

Roboter ... reagieren rein mathematisch,
nicht vernünftig.

Commander Clifford MCLANE, Raumpatrouille Orion, „Hüter des Gesetzes“

1. Prolog

1.1 Bemerkungen zu den Zielsetzungen dieses Buches

„Schon wieder ein Lehrbuch über Kontinuumsmechanik?“, so wird man fragen. Was ist daran anders als in der etablierten Literatur? Zunächst einmal sollte man in diesem Zusammenhang sagen, was dieses Buch nicht will: Es ist *keine* vollständige Darstellung der Kontinuumsmechanik, nicht einmal ansatzweise. Vielmehr werden erste Eindrücke vermittelt, und zwar sowohl in Richtung Festkörper als auch in Richtung Fluide. Es ist also kein Lehrbuch für den Spezialisten oder den weit Fortgeschrittenen, sondern wendet sich an Anfänger, denen gezeigt werden soll, wo Kontinuumstheorie überall nützlich ist und wie sie prinzipiell vorgeht. Begriffe wie Bilanzen im Unterschied zu Materialgleichungen sollen vermittelt werden, und es ist in diesem Kontext das Ziel, relativ einfache, analytisch lösbare Probleme zu bewältigen.

Zur Untersuchung solcher Probleme ist geeignete Ingenieurmathematik nötig, und dies ist hier zunächst einmal vornehmlich die *Tensorrechnung*, die im Mathematikkanon der Ingenieurausbildung i. a. nicht gelehrt wird. Aus diesem Grunde wird in Kapitel 2 mit der *Tensoralgebra* und der Darstellung von Tensoren in beliebigen Koordinatensystemen begonnen, bevor auf die Kontinuumstheorie weiter eingegangen wird. Die Betonung liegt wie gesagt auf dem „Rechnen“. Daher ist die hier gewählte Darstellung der Tensorthorie vorzugsweise indexbezogen. Damit man aber auch weiterführende Lehrbücher verstehen kann, wird die Indexdarstellung immer dem symbolischen Tensorkalkül gegenübergestellt, allerdings wieder mit Abstrichen hinsichtlich mathematischer Präzision.



Der Engländer Robert HOOKE wurde am 18. Juli 1635 in Freshwater auf der Isle of Wight geboren und starb am 3. März 1703 in London. Er war ein Zeitgenosse NEWTONS und ungleich diesem in Physik *und* Biologie tätig. Seine Experimente mit Federn führten ihn auf mehr oder weniger verbale Formen des nach ihm benannten Gesetzes, das er in einem Anagramm wie folgt zusammenfasste: CEIIINOSSSTTUU. Dechiffriert bedeutet dies „ut tensio sic vis“, was man mit „wie die Verspannung, so die Kraft“ übersetzen mag. (Bild von Rita GREER, Oxford University)

Kapitel 3 ist den *Bilanzen für Masse, Impuls und Energie* gewidmet, also den Erhaltungssätzen der klassischen Physik. Dabei werden die Bilanzen sowohl integral (über materielle Volumina) als auch lokal – in regulären und singulären Punkten des Kontinuums – formuliert. Indem der Gesamtenergie, also auch den nicht-isothermen Vorgängen, in diesem Buch ein relativ breiter Rahmen eingeräumt

wird, erhebt es sich bereits über die traditionelle *Kontinuumsmechanik*, und man kann daher von einer Einführung in die *Kontinuumsphysik* sprechen.

Um die Bilanzen allgemein in beliebigen und speziell auch in technisch wichtigen Koordinatensystemen (wie Zylinder-, Kugel- und elliptischen Koordinaten) auswerten zu können, ist es nötig, mehr über Ortsableitungen von Tensorfeldern zu wissen. Hierbei hilft Kapitel 4, das den Anfangsgründen der *Tensoranalysis* gewidmet ist. Das Erlernte wird in Kapitel 5 dann konkret auf die Bilanzgleichungen angewendet.



Claude Louis Marie Henri NAVIER wurde am 10. Februar 1785 in Dijon geboren und starb am 21. August 1836 in Paris. Von 1819 an war er als Professor für Mechanik an der École des Ponts et Chaussées verantwortlich und wurde 1831 schließlich CAUCHYs Nachfolger an der École Polytechnique. Er arbeitete auf vielen für den Maschinenbau wichtigen Gebieten, wie der Elastizitätstheorie und der Flüssigkeitsmechanik. Als Schüler FOURIERS leistete er wichtige Beiträge zu FOURIER-Reihen und entwickelte die nach ihm mitbenannte NAVIER–STOKES-Gleichung.

In Kapitel 6 wird der Begriff der *Materialgleichung* konkretisiert. Ziel ist es hier, nicht im materialtheoretischen Sinne vorzugehen und Materialgleichungen als Konsequenzen übergeordneter Prinzipie herzuleiten. Vielmehr werden für den Ingenieur wichtige Materialgleichungen angegeben und ihre Handhabung in beliebigen Koordinatensystemen besprochen. In diesem Zusammenhang werden das HOOKEsche Gesetz für den anisotropen und isotropen linearen Festkörper, das NAVIER-STOKES-Gesetz für reibungsbehaftete Flüssigkeiten, die thermischen und kalorischen Zustandsgleichungen für das ideale Gas, der Zusammenhang zwischen spezifischen Wärmen und der inneren Energie für einfache Festkörper nach DULONG-PETIT und die FOURIERSche Gleichung für den Wärmeflussvektor behandelt.



George Gabriel STOKES wurde am 13. August 1819 in Skreen, County Sligo, Irland geboren und starb am 1. Februar 1903 in Cambridge, England. Nach einem Umweg über das Bristol College beginnt er in Cambridge am Pembroke College Mathematik zu studieren und graduiert 1841 mit dem höchsten Rang im Mathematical-Tripos-Examen als Senior Wrangler. 1849 wird STOKES einer der Nachfolger NEWTONs auf dem berühmten Lucasian Chair der Universität Cambridge.

Nachdem man nun Bilanz- und (einfache) Materialgleichungen kennengelernt hat, zielt Kapitel 7 darauf ab, beides zu vereinen und *Feldgleichungen* zu generieren, mit denen es für einfache Geometrien und Anfangs-Randwertvorgaben gelingt, das Grundproblem der Kontinuumstheorie wirklich zu lösen. Dieses besteht darin, die fünf Felder der Massendichte, der Geschwindigkeiten und der Temperatur in jedem Punkt und zu allen Zeiten eines materiellen Körpers zu berechnen.



Pierre Louis DULONG wurde am 12. Februar 1785 in Rouen geboren und starb am 19. Juli 1838 in Paris. Er war ein französischer Physiko-Chemiker. Auch er studierte an der École Polytechnique in Paris und wurde 1820 dort Professor. Außerdem war er seit 1823 Mitglied der Académie des Sciences und seit 1832 deren ständiger Sekretär. Chemiker leben gefährlich: In Ausübung seiner Forschung bei der Untersuchung von Stickstofftrichlorid verlor DULONG tragischerweise ein Auge und drei Finger.

