

Kapitel 7

Generalisierte Koordinaten und dynamische Antwortrechnung

In Kap. 4 wurden am Beispiel von Zwei- und Mehrmassenschwingern dynamische Antwortrechnungen durchgeführt. Dabei zeigte sich, dass bei Berücksichtigung einer größeren Anzahl von physikalischen Freiheitsgraden der Rechenaufwand schnell anstieg. Zur Vereinfachung der dort aufgeführten Untersuchungen blieben außerdem die Dämpfungseigenschaften der strukturellen Systeme unberücksichtigt.

In Kap. 5 wurde weiterhin gezeigt, dass auf der Basis von Finiten Elementen idealisierte elastomechanische Strukturen mehrere zehntausend Freiheitsgrade aufweisen können. Dynamische Antwortrechnungen an Systemen dieser Größe erweisen sich auch beim Einsatz sehr leistungsfähiger Rechner als aufwändig.

Wie im Folgenden gezeigt wird, können die oben aufgeführten „Schwierigkeiten“ durch eine Koordinatentransformation – von physikalischen in generalisierte Koordinaten – beseitigt werden. Folgen dieser Transformation sind:

- die Reduzierung der Anzahl von Freiheitsgraden,
- die Entkoppelung der einzelnen Bewegungsgleichungen des strukturellen Systems.

Diese beiden Punkte führen dazu, dass das dynamische Verhalten einer Struktur mit n physikalischen Freiheitsgraden durch ein entkoppeltes Gleichungssystem mit N generalisierten Freiheitsgraden beschrieben werden kann, wobei bei praktischen Anwendungen im Allgemeinen gilt: $N \ll n$.

7.1 Generalisierte Koordinaten

Ausgangspunkt aller Betrachtungen ist die in Gl. 4.63 aufgeführte Bewegungsgleichung eines Mehrmassenschwingungssystems in physikalischen Koordinaten.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} = \{F\}. \quad (7.1)$$

Aus der homogenen Bewegungsgleichung

$$[m]\{\hat{\ddot{x}}\} + [c]\{\hat{\dot{x}}\} = 0 \quad (7.2)$$

resultiert mit dem Ansatz

$$\{\hat{x}\} = \{\hat{Y}\} e^{\lambda t} : \quad (7.3)$$

$$[\lambda^2[m] + [c]] \{\hat{Y}\} e^{\lambda t} = 0. \quad (7.4)$$

Die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$|\lambda^2[m] + [c]| = 0 \quad (7.5)$$

liefert mit $\lambda_r = \pm i\omega_r$ die Eigenkreisfrequenzen ω_r ($r = 1, 2, \dots, n$). Das Einsetzen der λ_r -Werte in die Gl. 7.4 ergibt die jeweils zugeordneten reellen Eigenvektoren $\{\hat{Y}_r\} = \{\Phi_r\}$.

Beim Übergang in generalisierte Koordinaten wird nun davon ausgegangen, dass sich die physikalischen Verschiebungen des strukturellen Systems – bei einer beliebigen externen Anregung – als Überlagerung der Verschiebungen in den verschiedenen Eigenschwingungsformen darstellen lassen, entsprechend dem Modalansatz

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\Phi_r\} q_r(t). \quad (7.6)$$

Dabei beinhaltet die Modalmatrix $[\Phi]$ spaltenweise die den einzelnen physikalischen Freiheitsgraden zugeordneten Verschiebungen in den verschiedenen Eigenschwingungsformen. Der Vektor $\{q\}$ wird als Vektor der generalisierten Koordinaten bezeichnet. Er enthält die Gewichtungsfaktoren der Linearkombination, die angeben, in welchem Maße die verschiedenen Eigenschwingungsformen an der dynamischen Antwort des Systems beteiligt sind.

