q \Rightarrow \partial i a_q = \partial b_q - \partial b'_q \Rightarrow i \partial a_q = i a_{q+1} - i a'_{q+1} \Rightarrow \\
&\partial a_q = a_{q+1} - a'_{q+1} \Rightarrow \bar{a}_{q+1} = \bar{a}'_{q+1}.
\end{aligned}$$

Daher ist δ_q wohldefiniert. Die Homomorphieeigenschaft ist unmittelbar klar.

Wie schon erwähnt ist es keineswegs nötig, sich diesen Prozess bei jedem Auftreten von δ in Erinnerung zurückzurufen. Haben wir erst einmal die Haupteigenschaften der δ -Abbildung bewiesen, so wird ihre explizite Definition nur noch gelegentlich benötigt. Die wichtigste Eigenschaft des Verbindungshomomorphismus kommt in dem folgenden Satz zum Ausdruck, den man wohl als den Hauptsatz der Kohomologietheorie ansehen kann.

(3.2) Satz. *Ist*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln und G -Homomorphismen, so ist die hieraus entstehende unendliche Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^q(G, A) \xrightarrow{\bar{i}_q} H^q(G, B) \xrightarrow{\bar{j}_q} H^q(G, C) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(G, A) \longrightarrow \cdots$$

exakt. Sie heißt die **exakte Kohomologiesequenz**.

Beweis. Die Homomorphismen \bar{i}_q , \bar{j}_q und δ_q werden durch die folgenden Zuordnungen induziert:

$$a_q \mapsto ia_q, \quad b_q \mapsto jb_q \quad \text{bzw.} \quad c_q \mapsto a_{q+1},$$

mit $c_q = jb_q$ und $\partial b_q = ia_{q+1}$. Es gilt

$$\bar{j}_q \circ \bar{i}_q = 0, \text{ wegen } a_q \mapsto ia_q \mapsto jia_q = 0,$$

$$\delta_q \circ \bar{j}_q = 0, \text{ wegen } b_q \mapsto jb_q \mapsto a_{q+1} = 0 \text{ (es ist } ia_{q+1} = \partial b_q = 0),$$

$$\bar{i}_{q+1} \circ \delta_q = 0, \text{ wegen } c_q \mapsto a_{q+1} \mapsto ia_{q+1} = \partial b_q \in \partial B_q.$$

Hieraus erhalten wir die Inklusionen

$$\text{Bild } \bar{i}_q \subseteq \text{Kern } \bar{j}_q, \quad \text{Bild } \bar{j}_q \subseteq \text{Kern } \delta_q, \quad \text{Bild } \delta_q \subseteq \text{Kern } \bar{i}_{q+1}.$$

Sei $\bar{b}_q \in \text{Kern } \bar{j}_q$, so dass $jb_q = \partial c_{q-1}$ für ein c_{q-1} . Wählt man ein b_{q-1} mit $jb_{q-1} = c_{q-1}$, so wird $j(b_q - \partial b_{q-1}) = 0$. Wir können daher von vornherein annehmen, dass der Reprsentant b_q von \bar{b}_q die Eigenschaft $jb_q = 0$ hat. Es existiert dann ein a_q mit $b_q = ia_q$. Dieses a_q ist wegen $i\partial a_q = \partial b_q = 0$ ein Kozykel. Wir erhalten also $\bar{b}_q = \bar{i}_q \bar{a}_q \in \text{Bild } \bar{i}_q$. Daher ist $\text{Bild } \bar{i}_q \supseteq \text{Kern } \bar{j}_q$.

Sei $\bar{c}_q \in \text{Kern } \delta_q$. Auf Grund der Definition von δ_q gibt es dann ein a_{q+1} und ein b_q , derart dass $\delta_q \bar{c}_q = \bar{a}_{q+1} = 0$, $ia_{q+1} = \partial b_q$ und $c_q = jb_q$. Wegen $\bar{a}_{q+1} = 0$ ist $a_{q+1} = \partial a_q$, und es gilt $\partial(b_q - ia_q) = 0$ und $c_q = j(b_q - ia_q)$. Wir erhalten somit $\bar{c}_q = \bar{j}(b_q - ia_q)$. Dies zeigt $\text{Bild } \bar{j}_q \supseteq \text{Kern } \delta_q$.

Sei $\bar{a}_{q+1} \in \text{Kern } \bar{i}_{q+1}$, so dass $ia_{q+1} = \partial b_q$ für ein b_q . Setzen wir $c_q = jb_q$, so ist c_q wegen $\partial c_q = \partial jb_q = j\partial b_q = jia_{q+1} = 0$ ein Kozykel und $\bar{a}_{q+1} = \delta_q \bar{c}_q \in \text{Bild } \delta_q$. Es ist also $\text{Bild } \delta_q \supseteq \text{Kern } \bar{i}_{q+1}$. Damit ist die Exaktheit der Kohomologiesequenz bewiesen.

Wir haben schon bei der Einführung der Kohomologiegruppen hervorgehoben, dass die Bildung einer vollständigen freien Auflösung von G zu einer Zusammenfassung der Homologie- und der Kohomologiegruppen führt. Der wesentliche Aspekt dieser Tatsache liegt nicht so sehr in der Vereinheitlichung der Bezeichnungsweise, als vielmehr in der sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckenden die Homologie- sowie die Kohomologiegruppen umfassenden exakten Kohomologiesequenz.

Der Satz (3.2) findet in der folgenden Form seine häufigste Anwendung: Verschwindet in der Kohomologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H^q(G, A) \longrightarrow H^q(G, B) \longrightarrow H^q(G, C) \longrightarrow H^{q+1}(G, A) \longrightarrow \cdots$$

an irgendeiner Stelle eine Kohomologiegruppe, so kann man wegen der Exaktheit automatisch auf die Surjektivität der vorangegangenen und auf die Injektivität der nachfolgenden Abbildung schließen. Insbesondere erhalten wir auf diese Weise oftmals wichtige Isomorphieaussagen. Dies wollen wir in dem folgenden Korollar festhalten.

(3.3) Korollar. *Ist*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln, und ist

$$H^q(G, A) = 0 \quad \text{bzw.} \quad H^q(G, B) = 0 \quad \text{bzw.} \quad H^q(G, C) = 0$$

für alle q , so ist die Abbildung

$$\bar{j}_q : H^q(G, B) \longrightarrow H^q(G, C) \quad \text{bzw.}$$

$$\delta_q : H^q(G, C) \longrightarrow H^{q+1}(G, A) \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{i}_q : H^q(G, A) \longrightarrow H^q(G, B)$$

ein Isomorphismus.

Auf Grund dieser Tatsache leuchtet ein, dass diejenigen G -Moduln, die lauter triviale Kohomologiegruppen besitzen, eine ausgezeichnete Rolle spielen werden.

Anknüpfend an unsere Überlegungen auf S. 18 wollen wir eine aus der Kohomologiesequenz (3.2) entstehende Sequenz erwähnen, die nach links hin abbricht.

(3.4) Satz. *Ist*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln, so haben wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{i} B^G \xrightarrow{j} C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A) \xrightarrow{\bar{i}_1} H^1(G, B) \xrightarrow{\bar{j}_1} \cdots$$

Beweis. Der Homomorphismus $C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A)$ entsteht durch die Hintereinanderschaltung der Homomorphismen

$$C^G \longrightarrow C^G / N_G C = H^0(G, C) \xrightarrow{\delta_0} H^1(G, A).$$

Die Exaktheit der obigen Sequenz ist offenbar nur an der Stelle C^G noch nachzuweisen.

Sei dazu $c \in \text{Bild } j \subseteq C^G$, also $c = jb$ mit $b \in B^G$. Dann gilt

$$\delta c = \delta_0(c + N_G C) = \delta_0(jb + N_G C) = \delta_0 \bar{j}_0(b + N_G B) = 0,$$

also $\text{Bild } j \subseteq \text{Kern } \delta$.

Sei andererseits $c \in \text{Kern } \delta$, also $c \in C^G$ und $\delta c = \delta_0(c + N_G C) = 0$. Dann gilt wegen (3.2)

$$c + N_G C = \bar{j}_0(b + N_G B) = jb + N_G C,$$

also $c = jb + N_G c'$. Wählen wir ein $b' \in B$ mit $jb' = c'$, so wird $c = jb + N_G(jb') = jb + jN_G b' \in jB^G$. Daher ist $\text{Bild } j = \text{Kern } \delta$.

Angesichts der exakten Kohomologiesequenz (3.4) werden die Fixmoduln A^G , B^G , C^G oftmals auch als nullte Kohomologiegruppen definiert, insbesondere dann, wenn man es lediglich mit den Kohomologiegruppen positiver Dimensionen zu tun hat.

Im folgenden haben wir uns mit einigen Vertauschbarkeitseigenschaften des Verbindungshomomorphismus δ zu beschäftigen.

(3.5) Satz. *Ist*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von G -Moduln und G -Homomorphismen mit exakten Zeilen, so gilt

$$\bar{f}_{q+1} \circ \delta_q = \delta_q \circ \bar{h}_q;$$

mit anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta_q} & H^{q+1}(G, A) \\ \downarrow \bar{h}_q & & \downarrow \bar{f}_{q+1} \\ H^q(G, C') & \xrightarrow{\delta_q} & H^{q+1}(G, A') \end{array}$$

ist kommutativ.

Der Beweis folgt fast unmittelbar aus der Definition von δ_q . Sei $\bar{c}_q \in H^q(G, C)$. Wählen wir ein b_q und ein a_{q+1} , derart dass $c_q = jb_q$ und $ia_{q+1} = \partial b_q$, so ist $\delta_q \bar{c}_q = \bar{a}_{q+1}$, und es gilt $(\bar{f}_{q+1} \circ \delta_q) \bar{c}_q = \bar{f}_{q+1}(\bar{a}_{q+1}) = \bar{f}_{q+1} a_{q+1}$. Setzen wir $c'_q = hc_q$, $b'_q = gb_q$ und $a'_{q+1} = fa_{q+1}$, so gilt $c'_q = j'b'_q$ und $\partial b'_q = i'a'_{q+1}$, und wir erhalten $(\delta_q \circ \bar{h}_q) \bar{c}_q = \delta_q \bar{c}'_q = \bar{a}'_{q+1} = \bar{f}_{q+1} a_{q+1}$. Folglich gilt $\bar{f}_{q+1} \circ \delta_q = \delta_q \circ \bar{h}_q$.

Eine merkwürdige Eigenschaft der δ -Abbildung ist ihre „Antikommutativität“:

(3.6) Satz. Gegeben sei das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

von G -Moduln und G -Homomorphismen mit exakten Zeilen und Spalten. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^{q-1}(G, C'') & \xrightarrow{\delta} & H^q(G, C') \\
 \downarrow \delta & & \downarrow -\delta \\
 H^q(G, A'') & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A')
 \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Sei D der Kern der zusammengesetzten Abbildung $B \rightarrow C''$, so dass also die Sequenz

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow B \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

exakt ist. Wir definieren nun die G -Homomorphismen

$i : A' \rightarrow A \oplus B'$ durch $ia' = (a, b')$, wobei a bzw. b' das Bild von a' in A bzw. von a' in B' ist,

$j : A \oplus B' \rightarrow D$ durch $j(a, b') = d_1 - d_2$, wobei d_1 bzw. d_2 das Bild von a bzw. von b' in $D \subseteq B$ ist.

Man überzeugt sich mühelos von der Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \oplus B' \xrightarrow{j} D \longrightarrow 0$$

und von der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccccc}
A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C'' \\
\text{Id} \parallel & & \uparrow (\text{Id}, 0) & & \uparrow \text{---} & & \uparrow & & \parallel \text{Id} \\
A' & \xrightarrow{i} & A \oplus B' & \xrightarrow{j} & D & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C'' \\
-\text{Id} \parallel & & \downarrow (0, -\text{Id}) & & \downarrow \text{---} & & \downarrow & & \parallel \text{Id} \\
A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C''.
\end{array}$$

Dieses lässt sich durch G -Homomorphismen $D \rightarrow A''$ bzw. $D \rightarrow C'$ kommutativ ergänzen, denn es ist $\text{Bild}(D \rightarrow B'') \subseteq \text{Bild}(A'' \rightarrow B'')$ und $A'' \rightarrow B''$ injektiv bzw. $\text{Bild}(D \rightarrow C) \subseteq \text{Bild}(C' \rightarrow C)$ und $C' \rightarrow C$ injektiv. Mit dem Satz (3.5) ergibt sich nun die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
H^{q-1}(G, C'') & \xrightarrow{\delta} & H^q(G, A'') & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A') \\
\text{Id} \parallel & & \uparrow & & \parallel \text{Id} \\
H^{q-1}(G, C'') & \xrightarrow{\delta} & H^q(G, D) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A') \\
\text{Id} \parallel & & \downarrow & & \parallel -\text{Id} \\
H^{q-1}(G, C'') & \xrightarrow{\delta} & H^q(G, C') & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A'),
\end{array}$$

und aus diesem unmittelbar die Behauptung des Satzes.

(3.7) Satz. Ist $\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ eine Familie von G -Moduln, so ist

$$H^q(G, \bigoplus_{\iota} A_\iota) \cong \bigoplus_{\iota} H^q(G, A_\iota).$$

Beweis. Setzen wir $A = \bigoplus_{\iota} A_\iota$, so ist mit (1.5)

$$A_q = \text{Hom}_G(X_q, A) \cong \bigoplus_{\iota} \text{Hom}_G(X_q, A_\iota) = \bigoplus_{\iota} (A_\iota)_q,$$

und wir erhalten das unendliche kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_{q-1} & \xrightarrow{\partial} & A_q & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\
\cdots & \longrightarrow & \bigoplus_{\iota} (A_\iota)_{q-1} & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_{\iota} (A_\iota)_q & \longrightarrow & \cdots.
\end{array}$$

Dieses besagt aber gerade die behauptete Isomorphie.

Die gleiche Überlegung trifft auch für das direkte Produkt $\prod_{\iota} A_{\iota}$ anstelle der direkten Summe $\bigoplus_{\iota} A_{\iota}$ zu; offenbar ist nämlich

$$\left(\prod_{\iota} A_{\iota}\right)_q = \operatorname{Hom}_G(X_q, \prod_{\iota} A_{\iota}) \cong \prod_{\iota} \operatorname{Hom}_G(X_q, A_{\iota}) = \prod_{\iota} (A_{\iota})_q.$$

Wir erhalten daher den

(3.8) Satz. $H^q(G, \prod_{\iota} A_{\iota}) \cong \prod_{\iota} H^q(G, A_{\iota})$ (direkt).

