

## Kapitel 8

# Modale Korrekturverfahren

Viele strukturdynamische Systeme weisen ein sich zeitlich veränderndes (Eigen-) Schwingungsverhalten auf. Diese Eigenschaft ist darauf zurückzuführen, dass sich die Trägheits- und/oder Steifigkeitskenndaten des strukturellen Systems als eine Funktion der Zeit verändern. Beispielhaft aufgeführt sei in diesem Zusammenhang ein Flugzeug in seinen Start- und Landekonfigurationen, wobei beide Zustände sich im Allgemeinen erheblich in der Massenverteilung – aufgrund des verbrauchten Treibstoffs – unterscheiden. Nicht zu vernachlässigen sind weiterhin Untersuchungen im Bereich des Ingenieurbaus zu diesem Thema, so z. B. die Bestimmung des Eigenschwingungsverhaltens von (Hänge-) Brücken und Wolkenkratzern bei unterschiedlichen Beladungszuständen. Frage ist nun, wie das dynamische Verhalten dieser Vielfalt von strukturell modifizierten Systemkonfigurationen effizient ermittelt werden kann.

Gehen wir davon aus, dass eine Ausgangskonfiguration A des strukturellen Systems in Form einer FE-Idealisierung vorliegt. Diese Konfiguration ist gekennzeichnet durch ihre physikalischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen  $[m_A]$  bzw.  $[c_A]$ . Auf der Grundlage der Gl. 7.4 und 7.5 können damit die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{Ar}$  und Eigenschwingungsformen  $\{\Phi_{Ar}\}$  berechnet werden.

Zur Ermittlung des dynamischen Verhaltens einer strukturell modifizierten Konfiguration E muss das FE-Modell entsprechend verändert werden. Die Modifikationen  $[\Delta m]$  und  $[\Delta c]$  für die physikalischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen, ausgehend von der Ausgangskonfiguration A, liefern für die Matrizen der modifizierten Endkonfiguration:

$$[m_E] = [m_A] + [\Delta m], \quad (8.1)$$

$$[c_E] = [c_A] + [\Delta c]. \quad (8.2)$$

Sind die Matrizen  $[m_E]$  und  $[c_E]$  bekannt, so kann – wiederum auf der Grundlage der Gl. 7.4 und 7.5 – eine Eigenwertrechnung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{Er}$  und der Eigenschwingungsformen  $\{\Phi_{Er}\}$  der modifizierten Struktur durchgeführt werden.

Es versteht sich von selbst, dass diese Verfahrensweise, sobald viele „Zwischenkonfigurationen“ zu berechnen sind und das FE-Modell viele Freiheitsgrade aufweist,

mit einem beträchtlichen Aufwand verbunden ist. Zur Reduzierung des Rechenaufwandes bedarf es effizienterer Vorgehensweisen. Wie im Folgenden gezeigt wird, bieten modale Korrekturverfahren die Möglichkeit zur signifikanten Reduzierung des Rechenaufwandes und sind damit die Voraussetzung zur Berechnung einer Vielzahl von strukturellen Konfigurationen in einem „endlichen“ Zeitraum.

## 8.1 Theoretische Grundlagen

Ausgangspunkt der Betrachtung ist Gl. 7.1, welche für das Ausgangssystem wie folgt formuliert werden kann:

$$[m_A] \{\ddot{x}\} + [c_A] \{\dot{x}\} = \{F\}. \quad (8.3)$$

Durch modale Transformation

$$\{x\} = [\Phi_A] \{q_A\} \quad (8.4)$$

wird Gl. 8.3 in den modalen Raum transformiert, woraus resultiert:

$$[M_A] \{\ddot{q}_A\} + [K_A] \{q_A\} = [\Phi_A]^\top \{F\}. \quad (8.5)$$

Dabei bestehen entsprechend den Gl. 7.11 und 7.12 folgende Zusammenhänge zwischen physikalischen und generalisierten Matrizen:

$$[M_A] = [\Phi_A]^\top [m_A] [\Phi_A], \quad (8.6)$$

$$[K_A] = [\Phi_A]^\top [c_A] [\Phi_A]. \quad (8.7)$$

Für den Fall eines harmonischen Erregungsvektors

$$\{F(t)\} = \{\hat{F}_0\} e^{i\Omega t} \quad (8.8)$$

und den daraus resultierenden harmonischen Antworten

$$\{q_A(t)\} = \{\hat{q}_{A0}\} e^{i\Omega t}, \quad (8.9)$$

kann Gl. 8.5 wie folgt geschrieben werden:

$$[-\Omega^2 [M_A] + [K_A]] \{\hat{q}_{A0}\} = [\Phi_A]^\top \{\hat{F}_0\}. \quad (8.10)$$