Bei praktischen Anwendungen ist es im Allgemeinen der Fall, dass das Frequenzspektrum der externen Anregung eine Tiefpasscharakteristik (Abb. 2.15) aufweist. In diesem Fall genügt es, im Ansatz nach Gl. 7.2 die Eigenschwingungsformen zu berücksichtigen, durch deren Überlagerung das dynamische Antwortverhalten in dem betrachteten niederfrequenten Bereich hinreichend genau beschrieben werden kann. Dabei gilt ganz grob folgende Abschätzung: Ist eine Antwortrechnung im Frequenzbereich zwischen 0 und f^* Hz durchzuführen, so sind zur Erreichung einer guten Konvergenz alle Eigenschwingungsformen im Frequenzbereich 0 bis $2f^*$ Hz im Modalansatz zu berücksichtigen.

Diese sehr gute Näherung zur Systembeschreibung führt dazu, dass nicht alle n Eigenschwingungsformen, welche aus der Eigenwertberechnung am physikalischen Modell resultieren, zu betrachten sind, sondern nur eine Anzahl $N \ll n$. Es versteht sich von selbst, dass dadurch eine deutliche Reduzierung von Freiheitsgraden erzielt wird.

Ausgehend von Gl. 7.6 kann für den Vektor der Beschleunigungen geschrieben werden:

$$\{\ddot{x}(t)\} = [\Phi] \{\ddot{q}(t)\}. \quad (7.7)$$

Das Einsetzen von 7.6 und 7.7 in die Gl. 7.1 liefert nach anschließender Multiplikation von links mit $[\Phi]^\top$:

$$[\Phi]^\top [m][\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^\top [c][\Phi] \{q\} = [\Phi]^\top \{F\}. \quad (7.8)$$

Diese Gleichung wird umgeformt in

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\} \quad (7.9)$$

bzw.

$$\sum_{s=1}^N M_{rs} \ddot{q}_s + \sum_{s=1}^N K_{rs} q_s = Q_r; \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (7.10)$$

In Gl. 7.9 bezeichnet

$$[M] = [\Phi]^\top [m][\Phi] \quad \text{die generalisierte Massenmatrix,} \quad (7.11)$$

$$[K] = [\Phi]^\top [c][\Phi] \quad \text{die generalisierte Steifigkeitsmatrix,} \quad (7.12)$$

$$\{Q\} = [\Phi]^\top \{F\} \quad \text{den Vektor der generalisierten Kräfte.} \quad (7.13)$$

Der Übergang von physikalischen Koordinaten in generalisierte Koordinaten führt dazu, dass die Bewegungsgleichungen des strukturellen Systems in Form von Energiegleichungen formuliert werden. Die Terme der Gl. 7.9 und 7.10 weisen die Dimension $[N \cdot m]$ auf, während die Terme der Kraftgleichung 7.1 mit der Dimension $[N]$ behaftet sind.

Neben der Reduzierung von Freiheitsgraden ergeben sich nun aber weitere Vorteile für die Systembeschreibung in generalisierten Koordinaten. Grund dafür sind, wie im Folgenden aufgeführt wird, spezielle Eigenschaften der generalisierten Systemmatrizen $[M]$ und $[K]$.

Ausgehend von Gl. 7.4 kann mit $\lambda = i\omega_r$ und $\{\hat{Y}\} = \{\Phi_r\}$ für den Fall von Eigenschwingungen im r -ten generalisierten Freiheitsgrad geschrieben werden:

$$-\omega_r^2 [m] \{\Phi_r\} + [c] \{\Phi_r\} = 0. \quad (7.14)$$

Für den Fall der Schwingungsbewegung in der s -ten Eigenschwingungsform mit der Eigenkreisfrequenz ω_s ergibt sich analog

$$-\omega_s^2 [m] \{\Phi_s\} + [c] \{\Phi_s\} = 0. \quad (7.15)$$

Werden die Gl. 7.14 und 7.15 von links mit den transponierten Vektoren $\{\Phi_s\}^\top$ bzw. $\{\Phi_r\}^\top$ multipliziert, so resultiert daraus

$$-\omega_r^2 \{\Phi_s\}^\top [m] \{\Phi_r\} + \{\Phi_s\}^\top [c] \{\Phi_r\} = 0, \quad (7.16)$$

$$-\omega_s^2 \{\Phi_r\}^\top [m] \{\Phi_s\} + \{\Phi_r\}^\top [c] \{\Phi_s\} = 0. \quad (7.17)$$