Die G -induzierten Moduln. Wir haben schon in (3.3) die Tatsache formuliert, dass die exakte Kohomologiesequenz Isomorphiesätze liefert, wenn in ihr ein G -Modul mit lauter trivialen Kohomologiegruppen auftritt. Eine besondere Klasse solcher G -Moduln sind die **G -induzierten** Moduln, die wir im folgenden zu vielen Beweisen und Definitionen heranziehen werden.

(3.9) Definition. Ein G -Modul A heißt **G -induziert**, wenn er sich als direkte Summe

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D$$

mit einer Untergruppe $D \subseteq A$ darstellen lässt.

Insbesondere ist der G -Modul $\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma(\mathbb{Z} \cdot 1)$ G -induziert, und es ist sofort klar, dass sich die G -induzierten Moduln einfach als die Tensorprodukte

$$\mathbb{Z}[G] \otimes D$$

mit beliebigen abelschen Gruppen D darstellen. Fassen wir nämlich D als trivialen G -Modul auf, so erhalten wir den G -Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[G] \otimes D = \left(\bigoplus_{\sigma \in G} \mathbb{Z}\sigma\right) \otimes D = \bigoplus_{\sigma \in G} \mathbb{Z}(\sigma \otimes D) = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma(\mathbb{Z} \otimes D).$$

Allgemeiner gilt der

(3.10) Satz. Ist X ein G -induzierter Modul, so ist für jeden G -Modul auch $X \otimes A$ ein G -induzierter Modul.

Ist nämlich $X = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D$, so wird

$$X \otimes A = \left(\bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D\right) \otimes A \cong \bigoplus_{\sigma \in G} (\sigma D) \otimes (\sigma A) \cong \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma(D \otimes A).$$

(3.11) Satz. Sei A ein G -induzierter Modul, und g eine Untergruppe von G . Dann gilt:

A ist ein g -induzierter g -Modul,

und

A^g ist ein G/g -induzierter G/g -Modul, wenn g invariant in G ist.

Beweis. Ist $A = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D$, so können wir schreiben

$$A = \bigoplus_{\sigma \in g} \bigoplus_{\tau} \sigma \tau D = \bigoplus_{\sigma \in g} \sigma \left(\bigoplus_{\tau} \tau D \right),$$

wobei τ ein Rechtsrepräsentantensystem von G nach g durchläuft. Damit ist A g -induziert.

Wir zeigen weiter, dass im Falle der Invarianz von g in G der G/g -Modul A^g die Darstellung

$$A^g = \bigoplus_{\tau \in G/g} \tau N_g D$$

besitzt. Die Summe auf der rechten Seite ist wegen der Direktheit der Zerlegung von $A = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D$ offensichtlich ebenfalls direkt. Sie ist in A^g enthalten, da $N_g D \subseteq A^g$. Sei umgekehrt $a \in A^g$. a besitzt die eindeutige Darstellung $a = \sum_{\tau \in G} \tau d_\tau$, $d_\tau \in D$. Ist $\sigma \in g$, so erhalten wir

$$a = \sigma a = \sum_{\tau \in G} \sigma \tau d_\tau = \sum_{\tau \in G} \sigma \tau d_{\sigma \tau},$$

und wegen der Eindeutigkeit ist $d_\tau = d_{\sigma \tau}$. Hieraus ergibt sich die Darstellung

$$a = \sum_{\tau} \sum_{\sigma \in g} \tau \sigma d_{\tau \sigma} = \sum_{\tau} \tau \left(\sum_{\sigma \in g} \sigma d_\tau \right) = \sum_{\tau} \tau N_g(d_\tau),$$

wobei τ ein Linksrepräsentantensystem von G/g durchläuft. A^g ist also in der Tat G/g -induziert.

(3.12) Definition. Wir sagen, ein G -Modul A hat **triviale Kohomologie**, wenn

$$H^q(g, A) = 0$$

für alle q und alle Untergruppen $g \subseteq G$ ist.

Entscheidend ist nun der

(3.13) Satz. Jeder G -induzierte Modul A hat triviale Kohomologie.

Beweis. Wegen (3.11) genügt der Nachweis von $H^q(G, A) = 0$, also der Nachweis, dass die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(X_q, A) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Hom}_G(X_{q+1}, A) \longrightarrow \cdots$$

exakt ist. Ist nun $A = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D$ und $\pi : A \rightarrow D$ die natürliche Projektion von A auf D , so vermittelt die Zuordnung $f \mapsto \pi \circ f$ einen offensichtlich bijektiven Homomorphismus

$$\operatorname{Hom}_G(X_q, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X_q, D).$$

Identifizieren wir $\operatorname{Hom}_G(X_q, A)$ mit $\operatorname{Hom}(X_q, D)$, so gelangen wir zu der Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}(X_q, D) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X_{q+1}, D) \longrightarrow \cdots,$$

welche nach (1.7) exakt ist.

Wegen der kohomologischen Trivialität erhalten wir mit (3.3) eine höchst bedeutsame Anwendungsmöglichkeit der G -induzierten Moduln, die auf der Tatsache beruht, dass jeder G -Modul A sowohl als Untermodul als auch als Faktormodul eines G -induzierten Moduls aufgefasst werden kann.

Bezeichnen wir wieder mit I_G das Augmentationsideal von $\mathbb{Z}[G]$ und mit J_G den Faktormodul $J_G = \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z} \cdot N_G$, so erhalten wir die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] &\xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \mathbb{Z} &\xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow J_G \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Sie bestehen nach (1.2) aus lauter \mathbb{Z} -freien Moduln. Mit (1.8) ergibt sich daher der

(3.14) Satz. *Für jeden G -Modul A haben wir die exakten Sequenzen*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow I_G \otimes A \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes A &\longrightarrow A \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow A &\longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes A \longrightarrow J_G \otimes A \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Da der G -Modul $\mathbb{Z}[G] \otimes A$ nach (3.10) G -induziert ist, können wir also in der Tat A sowohl als Untermodul als auch als Faktormodul eines G -induzierten Moduls auffassen.

Wenden wir auf die Sequenzen des Satzes (3.14) die exakte Kohomologiesequenz an, so erhalten wir wegen der kohomologischen Trivialität von $\mathbb{Z}[G] \otimes A$ nach (3.3) die **Isomorphismen**

$$\begin{aligned} \delta : H^{q-1}(g, A^1) &\longrightarrow H^q(g, A) && \text{mit } A^1 = J_G \otimes A, \\ \delta^{-1} : H^{q+1}(g, A^{-1}) &\longrightarrow H^q(g, A) && \text{mit } A^{-1} = I_G \otimes A \end{aligned}$$

für jedes q und jede Untergruppe $g \subseteq G$. Dieses Vorgehen wollen wir iterieren:

Für jede ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\begin{aligned} A^m &= \underbrace{J_G \otimes \cdots \otimes J_G}_{m\text{-mal}} \otimes A, & \text{wenn } m \geq 0, \\ A^m &= \underbrace{I_G \otimes \cdots \otimes I_G}_{|m|\text{-mal}} \otimes A, & \text{wenn } m \leq 0. \end{aligned}$$

Durch Hintereinanderschaltung

$$H^{q-m}(g, A^m) \longrightarrow H^{q-(m-1)}(g, A^{m-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^q(g, A)$$

der Abbildung δ bzw. δ^{-1} , erhalten wir die Isomorphismen

$$\delta^m : H^{q-m}(g, A^m) \longrightarrow H^q(g, A) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Wir können also sagen:

(3.15) Satz. *Jedem G -Modul A sind die G -Moduln*

$$\begin{aligned} A^m &= J_G \otimes \cdots \otimes J_G \otimes A & (m \geq 0) \text{ bzw.} \\ A^m &= I_G \otimes \cdots \otimes I_G \otimes A & (m \leq 0) \end{aligned}$$

zugeordnet, und die m -malige Hintereinanderschaltung des Verbindungshomomorphismus δ liefert einen Isomorphismus

$$\delta^m : H^{q-m}(g, A^m) \longrightarrow H^q(g, A) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

für jedes q und jede Untergruppe $g \subseteq G$.

Auf Grund der Isomorphie $H^q(g, A) \cong H^{q-m}(g, A^m)$ werden wir im folgenden häufig von Aussagen über Kohomologiegruppen einer Dimension q auf analoge Aussagen für eine höhere oder niedrigere Dimension schließen können. Insbesondere werden wir nach dieser Methode in den Stand gesetzt, viele Definitionen und Beweise auf den Fall der nulldimensionalen Kohomologiegruppen zurückzuführen, die wir im Gegensatz zu den höherdimensionalen vollständig in der Hand haben. Man nennt diese Vorgehensweise die **Methode der Dimensionsverschiebung**¹⁰⁾. Der folgende Satz stellt ein erstes Beispiel für die Nützlichkeit dieser Methode dar:

¹⁰⁾ Man kann dieses Prinzip auch direkt zur Grundlage der ganzen Kohomologietheorie machen. Nach (3.15) ist nämlich

$$H^q(G, A) \cong H^0(G, A^q),$$

wobei A^q in kanonischer Weise durch A gegeben ist: $A^q = J_G \otimes \cdots \otimes J_G \otimes A$ für $q \geq 0$ bzw. $A^q = I_G \otimes \cdots \otimes I_G \otimes A$ für $q \leq 0$. Die Kohomologiegruppen des G -Moduls A können daher von vornherein durch

$$H^q(G, A) = (A^q)^G / N_G A^q$$

definiert werden. Eine auf diesem Konzept beruhende Kohomologietheorie findet man bei C. CHEVALLEY [12].

(3.16) Satz. Die Gruppen $H^q(G, A)$ sind Torsionsgruppen, und zwar sind die Ordnungen der Elemente von $H^q(G, A)$ sämtlich Teiler der Ordnung n von G :

$$n \cdot H^q(G, A) = 0.$$

Beweis. Es gilt $n \cdot H^0(G, A) = 0$, denn es ist $H^0(G, A) = A^G/N_G A$ und $na = N_G a$ für alle $a \in A^G$. Da dies für jeden G -Modul zutrifft, folgt der allgemeine Fall aus $H^q(G, A) \cong H^0(G, A^q)$.

(3.17) Korollar. Ein G -Modul A mit eindeutiger und uneingeschränkter Division¹¹⁾ hat triviale Kohomologie.

In diesem Fall ist nämlich die Abbildung $n \cdot \text{Id} : A \rightarrow A$ für jede natürliche Zahl n bijektiv und induziert also die Isomorphismen

$$n \cdot \text{Id} : H^q(g, A) \rightarrow H^q(g, A) \quad (g \subseteq G).$$

Ist $n = |G|$, so wird daher $H^q(g, A) = n \cdot H^q(g, A) = 0$.

Insbesondere hat hiernach der G -Modul \mathbb{Q} (auf dem die Gruppe G stets identisch operiert) triviale Kohomologie. Die zur Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

gehörige exakte Kohomologiesequenz liefert daher das

(3.18) Korollar. $H^2(G, \mathbb{Z}) \cong H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \chi(G)$ (kanonisch).

Die Gruppe $\chi(G) = \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ heißt die **Charaktergruppe** von G .

Wir beschließen diesen Paragraphen mit der Berechnung der Gruppe $H^{-2}(G, \mathbb{Z})$; sie spielt in der Klassenkörpertheorie eine bedeutsame Rolle. Wir bezeichnen mit G' die Kommutatorgruppe und mit $G^{\text{ab}} = G/G'$ die Faktor-
kommutatorgruppe von G .

(3.19) Satz. $H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}$ (kanonisch).

¹¹⁾ Eine abelsche Gruppe A ist mit eindeutiger und uneingeschränkter Division ausgestattet, wenn die Gleichung $nx = a$ für jede natürliche Zahl n und jedes $a \in A$ eine eindeutige Lösung $x \in A$ besitzt.

Beweis. Da $\mathbb{Z}[G]$ als G -induzierter Modul triviale Kohomologie besitzt, erhalten wir aus der zur Sequenz

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

gebildeten exakten Kohomologiesequenz den Isomorphismus

$$\delta : H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{-1}(G, I_G).$$

Nun ist aber $H^{-1}(G, I_G) = I_G/I_G^2$. Es kommt also darauf an, einen Isomorphismus $G/G' \cong I_G/I_G^2$ anzugeben. (Man beachte, dass G multiplikativ, I_G aber additiv ist.) Dazu betrachten wir die Abbildung

$$G \longrightarrow I_G/I_G^2 \quad \text{definiert durch} \quad \sigma \longmapsto (\sigma - 1) + I_G^2.$$

Wegen $\sigma \cdot \tau - 1 = (\sigma - 1) + (\tau - 1) + (\sigma - 1) \cdot (\tau - 1)$ handelt es sich hierbei um einen Homomorphismus, dessen Kern wegen der Kommutativität von I_G/I_G^2 den Kommutator G' enthält. Wir kommen daher zu einem Homomorphismus

$$\log : G/G' \longrightarrow I_G/I_G^2.$$

Um die Bijektivität von \log zu zeigen, beachten wir, dass I_G die freien Erzeugenden $\sigma - 1$, $\sigma \in G$, besitzt, so dass durch die Zuordnung

$$\sigma - 1 \longmapsto \sigma \cdot G'$$

ein Homomorphismus von I_G auf G/G' festgelegt wird. Wegen

$$(\sigma - 1) \cdot (\tau - 1) = (\sigma\tau - 1) - (\sigma - 1) - (\tau - 1) \longmapsto \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}G' = \bar{1}$$

liegen die Elemente aus I_G^2 im Kern, so dass wir einen Homomorphismus

$$\exp : I_G/I_G^2 \longrightarrow G/G' \quad \text{mit} \quad (\sigma - 1) + I_G^2 \longmapsto \sigma G'$$

erhalten, für welchen $\log \circ \exp = \text{Id}$ und $\exp \circ \log = \text{Id}$ gilt. Daher ist $\log : G/G' \rightarrow I_G/I_G^2$ ein Isomorphismus.

Offenbar ist $H^{-1}(G, \mathbb{Z}) = {}_{N_G} \mathbb{Z}/I_G \mathbb{Z} = 0$, $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $H^1(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Damit haben wir die Kohomologiegruppen $H^q(G, \mathbb{Z})$ für die Dimensionen $q = -2, -1, 0, 1, 2$ berechnet:

$$H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}, \quad H^{-1}(G, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

$$H^1(G, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(G, \mathbb{Z}) = \chi(G).$$

Ohne Beweis sei erwähnt, dass in kanonischer Weise

$$H^{-q}(G, \mathbb{Z}) \cong \chi(H^q(G, \mathbb{Z})) \quad \text{für alle } q > 0$$

gilt (Dualitätssatz).