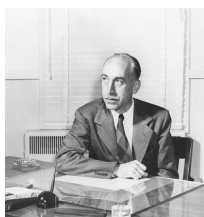
Alexis Thérèse PETIT wurde am 2. Oktober 1791 in Vesoul geboren und verstarb am 21. Juni 1820 in Paris. Er war französischer Physiker und studierte ebenfalls an der École Polytechnique. Dort wurde der Nachfolger von Pierre-Simon LAPLACE. Das nach ihm bekannte Gesetz entdeckte er mit DULONG im Jahre 1819.

Kapitel 8 ist einer relativ abstrakten Frage gewidmet: Wie verhalten sich die Bilanz- und Materialgleichungen beim Übergang zwischen beliebig gegeneinander bewegten Systemen, d. h. bei den sogenannten *EUKLIDischen Transformationen*? Dies berührt die beinahe philosophisch anmutende Forderung, wonach eine physikalisch richtige Theorie unabhängig vom Beobachter stets dieselbe Form haben muss.



Der Geometer und Mathematiker EUKLID wurde um das Jahr 360 v.u.Z. vermutlich in Athen geboren und starb um das Jahr 280 v.u.Z. vermutlich in Alexandria. Seine große Hinterlassenschaft besteht aus Lehrbüchern, den „Elementen“, in denen er das damalige Wissen über Mathematik zusammenfasste. Die wohl bekannteste Anekdote über ihn handelt von der Begegnung mit dem Pharaon PTOLEMAIOS, der ihn als pfiffiger Politiker fragte, ob es für die Geometrie einen kürzeren Weg gäbe, als die Lehre der Elemente. EUKLID sagte darauf, dass zur Geometrie keinen Königsweg existiert.

Die Kapitel 9-11 gewähren einen ersten, rudimentären Einblick in drei große Sachgebiete der Kontinuumsphysik: *lineare Elastizitätstheorie*, *reibungsbehaftete Fluidmechanik* und *zeitunabhängige Plastizitätstheorie*, wobei letztere eine gewisse Brücke zwischen dem Festkörper und den Flüssigkeiten schlägt.



Carl Henry ECKART wurde am 4. Mai 1902 in St. Louis, Missouri geboren und starb am 23. Oktober 23, 1973 in La Jolla, Kalifornien. Er war ein vielseitiger amerikanischer Wissenschaftler und arbeitete sowohl auf dem Gebiet der theoretischen Physik als auch der Geologie und Ozeanographie. In der Quantenmechanik trug er insbesondere zum Nachweis bei, dass die HEISENBERGSche und die SCHRÖDINGERSche Formulierung einander äquivalent sind. Auch als Verwalter in akademischen Fragen

war er tüchtig, was zeigt, dass beides miteinander vereinbar ist. (Photo public domain, credit SIO Archives/UCSD)

Kapitel 12 zielt auf die Zukunft: Will man materialtheoretische Bücher lesen, so sind Grundkenntnisse im Zusammenhang mit dem Begriff *Entropie* nötig. Diese werden hier erarbeitet: Die Entropie wird als bilanzierbare Größe eingeführt und somit in unmittelbaren Kontext mit den bereits verwendeten additiven Größen Masse, Impuls und Energie gebracht. Ferner wird die Angst vor der Entropie dadurch genommen, dass man sie (für einfache aber prägnante Fälle) berechnet und als Maß der bestehenden Unordnung eines Systems begreift. In gleicher Weise wird die Entropieproduktion für einfache Fälle behandelt und berechnet und als Maß für den Unwillen zur zeitlichen Umkehrung eines „natürlichen“ Prozesses begriffen. Den Abschluss in diesem Kapitel bildet eine Einführung in die Theorie irreversibler Prozesse nach ECKART. Diese mag die Grundlage beim weiterführenden Studium von Entropieprinzipien bilden.

Im letzten Kapitel 13 wird das Wirkungsfeld der Kontinuumsphysik auf *elektromagnetische Felder* erweitert. Hier liegt die Betonung auf einer rationalen Darstellung der Grundlagen: Worauf beruhen die MAXWELLSchen Gleichungen, wie werden die darin auftretenden Feldgrößen im Prinzip gemessen, wie sind sie miteinander verknüpft? Dabei wird die schon im Zusammenhang mit den mechanischen Feldern gestellte Frage nach Invarianz der Gleichungen bei Beobachterwechsel wichtig, was uns bis an die allgemein-relativistische Feldtheorie heranführt. Den Abschluss in diesem Kapitel bilden einfache Materialgleichungen, mit deren Hilfe elektro-magnetische und mechanische Phänomene gekoppelt werden können.



James Clerk MAXWELL wurde am 13. Juni 1831 in Edinburgh, Schottland geboren und starb am 5. November 1879 in Cambridge, Cambridgeshire, England. MAXWELL prägte die Physik des 19. Jahrhunderts wie kein zweiter. So legte er Grundlagen auf den verschiedensten Gebieten der Physik, angefangen mit der Mechanik, über die kinetische Gastheorie und Thermodynamik bis hin zur Elektrodynamik. Berühmt und berüchtigt ist seine bissig-scharfe Kontroverse über die Entropie und Wiederkehr mit seinem österreichischen Kollegen BOLTZMANN.

Um das Erlernte nachhaltig zu festigen, sind zahlreiche Übungsaufgaben in den fließenden Text mit eingebaut. Dabei wird unmittelbar Gesagtes, aber nicht vollständig Bewiesenes, weiter untersucht, und es werden auf dem Gesagten aufbauende Textaufgaben gestellt. Maximalen Nutzen wird der Leser dann haben, wenn er *alle* Übungsaufgaben löst. Eine oberflächliche Lektüre ist aber auch möglich, wenn man sich nur die Bedeutung der jeweils angegebenen Lösungen klarmacht. Ferner findet sich am Ende jedes Kapitels ein Ausblick auf weiterführende Literatur zum jeweiligen Thema mit einer relativ detaillierten Vorbesprechung der jeweiligen Referenz: *Would you like to know more?*

Schließlich werden auch zur Unterhaltung und Erbauung des Lesers bei jedem im Text erwähnten Forscher sein Bild gezeigt und interessante Details zu seinem Leben verraten.

Wir beginnen mit einer ersten Motivation zum Erlernen der Kontinuumstheorie.