Wenden wir jetzt diese gleiche Vorgehensweise auf den Fall der modifizierten Konfiguration E an, so kann – unter Berücksichtigung der Gl. 8.1 und 8.2 – für deren Bewegungsgleichungen in physikalischen Koordinaten geschrieben werden:

$$[m_A + \Delta m] \{\ddot{x}\} + [c_A + \Delta c] \{\dot{x}\} = \{F\}. \quad (8.11)$$

Beschreiben wir die physikalischen Verschiebungen wiederum auf der Basis der Verschiebungen in den modalen Freiheitsgraden der *Ausgangskonfiguration*, entsprechend

$$\{x\} = [\Phi_A] \cdot \{q_E\}, \quad (8.12)$$

so ergibt sich aus Gl. 8.11:

$$[M_A + \Delta M] \{\ddot{q}_E\} + [K_A + \Delta K] \{q_E\} = [\Phi_A]^\top \{F\}. \quad (8.13)$$

Dabei sind die modalen Massen- und Steifigkeitskorrekturmatrizen wie folgt definiert:

$$[\Delta M] = [\Phi_A]^\top [\Delta m] [\Phi_A], \quad (8.14)$$

$$[\Delta K] = [\Phi_A]^\top [\Delta c] [\Phi_A]. \quad (8.15)$$

Anzumerken ist, dass die generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen der Endkonfiguration

$$[\tilde{M}_E] = [M_A + \Delta M], \quad (8.16)$$

$$[\tilde{K}_E] = [K_A + \Delta K] \quad (8.17)$$

im Allgemeinen keine Diagonalform aufweisen. Der Grund für die nichtdiagonalen Eigenschaften von  $[\Delta M]$  und  $[\Delta K]$  liegt darin, dass in Gl. 8.12 die Eigenformen der *Ausgangskonfiguration* als Ansatzfunktion zur Beschreibung des Deformationsverhaltens der *Endkonfiguration* gewählt wurden.

Zur Berechnung der Eigenschwingungskennwerte  $\omega_{Er}$  und  $\Phi_{Er}$  des modifizierten strukturellen Systems wird von Gl. 8.13 ausgegangen, wobei nur das homogene Gleichungssystem ohne Einwirkung der äußeren Anregung betrachtet wird ( $\{F\} = 0$ ).

Mit

$$\{q_E(t)\} = \{\hat{q}_E\} \cdot e^{\lambda t} \quad (8.18)$$

ergibt sich:

$$[\lambda^2 [M_A + \Delta M] + [K_A + \Delta K]] \{\hat{q}_E\} = 0. \quad (8.19)$$

Die Eigenwertrechnung an diesem Gleichungssystem liefert die Eigenwertlösungen  $\lambda_r$  und dementsprechend die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{Er}$  der modifizierten Struktur sowie die zugeordneten reellen Eigenvektoren  $\{q_{Er}\}$  für die generalisierten Koordinaten ( $r = 1, 2, \dots, N$ ). Damit ergibt sich – auf der Grundlage des Modalansatzes nach Gl. 8.12 – für die Verschiebungen in den Eigenformen der modifizierten Struktur:

$$\{x_{Er}\} = [\Phi_A] \cdot \{q_{Er}\}; \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (8.20)$$

Die Berechnung der einzelnen Eigenformen für das modifizierte strukturelle System nach Gl. 8.20 liefert dann schließlich die Modalmatrix der Endkonfiguration

$$[\Phi_E] \equiv [\{x_{E1}\} \{x_{E2}\} \dots \{x_{Er}\} \dots \{x_{EN}\}]. \quad (8.21)$$