§ 4. Die Inflation, Restriktion und Korestriktion

Haben wir im vorigen Paragraphen die Abhängigkeit der Kohomologiegruppen $H^q(G, A)$ vom Modul A studiert, so wollen wir uns jetzt dem Verhalten derselben bei Änderung der Gruppe G zuwenden. Es handelt sich dabei in der Hauptsache um die folgende Fragestellung:

Sei A ein G -Modul und g eine Untergruppe von G . Dann ist A auch ein g -Modul, und wenn g invariant in G ist, so ist A^g ein G/g -Modul. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Kohomologiegruppen

$$H^q(G/g, A^g), H^q(G, A) \text{ und } H^q(g, A) ?$$

Wir schränken unsere diesbezüglichen Betrachtungen zunächst auf den Fall positiver Dimensionen $q \geq 1$ ein.

Ist g invariant in G , so ordnen wir jeder q -Kokette

$$x : G/g \times \cdots \times G/g \longrightarrow A^g$$

durch $y(\sigma_1, \dots, \sigma_q) = x(\sigma_1 \cdot g, \dots, \sigma_q \cdot g)$ eine q -Kokette

$$y : G \times \cdots \times G \longrightarrow A$$

zu. Diese nennen wir die **Inflation** von x und bezeichnen sie mit

$$y = \text{Inf } x.$$

Man sieht auf einen Blick, dass die Zuordnung $x \mapsto \text{Inf } x$ mit dem Korandoperator ∂ verträglich ist, d.h. es ist $\partial_{q+1} \circ \text{Inf} = \text{Inf} \circ \partial_{q+1}$. Es gehen daher Kozykeln in Kozykeln und Koränder in Koränder über, und wir erhalten die

(4.1) Definition. Sei A ein G -Modul, g ein Normalteiler von G . Der durch den kanonischen Homomorphismus der q -ten Kokettengruppe des G/g -Moduls A^g in die q -te Kokettengruppe des G -Moduls A induzierte Homomorphismus

$$\text{Inf}_q : H^q(G/g, A^g) \longrightarrow H^q(G, A), \quad q \geq 1,$$

heißt die **Inflation**.

Neben der Inflation erhalten wir eine weitere kohomologische Abbildung, wenn wir jeder q -Kokette

$$x : G \times \cdots \times G \longrightarrow A$$

ihre Einschränkung

$$y : g \times \cdots \times g \longrightarrow A$$

von $G \times \cdots \times G$ auf $g \times \cdots \times g$ zuordnen. Diese q -Kokette y nennen wir die **Restriktion** von x und bezeichnen sie mit

$$y = \text{Res } x.$$

Entscheidend ist dabei wieder, dass der Kokettenhomomorphismus Res mit dem Operator ∂ vertauschbar ist, $\partial_{q+1} \circ \text{Res} = \text{Res} \circ \partial_{q+1}$, dass also bei

der Zuordnung $x \mapsto \text{Res } x$ Kozykeln in Kozykeln und Koränder in Koränder übergehen. Wir erhalten daher die

(4.2) Definition. Sei A ein G -Modul, g eine Untergruppe von G . Der durch die Einschränkung der Koketten des G -Moduls A auf die Gruppe g induzierte Homomorphismus

$$\text{Res}_g : H^q(G, A) \longrightarrow H^q(g, A), \quad q \geq 1,$$

heißt die **Restriktion**.

Man hat bei jeder neu eingeführten kohomologischen Abbildung zu prüfen, ob sie mit den schon vorhandenen kanonischen Homomorphismen verträglich ist, denn nur in diesem Fall handelt es sich um eine brauchbare, zur Theorie gehörige Begriffsbildung. Für die Inflation und Restriktion haben wir daher die folgenden Sätze zu konstatieren.

(4.3) Satz. Seien A und B zwei G -Moduln, g ein Normalteiler von G und

$$f : A \longrightarrow B$$

ein G -Homomorphismus. Dann sind die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^q(G/g, A^g) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(G/g, B^g) \\ \downarrow \text{Inf}_g & & \downarrow \text{Inf}_g \\ H^q(G, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(G, B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^q(G, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(G, B) \\ \downarrow \text{Res}_g & & \downarrow \text{Res}_g \\ H^q(g, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(g, B) \end{array}$$

kommutativ. Im zweiten Diagramm braucht die Normalität von g in G nicht vorausgesetzt zu werden.

Man beachte hierbei, dass der G -Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ einen G/g -Homomorphismus $f : A^g \rightarrow B^g$ und einen g -Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ induziert.

(4.4) Satz. Sei

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln und G -Homomorphismen und g ein Normalteiler von G . Ist dann auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow A^g \longrightarrow B^g \longrightarrow C^g \longrightarrow 0$$

exakt, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^q(G/g, C^g) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G/g, A^g) \\
\downarrow \text{Inf}_q & & \downarrow \text{Inf}_{q+1} \\
H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A)
\end{array}$$

kommutativ.

(4.5) Satz. Sei

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln und G -Homomorphismen, g eine Untergruppe von G . Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A) \\
\downarrow \text{Res}_q & & \downarrow \text{Res}_{q+1} \\
H^q(g, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(g, A)
\end{array}$$

kommutativ.

Die Sätze (4.3), (4.4) und (4.5) sind mühelos zu verifizieren. Der Beweis der letzten beiden beruht im wesentlichen auf der Vertauschbarkeit der Kokettenabbildungen mit dem Operator ∂ und folgt unter Beachtung dieser Tatsache unmittelbar aus der Definition der Abbildung δ . Wir überlassen die Einzelheiten dem Leser.

Fügen wir die Inflation und die Restriktion zusammen, so erhalten wir zunächst die folgende Beziehung:

(4.6) Satz. Ist A ein G -Modul und g ein Normalteiler von G , so ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(G/g, A^g) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(g, A)$$

exakt.

Beweis. Die Injektivität der Inflation erkennt man folgendermaßen: Sei $x : G/g \rightarrow A^g$ ein 1-Kozykel, dessen Inflation $\text{Inf } x$ ein 1-Korand des G -Moduls A ist. Es ist dann

$$\text{Inf } x(\sigma) = x(\sigma \cdot g) = \sigma a - a, \quad a \in A.$$

Wir haben daher für alle $\tau \in g$ die Gleichung $\sigma a - a = \sigma \tau a - a$, d.h. $a = \tau a$, so dass $a \in A^g$. Daher ist $x(\sigma g) = \sigma \cdot ga - a$ ein 1-Korand.

Zum Beweis der Exaktheit an der Stelle $H^1(G, A)$ sei $x : G/g \rightarrow A^g$ ein 1-Kozykel von A^g . Dann ist für $\sigma \in g$

$$\text{Res} \circ \text{Inf } x(\sigma) = \text{Inf } x(\sigma) = x(\sigma g) = x(g) = x(\bar{1}).$$

Nun ist aber $x(\bar{1}) = x(\bar{1} \cdot \bar{1}) = x(\bar{1}) + x(\bar{1}) = 0$. Daher ist

$$\text{Bild Inf} \subseteq \text{Kern Res.}$$

Sei umgekehrt $x : G \rightarrow A$ ein 1-Kozykel des G -Moduls A , dessen Restriktion auf g ein 1-Korand des g -Moduls A wird:

$$x(\tau) = \tau a - a, \quad a \in A, \quad \text{für alle } \tau \in g.$$

Subtrahieren wir von x den 1-Korand $\rho : G \rightarrow A$, $\rho(\sigma) = \sigma a - a$, $\sigma \in G$, so erhalten wir einen 1-Kozykel $x'(\sigma) = x(\sigma) - \rho(\sigma)$ der gleichen Kohomologiekategorie mit $x'(\tau) = 0$ für alle $\tau \in g$. Es ist dann

$$x'(\sigma - \tau) = x'(\sigma) + \sigma x'(\tau) = x'(\sigma) \quad \text{für alle } \tau \in g,$$

und andererseits

$$x'(\tau \cdot \sigma) = x'(\tau) + \tau x'(\sigma) = \tau x'(\sigma) \quad \text{für alle } \tau \in g.$$

Definieren wir nun $y : G/g \rightarrow A$ durch $y(\sigma \cdot g) = x'(\sigma)$, so ist $y(\sigma \cdot g) \in A^g$ wegen $y(\sigma \cdot g) = y(\tau \sigma \cdot g)$ für alle $\tau \in g$, und wir erhalten in y einen 1-Kozykel mit $\text{Inf } y = x'$. Daher ist $\text{Kern Res} \subseteq \text{Bild Inf}$.

Der Satz (4.6) lässt sich auf beliebige positive Dimensionen nur unter einer gewissen Voraussetzung ausdehnen:

(4.7) Satz. *Sei A ein G -Modul, g ein Normalteiler von G . Ist dann $H^i(g, A) = 0$ für $i = 1, \dots, q-1$ und $q \geq 1$, so ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^q(G/g, A^g) \xrightarrow{\text{Inf}} H^q(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^q(g, A)$$

exakt.

Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion nach der Dimension q , indem wir die Methode der Dimensionsverschiebung heranziehen (vgl. §3). Als Induktionsanfang dient der Satz (4.6). Setzen wir $B = \mathbb{Z}[G] \otimes A$ und $C = J_G \otimes A$, so erhalten wir nach (3.14) die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Wegen $H^1(g, A) = 0$ ergibt sich aus (3.4) auch die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow A^g \longrightarrow B^g \longrightarrow C^g \longrightarrow 0.$$

Wir erhalten daher das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{q-1}(G/g, C^g) & \xrightarrow{\text{Inf}} & H^{q-1}(G, C) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^{q-1}(g, C) \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ 0 & \longrightarrow & H^q(G/g, A^g) & \xrightarrow{\text{Inf}} & H^q(G, A) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^q(g, A). \end{array}$$

Da B G -induziert und g -induziert und B^g G/g -induziert ist (vgl. (3.10) und (3.11)), handelt es sich bei den Abbildungen δ um Isomorphismen (vgl. (3.3)), und es gilt überdies

$$H^i(g, C) \cong H^{i+1}(g, A) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, q-2.$$

Nehmen wir hiernach die Exaktheit der oberen Sequenz als Induktionsvoraussetzung an, so überträgt sich diese automatisch auf die untere Sequenz.

Man wird sich natürlich fragen, warum wir uns bei der Einführung der Abbildungen Inf und Res auf die positiven Dimensionen $q \geq 1$ beschränkt, und nicht in analoger Weise von den Koketten ausgehend auch für die negativen Dimensionen Inflation und Restriktion definiert haben. Ein solches Vorgehen ist jedoch nicht möglich. Die entscheidende Eigenschaft der Inflations- bzw. Restriktionsabbildungen liegt nämlich darin, dass sie gemäß (4.4) bzw. (4.5) bei einer Dimensionsverschiebung durch den Operator δ ineinander übergehen, und diese Eigenschaft müsste natürlich bei einer entsprechenden Definition für alle Dimensionen erhalten bleiben. Was nun die Inflation angeht, so legt uns eine solche Forderung die Beschränkung auf den Fall $q \geq 1$ zwangsläufig auf; dies liegt im wesentlichen daran, dass aus einer exakten Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ von G -Moduln i.a. nicht die Exaktheit der Sequenz $0 \rightarrow A^g \rightarrow B^g \rightarrow C^g \rightarrow 0$ ($g \subseteq G$) folgt, so dass wir zwar aus der ersten, nicht aber aus der zweiten einen δ -Homomorphismus für die Kohomologiegruppen gewinnen.

Anders steht es jedoch mit der Restriktion. Diese lässt sich tatsächlich unter den geschilderten Bedingungen auf die Dimension $q \leq 0$ ausdehnen. Für $q = 0$ erhält man z.B. durch die Zuordnung

$$a + N_G A \mapsto a + N_g A, \quad a \in A^G \subseteq A^g,$$

einen Homomorphismus

$$\text{Res}_0 : H^0(G, A) = A^G / N_G A \longrightarrow H^0(g, A) = A^g / N_g A,$$

derart dass der Satz (4.5) unter Einbeziehung der Dimension $q = 0$ erhalten bleibt. Dies halten wir in dem folgenden Lemma fest:

(4.8) Lemma. *Ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von G -Moduln und g eine Untergruppe von G , so ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G, A) \\ \downarrow \text{Res}_0 & & \downarrow \text{Res}_1 \\ H^0(g, C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(g, A) \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Sei $c \in C^G$ ein 0-Kozykel des G -Moduls C , $\bar{c} = c + N_G C$ seine Kohomologiekategorie. Dann ist $\text{Res}_0 \bar{c} = c + N_g C$, d.h. c ist gleichzeitig ein 0-Kozykel für den g -Modul C . Wählen wir ein $b \in B$ mit $jb = c$, so gibt es wegen $j\partial b = \partial c = 0$ einen 1-Kozykel $a_1 : G \rightarrow A$, derart dass $ia_1 = \partial b$. Nach der Definition von δ ist nun $\delta\bar{c} = \bar{a}_1$ und $\delta\text{Res}_0 \bar{c} = \overline{\text{Res}_1 a_1} = \text{Res}_1 \bar{a}_1 = \text{Res}_1 \delta\bar{c}$.

Eine ähnlich elementare Definition der Abbildungen Res_q für die Dimensionen $q < 0$ lässt sich leider nicht angeben. Wir werden jedoch sehen, dass die Forderung (4.5) die Restriktionsabbildungen in eindeutiger Weise festlegt, wenn diese nur für eine Dimension, etwa $q = 0$, gegeben sind. Diese Erkenntnis versetzt uns in die Lage, die Restriktion in der folgenden Weise axiomatisch einzuführen.

(4.9) Definition. Sei G eine endliche Gruppe, g eine Untergruppe von G . Unter der **Restriktion** verstehen wir die eindeutig bestimmte Familie von Homomorphismen

$$\text{Res}_q : H^q(G, A) \longrightarrow H^q(g, A), \quad q \in \mathbb{Z},$$

mit den Eigenschaften:

- (i) $\text{Res}_0 : H^0(G, A) \longrightarrow H^0(g, A)$
ist durch die Zuordnung $a + N_G A \mapsto a + N_g A$ ($a \in A^G$) gegeben.
(ii) Für jede exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ von G -Moduln und G -Homomorphismen ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A) \\ \downarrow \text{Res}_q & & \downarrow \text{Res}_{q+1} \\ H^q(g, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(g, A) \end{array} \quad \text{kommutativ.}$$

Die Homomorphismen Res_q entstehen aus Res_0 in der folgenden Weise durch Dimensionsverschiebung:

Nach (3.15) haben wir die Isomorphismen

$$\delta^q : H^0(G, A^q) \longrightarrow H^q(G, A), \quad \delta^q : H^0(g, A^q) \longrightarrow H^q(g, A),$$

die wir durch q -maliges Hintereinanderschalten des Verbindungshomomorphismus δ erhalten. Die Bedingung (ii) bedeutet nun, dass wir Res_q durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, A^q) & \xrightarrow{\delta^q} & H^q(G, A) \\ \downarrow \text{Res}_0 & & \downarrow \text{Res}_q \\ H^0(g, A^q) & \xrightarrow{\delta^q} & H^q(g, A) \end{array}$$

zu definieren haben. Damit ist gleichzeitig die Eindeutigkeit der Restriktionsabbildung bewiesen. Insbesondere erhalten wir das Resultat, dass die so definierte Abbildung Res_q für $q \geq 0$ mit der schon früher eingeführten übereinstimmt.