Da die Matrizen $[m]$ und $[c]$ symmetrisch sind, gilt

$$\{\Phi_s\}^\top [m] \{\Phi_r\} = \{\Phi_r\}^\top [m] \{\Phi_s\}, \quad (7.18)$$

$$\{\Phi_s\}^\top [c] \{\Phi_r\} = \{\Phi_r\}^\top [c] \{\Phi_s\}. \quad (7.19)$$

Damit ergibt sich aus der Subtraktion der Gl. 7.17 von Gl. 7.16:

$$-(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\Phi_s\}^\top [m] \{\Phi_r\} = 0 \quad (7.20)$$

und, da $\omega_r^2 \neq \omega_s^2$ ist,

$$\{\Phi_s\}^\top [m] \{\Phi_r\} = M_{rs} = M_{sr} = 0 \quad (7.21)$$

und mit 7.16:

$$\{\Phi_s\}^\top [c] \{\Phi_r\} = K_{rs} = K_{sr} = 0. \quad (7.22)$$

Aus der Gl. 7.16 resultiert dann weiterhin:

$$\omega_r^2 M_{rr} = K_{rr}. \quad (7.23)$$

Diese Herleitung zeigt, dass die generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen – für den Fall, dass dem Modalansatz die Eigenschwingungsformen des Systems zugrunde gelegt werden – Diagonalform aufweisen. Diese Feststellung ist wesentlich, denn damit können die Bewegungsgleichungen des Schwingungssystems in Form eines Satzes von N *entkoppelten* Gleichungen der Form

$$M_{rr}\ddot{q}_r + K_{rr}q_r = Q_r; \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (7.24)$$

beschrieben werden. In Matrixschreibweise resultiert daraus:

$$\begin{bmatrix} M_{\setminus} \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} K_{\setminus} \end{bmatrix} \{q\} = \{Q\}, \quad (7.25)$$

mit den *diagonalen* generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen $\begin{bmatrix} M_{\setminus} \end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix} K_{\setminus} \end{bmatrix}$.

Wie können nun die Dämpfungseigenschaften des strukturellen Systems berücksichtigt werden?

Unter der Annahme, dass die physikalische Dämpfungsmatrix als Linearkombination der Massen- und der Steifigkeitsmatrix dargestellt werden kann, entsprechend

$$[d] = \alpha[m] + \beta[c], \quad (7.26)$$

kann gezeigt werden, dass die generalisierte Dämpfungsmatrix $[D]$ dann auch Diagonalform aufweist. In diesem Fall spricht man von „modaler Dämpfung“. Im

Allgemeinen werden die verschiedenen Dämpfungswerte, in Analogie zu Gl. 3.4, wie folgt definiert:

$$D_{rr} = 2\vartheta_r \cdot \sqrt{K_{rr} \cdot M_{rr}}; \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (7.27)$$

oder unter Berücksichtigung von Gl. 7.23:

$$D_{rr} = \frac{2\vartheta_r \cdot K_{rr}}{\omega_r}; \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (7.28)$$

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich schließlich für die Bewegungsgleichungen (auch kompliziertester) elastomechanischer Systeme:

$$\left[\backslash M \backslash \right] \{\ddot{q}\} + \left[\backslash D \backslash \right] \{\dot{q}\} + \left[\backslash K \backslash \right] \{q\} = \{Q\}, \quad (7.29)$$

bzw.

$$M_{rr} \cdot \ddot{q}_r + D_{rr} \cdot \dot{q}_r + K_{rr} \cdot q_r = Q_r; \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (7.30)$$

Die Gl. 7.29 und 7.30 stellen eine Kette von N *entkoppelten* Einmassenschwingern mit den charakteristischen Kenngrößen M_{rr} , D_{rr} und K_{rr} dar (Abb. 7.1). Demzufolge kann durch Übergang von physikalischen in generalisierte Koordinaten eine wesentlich vereinfachte Systembeschreibung gegenüber 7.1 erreicht werden. Damit lassen sich dann auch dynamische Antwortrechnungen in einfacher Weise durchführen.