Als besonders vorteilhaft zeigt sich nun, dass die Modalmatrix  $[\Phi_E]$  bezüglich der physikalischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen des modifizierten Systems,  $[m_E]$  bzw.  $[c_E]$ , orthogonale Eigenschaften aufweist, denn es gilt:

$$[\backslash M_{E\backslash}] = [\Phi_E]^\top [m_E] [\Phi_E] = [\Phi_E]^\top [m_A + \Delta m] [\Phi_E], \quad (8.22)$$

$$[\backslash K_{E\backslash}] = [\Phi_E]^\top [c_E] [\Phi_E] = [\Phi_E]^\top [c_A + \Delta c] [\Phi_E]. \quad (8.23)$$

Dank dieser Vorgehensweise gelingt es also, die Bewegungsgleichungen der Endkonfiguration wieder – in Analogie zur Ausgangskonfiguration – in Form eines Satzes entkoppelter Gleichungen der Form

$$[\backslash M_{E\backslash}] \{\ddot{q}_E\} + [\backslash K_{E\backslash}] \{q_E\} = [\Phi_E]^\top \cdot \{F\} \quad (8.24)$$

darzustellen. Wie schon in Abschn. 7.1 gezeigt wurde, ist diese entkoppelte Darstellung besonders vorteilhaft zur Durchführung von dynamischen Antwortrechnungen.

**Kurzbeschreibung der Vorgehensweise** Sind an einem strukturell modifizierten System eine Vielzahl von dynamischen Antwortrechnungen durchzuführen, so empfiehlt sich folgende sehr effiziente Vorgehensweise:

1. Definition einer Ausgangskonfiguration (Basiskonfiguration) für das strukturelle System.
2. Ermittlung der physikalischen Massen- und Steifigkeitskorrekturmatrizen für die Basiskonfiguration.
3. Eigenwertrechnung an dem in physikalischen Koordinaten beschriebenen Basissystem zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{Ar}$  und Eigenschwingungsformen  $\{\Phi_{Ar}\}$ .
4. Ermittlung der physikalischen Massen- und Steifigkeitskorrekturmatrizen  $[\Delta m]$  bzw.  $[\Delta c]$  für eine modifizierte Strukturvariante.
5. Berechnung der entsprechenden modalen Korrekturmatrizen  $[\Delta M]$ ,  $[\Delta K]$ .
6. Bestimmung der Massen- und Steifigkeitsmatrizen  $[\tilde{M}_E]$ ,  $[\tilde{K}_E]$ .
7. Eigenwertrechnung am Gleichungssystem  $[\lambda^2 [\tilde{M}_E] + [\tilde{K}_E]] \{\hat{q}_E\} = 0$  liefert die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{Er}$  des modifizierten Systems und die zugeordneten Eigenvektoren  $\{q_{Er}\}$ .
8. Bestimmung der Eigenschwingungsformen des modifizierten Systems nach Gl. 8.20.
9. Berechnung der diagonalen Massen- und Steifigkeitsmatrizen  $[\backslash M_{E\backslash}]$ ,  $[\backslash K_{E\backslash}]$  des modifizierten Systems entsprechend den Gl. 8.22 und 8.23.
10. Bestimmung des „neuen“ generalisierten Anregungsvektors  $[\Phi_E]^\top \cdot \{F\}$ .
11. Durchführung von dynamischen Antwortrechnungen auf der Grundlage des entkoppelten Gleichungssystems 8.24.

## 8.2 Anwendungsbeispiel: Zweimassenschwinger

Betrachten wir das in Abb. 4.1 dargestellte Flugzeug-Fahrwerk-System. Das Schwingungsverhalten dieses strukturellen Systems kann sich wesentlich verändern, da die Flugzeugmasse während der gesamten Flugphase kontinuierlich wegen des Treibstoffverbrauchs abnimmt. Daraus kann gefolgert werden, dass das Schwingungsverhalten in den Start- und Landephase sehr unterschiedlich ist. Wie kann nun das Eigenschwingungsverhalten dieser Struktur in einer „modifizierten“ Konfiguration auf der Grundlage des modalen Korrekturverfahrens bestimmt werden?