Wir haben nur noch zu zeigen, dass die Homomorphismen Res_q allgemein die Bedingung (ii) erfüllen. Zu diesem Zweck betrachten wir das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(G, C^q) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G, A^q) & & \\
 \downarrow \delta^q & \searrow \text{Res} & \downarrow (-1)^q \delta^q & \searrow \text{Res} & \\
 & H^0(g, C^q) & \xrightarrow{\delta} & H^1(g, A^q) & \\
 & \downarrow \delta^q & & \downarrow (-1)^q \delta^q & \\
 H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A) & & \\
 \searrow \text{Res} & \downarrow \delta^q & \searrow \text{Res} & & \\
 & H^q(g, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(g, A) &
 \end{array}$$

wobei zu beachten ist, dass aus der Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ die Sequenz

$$0 \rightarrow A^q \rightarrow B^q \rightarrow C^q \rightarrow 0$$

entsteht, deren Exaktheit unter Beachtung von (1.2) mit vollständiger Induktion dem Lemma (1.9) zu entnehmen ist. In diesem Diagramm ist das obere Quadrat nach (4.8) kommutativ. Die Kommutativität der beiden Seitendiagramme folgt unmittelbar aus der Definition der Restriktionsabbildungen durch die Dimensionsverschiebung. Das hintere und das vordere Diagramm entstehen durch Untereinandersetzen von q Quadraten des Typs (3.6). Sie sind also nach (3.6) gleichfalls kommutativ. Daher überträgt sich die Kommutativität des oberen Quadrates auf das untere Quadrat, und es ist alles bewiesen.

Was die explizite Bedeutung der Homomorphismen Res_q für $q < 0$ angeht, was also die Frage betrifft, wie sich die einzelnen Kozykeln unter der Abbildung Res_q verhalten, so kommt man hier nur über umfängliche Rechnungen zu Resultaten, die wegen ihrer Unübersichtlichkeit gar nicht zu gebrauchen sind. Jedoch gilt in diesem Zusammenhang das auf S. 22 Gesagte. Im wesentlichen tritt nur immer das funktorielle Verhalten der Restriktion in Erscheinung; lediglich für kleine Dimensionen, also für die Dimensionen, für die wir eine konkrete Interpretation der Kohomologiegruppen besitzen, haben wir hin und wieder auch die Restriktion in expliziter Weise zu interpretieren. Einen für die Klassenkörpertheorie bedeutsamen Spezialfall legt der Satz (3.19) nahe:

(4.10) Definition. *Der durch die Abbildung*

$$\text{Res}_{-2} : H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{-2}(g, \mathbb{Z})$$

induzierte Homomorphismus

$$\text{Ver} : G^{\text{ab}} \longrightarrow g^{\text{ab}}$$

*heißt die **Verlagerung** von G nach g .*

Dieser kanonische Homomorphismus lässt sich auch, wenngleich mit einigem Formelaufwand, rein gruppentheoretisch, also ohne kohomologische Mittel angeben. Vgl. [16], 14.2.

Der Restriktion steht eine weitere Abbildung

$$\text{Kor}_q : H^q(g, A) \longrightarrow H^q(G, A)$$

im umgekehrten Richtung zur Seite, die **Korestriktion**. Ebenso wie die Restriktion ist auch die Korestriktion schon durch ihre Festlegung auf einer Dimension vollständig bestimmt. Wir geben sie jedoch, bevor wir zur allgemeinen Definition kommen, für die beiden Dimensionen $q = -1$ und $q = 0$ an:

Durch die Zuordnung

$$a + I_g A \longmapsto a + I_G A \quad (a \in N_g A \subseteq N_G A)$$

wird ein Homomorphismus

$$\text{Kor}_{-1} : H^{-1}(g, A) \longrightarrow H^{-1}(G, A)$$

definiert. Ferner erhalten wir durch die Zuordnung

$$a + N_g A \longmapsto N_{G/g} a + N_G A \quad (a \in A^g)$$

einen Homomorphismus

$$\text{Kor}_0 : H^0(g, A) \longrightarrow H^0(G, A).$$

Dabei sei $N_{G/g} a = \sum_{\sigma \in G/g} \sigma a \in A^G$ für $a \in A^g$; $\sigma \in G/g$ bedeutet, dass σ ein Linksrepräsentantensystem für die Nebenscharen von g in G durchläuft. In Analogie zu (4.8) beweisen wir das

(4.11) Lemma. *Ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von G -Moduln, so ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(g, C) & \xrightarrow{\delta} & H^0(g, A) \\ \downarrow \text{Kor}_{-1} & & \downarrow \text{Kor}_0 \\ H^{-1}(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^0(G, A) \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Sei $c \in {}_{N_g}C$ ein (-1) -Kozykel für die Klasse $\bar{c} = c + I_GC \in H^{-1}(g, C)$. Dann ist $c \in {}_{N_G}C$ auch ein (-1) -Kozykel für die Klasse $\text{Kor}_{-1}\bar{c} = c + I_GC \in H^{-1}(G, C)$. Wählen wir ein $b \in B$ mit $jb = c$, so gibt es wegen $j\partial b = \partial c = N_gc = 0$ einen 0-Kozykel $a \in A^g$ mit $ia = \partial b = N_gb$. Definitionsgemäß wird dann $\delta\bar{c} = \bar{a} = a + N_gA$, also $\text{Kor}_0\delta\bar{c} = N_{G/g}a + N_GA \in H^0(G, A)$. Andererseits ist $\delta\text{Kor}_{-1}\bar{c} = \delta(c + I_GA)$. Wählen wir das gleiche $b \in B$ mit $jb = c$ wie oben, so ist $\partial b = N_gb = N_{G/g}N_gb = N_{G/g}(ia) = i(N_{G/g}a)$ und es wird $\delta(c + I_GA) = N_{G/g}a + N_GA$, also

$$\text{Kor}_0\delta\bar{c} = N_{G/g}a + N_GA = \delta\text{Kor}_{-1}\bar{c}.$$

Die allgemeine Korestriktionsdefinition erhalten wir nun genau wie die Restriktion axiomatisch.

(4.12) Definition. Sei G eine endliche Gruppe, g eine Untergruppe von G . Unter der **Korestriktion** verstehen wir die eindeutig bestimmte Familie von Homomorphismen

$$\text{Kor}_q : H^q(g, A) \longrightarrow H^q(G, A), \quad q \in \mathbb{Z},$$

mit den Eigenschaften:

(i)

$$\text{Kor}_0 : H^0(g, A) \longrightarrow H^0(G, A)$$

ist durch die Zuordnung $a + N_gA \mapsto N_{G/g}a + N_GA$ ($a \in A^g$) gegeben.

(ii) Für jede exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

von G -Moduln und G -Homomorphismen ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(g, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(g, A) \\ \downarrow \text{Kor}_q & & \downarrow \text{Kor}_{q+1} \\ H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A) \end{array} \quad \text{kommutativ.}$$

Die Homomorphismen Kor_q entstehen aus Kor_0 genau wie bei der Restriktion durch Dimensionsverschiebung:

Nach (3.15) haben wir die Isomorphismen

$$\delta^q : H^0(G, A^q) \longrightarrow H^q(G, A), \quad \delta^q : H^0(g, A^q) \longrightarrow H^q(g, A).$$

Damit wird Kor_q aufgrund von (ii) in eindeutiger Weise durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(g, A^q) & \xrightarrow{\delta^q} & H^q(g, A) \\ \downarrow \text{Kor}_0 & & \downarrow \text{Kor}_q \\ H^0(G, A^q) & \xrightarrow{\delta^q} & H^q(G, A) \end{array}$$

festgelegt. Insbesondere erhalten wir hierdurch den auf S. 42 eingeführten Homomorphismus Kor_{-1} wegen der Eindeutigkeit und wegen (4.11) zurück. Die allgemeine Gültigkeit von (ii) folgern wir in der gleichen Weise wie bei der Restriktion unter Beachtung von (4.11) und (3.6) aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{-1}(g, C^{q+1}) & \xrightarrow{\delta} & H^0(g, A^{q+1}) & & \\
 \delta^{q+1} \downarrow & \searrow \text{Kor} & \downarrow (-1)^{q+1} \delta^{q+1} & \searrow \text{Kor} & \\
 & H^{-1}(G, C^{q+1}) & \xrightarrow{\delta} & H^0(G, A^{q+1}) & \\
 & \downarrow \delta^{q+1} & & \downarrow (-1)^{q+1} \delta^{q+1} & \\
 H^q(g, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(g, A) & & \\
 \searrow \text{Kor} & & \searrow \text{Kor} & & \\
 & H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A) &
 \end{array}$$

Es sei erwähnt, dass man die Korestriktion für die negativen Dimensionen sehr einfach auch durch kanonische Kokettenzuordnungen erhält, ähnlich wie die Restriktion auf den positiven Dimensionen. Hierauf brauchen wir jedoch nicht näher einzugehen. Im Hinblick auf (4.10) wollen wir nun den folgenden Satz angeben:

(4.13) Satz. *Die durch*

$$\text{Kor}_{-2} : H^{-2}(g, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{-2}(G, \mathbb{Z})$$

induzierte Abbildung

$$\kappa : g^{\text{ab}} \longrightarrow G^{\text{ab}}$$

ist der kanonische Homomorphismus, den man durch $\sigma g' \mapsto \sigma G'$ erhält.

Dies folgt unter Berücksichtigung des Beweises zu (3.19) aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{-2}(g, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^{-1}(g, I_g) = I_g/I_g^2 & \xleftarrow{\log} & g^{\text{ab}} \\
 \downarrow \text{Kor}_{-2} & & \downarrow \text{Kor}_{-1} & & \downarrow \kappa \\
 H^{-2}(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^{-1}(G, I_G) = I_G/I_G^2 & \xleftarrow{\log} & G^{\text{ab}}.
 \end{array}$$

Wichtig ist die folgende Beziehung zwischen der Restriktion und der Korestriktion:

(4.14) Satz. *Die Hintereinanderschaltung der Homomorphismen*

$$H^q(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^q(g, A) \xrightarrow{\text{Kor}} H^q(G, A)$$

ergibt den Endomorphismus

$$\text{Kor} \circ \text{Res} = (G : g) \cdot \text{Id}.$$

Beweis. Sei $\bar{a} = a + N_G A \in H^0(G, A)$, $a \in A^G$. Dann ist $\text{Kor}_0 \circ \text{Res}_0(\bar{a}) = \text{Kor}_0(a + N_g A) = N_{G/g} a + N_G A = (G : g) \cdot a + N_G A = (G : g) \cdot \bar{a}$.

Der allgemeine Fall folgt hieraus durch Dimensionsverschiebung. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, A^q) & \xrightarrow{\text{Kor}_0 \circ \text{Res}_0} & H^0(G, A^q) \\ \delta^q \downarrow & & \downarrow \delta^q \\ H^q(G, A) & \xrightarrow{\text{Kor}_q \circ \text{Res}_q} & H^q(G, A) \end{array}$$

ist nämlich kommutativ, und da es sich oben um die Abbildung $(G : g) \cdot \text{Id}$ handelt, gilt auch unten $\text{Kor}_q \circ \text{Res}_q = (G : g) \cdot \text{Id}$.

Aus der Vertauschbarkeit der Abbildungen Res und Kor mit dem Verbindungshomomorphismus δ folgt ihre Vertauschbarkeit mit den durch die G -Homomorphismen induzierten Abbildungen automatisch:

(4.15) Satz. *Ist $f : A \rightarrow B$ ein G -Homomorphismus der G -Moduln A, B und g eine Untergruppe von G , so sind die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(G, B) \\ \text{Res} \updownarrow \text{Kor} & & \text{Res} \updownarrow \text{Kor} \\ H^q(g, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(g, B) \end{array}$$

kommutativ.

Dies ist für die Dimension $q = 0$ unmittelbar klar. Der allgemeine Fall folgt in einfacher Weise durch Dimensionsverschiebung. Durch $A \xrightarrow{f} B$ wird nämlich ein Homomorphismus $A^q \xrightarrow{f} B^q$ induziert, und in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(G, A^q) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^0(G, B^q) & & \\
\downarrow \delta^q & \swarrow \text{Kor} & \downarrow \delta^q & \swarrow \text{Kor} & \\
& \text{Res} \searrow & H^0(g, A^q) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^0(g, B^q) \\
& & \downarrow \delta^q & & \downarrow \delta^q \\
H^q(G, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(G, B) & & \\
\downarrow \delta^q & \swarrow \text{Kor} & \downarrow \delta^q & \swarrow \text{Kor} & \\
& \text{Res} \searrow & H^q(g, A) & \xrightarrow{\bar{f}} & H^q(g, B) \\
& & \downarrow \delta^q & & \downarrow \delta^q
\end{array}$$

sind alle vertikalen Quadrate kommutativ, so dass sich die Kommutativität des oberen Diagramms auf das untere überträgt.

Die Kohomologiegruppen $H^q(G, A)$ sind als abelsche Torsionsgruppen die direkte Summe ihrer **p -Sylowgruppen**, d.h. der Gruppen $H^q(G, A)_p$ aller Elemente von $H^q(G, A)$ von einer p -Potenzordnung:

$$H^q(G, A) = \bigoplus_p H^q(G, A)_p.$$

Oft nennt man $H^q(G, A)_p$ den **p -primären** Teil von $H^q(G, A)$. Hierüber haben wir nun den folgenden

(4.16) Satz. Ist A ein G -Modul und G_p eine p -Sylowgruppe von G , so ist der Homomorphismus

$$\text{Res} : H^q(G, A)_p \longrightarrow H^q(G_p, A)$$

stets injektiv und der Homomorphismus

$$\text{Kor} : H^q(G_p, A) \longrightarrow H^q(G, A)_p$$

stets surjektiv.

Beweis. Da $\text{Kor} \circ \text{Res} = (G : G_p) \cdot \text{Id}$, und da $(G : G_p)$ zu p teilerfremd ist, ist die Abbildung $H^q(G, A)_p \xrightarrow{\text{Kor} \circ \text{Res}} H^q(G, A)_p$ ein Automorphismus. Ist daher $x \in H^q(G, A)_p$ und $\text{Res } x = 0$, so folgt aus $\text{Kor} \circ \text{Res } x = 0$ sofort $x = 0$ und dies zeigt die Injektivität von Res auf $H^q(G, A)_p$.

Andererseits besteht $H^q(G_p, A)$ aus lauter Elementen von p -Potenzordnung (vgl. (3.15)), so dass $\text{Kor } H^q(G_p, A) \subseteq H^q(G, A)_p$. Die Gleichheit ergibt sich aus der Bijektivität von $\text{Kor} \circ \text{Res}$ auf $H^q(G, A)_p$.