Jean Baptiste Joseph Baron de FOURIER wurde am 21. März 1768 in Auxerre in der Bourgogne geboren und starb am 16. Mai 1830 in Paris. Er überlebt die Wirren der Französischen Revolution (anfangs war er nicht adlig) und beginnt an der École Normale in Paris zu studieren. Sein Lehrer LAGRANGE sieht ihn als einen der ersten Wissenschaftler Europas an, und er wird 1797 LAGRANGES Nachfolger und auf den Lehrstuhl für Analysis und Mechanik der École Polytechnique berufen. Außerdem ist er einer der Wissenschaftler unter Napoleons Ägyptenfeldzug.

1.2 Erinnerung an Skalare, Vektoren und Tensoren

Viele in der Kontinuumstheorie verwendete Größen sind keine Skalare, also richtungsunabhängige Größen, sondern sie tragen einen „Richtungssinn“ in sich, und man spricht von ihrem vektoriellen oder sogar auch noch „höherwertigen“, tensoriellen Charakter. Bei den in der Technischen Mechanik gebräuchlichen Vektoren denkt man beispielsweise an den *Ort* \mathbf{x} und seine Zeitableitungen, d. h. die *Geschwindigkeit* \mathbf{v} und die *Beschleunigung* \mathbf{a} oder an die *Kraft* \mathbf{F} respektive die *Kraftdichte** \mathbf{f} . Weitere aus der Mechanik bekannte Vektoren sind die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ oder das Moment \mathbf{M} . Aus dem Physikunterricht wissen wir, dass es sich dabei im Gegensatz zu den vorher genannten Größen um Vektoren mit einem Drehsinn, d. h. sog. axiale bzw. polare Vektoren handelt. In der Thermodynamik trifft man auf den *Wärmefluss* \mathbf{q} bzw. auf den *Temperaturgradienten* grad T . In der Elektrotechnik schließlich spricht man von der *elektrischen Feldstärke* \mathbf{E} , der *dielektrischen Verschiebung* \mathbf{D} , der *Polarisation* \mathbf{P} oder den *Magnetfeldern* \mathbf{H} und \mathbf{B} . Ähnlich wie in der Mechanik handelt es sich bei manchen dieser Größen ebenfalls um polare Vektoren. Schließlich sollte man auch an zur Beschreibung der Geometrie eines Körpers wichtige Vektoren denken, wie etwa die *Oberflächeneinheitsnormale* \mathbf{n} , das gerichtete *Oberflächenelement* $d\mathbf{A}$, den *Tangenteneinheitsvektor* $\boldsymbol{\tau}$ oder die *gerichtete Bogenelementlänge* ds . Wenn man will, kann man Vektoren auch als tensorielle Größen erster Stufe bezeichnen. Skalare Größen wie etwa die *Massendichte* ρ , die *Temperatur* T oder die elektrische Spannung bzw. das Potential U bezeichnet man in analoger Weise salopp manchmal auch als Tensoren nullter Stufe. Später werden wir diese Sprechweisen präzisieren.

Bekannte tensorielle Größen zweiter Stufe aus der Mechanik sind die *Spannung* $\boldsymbol{\sigma}$, die lineare *Verzerrung* $\boldsymbol{\varepsilon}$ oder der *Geschwindigkeitsgradient* grad \mathbf{v} . Im HOOKEschen Gesetz für anisotrope Werkstoffe kommt außerdem ein Tensor vierter Stufe vor, nämlich die *Steifigkeitsmatrix* \mathbf{C} . In Materialgesetzen der Elektrotechnik exis-

* Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die Erdschwere \mathbf{g} .

tieren auch Tensoren dritter Stufe mit physikalischer Bedeutung, wie etwa die *piezoelektrische Koeffizientenmatrix* \mathbf{d} .

Wann immer wir den Vektor- bzw. Tensorcharakter einer physikalischen Größe als solchen, unabhängig von einem Koordinatensystem bzw. einer Koordinatenbasis, herausstellen wollen, werden wir die betreffende Größe durch einen fettgedruckten Buchstaben kennzeichnen, etwa \mathbf{F} . Dies ist in der einschlägigen Literatur üblich und weiter oben bereits mehrfach geschehen. Andere symbolische Schreibweisen sind (je nach Wertigkeit auch mehrfache) Unterstriche (\underline{F}) oder Pfeile \vec{F} . Zum Lösen konkreter Probleme ist es jedoch meist nötig, sich auf eine geeignete *Basis* zu beziehen und die betreffende physikalische Größe bezüglich dieser Basis mit ihren *Koordinaten* darzustellen. Neben einer ersten Einführung in wichtige kontinuumstheoretische Begriffe sollen in diesem Buch auch die zum Lösen von Problemen nötigen „Rechenregeln“ hergeleitet und eingeübt werden. Zuvor jedoch wollen wir an Beispielen aus der „Ingenieurpraxis“ zeigen, wie wichtig es ist, solides Wissen über das Formulieren von Vektor- und Tensorgleichungen in beliebigen Koordinatensystemen zu besitzen.

1.2.1 Beispiel 1: Glasfaseroptik - Einpressen einer Kugellinse in eine Hülse

Als Teil eines optischen Steckers wird eine aus Glas oder Saphir gefertigte Kugellinse (\varnothing 1 mm) in eine Stahlhülse mit einer etwas geringeren lichten Weite (\varnothing 0,995 mm) eingepresst (vgl. Abb. 1.1). Längs des Äquators der Kugel entstehen Presskräfte, die infolge der Druckverformung zu Zugspannungen im Kugellinneren führen.

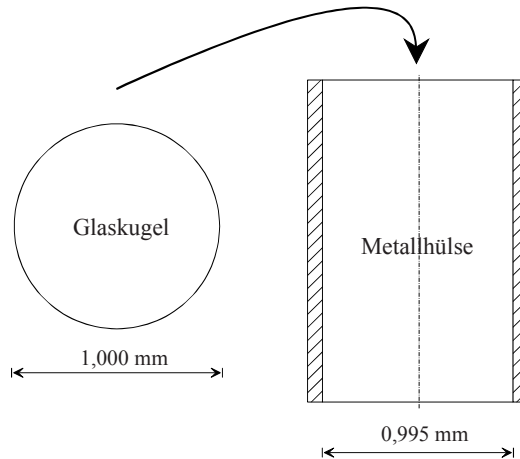


Abb. 1.1: Einpressen einer Glaskugel in eine Metallhülse.

Spröde Werkstoffe wie Glas oder Saphir reagieren jedoch sehr empfindlich auf Zugspannungen. Selbst wenn diese Zugspannungen nicht groß genug sind, um

zum sofortigen Zerbersten der Kugel zu führen, kann es aber aufgrund des sog. *unterkritischen Risswachstums* über längere Zeit zum Fehlversagen kommen. Hierbei handelt es sich um folgendes Phänomen: In der Luft stets vorhandener Wasserdampf diffundiert unter Wirkung der Zugspannungen bevorzugt zu den Spitzen im Glas vorhandener Mikrorisse, lockert dort die Atombindungen und führt so schrittweise zur Vergrößerung der Risse.