Gehen wir davon aus, dass die in den Abschn. 4.1 und 7.2 beschriebene Flugzeugkonfiguration die Startkonfiguration darstellt. Die ihr zugeordneten physikalischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} [m_A] &= m \cdot \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \\ [c_A] &= c \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Als Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen wurden ermittelt:

$$\begin{aligned} \omega_{A1} &= 0.7062 \omega_0, \\ \omega_{A2} &= 14.1598 \omega_0, \\ \{\Phi_{A1}\} &= \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.501 \end{Bmatrix}, \\ \{\Phi_{A2}\} &= \begin{Bmatrix} -0.005 \\ 1.0 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Modalmatrix

$$[\Phi_A] = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.005 \\ 0.501 & 1.0 \end{bmatrix}$$

und für die generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen:

$$\begin{aligned} [M_A] &= m \cdot \begin{bmatrix} 1.0025 & 0 \\ 0 & 0.010025 \end{bmatrix}, \\ [K_A] &= c \cdot \begin{bmatrix} 0.50 & 0 \\ 0 & 2.01 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Frage ist nun, welche Eigenschwingungskennwerte das Flugzeug in der Landekonfiguration aufweisen würde, unter der Annahme, dass die Flugzeugmasse dann nur einen halb so hohen Wert, entsprechend  $m_1 = m/2$ , besitzt. Mit dieser Angabe ergibt sich für die physikalischen Korrekturmatrizen zwischen der Lande- und der Startkonfiguration:

$$[\Delta m] = m \cdot \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\Delta c] = c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entsprechend den Gl. 8.14 und 8.15 resultieren daraus die modalen Korrekturmatri-  
zen:

$$\begin{aligned} [\Delta M] &= m \cdot \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0025 \\ 0.0025 & -0.00001 \end{bmatrix}, \\ [\Delta K] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit kann, nach den Gl. 8.16 und 8.17, für die generalisierten Massen- und Stei-  
figkeitsmatrizen der Flugzeugkonfiguration in der Startphase geschrieben werden:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_E] &= m \cdot \begin{bmatrix} 0.5025 & 0.0025 \\ 0.0025 & 0.010015 \end{bmatrix}, \\ [\tilde{K}_E] &= c \cdot \begin{bmatrix} 0.50 & 0 \\ 0 & 2.01 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Eigenwertrechnung am Gleichungssystem

$$[\lambda^2 [\tilde{M}_E] + [\tilde{K}_E]] \{\hat{q}_E\} = 0 \quad (8.25)$$

führt zu

$$|\lambda^2 [\tilde{M}_E] + [\tilde{K}_E]| = 0.$$

Mit  $\bar{\lambda} = \lambda/\omega_0$ , wobei  $\omega_0^2 = c/m$  gilt, resultiert daraus

$$\begin{vmatrix} 0.5025\bar{\lambda}^2 + 0.50 & 0.0025\bar{\lambda}^2 \\ 0.0025\bar{\lambda}^2 & 0.010015\bar{\lambda}^2 + 2.01 \end{vmatrix} = 0.$$

Die charakteristische Gleichung dazu lautet:

$$0.00503\bar{\lambda}^4 + 1.01503\bar{\lambda}^2 + 1.005 = 0,$$

woraus folgende Lösungen resultieren:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1^2 &= -0.99501 \Rightarrow \omega_{E1} = 0.9975\omega_0, \\ \bar{\lambda}_2^2 &= -200.8102 \Rightarrow \omega_{E2} = 14.1707\omega_0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Eigenschwingungsformen in der Landekonfiguration werden  
die Lösungen für  $\bar{\lambda}_1^2$  und  $\bar{\lambda}_2^2$  nacheinander in die Gl. 8.25 eingesetzt. Es ergibt sich

→ für  $\bar{\lambda}_1^2 = -0.99501$  (aus Zeile 2 von Gl. 8.25):

$$-0.0025 \cdot 0.99501 \cdot q_1 + (-0.010015 \cdot 0.99501 + 2.01) \cdot q_2 = 0$$

oder  $q_1 = 804 \cdot q_2$

Sei  $q_1 = 1 \Rightarrow q_2 = 0.00124$ .