Es kommt häufig vor, dass wir das Verschwinden gewisser Kohomologiegruppen zu beweisen haben. In vielen dieser Fälle ziehen wir das folgende Korollar zu (4.16) heran, das eine Reduktion dieses Problems auf den Fall der p -Gruppen liefert.

(4.17) Korollar. *Ist für jede Primzahl p die Gruppe $H^q(G_p, A) = 0$ für eine p -Sylowgruppe G_p von G , so ist $H^q(G, A) = 0$.*

Beweis. Wegen der Injektivität von $\text{Res} : H^q(G, A)_p \rightarrow H^q(G_p, A)$ sind alle p -Sylowgruppen $H^q(G, A)_p = 0$, also ist $H^q(G, A) = 0$.

Wir wollen uns zum Schluss dieses Paragraphen einer Verallgemeinerung der G -induzierten Moduln zuwenden. Mit ihr werden wir es in der globalen Klassenkörpertheorie zu tun haben.

(4.18) Definition. *Sei G eine endliche Gruppe, g eine Untergruppe von G . Ein G -Modul heißt **G/g -induziert**, wenn er eine Darstellung*

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G/g} \sigma D$$

besitzt, in der $D \subseteq A$ ein g -Modul ist und σ ein Linksrepräsentantensystem für die Nebenscharen von g in G durchläuft.

Für $g = \{1\}$ erhalten wir offenbar die G -induzierten Moduln zurück. In starker Verallgemeinerung zur kohomologischen Trivialität der G -induzierten Moduln haben wir den folgenden Satz, der häufig als **Lemma von Shapiro** zitiert wird:

(4.19) Satz. *Ist A ein G/g -induzierter G -Modul, $A = \bigoplus_{\sigma \in G/g} \sigma D$, so ist*

$$H^q(G, A) \cong H^q(g, D),$$

und zwar erhalten wir diesen Isomorphismus durch die Hintereinanderschaltung

$$H^q(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^q(g, A) \xrightarrow{\bar{\pi}} H^q(g, D),$$

wobei $\bar{\pi}$ durch die natürliche Projektion $A \xrightarrow{\pi} D$ induziert wird.

Den Beweis führen wir mit Hilfe der Dimensionsverschiebung. Sei $A = \bigoplus_{i=1}^m \sigma_i D$, wobei σ_i ein Linksrepräsentantensystem von G/g durchläuft und speziell $\sigma_1 = 1$ ist. Für $q = 0$ setzen wir der Abbildung

$$A^G/N_G A \xrightarrow{\text{Res}} A^g/N_g A \xrightarrow{\bar{\pi}} D^g/N_g D$$

die Abbildung $\nu : D^g/N_g D \rightarrow A^G/N_G A$ mit $\nu(d + N_g D) = \sum_{i=1}^m \sigma_i d + N_G A$ entgegen. Man verifiziert sofort, dass $(\bar{\pi} \circ \text{Res}) \circ \nu = \text{Id}$ und $\nu \circ (\bar{\pi} \circ \text{Res}) = \text{Id}$. Daher ist der Homomorphismus $\bar{\pi} \circ \text{Res}$ bijektiv.

Für eine beliebige Dimension q setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} A^q &= J_G \otimes \cdots \otimes J_G \otimes A & A^q &= I_G \otimes \cdots \otimes I_G \otimes A \\ D_*^q &= J_G \otimes \cdots \otimes J_G \otimes D & \text{bzw.} & D_*^q = I_G \otimes \cdots \otimes I_G \otimes D \\ D^q &= J_g \otimes \cdots \otimes J_g \otimes D & D^q &= I_g \otimes \cdots \otimes I_g \otimes D \end{aligned}$$

je nachdem $q \geq 0$ oder $q \leq 0$. Wegen $A = \bigoplus_{i=1}^m \sigma_i D$ ist $A^q = \bigoplus_{i=1}^m \sigma_i D_*^q$ ebenfalls G/g -induziert. Weiter prüft man sofort nach, dass

$$J_G = J_g \oplus K_1 \quad \text{bzw.} \quad I_G = I_g \oplus K_{-1}$$

mit den g -induzierten Moduln

$$K_1 = \bigoplus_{\tau \in g} \tau \left(\sum_{i=2}^m \mathbb{Z} \cdot \bar{\sigma}_i \right) \quad \text{und} \quad K_{-1} = \bigoplus_{\tau \in g} \tau \left(\sum_{i=2}^m \mathbb{Z} \cdot (\sigma_i - 1) \right).$$

Unter Beachtung von (1.5) und (3.10) ergibt sich hieraus für alle q die kanonische q -Modulzerlegung

$$D_*^q = D^q \oplus C^q$$

mit einem g -induzierten g -Modul C^q . Mit (3.15) erhalten wir nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^0(G, A^q) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^0(g, A^q) & \xrightarrow{\bar{\pi}_*} & H^0(g, D_*^q) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & H^0(g, D^q) \\ \downarrow \delta^q & & \downarrow \delta^q & & & & \downarrow \delta^q \\ H^q(G, A) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^q(g, A) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H^q(g, D) & & \end{array}$$

in dem die Abbildung $\bar{\pi}_* \circ \text{Res}$ in der oberen Zeile wegen der Dimension $q = 0$ und die Abbildung $\bar{\rho}$ aufgrund von (3.7) und (3.13) bijektiv sind. Da der zusammengesetzte Homomorphismus $A^q \xrightarrow{\bar{\pi}_*} D_*^q \xrightarrow{\bar{\rho}} D^q$ aus der Projektion $A \xrightarrow{\bar{\pi}} D$ entsteht, erweist sich das Diagramm als kommutativ, und aus der Bijektivität der Abbildung $\bar{\rho} \circ \bar{\pi}_* \circ \text{Res}$ oben, ergibt sich die Bijektivität der Abbildung $\bar{\pi} \circ \text{Res}$ unten.

§ 5. Das Cupprodukt

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass die Restriktion und die Korestriktion allein durch ihre kanonische Gegebenheit auf der Dimension $q = 0$ automatisch entsprechende Abbildungen für die Kohomologiegruppen in allen anderen Dimensionen induzieren. Genauso verhält es sich mit dem **Cupprodukt**, welches ebenfalls in der nullten Dimension unmittelbar durch das **Tensorprodukt** gegeben ist.

Sind A und B zwei G -Moduln, so ist auch $A \otimes B$ ein G -Modul, und wir erhalten durch die Zuordnung $(a, b) \mapsto a \otimes b$ die kanonische bilineare Abbildung

$$A^G \times B^G \longrightarrow (A \otimes B)^G,$$

die $N_G A \times N_G B$ offenbar in $N_G(A \otimes B)$ abbildet. Sie induziert daher eine bilineare Abbildung

$$H^0(G, A) \times H^0(G, B) \longrightarrow H^0(G, A \otimes B) \text{ durch } (\bar{a}, \bar{b}) \longrightarrow \overline{a \otimes b} \quad ^{12)}.$$

Wir nennen das Element $\overline{a \otimes b} \in H^0(G, A \otimes B)$ das **Cupprodukt** von $\bar{a} \in H^0(G, A)$ und $\bar{b} \in H^0(G, B)$ und bezeichnen es mit

$$\bar{a} \cup \bar{b} = \overline{a \otimes b}.$$

Dieses Cupprodukt pflanzt sich nun auf beliebige Dimensionen automatisch fort.

(5.1) Definition. Es gibt eine eindeutig bestimmte Familie von bilinearen Abbildungen, das **Cupprodukt**

$$\cup : H^p(G, A) \times H^q(G, B) \longrightarrow H^{p+q}(G, A \otimes B), \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für $p = q = 0$ ist das Cupprodukt durch die Zuordnung

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{a} \cup \bar{b} = \overline{a \otimes b}, \quad \bar{a} \in H^0(G, A), \quad \bar{b} \in H^0(G, B),$$

gegeben.

(ii) Sind die G -Modulsequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A \longrightarrow A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

beide exakt, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(G, A'') \times H^q(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, A'' \otimes B) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ H^{p+1}(G, A) \times H^q(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G, A \otimes B) \end{array} \quad \text{kommutativ,}$$

d.h. es ist $\delta(\bar{a}'' \cup \bar{b}) = \delta \bar{a}'' \cup \bar{b}$ für $\bar{a}'' \in H^p(G, A'')$, $\bar{b} \in H^q(G, B)$.

(iii) Sind die G -Modulsequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow B'' \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A \otimes B' \longrightarrow A \otimes B'' \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

beide exakt, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(G, A) \times H^q(G, B'') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, A \otimes B'') \\ 1 \downarrow & & \downarrow \delta \\ H^p(G, A) \times H^{q+1}(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G, A \otimes B) \end{array} \quad \text{kommutativ,}$$

d.h. es ist $\delta(\bar{a} \cup \bar{b}'') = (-1)^p (\bar{a} \cup \delta \bar{b}'')$ für $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b}'' \in H^q(G, B'')$.

¹²⁾ \bar{a} bzw. \bar{b} bzw. $\overline{a \otimes b}$ bedeutet wie üblich die Kohomologieklassse $\bar{a} = a + N_G A$ bzw. $\bar{b} = b + N_G B$ bzw. $\overline{a \otimes b} = a \otimes b + N_G(A \otimes B)$ des Elements $a \in A^G$ bzw. $b \in B^G$ bzw. $a \otimes b \in (A \otimes B)^G$.

Das Erscheinen des Faktors $(-1)^p$ im letzten Diagramm ist zwangsläufig und beruht, wie wir sehen werden, auf der Antikommutativität des Verbindungshomomorphismus δ . Ein Fortlassen dieses Faktors würde zu Widersprüchen, also zur Nicht-Existenz eines solchen Cupprodukts führen.

Wie bei der Restriktion gewinnen wir das allgemeine Cupprodukt aus dem Fall $p = 0, q = 0$ durch Dimensionsverschiebung¹³⁾.

Wir weisen zuvor noch einmal auf unsere Verabredung hin, dass wir die G -Moduln $A \otimes B$ und $B \otimes A$ bzw. $(A \otimes B) \otimes C$ und $A \otimes (B \otimes C)$ stets miteinander identifizieren wollen (vgl. §1, S. 7). Dies führt automatisch zu einer entsprechenden Identifikation der Kohomologiegruppen dieser G -Moduln. Insbesondere können wir hiernach schreiben (vgl. §3, S. 32):

$$A^p \otimes B = J_G \otimes \cdots \otimes J_G \otimes A \otimes B = (A \otimes B)^p \quad \text{und}$$

$$A \otimes B^q = A \otimes J_G \otimes \cdots \otimes J_G \otimes B = J_G \otimes \cdots \otimes J_G \otimes A \otimes B = (A \otimes B)^q$$

für $p, q \geq 0$, und analog für $p, q \leq 0$ mit I_G anstelle von J_G . Dies wollen wir im folgenden stets berücksichtigen.

Auf Grund des Satzes (3.15) können wir das Cupprodukt, ausgehend vom Fall $q = 0, p = 0$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(G, A^p) \times H^0(G, B^q) & \xrightarrow{\cup} & H^0(G, (A \otimes B^q)^p) = H^0(G, A^p \otimes B^q) \\
 \delta^p \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \delta^p \\
 (*) \quad H^p(G, A) \times H^0(G, B^q) & \xrightarrow{\cup} & H^p(G, (A \otimes B^q)^q) = H^p(G, A \otimes B^q) \\
 1 \downarrow & & \downarrow \delta^q & & \downarrow (-1)^{p \cdot q} \delta^q \\
 H^p(G, A) \times H^q(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, A \otimes B)
 \end{array}$$

festlegen. Wegen der Bedingungen (i), (ii), (iii) ist hiermit gleichzeitig die Eindeutigkeit des Cupprodukts erwiesen. Diese Tatsache können wir dazu benutzen, schon an dieser Stelle eine explizite, d.h. kozykelweise Beschreibung des Cupproduktes für den Spezialfall $(p = 0, q)$ bzw. $(p, q = 0)$ anzugeben:

¹³⁾ Dem nur auf die Anwendung des kohomologischen Kalküls bedachten Leser wird nichts wesentliches entgehen, wenn er auf die genaue Ausführung dieses Verschiebungsprozesses verzichtet. Er wird sich allein mit den funktoriellen Verhaltensweisen des Cupproduktes und mit dessen expliziter Beschreibung für kleine Dimensionen (vgl. (5.2), (5.6), (5.7) und (5.8)) begnügen können.

(5.2) Satz. Bezeichnen wir mit a_p bzw. b_q p - bzw. q -Kozykeln von A bzw. B und mit \bar{a}_p bzw. \bar{b}_q ihre Kohomologieklassen, so gilt

$$\bar{a}_0 \cup \bar{b}_q = \overline{a_0 \otimes b_q} \quad \text{bzw.} \quad \bar{a}_p \cup \bar{b}_0 = \overline{a_p \otimes b_0} \quad {}^{14)}.$$

Zum Beweis beachte man, dass das so definierte Produkt $\bar{a}_0 \cup \bar{b}_q$ bzw. $\bar{a}_p \cup \bar{b}_0$ die Bedingungen (i), (ii), (iii) für $(0, q)$ bzw. $(p, 0)$ erfüllt. Dies ist dem Verhalten der Kozykeln unter den betreffenden Abbildungen direkt abzulesen. Betrachtet man nun den unteren Teil des Diagramms (*) für $p = 0$ bzw. den oberen für $q = 0$, so erkennt man, dass das durch (*) definierte Produkt mit dem durch (5.2) definierten übereinstimmen muss.

Es kommt nun darauf an zu zeigen, dass die durch (*) definierten Abbildungen

$$H^p(G, A) \times H^q(G, B) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G, A \otimes B)$$

tatsächlich den Forderungen (ii) und (iii) genügen. Seien dazu die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow A \longrightarrow A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow B'' \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A \otimes B' \longrightarrow A \otimes B'' \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

gegeben. Aus ihnen entstehen die wegen (1.9) und (1.2) exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow A^q \longrightarrow A'^q \longrightarrow A''^q \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow (A \otimes B)^q \longrightarrow (A' \otimes B)^q \longrightarrow (A'' \otimes B)^q \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow B^p \longrightarrow B'^p \longrightarrow B''^p \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow (A \otimes B)^p \longrightarrow (A \otimes B')^p \longrightarrow (A \otimes B'')^p \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

und wir kommen zu den Diagrammen

$$\begin{array}{ccccc} H^p(G, A'') \times H^0(G, B^q) & \xrightarrow{\cup} & H^p(G, (A'' \otimes B)^q) & & \\ \downarrow (1, \delta^q) & \searrow (\delta, 1) & \downarrow (-1)^{p \cdot q} \delta^q & \searrow \delta & \\ & H^{p+1}(G, A) \times H^0(G, B^q) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+1}(G, (A \otimes B)^q) & \\ & \downarrow (1, \delta^q) & \downarrow & \downarrow & \\ H^p(G, A'') \times H^q(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+1}(G, A'' \otimes B) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+q+1}(G, A \otimes B) \\ & \searrow (\delta, 1) & \downarrow (1, \delta^q) & \searrow \delta & \downarrow (-1)^{(p+1) \cdot q} \delta^q \\ & H^{p+1}(G, A) \times H^q(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G, A \otimes B) & \end{array}$$

¹⁴⁾ Man beachte, dass mit $b_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in B$ auch $a_0 \otimes b_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in A \otimes B$ ($a_0 \in A^G$) ein q -Kozykel ist.

bzw.