Unter Berücksichtigung der Gl. 7.23 und 7.27 kann die Gl. 7.30 wie folgt geschrieben werden:

$$\hat{\ddot{q}}_r(t) + 2\vartheta_r \omega_r \hat{\dot{q}}_r(t) + \omega_r^2 \hat{q}_r(t) = \frac{1}{M_{rr}} \cdot \hat{Q}_r(t). \quad (7.31)$$

Setzen wir

$$\eta_r = \frac{\Omega}{\omega_r}, \quad (7.32)$$

so ergibt sich für den Fall erzwungener harmonischer Schwingungen mit

$$\hat{Q}_r(t) = \hat{Q}_{0r} e^{i\Omega t} \quad (7.33)$$

und

$$\hat{q}_r(t) = \hat{q}_{0r} e^{i\Omega t} \quad (7.34)$$

in Analogie zu Gl. 3.44:

$$\hat{q}_{0r} = \frac{1}{K_{rr}} \cdot \frac{(1 - \eta_r^2) - i \cdot 2\vartheta_r \eta_r}{(1 - \eta_r^2)^2 + 4\vartheta_r^2 \eta_r^2} \cdot \hat{Q}_{0r}, \quad (7.35)$$

oder

$$\hat{q}_{0r} = \frac{1}{K_{rr}} \cdot \hat{V}_r \cdot \hat{Q}_{0r}, \quad (7.36)$$