Damit ergibt sich nach Gl. 8.12 für die Verschiebungen in der ersten Eigenschwingungsform:

$$\{x_{E1}\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.501 \end{Bmatrix} \cdot 1 + \begin{Bmatrix} -0.005 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \cdot 0.00124 = \begin{Bmatrix} 0.995 \\ 0.502 \end{Bmatrix}.$$

Damit kann für die erste normierte Eigenschwingungsform geschrieben werden:

$$\{\Phi_{E1}\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.502 \end{Bmatrix}.$$

→ für  $\bar{\lambda}_2^2 = -200.8102$  (aus 1. Zeile von Gl. 8.25):

$$(-0.5025 \cdot 200.8102 \cdot +0.5) \cdot q_1 - 0.0025 \cdot 200.8102 \cdot q_2 = 0$$

oder  $q_2 = -200.00 \cdot q_1$

Sei  $q_2 = 1 \Rightarrow q_1 = -0.005$ .

Damit folgt aus Gl. 8.12:

$$\{x_{E2}\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.501 \end{Bmatrix} \cdot (-0.005) + \begin{Bmatrix} -0.005 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \cdot 1 = \begin{Bmatrix} -0.010 \\ 0.9975 \end{Bmatrix}.$$

und dementsprechend für die zweite normierte Eigenschwingungsform:

$$\{\Phi_{E2}\} = \begin{Bmatrix} -0.01 \\ 1.0 \end{Bmatrix}.$$

Ein Vergleich zwischen den einander zugeordneten Kenndaten für die Start- und Landekonfigurationen A bzw. E zeigt, dass sich durch die Veränderung der Flugzeugmasse nur ein signifikanter Unterschied in der Eigenfrequenz der ersten Eigenschwingungsform einstellt. Die Eigenschwingungsformen selbst bleiben fast unberührt von der doch deutlichen Massenänderung.

Abschließend sei erwähnt, dass die diagonalen generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen  $\begin{bmatrix} M_{E\setminus} \end{bmatrix}$  und  $\begin{bmatrix} K_{E\setminus} \end{bmatrix}$  der Struktur in der Landekonfiguration auf der Grundlage der Gl. 8.22 und 8.23 bestimmt werden können.

Selbstverständlich kann das Ergebnis für die Eigenschwingungskenngrößen der Landekonfiguration auch auf der Basis des physikalischen Modells, entsprechend den in Abschn. 4.1 aufgeführten Zusammenhängen, hergeleitet werden. Mit Bezug auf Abb. 4.2 können die entsprechenden Bewegungsgleichungen wie folgt formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{100} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0.$$

**Tab. 8.1** Eigenwerte der Ausgangs- und Endkonfiguration

Konfiguration	$\omega_1$	$\omega_2$	$\{\Phi_1\}$	$\{\Phi_2\}$
Ausgangskonfiguration	$0,71\omega_0$	$14,16\omega_0$	$\begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,501 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,005 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$
Endkonfiguration (modale Korrektur)	$1,00\omega_0$	$14,17\omega_0$	$\begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,502 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,01 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$
Endkonfiguration (phys. Modell)	$1,00\omega_0$	$14,18\omega_0$	$\begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,502 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,01 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung

$$0.005\bar{\lambda}^4 + 1.01\bar{\lambda}^2 + 1.0 = 0$$

mit den Eigenwerten

$$\bar{\lambda}_1^2 = -0.995 \Rightarrow \omega_{E1} = 0.9975\omega_0,$$

$$\bar{\lambda}_2^2 = -201.005 \Rightarrow \omega_{E2} = 14.177\omega_0.$$

Für die normierten Eigenschwingungsformen ergibt sich:

$$\{\Phi_{E1}\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.502 \end{Bmatrix}; \quad \{\Phi_{E2}\} = \begin{Bmatrix} -0.01 \\ 1.0 \end{Bmatrix}.$$

Festzustellen ist, dass die auf diese Weise erhaltenen Kenndaten (Tab. 8.1) äußerst gut mit den über die modale Korrekturrechnung gewonnenen Werten übereinstimmen. Theoretisch stimmen die über beide Rechenverfahren erhaltenen Ergebnisse *exakt* überein, wenn *alle* Eigenschwingungsformen der Ausgangskonfiguration im Modalansatz 8.12 der Endkonfiguration berücksichtigt werden.