In dem Moment, wo der erste Mikroriss eine kritische Größe erreicht, versagt die Glaskugel. Und in der Tat: In Experimenten wurde gezeigt, dass der Bruch vom Äquatorinneren der Kugel ausgeht, eben dort, wo man intuitiv die größten Zugspannungen erwartet (Abb. 1.2). Die Frage ist nun, welche Fehlpassung bzw. welche Passungstoleranz beim Fertigen der Kugeln und der Stahlhülsen zu einer Versagensrate führt, die gemessen an der Garantiezeit des gesamten Systems akzeptabel ist.

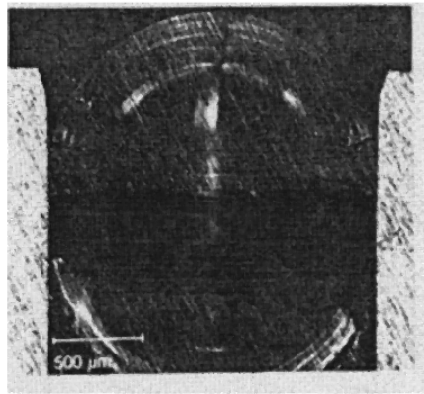


Abb. 1.2: Eine zerbrochene Glaskugellinse nach dem Einpressen.

Um diese Frage zu beantworten, müssen die in der Kugel herrschenden Spannungen genau bekannt sein. Ihre Berechnung gelingt im Prinzip wie folgt. Im ersten Schritt wird eine geeignete Differentialgleichung für die Spannungen aufgestellt. Wie wir noch im Detail erläutern werden, erhält man diese aus der auf statische Verhältnisse reduzierten *Impulsbilanz*:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} . \quad (1.2.1)$$

Das Kürzel „div“ kennzeichnet die sog. Differentialoperation *Divergenz*, die, wie wir später noch sehen werden, eine bestimmte Ableitung nach dem Ort beinhaltet. In die Gleichung (1.2.1) muss nun noch ein geeignetes Materialgesetz für den Spannungstensor eingesetzt werden. Bei Glas bietet sich das *HOOKESche Gesetz* an, das die *Spannung* $\boldsymbol{\sigma}$ und die *Verzerrung* $\boldsymbol{\varepsilon}$ über den *Steifigkeitstensor* \mathbf{C} linear miteinander verknüpft:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (1.2.2)$$

Das Symbol „ \cdot “ steht hierin für das doppelte Skalarprodukt. Wie dieses genau zu verstehen ist, werden wir später sehen. Es genügt an dieser Stelle zu sagen, dass die Darstellung nach Gleichung (1.2.2) sehr allgemein ist und für beliebig *anisotrope*, linear elastische Materialien gilt. Im Falle eines *isotropen* linear-elastischen Materials vereinfacht sich die obige Gleichung erheblich, und aus dem zunächst noch ominösen doppelten Skalarprodukt verbleibt mit den sog. *LAMÉschen Elastizitätskonstanten* λ und μ :

$$\sigma = \lambda \text{Sp}(\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon. \quad (1.2.3)$$



Gabriel LAMÉ wurde am 22. Juli 1795 in Tours geboren und starb am 1. Mai 1870 in Paris. Er tritt 1813 der École Polytechnique in Paris bei und graduiert 1817 ebenda. Es folgen weitere Lehrjahre an der berühmten École des Mines, die er 1820 mit einem weiteren Abschluss beendet. Im gleichen Jahr geht LAMÉ nach Russland, um in St. Petersburg Direktor der Hochschule für Verkehrswegeingenieure zu werden. Im Jahre 1832 kehrt er nach Paris zurück, gründet zunächst ein Ingenieurbüro und übernimmt endlich den Lehrstuhl für Physik an seiner ersten Alma Mater.

In dieser Gleichung bezeichnen „ $\mathbf{1}$ “ den *Einheitstensor* und „ Sp “ die Operation *Spurbildung*. Wir werden später noch sehen, dass die LAMÉschen Konstanten λ und μ mit den dem Ingenieur bekannteren Größen *Elastizitätsmodul* E und *Schubmodul* G wie folgt zusammenhängen:

$$\lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E}, \quad \mu = G. \quad (1.2.4)$$

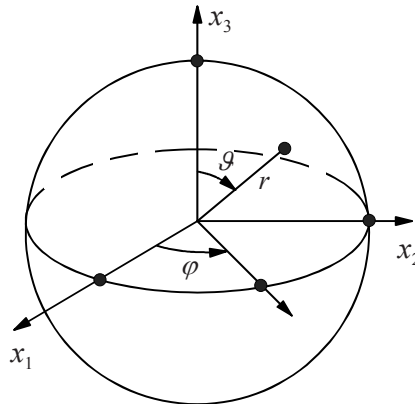


Abb. 1.3: Zum Begriff der Kugelkoordinaten.

Ersetzt man nun die Spannung σ in Gleichung (1.2.1) durch (1.2.3), so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung im Ort für den *Verschiebungsvektor*

\mathbf{u} , da der *Verzerrungstensor* ε erste Ableitungen der *Verschiebung* \mathbf{u} nach dem Ort enthält. Schließlich wählt man zur konkreten Lösung noch geeignete *Randbedingungen*. Zum Beispiel muss die Normalspannung in der Nähe des Äquators der Kugel gleich dem vorgegebenen *Pressdruck* p_0 sein, und außerdem müssen die Spannungen im Kugellinneren endlich bleiben.

Damit wäre für den Mathematiker das Problem eindeutig definiert, und er könnte die Existenz einer Lösung beweisen. Dem Ingenieur jedoch ist damit noch lange nicht geholfen. Um die Spannungen nämlich wirklich zu berechnen, muss man als erstes ein geeignetes Koordinatensystem wählen. Im vorliegenden Fall bieten sich *Kugelkoordinaten* r , φ , ϑ an, wobei man das Koordinatensystem sinnvollerweise in das Zentrum der Glaskugel legt (vgl. Abb. 1.3). Es bezeichnet r den *Radialabstand* eines Punktes in der Glaskugel, φ ist der sogenannte *Azimutal-* und ϑ der sog. *Polarwinkel*.

Zur Lösung ist es erforderlich, die Gleichungen (1.2.1) und (1.2.2) in Kugelkoordinaten auszuwerten. Dies beinhaltet zweierlei. Erstens muss man in der Lage sein, die physikalischen Größen wie Spannung, Verzerrung und Verschiebung richtig in Kugelkoordinaten zu schreiben. Zweitens ist es nötig, die Ableitungen nach dem Ort, also die Operation div , aber auch den Zusammenhang zwischen Verzerrung und Verschiebung, der wie angedeutet eine Ortsableitung beinhaltet, in Kugelkoordinaten auszudrücken. Wie dies geschieht, wird in den Kapiteln 2 bis 4 beschrieben.