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(G, A^p) \times H^q(G, B'') & \xrightarrow{\cup} & H^q(G, (A \otimes B'')^p) & & \\
 \downarrow (\delta^p, 1) & \searrow (1, \delta) & \downarrow \delta^p & \searrow \delta & \\
 & H^0(G, A^p) \times H^{q+1}(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{q+1}(G, (A \otimes B)^p) & \\
 & \downarrow (\delta^p, 1) & \downarrow \delta^p & & \\
 H^p(G, A) \times H^q(G, B'') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, A \otimes B'') & & \\
 \downarrow (\delta^p, 1) & \searrow (1, \delta) & \downarrow \delta^p & \searrow (-1)^p \cdot \delta & \\
 & H^p(G, A) \times H^{q+1}(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G, A \otimes B) &
 \end{array}$$

Hierin sind zunächst die linken Seitendiagramme trivialerweise kommutativ. Bei den rechten Seitendiagrammen handelt es sich um q bzw. p untereinander gesetzte Diagramme vom Typ (3.6). Sie sind also nach (3.6) kommutativ. Die vorderen und hinteren Teildiagramme sind auf Grund der Definition von \cup durch (*) kommutativ. Schließlich ergibt sich die Kommutativität der oberen Quadrate elementar aus (5.2) und den sich daran anschließenden Bemerkungen. Da nun die vertikalen Abbildungen bijektiv sind, überträgt sich die Kommutativität der oberen Quadrate auf die unteren Quadrate. Damit ist alles bewiesen.

Durch die axiomatische Einführung (5.1) des Cupproduktes erhalten wir zunächst noch keine explizite Beschreibung desselben; d.h. wir sind einstweilen nicht in der Lage zu entscheiden, durch welchen Kozykel das Cupprodukt zweier kozykelweise gegebener Kohomologieklassen repräsentiert wird. Lediglich für die Fälle $(p = 0, q)$ und $(p, q = 0)$ steht uns eine solche Beschreibung durch (5.2) in sehr einfacher Weise zur Verfügung. Der Versuch einer expliziten Bestimmung des Cupproduktes für weitere Fälle (p, q) (insbesondere für $p < 0$ und $q < 0$) führt jedoch auf heftige rechnerische Schwierigkeiten. Wir befinden uns also hier in einer ähnlichen Situation wie bei der Restriktion, die im Dimensionsfall $q \geq 0$ eine höchst einfache Beschreibung zuließ, nicht aber für die negativen Dimensionen. Hier wie dort gilt jedoch wieder, dass eine explizite Berechnung nur in niedrigen Dimensionen erforderlich wird, dass man aber sonst mit der Kenntnis des funktoriellen Verhaltens der betreffenden Abbildungen vollständig auskommt.

Wir wollen uns zunächst, bevor wir für kleine Dimensionen explizite Formeln herleiten, davon überzeugen, dass sich das Cupprodukt mit den schon vorhandenen kohomologischen Abbildungen verträgt.

(5.3) Satz. Sind $f : A \rightarrow A'$ und $g : B \rightarrow B'$ zwei G -Homomorphismen, und ist $f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$ der durch f und g induzierte Homomorphismus, so gilt für $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(G, B)$

$$\bar{f}\bar{a} \cup \bar{g}\bar{b} = \overline{f \otimes g}(\bar{a} \cup \bar{b}) \in H^{p+q}(G, A' \otimes B').$$

Dies ist für $p = q = 0$ vollständig trivial. Der allgemeine Fall ergibt sich sodann in einfachster Weise durch Dimensionsverschiebung. Die Durchführung dürfen wir dem Leser überlassen, nachdem wir den Verschiebungsprozess häufig genug exerziert haben. Das gleiche gilt für den folgenden

(5.4) Satz. Seien A, B G -Moduln und g eine Untergruppe von G . Ist dann $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(G, B)$, so gilt

$$\text{Res}(\bar{a} \cup \bar{b}) = \text{Res } \bar{a} \cup \text{Res } \bar{b} \in H^{p+q}(g, A \otimes B).$$

Für $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(g, B)$ haben wir

$$\text{Kor}(\text{Res } \bar{a} \cup \bar{b}) = \bar{a} \cup \text{Kor } \bar{b} \in H^{p+q}(G, A \otimes B).$$

Im Fall $p = q = 0$ ist die erste Formel unmittelbar klar. Zum Beweis der zweiten sei $a \in A^G$ bzw. $b \in B^g$ ein 0-Kozykel für \bar{a} bzw. \bar{b} . Auf Grund der Definition der nulldimensionalen Korestriktion (4.12) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \text{Kor}(\text{Res } \bar{a} \cup \bar{b}) &= \text{Kor}(a \otimes b + N_g(A \otimes B)) = \sum_{\sigma \in G/g} \sigma(a \otimes b) + N_G(A \otimes B) \\ &= \sum_{\sigma \in G/g} a \otimes \sigma b + N_G(A \otimes B) = a \otimes (\sum_{\sigma \in G/g} \sigma b) + N_G(A \otimes B) = \bar{a} \cup \text{Kor } \bar{b}. \end{aligned}$$

Alles übrige folgt durch Dimensionsverschiebung.

Der folgende Satz zeigt die „Antikommutativität“ und die „Assoziativität“ des Cupproduktes:

(5.5) Satz. Ist $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(G, B)$, $\bar{c} \in H^r(G, C)$, so gilt ¹⁵⁾

$$\bar{a} \cup \bar{b} = (-1)^{p \cdot q} (\bar{b} \cup \bar{a}) \in H^{p+q}(G, A \otimes B) = H^{p+q}(G, B \otimes A)$$

und

$$(\bar{a} \cup \bar{b}) \cup \bar{c} = \bar{a} \cup (\bar{b} \cup \bar{c}) \in H^{p+q+r}(G, (A \otimes B) \otimes C) = H^{p+q+r}(G, A \otimes (B \otimes C)).$$

Auch dies ist im Fall $p = q = 0$ trivial und ergibt sich allgemein unmittelbar durch Dimensionsverschiebung.

Wir wollen nun einige explizite Formeln für das Cupprodukt berechnen. Dazu bezeichnen wir mit a_p, b_q, \dots die p -Kozykeln von A , q -Kozykeln von B , ... und mit $\bar{a}_p, \bar{b}_q, \dots$ ihre Kohomologieklassen in $H^p(G, A)$, $H^q(G, B)$, ...

¹⁵⁾ Genauer müsste man sagen, dass $(-1)^{p \cdot q} (\bar{b} \cup \bar{a})$ das Bild von $\bar{a} \cup \bar{b}$ unter dem durch $A \otimes B \cong B \otimes A$ induzierten kanonischen Isomorphismus $H^{p+q}(G, A \otimes B) \cong H^{p+q}(G, B \otimes A)$ ist, und das entsprechende gilt für die zweite Formel. Wir halten uns jedoch an unsere Verabredung von §1, S. 7.

(5.6) Lemma. $\bar{a}_1 \cup \bar{b}_{-1} = \bar{x}_0 \in H^0(G, A \otimes B)$ mit

$$x_0 = \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau b_{-1}.$$

Beweis. Nach (3.14) haben wir den G -induzierten G -Modul $A' = \mathbb{Z}[G] \otimes A$ und die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A \longrightarrow A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Um uns Homomorphiezeichen zu ersparen, denken wir uns A in A' und $A \otimes B$ in $A' \otimes B$ eingebettet. Wegen $H^1(G, A') = 0$ gibt es eine 0-Kokette $a'_0 \in A'$ mit $a_1 = \partial a'_0$, d.h.

$$(*) \quad a_1(\tau) = \tau a'_0 - a'_0 \quad \text{für alle } \tau \in G.$$

Sei $a''_0 \in A''^G$ das Bild von a'_0 in A'' . Dann ist auf Grund der Definition des δ -Operators $\bar{a}_1 = \delta(\bar{a}''_0)$ und wir erhalten

$$\bar{a} \cup \bar{b}_{-1} = \delta(\bar{a}''_0) \cup \bar{b}_{-1} \stackrel{(5.1)}{=} \delta(\bar{a}''_0 \cup \bar{b}_{-1}) \stackrel{(5.2)}{=} \delta(\overline{a'_0 \otimes b_{-1}}) = \overline{\delta(a'_0 \otimes b_{-1})} =$$

$$\overline{N_G(a'_0 \otimes b_{-1})} = \overline{\sum_{\tau \in G} \tau a'_0 \otimes \tau b_{-1}} \stackrel{(*)}{=} \overline{\sum_{\tau \in G} (a_1(\tau) + a'_0) \otimes \tau b_{-1}} =$$

$$\sum_{\tau \in G} \overline{(a_1(\tau) \otimes \tau b_{-1})} + \overline{a'_0 \otimes N_G b_{-1}} = \sum_{\tau \in G} \overline{(a_1(\tau) \otimes \tau b_{-1})}, \text{ wegen } N_G b_{-1} = 0.$$

Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall $B = \mathbb{Z}$ und identifizieren $A \otimes \mathbb{Z}$ mit A durch die Zuordnung $a \otimes n \mapsto a \cdot n$. Nach (3.19) haben wir den kanonischen Isomorphismus

$$H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}.$$

Ist $\sigma \in G$, so bezeichnen wir mit $\bar{\sigma}$ das dem Element $\sigma \cdot G' \in G^{\text{ab}}$ zugeordnete Element aus $H^{-2}(G, \mathbb{Z})$.

(5.7) Lemma. $\bar{a}_1 \cup \bar{\sigma} = \overline{a_1(\sigma)} \in H^{-1}(G, A)$.

Beweis. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A \otimes I_G \longrightarrow A \otimes \mathbb{Z}[G] \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

erhalten wir den Isomorphismus $H^{-1}(G, A) \xrightarrow{\delta} H^0(G, A \otimes I_G)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $\delta(\bar{a}_1 \cup \bar{\sigma}) = \delta(\overline{a_1(\sigma)})$. Auf Grund der Definition von δ errechnen wir nun einerseits

$$\delta(\overline{a_1(\sigma)}) = \overline{x_0} \quad \text{mit} \quad x_0 = \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes \tau.$$

Andererseits entnehmen wir dem Beweis von (3.19), dass das Element $\overline{\sigma}$ unter dem Isomorphismus $H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{-1}(G, I_G)$ in das Element $\delta\overline{\sigma} = \overline{\sigma - 1} \in H^{-1}(G, I_G)$ übergeht, so dass wir

$$\delta(\overline{a_1} \cup \overline{\sigma}) \stackrel{(5.1)}{=} -(\overline{a_1} \cup \delta(\overline{\sigma})) = -\overline{a_1} \cup (\overline{\sigma - 1}) = \overline{y_0}$$

erhalten. Für y_0 ergibt sich nach (5.6)

$$y_0 = - \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau(\sigma - 1) = \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau - \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau\sigma.$$

Für den 1-Kozykel $a_1(\tau)$ haben wir $a_1(\tau) = a_1(\tau\sigma) - \tau a_1(\sigma)$. Setzen wir dies in die letzte Summe ein, so ergibt sich

$$y_0 = \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes \tau\sigma.$$

Daher ist $y_0 - x_0 = \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes \tau(\sigma - 1) = N_G(a_1(\sigma) \otimes (\sigma - 1))$, also in der Tat $\overline{x_0} = \overline{y_0}$.

Die folgende Formel (5.8) ist für uns von besonderem Interesse. Nehmen wir nämlich aus der Gruppe $H^2(G, A)$ ein Element $\overline{a_2}$ heraus, so liefert dieses den Homomorphismus

$$\overline{a_2} \cup : H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(G, A),$$

der jedem $\overline{\sigma} \in H^{-2}(G, \mathbb{Z})$ das Cupprodukt $\overline{a_2} \cup \overline{\sigma} \in H^0(G, A)$ zuordnet; wir erhalten daher eine kanonische Abbildung der Faktorkommutatorgruppe G^{ab} in die Normrestgruppe $A^G/N_G A$. In der Klassenkörpertheorie, in der wir es mit einem speziellen G -Modul A zu tun haben, wird sich dieser Homomorphismus als bijektiv erweisen, und in der kanonischen Isomorphie $G^{\text{ab}} \cong A^G/N_G A$ besteht gerade der Hauptsatz der Klassenkörpertheorie. Aus diesem Grund ist der folgende Satz von Interesse:

(5.8) Satz. $\overline{a_2} \cup \overline{\sigma} = \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)} \in H^0(G, A).$

Beweis. Wir betrachten wieder den G -Modul $A' = \mathbb{Z}[G] \otimes A$ und die exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$ ($A'' = J_G \otimes A$). Wegen $H^2(G, A') = 0$ gibt es eine 1-Kokette $a'_1 \in A'_1$ mit $a_2 = \partial a'_1$ d.h.

$$(*) \quad a_2(\tau, \sigma) = \tau a'_1(\sigma) - a'_1(\tau \cdot \sigma) + a'_1(\tau).$$

Das Bild a''_1 von a'_1 ist ein 1-Kozykel von A'' , und für ihn gilt $\overline{a_2} = \delta(\overline{a''_1})$. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
\bar{a}_2 \cup \bar{\sigma} &= \delta(\bar{a}_1'') \cup \bar{\sigma} \stackrel{(5.1)}{=} \delta(\overline{a''_1} \cup \bar{\sigma}) \stackrel{(5.7)}{=} \delta(\overline{a''_1(\sigma)}) = \overline{\delta(a'_1(\sigma))} = \overline{\sum_{\tau \in G} \tau a'_1(\sigma)} \\
&\stackrel{(*)}{=} \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)} + \overline{\sum_{\tau \in G} a'_1(\tau \cdot \sigma)} - \overline{\sum_{\tau \in G} a'_1(\tau)} = \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)}.
\end{aligned}$$

§ 6. Kohomologie der zyklischen Gruppen

Wir haben uns bisher damit beschäftigt, die wesentlichen kohomologischen Abbildungen einzuführen und ihre Vertauschbarkeitseigenschaften untereinander aufzuzeigen. Nunmehr kommen wir dazu, die eigentlichen Sätze der Kohomologietheorie aufzustellen. Wir beginnen mit dem Studium der G -Moduln A mit zyklischer Gruppe G . Diese G -Moduln haben eine besonders einfache Kohomologie.