Anmerkung: die hier festgestellten marginalen Unterschiede in den Werten resultieren aus Rundungsfehlern in der Berechnung.

In der Praxis wird aber im Allgemeinen so vorgegangen, dass bei großen physikalischen Modellen (Mehrmassenschwinger, kontinuierliche Systeme) nur eine begrenzte Anzahl von Eigenschwingungsformen im Modalansatz berücksichtigt wird. Das über eine modale Korrekturrechnung erhaltene Ergebnis stellt dann aber nur eine (gute) *Näherung* für die exakte Lösung dar. Trotzdem ist diese Vorgehensweise sinnvoll, da damit der Rechenaufwand (bei größeren elastomechanischen Systemen) erheblich reduziert werden kann.

### 8.3 Anwendungsbeispiel: Balkenstruktur

Betrachten wir die in Abb. 8.1 dargestellte Ausgangskonfiguration einer beidseitig gelenkig gelagerten Balkenstruktur mit der Massenverteilung  $\bar{m} = m/l$ , der Biegesteifigkeit  $EI$  und der Querschnittsfläche  $A$ . Ziel der Untersuchung ist es,



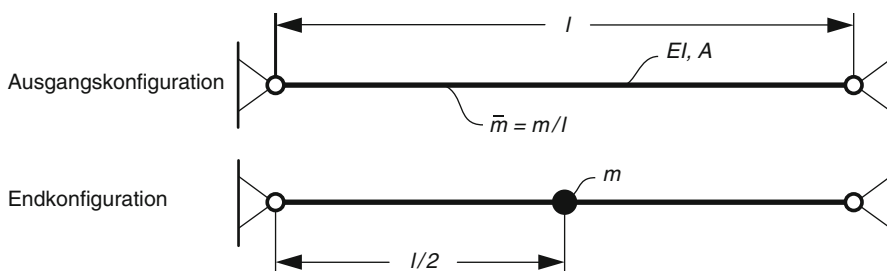


Abb. 8.1 Balkenkonfigurationen

ausgehend von den strukturdynamischen Kenndaten der Ausgangskonfiguration, auf das Eigenschwingungsverhalten einer Endkonfiguration zu schließen, die dadurch gekennzeichnet ist, dass in Balkenmitte eine Zusatzmasse  $m$  angeordnet ist.

Konzentrieren wir uns im ersten Schritt auf das Schwingungsverhalten des Balkensystems in seiner Ausgangskonfiguration. Auf der Grundlage der in Abschn. 6.1.3 aufgeführten Herleitung ergibt sich unter Berücksichtigung der vorliegenden Randbedingungen für die Eigenschwingungsformen:

$$\Phi_{Ar}(x) = X_0 \cdot \sin r \frac{\pi x}{l}; \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (8.26)$$

Die drei frequenzniedrigsten Eigenschwingungsformen sind in Abb. 8.2 dargestellt. Die Eigenkreisfrequenzen können aus der Frequenzgleichung nach Abb. 6.11

$$\sin \alpha_r = 0 \quad (8.27)$$

ermittelt werden, mit den Lösungen

$$\alpha_r = r \cdot \pi; \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (8.28)$$

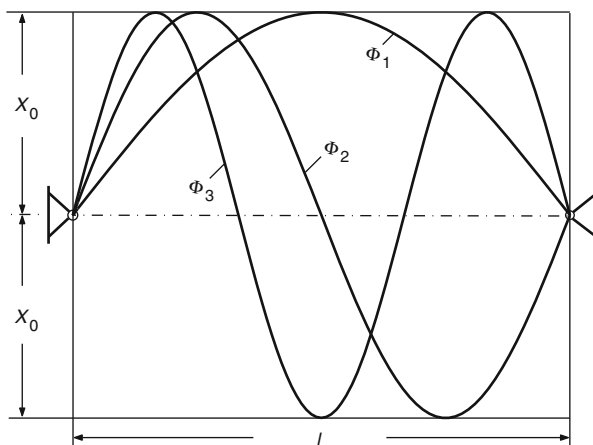


Abb. 8.2 Frequenzniedrigste Eigenschwingungsformen eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens

Unter Berücksichtigung der Gl. 6.45 ergibt sich für die Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_{Ar} = r^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A \cdot l^4}} = r^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (8.29)$$

Für die generalisierten Massen kann geschrieben werden:

$$M_{Arr} = \int_0^l \bar{m} \cdot \Phi_{Ar}^2(x) dx, \quad (8.30)$$

$$M_{Arr} = \rho \cdot A \cdot X_0^2 \int_0^l \sin^2 \frac{r\pi x}{l} dx = X_0^2 \rho A \frac{l}{2},$$

$$M_{Arr} = \frac{1}{2} m X_0^2; \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Demzufolge weisen die generalisierten Massen in allen Eigenschwingungsformen, bei Normierung auf den Wert  $X_0$ , den gleichen Wert auf. Mit Gl. 7.23 ergibt sich für die generalisierten Steifigkeiten:

$$K_{Arr} = \omega_{Ar}^2 \cdot M_{Arr}, \quad (8.31)$$

$$K_{Arr} = \frac{1}{2} \cdot \pi^4 \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot X_0^2 \cdot r^4; \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Demzufolge ergeben sich für die Balkenstruktur folgende Ausdrücke für die generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen:

$$[M_A] = \frac{1}{2} m X_0^2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.32)$$

$$[K_A] = \frac{1}{2} \pi^4 \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot X_0^2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 16 & & \\ & & 81 & \\ & & & \ddots \\ & & & & N^4 \end{bmatrix}. \quad (8.33)$$

Wird nun die Masse  $m$  in der Mitte der Balkenstruktur angeordnet, so ergibt sich daraus folgender Ausdruck für die modale Korrekturmatrix:

$$[\Delta M] = m \cdot \left\{ \Phi_{Ar} \left( \frac{l}{2} \right) \right\}^T \cdot \left\{ \Phi_{Ar} \left( \frac{l}{2} \right) \right\}. \quad (8.34)$$

Dabei beinhaltet der Verschiebungsvektor  $\{\Phi_{Ar}(\frac{l}{2})\}$  die Amplituden der verschiedenen Eigenschwingungsformen in Balkenmitte. Aus Gl. 8.26 resultiert dafür:

$$\left\{ \Phi_{Ar} \left( \frac{l}{2} \right) \right\} = \{X_0 \quad 0 \quad -X_0 \quad 0 \quad X_0 \quad 0 \quad -X_0 \quad 0 \quad \dots\}. \quad (8.35)$$

Auf der Grundlage einer Eigenwertrechnung am Gleichungssystem

$$[\lambda^2 [M_A + \Delta M] + [K_A]] \{\hat{q}_E\} = 0 \quad (8.36)$$

können nun die Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen der modifizierten Balkenstruktur ermittelt werden. Zur Darstellung der Verfahrensweise und zur Ermittlung des dynamischen Verhaltens der modifizierten Struktur, werden im Folgenden nur die Eigenschwingungsformen 1, 2 und 3 im Modalansatz berücksichtigt. D. h. der Ansatz nach Gl. 8.12

$$\{x\} = [\Phi_A] \cdot \{q_E\} = \sum_{r=1}^N \{\Phi_{Ar}\} \cdot q_{Er} \quad (8.37)$$

reduziert sich mit  $N = 3$  auf

$$\{x\} = \{\Phi_{A1}\} \cdot q_{E1} + \{\Phi_{A2}\} \cdot q_{E2} + \{\Phi_{A3}\} \cdot q_{E3}. \quad (8.38)$$

Höhere Eigenschwingungsformen werden zur Reduzierung des Aufwandes nicht berücksichtigt. Unter diesen Annahmen kann für die Ausgangskonfiguration geschrieben werden:

$$[M_A] = \frac{1}{2} m X_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.39)$$

$$[K_A] = \frac{1}{2} \pi^4 \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot X_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}. \quad (8.40)$$

Als Massenkorrekturmatrix ergibt sich:

$$[\Delta M] = m \begin{Bmatrix} X_0 \\ 0 \\ -X_0 \end{Bmatrix} \cdot \{X_0 \quad 0 \quad -X_0\} \quad (8.41)$$

$$[\Delta M] = m \cdot X_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.42)$$