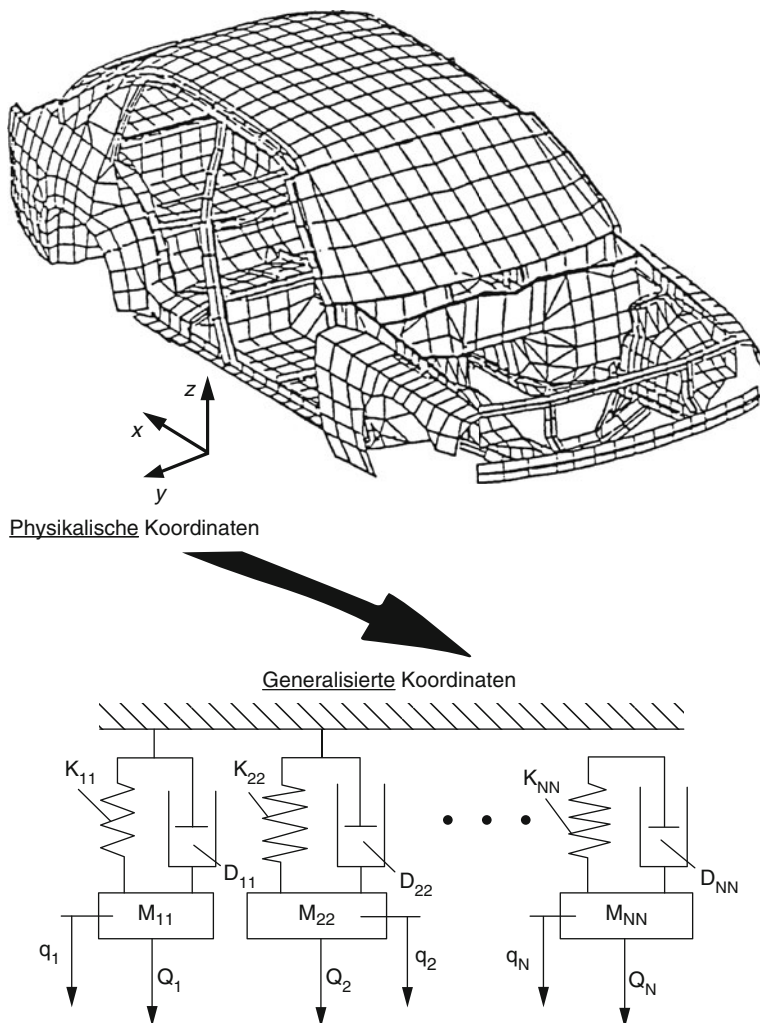


Abb. 7.1 Physikalische und generalisierte Koordinaten

wobei \hat{V}_r die Vergrößerungsfunktion für den r -ten generalisierten Freiheitsgrad q_r darstellt. Unter Berücksichtigung der Gl. 7.6 kann dann für die dynamische Antwort des physikalischen Systems geschrieben werden:

$$\{\hat{X}(t)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\hat{V}_r}{K_{rr}} \cdot \{\Phi_r\} \cdot \hat{Q}_{0r} \cdot e^{i\Omega t}. \quad (7.37)$$

7.2 Anwendungsbeispiel: Flugzeug-Fahrwerk-System

Wenden wir uns, zur praktischen Anwendung der in Abschn. 7.1 aufgeführten Grundlagen, dem Beispiel des Flugzeug-Fahrwerk-Systems aus Abschn. 4.1 zu. Dort hatten wir uns auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen dieses Zweimassenschwingers konzentriert. Bei der Analyse des dynamischen Verhaltens im Falle erzwungener Schwingungen wurde in Abschn. 4.2 dieses System nicht mehr weiter betrachtet, da bei Berücksichtigung seiner Dämpfungseigenschaften der entsprechende Aufwand viel zu groß gewesen wäre. Im modalen Bereich, d. h. in generalisierten Koordinaten, kann das Schwingungsverhalten dieses Systems nun aber relativ einfach ermittelt werden. Die physikalischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen waren wie folgt definiert:

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad [c] = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es ergaben sich die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = 0.7062\omega_0, \quad \omega_2 = 14.1598\omega_0,$$

mit den zugeordneten Eigenschwingungsformen

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.501 \end{Bmatrix}, \quad \{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -199.5 \end{Bmatrix} \hat{=} \begin{Bmatrix} -0.005 \\ 1.0 \end{Bmatrix}.$$

Daraus resultiert als Modalmatrix:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.005 \\ 0.501 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich für die generalisierte Massenmatrix nach Gl. 7.11:

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = m \cdot \begin{bmatrix} 1.0025 & 0 \\ 0 & 0.010025 \end{bmatrix},$$

und für die generalisierte Steifigkeitsmatrix nach Gl. 7.12:

$$[K] = [\Phi]^T [c] [\Phi] = c \cdot \begin{bmatrix} 0.50 & 0 \\ 0 & 2.01 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrizen weisen Diagonalform auf!

Auf der Basis der Gl. 7.23 kann eine Überprüfung der Eigenkreisfrequenzen erfolgen, entsprechend

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K_{rr}}{M_{rr}}}.$$

Wir erhalten:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_{11}}{M_{11}}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \sqrt{\frac{0.5}{1.0025}} \hat{=} 0.7062 \omega_0,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_{22}}{M_{22}}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \sqrt{\frac{2.01}{0.010025}} \hat{=} 14.1598 \omega_0.$$

Nehmen wir folgende modalen Dämpfungsfaktoren an:

$$\vartheta_1 = 0.10, \quad \vartheta_2 = 0.05,$$

dann ergibt sich nach Gl. 7.28 für die Werte der generalisierten Dämpfungsmatrix:

$$D_{11} = \frac{2 \cdot 0.10 \cdot 0.50 \cdot c}{0.7062 \cdot \omega_0} \simeq 0.14 \frac{c}{\omega_0},$$

$$D_{22} = \frac{2 \cdot 0.05 \cdot 2.01 \cdot c}{14.1598 \cdot \omega_0} \simeq 0.007 \frac{c}{\omega_0}.$$