Sei also G zyklisch von der Ordnung n und σ ein erzeugendes Element von G . Dann ist

$$\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\sigma^i, \quad N_G = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n-1},$$

und wegen $\sigma^k - 1 = (\sigma - 1)(\sigma^{k-1} + \cdots + \sigma + 1)$ ($k \geq 1$), ist I_G das durch $\sigma - 1$ erzeugte Hauptideal von $\mathbb{Z}[G]$:

$$I_G = \mathbb{Z}[G] \cdot (\sigma - 1).$$

(6.1) Satz. *Ist A ein Modul über der zyklischen Gruppe G , so gilt*

$$H^q(G, A) \cong H^{q-2}(G, A) \text{ für alle } q \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Es genügt die Isomorphie $H^{-1}(G, A) \cong H^1(G, A)$ zu zeigen. Der allgemeine Fall folgt nämlich hieraus durch Dimensionsverschiebung (vgl. (3.15)):

$$H^q(G, A) \cong H^{-1}(G, A^{q+1}) \cong H^1(G, A^{q+1}) \cong H^{q+2}(G, A).$$

Die Gruppe Z_1 der 1-Kozykeln besteht aus den gekreuzten Homomorphismen von G in A , d.h. ist $x \in Z_1$, so ist

$$\begin{aligned}
x(\sigma^k) &= \sigma x(\sigma^{k-1}) + x(\sigma) = \sigma^2 x(\sigma^{k-2}) + \sigma x(\sigma) + x(\sigma) = \cdots = \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^i x(\sigma) \quad (k \geq 1), \\
x(1) &= 0 \text{ wegen } x(1) = x(1) + x(1).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $N_G x(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i x(\sigma) = x(\sigma^n) = x(1) = 0$, also $x(\sigma) \in {}_{N_G} A$.

Umgekehrt erhalten wir zu jedem (-1) -Kozykel $a \in {}_{N_G} A = Z_{-1}$ einen 1-Kozykel, wenn wir $x(\sigma) = a$ und

$$x(\sigma^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^i a$$

setzen. Dies rechnet man mühelos nach. Daher ist die Zuordnung

$$x \mapsto x(\sigma)$$

ein Isomorphismus von Z_1 auf $Z_{-1} = {}_{N_G}A$. Bei diesem Isomorphismus wird die Gruppe R_1 der 1-Koränder auf die Gruppe R_{-1} der (-1) -Koränder abgebildet:

$$\begin{aligned} x \in R_1 &\iff x(\sigma^k) = \sigma^k a - a \text{ mit festem } a \in A \iff x(\sigma) = \sigma a - a \\ &\iff x(\sigma) \in I_G A = R_{-1}. \end{aligned}$$

Im zyklischen Fall ist also stets

$$H^{2q}(G, A) \cong H^0(G, A) \quad \text{und} \quad H^{2q+1}(G, A) \cong H^1(G, A).$$

Ist

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte G -Modulsequenz, so lässt sich die zugehörige exakte Kohomologiesequenz in der Form eines exakten Sechsecks schreiben:

$$\begin{array}{ccccc} & & H^{-1}(G, A) & \longrightarrow & H^{-1}(G, B) \\ & \nearrow & & & \searrow \\ H^0(G, C) & & & & H^{-1}(G, C) \\ & \nwarrow & & & \nearrow \\ & & H^0(G, B) & \longleftarrow & H^0(G, A) \end{array}$$

Zur Exaktheit an der Verknüpfungsstelle $H^{-1}(G, A)$ ist zu beachten, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(G, A) & \longrightarrow & H^{-1}(G, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(G, A) & \longrightarrow & H^1(G, B) \end{array}$$

mit dem im Beweis zu (6.1) hergestellten Isomorphismen kommutativ ist, so dass dem Kern der Abbildung $H^1(G, A) \rightarrow H^1(G, B)$ bei der Isomorphie $H^1(G, A) \cong H^{-1}(G, A)$ der Kern der Abbildung $H^{-1}(G, A) \rightarrow H^{-1}(G, B)$ entspricht.

Ein für viele Index- und Ordnungsbetrachtungen äußerst nützlicher Begriff ist der **Herbrandquotient**, der sich in vorzüglicher Weise dazu eignet, Berechnungen von Indizes in abelschen Gruppen zu erleichtern. Wiewohl er für uns im Hinblick auf die G -Moduln mit zyklischer Gruppe G von besonderem Interesse ist, wollen wir ihn in seiner allgemeinsten Form einführen.

(6.2) Definition. Sei A eine abelsche Gruppe und f, g Endomorphismen von A mit $f \circ g = g \circ f = 0$, so dass also

$$\text{Bild } g \subseteq \text{Kern } f \quad \text{und} \quad \text{Bild } f \subseteq \text{Kern } g.$$

Dann ist der **Herbrandquotient** durch

$$q_{f,g}(A) = \frac{(\text{Kern } f : \text{Bild } g)}{(\text{Kern } g : \text{Bild } f)}$$

definiert, vorausgesetzt, dass beide Indizes endlich sind.

Der für uns im Vordergrund stehende Spezialfall entsteht hieraus folgendermaßen:

Sei A ein G -Modul mit zyklischer Gruppe G der Ordnung n . Wir betrachten die speziellen Endomorphismen

$$f = D = \sigma - 1 \quad \text{und} \quad g = N = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n-1},$$

wobei σ ein erzeugendes Element von G ist. Offenbar ist

$$D \circ N = N \circ D = 0,$$

und

$$\text{Kern } D = A^G, \quad \text{Bild } N = N_G A; \quad \text{Kern } N = {}_{N_G} A, \quad \text{Bild } D = I_G A.$$

Wir erhalten daher

$$q_{D,N}(A) = \frac{|H^0(G, A)|}{|H^{-1}(G, A)|} = \frac{|H^2(G, A)|}{|H^1(G, A)|},$$

vorausgesetzt, dass beide Kohomologiegruppen $H^0(G, A)$ und $H^{-1}(G, A)$ endlich sind. Ist letzteres der Fall, so nennen wir A einen **Herbrandmodul**. Für den Herbrandquotienten $q_{D,N}(A)$ wollen wir stets die folgende Bezeichnung verwenden:

(6.3) Definition. Ist A ein G -Modul mit zyklischer Gruppe G , so sei

$$h(A) = \frac{|H^0(G, A)|}{|H^{-1}(G, A)|} = \frac{|H^2(G, A)|}{|H^1(G, A)|}.$$

Die entscheidende Eigenschaft des Herbrandquotienten liegt in seiner **Multiplikativität**:

(6.4) Satz. Ist G eine zyklische Gruppe und

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G -Moduln, so ist

$$h(B) = h(A) \cdot h(C),$$

in dem Sinne, dass wenn zwei dieser Quotienten definiert sind, auch der dritte definiert ist, und die Gleichheit gilt.

Beweis. Wir betrachten die exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^{-1}(G, A) & \xrightarrow{f_1} & H^{-1}(G, B) \\
 & \nearrow f_6 & & & \searrow f_2 \\
 H^0(G, C) & & & & & H^{-1}(G, C) \\
 & \nwarrow f_5 & & & \nearrow f_3 \\
 & & H^0(G, B) & \xleftarrow{f_4} & H^0(G, A)
 \end{array}$$

Bezeichnen wir mit F_i die Ordnung des Bildes von f_i , so wird

$$\begin{aligned}
 |H^{-1}(G, A)| &= F_6 \cdot F_1, & |H^{-1}(G, B)| &= F_1 \cdot F_2, & |H^{-1}(G, C)| &= F_2 \cdot F_3, \\
 |H^0(G, A)| &= F_3 \cdot F_4, & |H^0(G, B)| &= F_4 \cdot F_5, & |H^0(G, C)| &= F_5 \cdot F_6,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 (*) \quad |H^{-1}(G, A)| \cdot |H^{-1}(G, C)| \cdot |H^0(G, B)| \\
 = |H^{-1}(G, B)| \cdot |H^0(G, A)| \cdot |H^0(G, C)|.
 \end{aligned}$$

Gleichzeitig sieht man, dass mit zwei der Quotienten $h(A)$, $h(B)$, $h(C)$ auch der dritte definiert ist, und aus (*) ergibt sich $h(B) = h(A) \cdot h(C)$.

Ein weiterer Spezialfall des Herbrandquotienten ergibt sich, wenn A eine abelsche Gruppe bedeutet, und wenn $f = 0$, $g = n$ ist (n natürliche Zahl). Der Endomorphismus n ordnet jedem $a \in A$ das Element $n \cdot a \in A$ zu. Wir haben dann

$$q_{0,n}(A) = \frac{|A : nA|}{|nA|} \quad ({}_nA = \{a \in A \mid n \cdot a = 0\}).$$

Dieser Fall ordnet sich jedoch dem schon behandelten unter. Lassen wir nämlich die zyklische Gruppe G der Ordnung n auf A trivial operieren, so ergibt sich offenbar der

(6.5) Satz. Operiert die zyklische Gruppe G der Ordnung n trivial auf A , so ist

$$h(A) = q_{0,n}(A).$$

Damit ergibt sich gleichzeitig die Multiplikativität des Herbrandquotienten $q_{0,n}$ ¹⁶⁾:

¹⁶⁾ Auch für beliebige Herbrandquotienten $q_{f,g}$ läßt sich unter gewissen Voraussetzungen eine Multiplikativität herleiten. Dies sei jedoch nur am Rande bemerkt.

(6.6) Satz. Ist $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz abelscher Gruppen, so ist

$$q_{0,n}(B) = q_{0,n}(A) \cdot q_{0,n}(C),$$

wieder in dem Sinne, dass die Existenz zweier dieser Quotienten die Existenz des dritten nach sich zieht.

(6.7) Satz. Ist A eine endliche Gruppe, so gilt stets

$$q_{f,g}(A) = 1.$$

Beweis. Es ist $\text{Bild } f \cong A/\text{Kern } f$, $\text{Bild } g \cong A/\text{Kern } g$, also

$$|A| = |\text{Kern } f| \cdot |\text{Bild } f| = |\text{Kern } g| \cdot |\text{Bild } g|,$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

Insbesondere besitzt also ein endlicher G -Modul A den Herbrandquotienten $h(A) = 1$. Mit (6.4) ergibt sich aus dieser Bemerkung das folgende Resultat:

Ist A ein Untermodul des G -Moduls B von endlichem Index, so ist $h(B) = h(A)$.

In dieser Tatsache liegt die bedeutsamste Anwendung des Herbrandquotienten. Ist eine direkte Ordnungsbestimmung der Kohomologiegruppen eines G -Moduls B nicht möglich, so kann man unbeschadet zu einem geeigneten Untermodul A übergehen, wenn man nur den endlichen Index sicherstellt. Diese Überlegung lag auch historisch der Bildung des Herbrandquotienten zugrunde.

Im folgenden werden wir eine explizite Bestimmung von h bei zyklischen Gruppen G von Primzahlordnung p durch die Quotienten $q_{0,p}$ herleiten. Wir benötigen dazu das folgende

(6.8) Lemma. Sind g und f zwei miteinander vertauschbare Endomorphismen der abelschen Gruppe A , so gilt

$$q_{0,gf}(A) = q_{0,g}(A) \cdot q_{0,f}(A),$$

was wieder so zu verstehen ist, dass alle drei Quotienten definiert sind, wenn nur zwei unter ihnen definiert sind.

Beweis. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g(A) \cap \text{Kern } f & \longrightarrow & g(A) & \xrightarrow{f} & fg(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Kern } f & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & f(A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Hieraus erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Kern } f / g(A) \cap \text{Kern } f \longrightarrow A / g(A) \longrightarrow f(A) / fg(A) \longrightarrow 0,$$

so dass

$$\frac{(A : fg(A))}{(A : f(A))} = \frac{(A : g(A)) \cdot |g(A) \cap \text{Kern } f|}{|\text{Kern } f|}.$$

Beachtet man, dass

$$\text{Kern } fg / \text{Kern } g = g^{-1}(g(A) \cap \text{Kern } f) / g^{-1}(0) \cong g(A) \cap \text{Kern } f,$$

so ergibt sich in der Tat

$$\frac{(A : gf(A))}{|\text{Kern } gf|} = \frac{(A : g(A))}{|\text{Kern } g|} \cdot \frac{(A : f(A))}{|\text{Kern } f|}.$$

Nachträglich kontrolliert man mühelos, dass alles wohldefiniert ist, wenn nur zwei dieser Quotienten definiert sind.

Wir beweisen nun den folgenden wichtigen

(6.9) Satz. *Sei G eine primzyklische Gruppe der Ordnung p und A ein G -Modul. Ist dann $q_{0,p}(A)$ definiert, so sind auch die Quotienten $q_{0,p}(A^G)$ und $h(A)$ definiert, und es gilt*

$$h(A)^{p-1} = q_{0,p}(A^G)^p / q_{0,p}(A).$$

Beweis. Sei σ ein erzeugendes Element von G und $D = \sigma - 1$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow A \xrightarrow{D} I_G A \longrightarrow 0.$$

Aus der Tatsache, dass $I_G A$ sowohl Untergruppe als auch Faktorgruppe von A ist, schließen wir sofort, dass mit $q_{0,p}(A)$ auch $q_{0,p}(I_G A)$ definiert ist. Nach (6.6) ist daher auch $q_{0,p}(A^G)$ definiert, und es gilt

$$(*) \quad q_{0,p}(A) = q_{0,p}(A^G) \cdot q_{0,p}(I_G A).$$

Da G auf A^G trivial operiert, ist nach (6.5) zunächst $q_{0,p}(A^G) = h(A^G)$.

Zur Bestimmung des Quotienten $q_{0,p}(I_G A)$ dient der folgende interessante Kunstgriff. Da das Ideal $\mathbb{Z} \cdot N_G = \mathbb{Z}(\sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i)$ den Modul $I_G A$ annulliert, können wir $I_G A$ als $\mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z} \cdot N_G$ -Modul auffassen. Nun ist der Ring $\mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z} \cdot N_G$ isomorph zum Ring $\mathbb{Z}[X] / (1 + X + \cdots + X^{p-1})$ mit einer Unbestimmten X .