Daraus resultiert für die generalisierten Matrizen der Endkonfiguration:

$$[\tilde{M}_E] = \frac{1}{2} m X_0^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (8.43)$$

$$[\tilde{K}_E] = \frac{1}{2} \pi^4 \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot X_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}. \quad (8.44)$$

Aus der charakteristischen Gleichung

$$[\lambda^2 [\tilde{M}_E] + [\tilde{K}_E]] = 0 \quad (8.45)$$

folgt bei Berücksichtigung der Gl. 8.43 und 8.44:

$$\begin{vmatrix} 3\lambda^2 + a & 0 & -2\lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 + 16a & 0 \\ -2\lambda^2 & 0 & 3\lambda^2 + 81a \end{vmatrix} = 0 \quad (8.46)$$

und damit

$$5\lambda^4 + 246\lambda^2 a + 81a^2 = 0, \quad (8.47)$$

wobei  $a = \pi^4 \cdot \frac{EI}{ml^3} = \omega_{A1}^2$ . Lösungen von Gl. 8.47 sind:

$$\bar{\lambda}_1^2 = -0.332a \Rightarrow \omega_{E1} = 0.576\omega_{A1}, \quad (8.48)$$

$$\bar{\lambda}_2^2 = -48.868a \Rightarrow \omega_{E2} = 6.991\omega_{A1}. \quad (8.49)$$

Aus Gl. 8.48 folgt, dass die Eigenkreisfrequenz der ersten Eigenschwingungsform der modifizierten Struktur nur 57% der entsprechenden Frequenz in der Ausgangskonfiguration beträgt.

Wie sieht nun die erste Eigenschwingungsform  $\{\Phi_{E1}\}$  aus? Dazu setzen wir den in Gl. 8.48 angegebenen Wert für  $\lambda_1$  in die erste Zeile der Gl. 8.46 ein und Multiplizieren diesen Zeilenvektor mit dem Verschiebungsvektor. Wir erhalten

$$(3\lambda_1^2 + a)q_{E1} - 2\lambda_1^2 q_{E3} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} [3 \cdot (-0.332)\omega_{A1}^2 + \omega_{A1}^2] q_{E1} + 2 \cdot 0.332\omega_{A1}^2 \cdot q_{E3} &= 0 \\ q_{E1} &= -94.57q_{E3}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Ferner resultiert aus der zweiten Zeile von Gl. 8.46

$$(\lambda_1^2 + 16a)q_{E2} = 0 \quad (8.51)$$

und damit  $q_{E2} = 0$ . Dieses Ergebnis ist einleuchtend, da die unsymmetrische Eigenschwingungsform 2 keinen Einfluss auf symmetrische Eigenformen der symmetrischen Endkonfiguration haben darf.

Damit ergibt sich für die Verschiebungen in der frequenzniedrigsten Eigenschwingungsform der modifizierten Balkenkonfiguration:

$$\{x_{E1}\} = \{\Phi_{A1}\} \cdot 94.57 - \{\Phi_{A3}\} \cdot 1. \quad (8.52)$$

Der maximale Amplitudenwert stellt sich bei  $x = l/2$  ein mit

$$x_{max} = 94.57X_0 + X_0 = 95.57X_0.$$

Normieren wir die Eigenschwingungsform  $\{\Phi_{E1}\}$  auf den Wert  $x_{max} = 1$ , so kann geschrieben werden:

$$\{\Phi_{E1}\} = 0.99 \{\Phi_{A1}\} - 0.0105 \{\Phi_{A3}\}. \quad (8.53)$$

Daraus ist zu erkennen, dass die Verformungen in der ersten Eigenform der Konfiguration mit Zusatzmasse in sehr guter Näherung mit denen der ersten Eigenform der homogenen Balkenstruktur übereinstimmen.

Aus Konvergenzgründen wird hier auf die Berechnung der zweiten symmetrischen Biegeeigenform  $\{\Phi_{E3}\}$  verzichtet, da nicht hinreichend Eigenschwingungsformen im Modalansatz berücksichtigt wurden.



<http://www.springer.com/978-3-642-19697-3>

Strukturdynamik

Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch

Freymann, R.

2011, IX, 225 S. 142 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-19697-3