Somit kann für die Bewegungsgleichung in generalisierten Koordinaten geschrieben werden:

$$m \begin{bmatrix} 1.00 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{c}{\omega_0} \begin{bmatrix} 0.14 & 0 \\ 0 & 0.007 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}.$$

Der Anregungsterm im physikalischen System war – entsprechend Gl. 7.37 mit $\beta = 1$ – wie folgt definiert:

$$\{F\} = c \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot a,$$

woraus sich für den generalisierten Kraftvektor nach Gl. 7.13 ergibt:

$$\{Q\} = [\Phi]^T \cdot \{F\} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.501 \\ -0.005 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} c \cdot a = a \cdot c \cdot \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix}.$$

Für den Fall einer harmonischen Anregung $a(t) = \hat{a}_0 e^{i\Omega t}$ kann für den Vektor der generalisierten Koordinaten geschrieben werden: $\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{q}_{10} \\ \hat{q}_{20} \end{Bmatrix} e^{i\Omega t}$, was ergibt:

$$\begin{aligned} & \left[-\Omega^2 m \begin{bmatrix} 1.00 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} + i\Omega \frac{c}{\omega_0} \begin{bmatrix} 0.14 & 0 \\ 0 & 0.007 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \hat{q}_{10} \\ \hat{q}_{20} \end{Bmatrix} \\ & = c \cdot \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \cdot \hat{a}_0, \end{aligned}$$

oder

$$\left(-\Omega^2 m + i\Omega \frac{c}{\omega_0} \cdot 0.14 + c \cdot 0.5 \right) \hat{q}_{10} = c \cdot 0.5 \cdot \hat{a}_0,$$

$$\left(-\Omega^2 m \cdot 0.01 + i \Omega \frac{c}{\omega_0} \cdot 0.007 + c \cdot 2.0\right) \hat{q}_{20} = c \cdot \hat{a}_0.$$

Die Bewegungsgleichungen sind entkoppelt!

Die dynamische Antwort ergibt sich nach Gl. 7.35 wie folgt

- für den ersten generalisierten Freiheitsgrad:

$$\hat{q}_{10} = \frac{1}{0.5c} \cdot \frac{(1 - \eta_1^2) - i \cdot 0.2\eta_1}{(1 - \eta_1^2)^2 + 0.04\eta_1^2} \cdot 0.5 \cdot c \cdot \hat{a}_0 = \hat{V}_1 \cdot \hat{a}_0,$$

- für den zweiten generalisierten Freiheitsgrad:

$$\hat{q}_{20} = \frac{1}{2.0c} \cdot \frac{(1 - \eta_2^2) - i \cdot 0.10\eta_2}{(1 - \eta_2^2)^2 + 0.01\eta_2^2} \cdot c \cdot \hat{a}_0 = \frac{1}{2} \cdot \hat{V}_2 \cdot \hat{a}_0.$$

Die Vergrößerungsfunktionen \hat{V}_1 und \hat{V}_2 sind in Abb. 7.2 dargestellt.

Für den Frequenzgang der physikalischen Verschiebungen kann nach Gl. 7.6 geschrieben werden:

$$\begin{Bmatrix} \hat{x}_{10} \\ \hat{x}_{20} \end{Bmatrix} = \left(\hat{V}_1 \cdot \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.501 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \hat{V}_2 \cdot \begin{Bmatrix} -0.005 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \right) \cdot \hat{a}_0. \quad (7.38)$$