Adrien Marie LEGENDRE wurde am 18. September 1752 in Paris geboren und starb ebenda am 10. Januar 1833. Sein Leben fällt in die Blütezeit der Französischen Revolution, und in der Tat war er auch ihr Diener, denn er beschäftigte sich u. a. mit rationalen Maßen, unabhängig vom Gewicht und der Armlänge des jeweils amtierenden Herrschers. 1791 wird er Mitglied des entsprechenden Komitees der Akademie und beginnt 1792 Logarithmentafeln zu erstellen. Wohlgemerkt, er macht das nicht alleine, sondern zeitweilig helfen ihm dabei ca. 80 (!) Assistenten.

Ist es schließlich gelungen, eine partielle Differentialgleichung in Kugelkoordinaten aufzustellen, muss man diese unter Verwendung der bereits erwähnten Randbedingungen lösen. Man kann zeigen, dass im vorliegenden Fall ein Separationsansatz bzgl. der Variablen r und ϑ weiterhilft, wobei der radiale Anteil sich in die LEGENDRESche Differentialgleichung überführen lässt. Derartige Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen können wir hier nicht in voller Allgemeinheit besprechen. Allerdings werden wir für den einfachsten Fall reiner Radialabhängigkeit einen ersten Eindruck davon bekommen, wenn wir in Kapitel 9 elastizitätstheoretische Probleme behandeln.

1.2.2 Beispiel 2: Verbundwerkstoffe - Thermospannungen um Fasern

Materialien, die mit Kohlenstoff- oder Siliziumkarbidfasern verstärkt sind, werden in zunehmendem Maße als Werkstoffe bei Hochleistungskonstruktionen eingesetzt. Abb. 1.4 zeigt eine typische hexagonale Einheitszelle eines solchen Verbundes. Ein Problem bei der späteren Handhabung bereiten die i. a. recht unterschiedlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten der verwendeten Matrizen und Fasern. Hieraus können beträchtliche Eigenspannungen resultieren, die eventuell zu Rissen im Material führen. Ist beispielsweise der Ausdehnungskoeffizient der Matrix größer als der Ausdehnungskoeffizient der Faser, so schrumpft beim Abkühlen die Matrix auf das Teilchen, und es entstehen in der Matrix Zugspannungen senkrecht zur radialen Richtung (vgl. Abb. 1.5), welche die Bildung und das Wachstum radialer Risse begünstigen. Andererseits führt ein zu geringer Ausdehnungskoeffizient der Matrix zu radialen Zugspannungen entlang des Faserumfanges, und die Matrix kann sich von der Faser ablösen (vgl. Abb. 1.6).

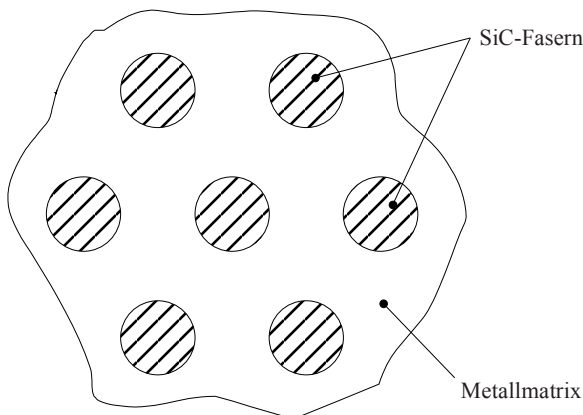


Abb. 1.4: Ein hexagonaler Faserverbund.

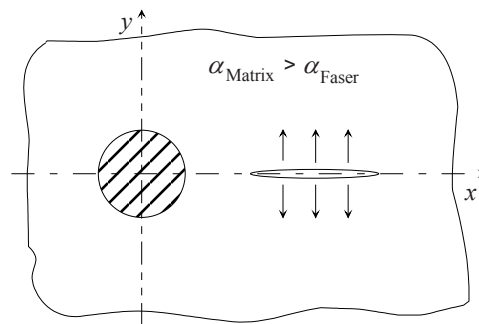


Abb. 1.5: Zum Entstehen radialer Risse in Verbundwerkstoffen (Thermospannungen).

Freund Hein schließlich doch zu begegnen, lässt sich nicht vermeiden, aber mit
der Entropie können wir zumindest seine Stärke ermitteln,
haben wenigstens eines seiner Geheimnisse gelüftet,
und rufen ihm ein trotziges Dennoch! zu.

Anonymus

12. Entropie

12.1. Entropie in Bilanzform

Die Entropie und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik gehören zu den physikalisch-technischen Konzepten, über die gerne viel Mystisches geschrieben wird. Das liegt wohl einerseits daran, dass die Entropie und die ihr zugeordnete Entropieproduktion relativ schwer fassbare, da abstrakte Größen sind, für die wir kein Bauchgefühl haben, anders als bei der Masse, der Geschwindigkeit oder sogar der inneren Energie und dem Wärmeübergang. Andererseits berührt die Entropie auch sehr grundsätzliche Eigenheiten unserer physikalischen Welt, nämlich ihre Vergänglichkeit und Irreversibilität, und so etwas ruft schnell Philosophen, Phantasten, Propheten und Ähnliche auf den Plan.

Diesen wollen wir uns natürlich möglichst nicht anschließen! Ganz im Gegenteil: Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass die Entropie ein für den Ingenieur überaus nützliches Werkzeug darstellt. Es hilft uns nämlich erstens dabei, die Anzahl nötiger kalorimetrischer Messungen zur Bestimmung der inneren Energie erheblich einzuschränken. Zweitens gelingt es mit der Entropie, die mögliche Form von Materialgleichungen, wie beispielsweise dem Wärmefluss und dem Spannungstensor, von Zustandsvariablen einzugrenzen, und drittens wird es über die Entropie möglich, den Grad der Irreversibilität eines Prozesses zu quantifizieren.



Constantin CARATHÉODORY wurde am 13. September 1873 in Berlin geboren und starb am 2. Februar 1950 in München. Er stammte zwar aus einer Diplomatenfamilie, interessierte sich aber dennoch vornehmlich für Mathematik und Ingenieurwissenschaft. So schloss er an der École Militaire de Belgique in Brüssel ein Ingenieurstudium ab und begab sich 1895 zunächst als Bauingenieur im Offiziersrang in das Osmanische Reich nach Mytilene (Lesbos), um dort das Straßennetz ausbauen zu helfen. Er führte auch Messungen im Eingang der Cheops-Pyramide durch, die er auch veröffentlichte und fasste, so sagt man, zur großen Überraschung seiner Familie den Entschluss, sich künftig ausschließlich mit der Mathematik zu beschäftigen. Deshalb ging er 1901 an die Universitäten

von Berlin und Göttingen. Er avancierte schnell und folgte zahlreichen Rufen im In- und Ausland. Es ist so nicht verwunderlich, dass er fließend auf Griechisch, Französisch, Deutsch, Englisch, Italienisch und Türkisch kommunizieren konnte.