Der letztere ist aber isomorph zum Ring $\mathbb{Z}[\zeta]$ der ganzen Zahlen des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta)$ der p -ten Einheitswurzeln (ζ primitive p -te Einheitswurzel), und wir erhalten durch die Zuordnung $\sigma \mapsto \zeta$ den Isomorphismus $\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z} \cdot N_G \cong \mathbb{Z}[\zeta]$. In $\mathbb{Z}[\zeta]$ gilt nun bekanntlich die Zerlegung $p = (\zeta - 1)^{p-1} \cdot e$, e Einheit, d.h. wir erhalten

$$p = (\sigma - 1)^{p-1} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ Einheit in } \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z} \cdot N_G.$$

Der von ε gelieferte Endomorphismus ist ein Automorphismus von $I_G A$, so dass $q_{0,\varepsilon}(I_G A) = 1$ ist. Wenden wir nun das Lemma (6.8) an, so ergibt sich

$$q_{0,p}(I_G A) = q_{0,D^{p-1}}(I_G A) \cdot q_{0,\varepsilon}(I_G A) = q_{0,D}(I_G A)^{p-1} = 1/q_{D,0}(I_G A)^{p-1}.$$

Da $N = N_G$ den 0-Endomorphismus auf $I_G A$ bedeutet, ergibt sich weiter

$$q_{0,p}(I_G A) = 1/q_{D,0}(I_G A)^{p-1} = 1/q_{D,N}(I_G A)^{p-1} = 1/h(I_G A)^{p-1}.$$

Zusammen mit (*) haben wir also

$$q_{0,p}(A^G) = h(A^G), \quad q_{0,p}(I_G A) = 1/h(I_G A)^{p-1}, \quad q_{0,p}(A) = q_{0,p}(A^G)/h(I_G A)^{p-1}.$$

Die Sequenz $0 \rightarrow A^G \rightarrow A \rightarrow I_G A \rightarrow 0$ liefert andererseits die Gleichung

$$h(A)^{p-1} = h(A^G)^{p-1} \cdot h(I_G A)^{p-1},$$

und durch Einsetzen ergibt sich in der Tat $h(A)^{p-1} = q_{0,p}(A^G)^p/q_{0,p}(A)$.

In der globalen Klassenkörpertheorie werden wir diesen Satz auf gewisse Einheitengruppen anwenden, von denen wir nur wissen, dass sie endlich erzeugt sind, und ihren Rang kennen. Dies allein genügt schon den Herbrandquotienten zu berechnen. Aus (6.9) gewinnen wir nämlich mühelos den folgenden Satz von C. CHEVALLEY:

(6.10) Satz. *Sei A ein endlich erzeugter G -Modul mit primzyklischer Gruppe G der Ordnung p . Ist α bzw. β der Rang der abelschen Gruppe A bzw. A^G , so ist der Herbrandquotient*

$$h(A) = p^{(p \cdot \beta - \alpha)/(p-1)}.$$

Beweis. Wir können A zerlegen in eine Torsionsgruppe A_0 und eine torsionsfreie Gruppe A_1 : $A = A_0 \oplus A_1$. Es ist dann $A^G = A_0^G \oplus A_1^G$. Da A endlich erzeugt ist, ist A_0 eine endliche Gruppe, und es ist $\text{Rang } A_1 = \text{Rang } A = \alpha$, $\text{Rang } A_1^G = \text{Rang } A^G = \beta$. Daher wird

$$h(A)^{p-1} = h(A_1)^{p-1} = q_{0,p}(A_1^G)^p/q_{0,p}(A_1),$$

wobei $q_{0,p}(A_1^G) = (A_1^G : pA_1^G) = p^\beta$, $q_{0,p}(A_1) = (A_1 : pA_1) = p^\alpha$, also $h(A)^{p-1} = p^{p \cdot \beta - \alpha}$.

§ 7. Der Satz von Tate

Viele Sätze in der Kohomologie besagen, dass man von Aussagen über die Kohomologiegruppen für zwei aufeinander folgende Dimensionen auf Aussagen für alle Dimensionen schließen kann. Einer der wichtigsten Sätze dieses Typs ist der **Satz von der kohomologischen Trivialität**.

(7.1) Satz. *Ein G -Modul A hat bereits triviale Kohomologie¹⁷⁾, wenn es eine Dimension q_0 gibt, derart dass*

$$H^{q_0}(g, A) = H^{q_0+1}(g, A) = 0$$

für alle Untergruppen $g \subseteq G$.

Der Satz ist für zyklische Gruppen G eine unmittelbare Folge von (6.1). Wir werden den Beweis auf diesen Fall zurückführen. Zunächst ist klar, dass wir nur die folgende Aussage zu beweisen brauchen:

Ist $H^{q_0}(g, A) = H^{q_0+1}(g, A) = 0$ für alle Untergruppen $g \subseteq G$, so ist auch $H^{q_0-1}(g, A) = 0$ und $H^{q_0+2}(g, A) = 0$ für alle Untergruppen $g \subseteq G$.

Wir überzeugen uns durch Dimensionsverschiebung, dass wir uns bei dieser Aussage auf den Fall $q_0 = 1$ beschränken können. Ist nämlich dieser Fall erledigt, so schließen wir aus der Isomorphie

$$H^{q-m}(g, A^m) \cong H^q(g, A) \quad (\text{vgl. (3.15)}),$$

dass $H^1(g, A^{q_0-1}) \cong H^{q_0}(g, A) = 0$ und $H^2(g, A^{q_0-1}) \cong H^{q_0+1}(g, A) = 0$, so dass $H^{q-(q_0-1)}(g, A^{q_0-1}) \cong H^q(g, A) = 0$ für alle q .

Sei also $H^1(g, A) = H^2(g, A) = 0$ für alle Untergruppen $g \subseteq G$. Wir haben zu zeigen, dass

$$(*) \quad H^0(g, A) = H^3(g, A) = 0 \quad \text{für alle Untergruppen } g \subseteq G.$$

Hierzu führen wir vollständige Induktion nach der Gruppenordnung $|G|$ durch. Der Induktionsanfang $|G| = 1$ ist trivial.

Wir nehmen daher an, dass $(*)$ für alle echten Untergruppen g von G bewiesen ist und haben danach nur noch $H^0(G, A) = H^3(G, A) = 0$ zu zeigen. Ist nun G keine p -Gruppe, so sind alle Sylowgruppen von G echte Untergruppen, und wir erhalten $H^0(G, A) = H^3(G, A) = 0$ aus (4.17).

Wir können also annehmen, dass G eine p -Gruppe ist. Es gibt dann einen Normalteiler $H \subset G$ mit primzyklischer Faktorgruppe G/H . Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$H^0(H, A) = H^3(H, A) = 0 \quad \text{und überdies} \quad H^1(H, A) = H^2(H, A) = 0,$$

und wir erhalten mit (4.6) und (4.7) die Isomorphismen

$$\text{Inf} : H^q(G/H, A^H) \longrightarrow H^q(G, A) \quad \text{für } q = 1, 2, 3.$$

¹⁷⁾ D.h. es ist $H^q(g, A) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ und alle Untergruppen g von G .

Aus $H^1(G, A) = 0$ folgt also $H^1(G/H, A^H) = 0$ und nach (6.1) $H^3(G/H, A^H) = 0$, d.h. $H^3(G, A) = 0$. Weiter folgt aus $H^2(G, A) = 0$ auch $H^2(G/H, A^H) = 0$, also $H^0(G/H, A^H) = 0$ (nach (6.1)), und dies bedeutet $A^G = N_{G/H}A^H = N_{G/H}(N_H A) = N_G A$, wobei wir $H^0(H, A) = 0$, also $A^H = N_H A$ zu berücksichtigen haben. Daher ist auch $H^0(G, A) = 0$, und unser Satz ist bewiesen.

Sind A und B zwei G -Moduln, so liefert uns das Cupprodukt, also die bilineare Abbildung

$$H^p(G, A) \times H^q(G, B) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G, A \otimes B)$$

eine ganze Familie kanonischer Homomorphismen, wenn wir etwa ein Element $a \in H^p(G, A)$ fixieren, und die durch die Zuordnung $b \mapsto a \cup b$ ($b \in H^q(G, B)$) definierte Abbildung

$$a \cup : H^q(G, B) \longrightarrow H^{p+q}(G, A \otimes B)$$

betrachten. In den folgenden Sätzen werden wir das Cupprodukt in dieser Form verwenden.

Aus dem Satz über die kohomologische Trivialität ziehen wir die folgende Konsequenz:

(7.2) Satz. *Sei A ein G -Modul mit den folgenden Eigenschaften:
Für jede Untergruppe $g \subseteq G$ ist*

- I. $H^{-1}(g, A) = 0$,
- II. $H^0(g, A)$ zyklisch von der Ordnung $|g|$.

Dann ist die Abbildung

$$a \cup : H^q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(G, A)$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus, wenn a ein erzeugendes Element von $H^0(G, A)$ ist.

Beweis. Der Modul A selbst ist zur Beweisführung etwas ungeeignet, da wir die Injektivität der Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow A$ mit $n \mapsto na_0$ ($a_0 + N_G A = a$) benötigen, die das obige Cupprodukt für den Fall $q = 0$ induziert (vgl. (5.2)). Wir gehen daher von A zum Modul

$$B = A \oplus \mathbb{Z}[G]$$

über, und können dies tun, ohne die Kohomologiegruppen zu ändern. Ist nämlich $i : A \rightarrow B$ die kanonische Injektion, so ist die induzierte Abbildung

$$\bar{i} : H^q(g, A) \longrightarrow H^q(g, B)$$

wegen der kohomologischen Trivialität von $\mathbb{Z}[G]$ ein Isomorphismus. Wir wählen nun ein $a_0 \in A^G$, derart dass $a = a_0 + N_G A$ das erzeugende Element von $H^0(G, A)$ ist, und betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow B \quad \text{mit} \quad n \longmapsto a_0 \cdot n + N_G \cdot n.$$

Diese ist wegen des zweiten Bestandteils $N_G \cdot n$ injektiv und induziert die Homomorphismen

$$\bar{f} : H^q(g, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(g, B).$$

Unter Beachtung von (5.2) erkennt man, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{a \cup} & H^q(G, A) \\ & \searrow \bar{f} & \downarrow \bar{i} \\ & & H^q(G, B) \end{array}$$

kommutativ ist, so dass wir nur die Bijektivität von \bar{f} zu zeigen haben. Diese aber folgt unschwer aus (7.1):

Wegen der Injektivität können wir den Homomorphismus $f : \mathbb{Z} \rightarrow B$ in eine exakte G -Modulsequenz

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

einbetten. Die zugehörige Kohomologiesequenz liefert wegen $H^{-1}(g, B) = H^{-1}(g, A) = 0$ und $H^1(g, \mathbb{Z}) = 0$ für alle $g \subseteq G$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^{-1}(g, C) \longrightarrow H^0(g, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{f}} H^0(g, B) \longrightarrow H^0(g, C) \longrightarrow 0.$$

Für $q = 0$ ist aber \bar{f} ersichtlich ein Isomorphismus, so dass $H^{-1}(g, C) = H^0(g, C) = 0$, und daher nach (7.1) $H^q(g, C) = 0$ für alle q . Mithin folgt die Bijektivität von $H^q(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{f}} H^q(G, B)$ für alle q aus der zu $(*)$ gebildeten exakten Kohomologiesequenz.

Aus (7.2) erhalten wir nun durch Dimensionsverschiebung den überaus wichtigen

(7.3) Satz von Tate. *Sei A ein G -Modul mit den folgenden Eigenschaften: Für jede Untergruppe $g \subseteq G$ ist*

- I. $H^1(g, A) = 0$,
- II. $H^2(g, A)$ zyklisch von der Ordnung $|g|$.

Dann ist die Abbildung

$$a \cup : H^q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{q+2}(G, A)$$

ein Isomorphismus, wenn a ein erzeugendes Element von $H^2(G, A)$ ist.

Zusatz: Erzeugt a die Gruppe $H^2(G, A)$, so erzeugt $\text{Res } a \in H^2(g, A)$ die Gruppe $H^2(g, A)$. Wir erhalten daher gleichzeitig die Isomorphismen

$$\text{Res } a \cup : H^q(g, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{q+2}(g, A).$$

Beweis. Nach (3.15) haben wir die Isomorphismen $\delta^2 : H^q(g, A^2) \rightarrow H^{q+2}(g, A)$. Es ist also $H^{-1}(g, A^2) = 0$ und $H^0(g, A^2)$ zyklisch von der Ordnung $|g|$. Das erzeugende Element $a \in H^2(G, A)$ ist das Bild des erzeugenden Elementes $\delta^{-2}a \in H^0(G, A^2)$ von $H^0(G, A^2)$.

Wir erhalten das wegen (5.1) kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{-2}a \cup} & H^q(G, A^2) \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow \delta^2 \\ H^q(G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{a \cup} & H^{q+2}(G, A), \end{array}$$

in dem der Homomorphismus $\delta^{-2}a \cup$ nach (7.2) bijektiv ist. Daher ist auch der Homomorphismus $a \cup$ bijektiv.

Was den Zusatz betrifft, so hat das Element $\text{Res } a \in H^2(g, A)$ wegen $\text{Kor} \circ \text{Res } a = (G : g) \cdot a$ eine durch $|g|$ teilbare Ordnung, erzeugt also wegen II. die Gruppe $H^2(g, A)$.

Der Satz von Tate ist weitreichender Verallgemeinerungen fähig. So kann man in den Voraussetzungen die Forderung „für alle Untergruppen $g \subseteq G$ “ durch die Forderung „für alle p -Sylogruppen“ ersetzen. Weiter lässt sich die Verschiebung von q auf $q + 2$ um zwei Dimensionen (unter geeigneter Voraussetzung) auf beliebige Dimensionen ausdehnen. Überdies lässt sich noch der G -Modul \mathbb{Z} durch allgemeinere Moduln ersetzen¹⁸⁾. Wir gehen jedoch hierauf nicht näher ein, da die hier gewählte Form des Tateschen Satzes für die meisten Anwendungen vollständig ausreicht. Für die Klassenkörpertheorie ist der Spezialfall $q = -2$ von besonderer Bedeutung. In diesem Fall liefert der Satz von Tate nämlich einen kanonischen Isomorphismus zwischen der Faktorkommutatorgruppe $G^{\text{ab}} (\cong H^{-2}(G, \mathbb{Z}))$ von G und der Normrestgruppe $A^G/N_G A = H^0(G, A)$:

$$G^{\text{ab}} \longrightarrow A^G/N_G A.$$

Diese kanonische Isomorphie ist gerade die abstrakte Formulierung des Hauptsatzes der Klassenkörpertheorie, nämlich des sogenannten „Reziprozitätsgesetzes“. Man kann aus diesem Grund den Satz von Tate zur Grundlage einer rein gruppentheoretisch formulierten abstrakten Klassenkörpertheorie machen. Wir werden diesen Gedanken im nächsten Teil ausführlich verfolgen.

¹⁸⁾ Vgl. hierzu [42], IX, §8, Th. 13, S. 156.

Klassenkörpertheorie

Neu herausgegeben von Alexander Schmidt

Neukirch, J. - Schmidt, A. (Hrsg.)

2011, XIII, 204 S. 42 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-17324-0