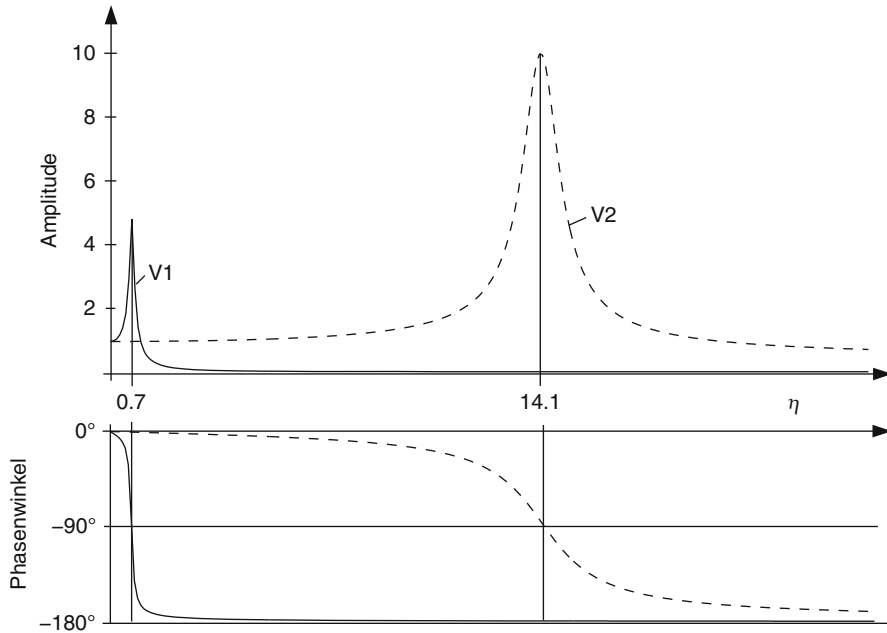


Abb. 7.2 Vergrößerungsfunktionen des Flugzeug-Fahrwerk-Systems

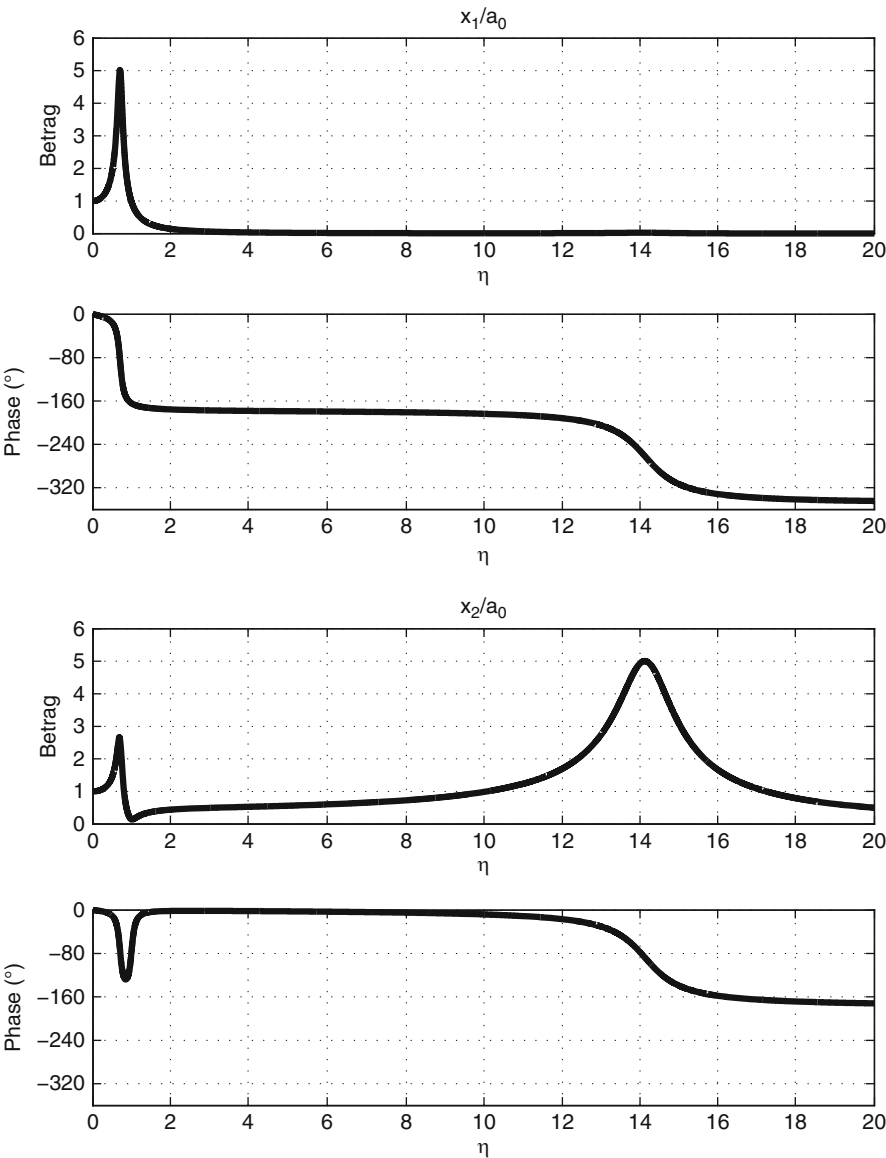
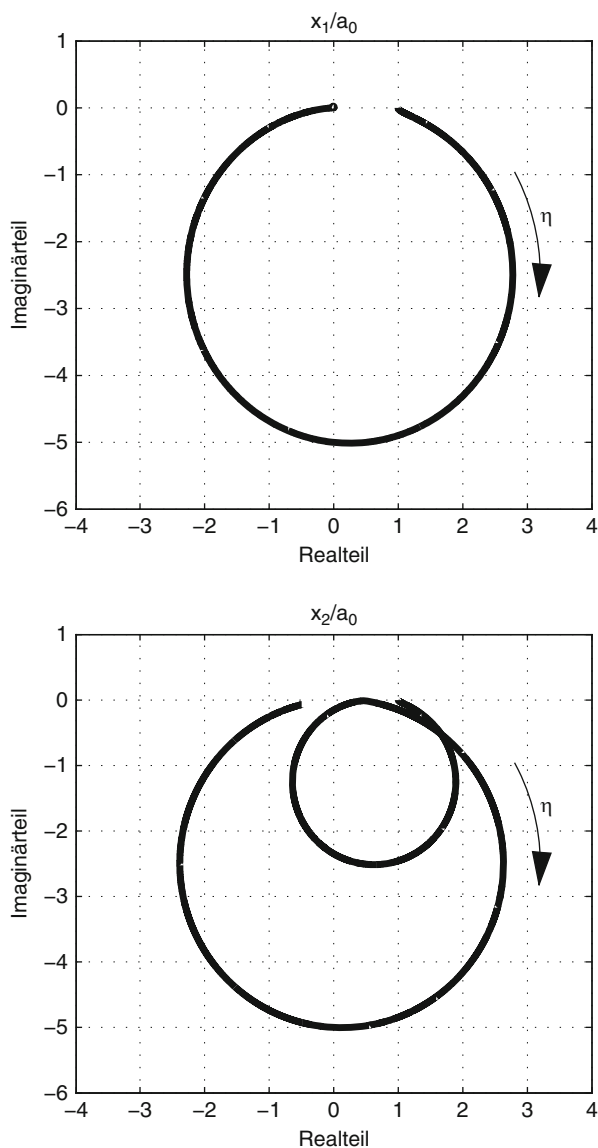


Abb. 7.3 Darstellung der dynamischen Antwort für die physikalischen Freiheitsgrade x_1 und x_2 , aufgetrennt nach Betrag und Phase

Abb. 7.4 Ortskurvendarstellung der dynamischen Antwort für die physikalischen Freiheitsgrade x_1 (oben) und x_2 (unten)



Das Ergebnis dieses Überlagerungsansatzes ist in Abb. 7.3 nach Betrag und Phase und in Abb. 7.4 in Form von Ortskurven für die physikalischen Freiheitsgrade x_1 und x_2 dargestellt. Dabei wurde die Anregung \hat{a}_0 als reeller Wert mit dem Betrag a_0 angenommen.



<http://www.springer.com/978-3-642-19697-3>

Strukturdynamik

Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch

Freymann, R.

2011, IX, 225 S. 142 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-19697-3