Die Frage ist jedoch, wie wir die Entropie einführen, insbesondere in einem Buch über Kontinuumsmechanik, dem ein gewisser Duktus eigen sein muss. Wir können und wollen nicht mit den Maschinen, insbesondere mit dem CARNOTprozess beginnen, so wie man es gewöhnlich in einem Kurs über Technische Thermodynamik macht, wenn man die Entropie erstmalig vorstellt. Wir erwarten jedoch, dass der Leser darüber ein wenig weiß, und wenn dem nicht so ist, sich dieses Wissen aneignet. Hierzu werden an gegebener Stelle einige Literaturhinweise gegeben. In diesem Buch folgen wir stattdessen einem Weg, wie ihn Carl ECKART (1940) aufbauend auf den Schriften von Constantin CARATHÉODORY gegangen ist: Wir starten vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik in der lokal-regulären Form nach Gleichung (6.5.5). Darin teilen wir zunächst analog zu Gleichung (11.1.2) den Spannungstensor in Druck- und Deviatoranteil auf:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \Sigma_{ij}, \quad p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad (12.1.1)$$

um zu finden, dass:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (12.1.2)$$



Nicolas Léonard Sadi CARNOT wurde am 1. Juni 1796 in Paris geboren und starb am 24. August 1832 ebenda. Er begann bereits 1812 an der École Polytechnique in Paris zu studieren, verließ sie aber 1814, um Ingenieuroffizier zu werden. Er war jedoch republikanischer Gesinnung, was im Militär zu Schwierigkeiten führte und so bat er 1819 um seine einstweilige Entlassung. Nun widmete er sich der Wissenschaft, insbesondere den Dampfmaschinen und ihrem Wirkungsgrad, was in der berühmten Schrift *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* kulminierte. Ende 1826 trat CARNOT wieder in den militärischen Dienst ein, nur um 1828 seine Uniform endgültig abzulegen. Seine Gesundheit war angeschlagen und im Juni 1832 erkrankte er an Scharlach und „Gehirnfieber“. Mit nur 36 Jahren starb CARNOT schließlich während einer Cholera-Epidemie.

Indem wir noch die Massenbilanz in der Form (6.5.7) beachten, lässt sich dieses Ergebnis umschreiben in:

$$\rho \left(\frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (12.1.3)$$

Bei der spezifischen inneren Energie nehmen wir nun an, dass sie von lediglich *zwei* Variablen abhängt, so wie es auch in Abschnitt 6.5 geschehen ist. Allerdings wählen wir aus Gründen, die gleich klar werden, für diese beiden Variablen zwei „mechanische Größen“, nämlich den Druck und das spezifische Volumen:

$$u = u(p, v) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_v \frac{dp}{dt} + \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_p \frac{dv}{dt}. \quad (12.1.4)$$

Dies ergibt für die Klammer auf der linken Seite von Gleichung (12.1.3):

$$\frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} = \left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_v \frac{dp}{dt} + \left(\left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_p + p \right) \frac{dv}{dt}. \quad (12.1.5)$$

Es ist nun das Ziel, diesen Ausdruck als ein einziges totales Differential zu schreiben. Das ist immer möglich, denn dabei hilft ein Satz aus der Mathematik weiter, der auf EULER zurückgeht und als *Methode des integrierenden Faktors* bekannt ist. Zur Erinnerung: EULER betrachtete die Differentialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (12.1.6)$$

wobei $f(x, y)$ und $g(x, y)$ beliebige stetig differenzierbare Funktionen der Variablen x und y sind. Er multiplizierte nun diese Gleichung mit einer noch zu bestimmenden Funktion $\mu(x, y)$ – dem integrierenden Faktor –, so dass:

$$\mu(x, y)f(x, y) + \mu(x, y)g(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (12.1.7)$$

wobei er forderte, dass gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu(x, y)f(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu(x, y)g(x, y) \quad (12.1.8)$$

und er die Funktion $\varphi(x, y)$ als *Potentialfunktion* bezeichnete. Der Name macht unmittelbar Sinn, denn es lässt sich dann Gleichung (12.1.7) sofort in die nachstehende Form bringen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \equiv d\varphi, \quad (12.1.9)$$

und das lässt sich sofort integrieren. In der Mathematik ist es nun ein gewisses Problem, für eine gegebene Differentialgleichung den integrierenden Faktor wirklich zu finden. Man mag ihn als Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung suchen:

$$\frac{\partial \mu f}{\partial y} = \frac{\partial \mu g}{\partial x} \quad (12.1.10)$$

suchen, wie sie aus Gleichung (12.1.8) bei Beachtung des Satzes von SCHWARZ sofort folgt. Es ist unmöglich, diese partielle Differentialgleichung allgemein zu lösen. Da man im konkreten Fall aber nur eine spezielle Lösung $\mu(x, y)$ benötigt, versucht man mit speziellen Ansätzen für $\mu(x, y)$ weiterzukommen. Solche Ansätze könnten beispielsweise lauten:

$$\mu = \mu(x) , \quad \mu = \mu(y) , \quad \mu = \mu(xy) , \quad \mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right) , \text{ etc.}, \quad (12.1.11)$$

und sie sind dann nützlich, wenn sie die partielle Differentialgleichung (12.1.10) in eine gewöhnliche überführen. Offenbar funktioniert diese Vorgehensweise auch nur dann, wenn man die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ explizit kennt, was bei unserem physikalisch begründeten Problem (12.1.5) – außer für den Fall des idealen Gases – aber nicht der Fall ist. Wir beenden jetzt den mathematische Exkurs und wenden das Gelernte nun, so gut es geht, auf Gleichung (12.1.5) an. Es entspricht:

$$x \rightarrow p , \quad y \rightarrow v , \quad f \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_v , \quad g \rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_p + p . \quad (12.1.12)$$



Hermann Amandus SCHWARZ wurde am 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien geboren und starb am 30. November 1921 in Berlin. An der heutigen Technischen Universität Berlin begann er das Studium der Chemie, wechselte aber bald zur Mathematik. Er promovierte 1864 und wurde bald Assistent an der Universität Halle. 1869 ging er an die Technische Hochschule Zürich, 1875-1892 war er an der Universität Göttingen, um dann Nachfolger von WEIERSTRASS an der Universität in Berlin zu werden, wo er bis 1917 wirkte. Man sagt, dass SCHWARZ zwar eng umrissene Probleme bevorzugte, die Lösungsmethoden dann aber so ausweitete, dass sie weit über den Spezialfall hinausreichten.

Wir multiplizieren (12.1.5) mit dem integrierenden Faktor $1/T = 1/T(p, v)$ und bezeichnen das dabei resultierende Potential mit dem Symbol $s = s(p, v)$:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_v \frac{dp}{dt} + \left(\left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_p + p \right) \frac{dv}{dt} \right]. \quad (12.1.13)$$

Die Wahl der Symbole ist nicht zufällig. In der Tat entspricht, wie wir in Übung 12.1.1 sehen werden, T der absoluten Temperatur und s ist die spezifische Entropie. Wir setzen das Ergebnis in Gleichung (12.1.3) ein und finden:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (12.1.14)$$

Einfaches Umformen führt auf:

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial q_j / T}{\partial x_j} - \frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\Sigma_{ji}}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (12.1.15)$$

Übung 12.1.1: Der integrierende Faktor im Fall des idealen Gases

In der statistischen Mechanik von Vielteilchensystemen gelingt es für den Fall idealer Gasteilchen die sog. *Zustandssumme* analytisch zu ermitteln und mit ihrer Hilfe die innere Energie U als Funktion des Druckes p und des Gasvolumens V bis auf eine Konstante zu errechnen (vgl. etwa Münster (1969), §1.9):

$$U = \zeta pV + U_0, \quad \zeta = \begin{cases} \frac{3}{2} & 1- \\ \frac{5}{2} & \text{für } 2- \\ 3 & \text{viel-} \end{cases} \text{atomige Teilchen.} \quad (12.1.16)$$

Dabei ist ζ eine Zahl, die auf den „Typ“ und die damit verbundene Anzahl von Freiheitsgraden der Bewegung der idealen Gaspartikel hinweist. Man verwende dieses Ergebnis im Kontext mit Gleichung (12.1.13), um den integrierenden Faktor $T^{-1}(p, v)$ für den Fall des idealen Gases zu ermitteln. Konkret gehe man dabei so vor, dass man Potenzansätze in folgender durch Gleichung (12.1.11) inspirierter Form ausprobiert:

$$\frac{1}{T} = ap^b, \quad \frac{1}{T} = av^b, \quad \frac{1}{T} = a(pv)^b, \quad \frac{1}{T} = a\left(\frac{p}{v}\right)^b. \quad (12.1.17)$$

Man zeige, dass alle diese Ansätze auf Widersprüche führen, bis auf den dritten mit der Wahl $b = -1$. Somit schließen wir *aus mathematischen Gründen* auf:

$$pv = aT. \quad (12.1.18)$$

Nun erinnere man sich an die empirisch durch Versuche von BOYLE, GAY-LUSSAC und AMONTONS gefundene thermische Zustandsgleichung für ideale Gase (6.4.1) und schließe, dass es sich bei dem integrierenden Faktor in der Tat um die (absolute) Temperatur handeln muss und dass für den noch offen gebliebenen Faktor a gilt:

$$a = \frac{R}{M}. \quad (12.1.19)$$

Die Gleichung (12.1.15) lässt sich im Hinblick auf (3.7.3) und unter Beachtung der Massenbilanz (3.8.3)₁ als lokale Bilanz der Entropie in regulären Punkten interpretieren:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho s v_i + \frac{q_j}{T} \right) = -\frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (12.1.20)$$

bzw. wir können die Gleichung (12.1.15) auch über ein materielles System integrieren und dabei die Gleichung (3.8.20) sowie den GAUSSschen Satz (3.4.2) beachten, so dass wir auf folgende globale Bilanz kommen:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho s \, dV = - \oint \frac{q_j}{T} n_j \, dA + \iiint_{V(t)} \left(- \frac{q_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV. \quad (12.1.21)$$

Der erste Term nach dem Gleichheitszeichen stellt offenbar den nichtkonvektiven *Zufluss an Entropie* dar und der zweite Term ist die *Entropieproduktion*, denn wir können weder die Entwicklung von Wärmefluss, Temperatur- als auch von Spannungsdeviator und Geschwindigkeitsgradient im Körpervolumen kontrollieren (vgl. Abschnitt 3.3 zur Festlegung des Unterschieds zwischen Produktion und Zufuhr). Diese werden sich vielmehr unter Vorgabe von Anfangs- und Randvorgaben entwickeln.

Die „hergeleiteten“ Entropiebilanzen (12.1.15, 20, 21) ergaben sich im Wesentlichen aus der Annahme, dass der thermodynamische Prozess durch die beiden mechanischen, sog. *Zustandsvariablen* Druck p und (spezifisches) Volumen v gesteuert ist. Dieses gilt es nun in zweierlei Hinsicht zu relativieren. Erstens gibt es ja nun den integrierenden Faktor $T(p, v)$ und an Stelle der beiden mechanischen Variablen ist es nunmehr möglich, einen der beiden durch eine thermodynamische Größe, nämlich die Temperatur T , zu substituieren. Als mögliche Sätze von Zustandsvariablen empfehlen sich somit (p, T) oder (v, T) . Eine solche Wahl hat bisweilen Vorteile, die wir noch erkennen werden, wenn es um die experimentelle Bestimmung der inneren Energie für nicht-ideale Materialien in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts geht. Selbstverständlich setzt man bei der Substitution voraus, dass man eine Messvorschrift für die Temperatur besitzt, wie das auch im Fall des Drucks und des Volumens relativ einfach zu machen ist. Die Messvorschrift für die Temperatur ist allerdings nicht trivial und nicht unmittelbar evident.

Damit hat auch die zweite Relativierung des Ansatzes der beiden mechanischen Zustandsvariablen zu tun. Es ist nämlich keineswegs selbstverständlich, dass die spezifische innere Energie nur von zwei Zustandsvariablen abhängt. Diese Wahl ist wohl ausreichend, wenn es sich um Prozesse handelt, die nahe am thermodynamischen Gleichgewicht sind. In einem einkomponentigen Stoff im thermodynamischen Gleichgewicht ist der lokale Zustand in der Tat durch die Angabe von zwei Variablen, etwa Volumen und Druck, vollständig beschreibbar.

Ein solches Vorgehen ist Gegenstand der sog. $p dv$ -Thermodynamik, die überraschenderweise für eine Quantifizierung des Leistungsverhaltens auch schnell arbeitender Wärmekraftmaschinen dem Ingenieur meistens genügt. Dass diese Methode funktioniert, ist erstaunlich, denn bei solchen Prozessen treten sicher Gradienten des Drucks und der Geschwindigkeit (oder auch der Temperatur) auf,

die möglicherweise wieder für die Zustandsbeschreibung wichtig sind, und die betreffenden Prozesse können auch nicht einfach umgekehrt werden, sondern verlaufen in zeitlicher Richtung irreversibel. In der Tat ist es nun so, dass auch in der Technik Prozesse auftreten, zu deren Beschreibung die $p d v$ -Thermodynamik nicht ausreicht. Beispiele hierfür sind etwa Wärmeleitprobleme.

Es ist daher zu vermuten, dass i. A. die innere Energie im thermodynamischen Nichtgleichgewicht von weiteren, über Druck und Volumen (bzw. Temperatur) hinausgehenden Variablen abhängt. Die Frage ist jedoch, von welcher Form diese Abhängigkeit ist und wie man diese messen muss, insbesondere im Zusammenhang mit der nicht-mechanischen, primadonnahaften Größe Temperatur? In der Tat wäre es mathematisch ohne Probleme möglich, das oben geschilderte Verfahren des integrierenden Faktors auf mehr als zwei Variable zu verallgemeinern. Ein solches Vorgehen würde jedoch schnell zu einem unphysikalischen Formalismus erstarren, mit welchem dem Ingenieur nicht geholfen ist.

In der Literatur haben sich nun zwei Wege abgezeichnet, dieser Problematik phänomenologisch zu begegnen. Der erste ist der Weg der sog. *Thermodynamik irreversibler Prozesse*, kurz TIP, den wir weiter oben in der von ECKART aufgezeigten Form bereits beschritten haben. Hier ist die sog. Hypothese vom lokalen Gleichgewicht essentiell: Obwohl in den betrachteten Prozessen Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten, also Nichtgleichgewichtsphänomene, eine wesentliche Rolle spielen, ist der Zustand eines materiellen Teilchens und der zu seiner Beschreibung nötigen Zustandsfunktionen, wie u. a. der spezifischen inneren Energie, lediglich durch Druck und spezifisches Volumen (bzw. als Ersatz die Temperatur) gekennzeichnet, jedenfalls wenn es sich um ein wärmeleitend-viskoses Gas bzw. eine Flüssigkeit handelt[†]. Wir werden gleich sehen, wie die TIP vorgeht, um über die Entropiebeziehungen (12.1.15 / 20 / 21) einschränkende Aussagen über die mögliche mathematische Form von Materialfunktionen wie der spezifischen inneren Energie, dem Wärmefluss und dem Spannungsdeviator zu gewinnen. Somit wird in der TIP die Entropie nicht aus reinem Selbstzweck eingeführt, sondern sie erweist uns einen *Dienst*, indem sie uns hilft, die Vermessung von Materialfunktionen auf das Notwendige zu beschränken. Außerdem, auch das werden wir sehen, erlaubt sie eine quantitative Interpretation des Zustandes eines Systems im Sinne von Ordnung resp. Unordnung und der Schwierigkeit der Umkehrbarkeit thermodynamischer Prozesse. Auch das ist nützlich für die Technik und bewahrt uns vor Schwafelei.

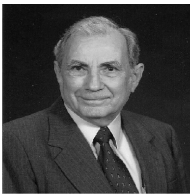
[†] Zur Beschreibung des Verhaltens von Festkörpern muss die Dehnung bzw. ihre Spur mit eingebracht werden, und es empfiehlt sich womöglich mit einem anderen als dem linearen Dehnungsmaß zu arbeiten. Dies wird hier nicht weiter ausgeführt.



Bernard David COLEMAN wurde 1930 geboren. Er erwarb seinen B.S. an der Indiana University im Jahre 1951. 1952 und 1953 folgten der M.S. und der Ph.D. an der Yale University. Er wurde auf diverse Professuren in Mathematik, Biologie und Chemie berufen. Seit Juli 1988 ist er J. Willard GIBBS Professor of Thermomechanics an der Rutgers University. Einer seiner wesentlichen Beiträge besteht in einer rationalen Auswertemethode des Entropieprinzips, das unter dem Namen COLEMAN-NOLL-Verfahren in der einschlägigen Literatur bekannt ist.

Der zweite Weg, der in rationaler Formulierung die gleichen Ziele verfolgt wie die TIP, sind (Material-) Theorien des thermodynamischen Nichtgleichgewichts, wie sie von Pionieren wie COLEMAN, TRUESDELL oder NOLL erstmalig formuliert wurden und in den Büchern von Haupt (2002) oder Müller (1973, 1985) zusammengestellt sind. In diesem Buch für Anfänger werden wir diese Theorien nicht näher ausführen. Nur soviel sei gesagt: Eine ihrer wesentlichen Grundlagen besteht in dem sog. *Entropieprinzip*, das wiederum als eine Abstraktion der Gleichung (12.1.21) aufgefasst werden kann. Das Entropieprinzip setzt erstens voraus, dass die Entropie eine bilanzierbare Größe ist, was durch eine globale Gleichung folgender Form zum Ausdruck kommt:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho s dV = - \oint \phi_j n_j dA + \iiint_{V(t)} z dV + \iiint_{V(t)} \sigma dV . \quad (12.1.22)$$



Walter NOLL wurde am 7. Januar 1925 in Berlin geboren. 1946 begann er ein Ingenieurmathematikstudium an der Technischen Universität Berlin, das er nach einem Auslandsaufenthalt in Paris 1951 mit dem Diplom abschloss. Danach war er für vier Jahre wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Technische Mechanik von Istvan SZABO. Seine Begeisterung für Mathematik überwog, und er entschloss sich 1953, in die U.S.A. zu gehen und zwar zu TRUESDELL an die Indiana University in Bloomington, wo er seinen Ph.D. in Applied Mathematics 1954 machte.

1955 immigrierte er vollständig, verbrachte das Jahr an der University of Southern California und wurde 1956 schließlich Professor am Mathematics Department der Carnegie Mellon University. Dort emeritierte er 1993. Seine großen Leistungen liegen im Grenzgebiet zwischen Mathematik und Mechanik, insbesondere in der formal-rationalen Formulierung der letzteren.

Darin sind sowohl die spezifische Entropie s , der Entropieflussvektor ϕ_j , die Volumenzufuhr an Entropie z als auch die Entropieproduktion σ (unbekannte) Materialfunktionen eines geeignet zu definierenden Variablensatzes. M. a. W: Der Entropieflussvektor ist nicht a priori gleich q_j/T und die Volumenzufuhr nicht gleich $\rho r/T$ (r : spezifische Strahlungsdichte). Dieses muss sich im Rahmen der Auswertung des Entropieprinzips erst ergeben. Bei der Auswertung ist zweitens eine wesentliche Forderung, dass die Entropieproduktion für alle thermodynamisch zulässigen Prozesse positiv-semidefinit ist:

$$\sigma \geq 0 . \quad (12.1.23)$$

Dieses mag man als den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnen. Drittens ist der Entropiefluss an ruhenden wärmedurchlässigen Wänden als stetig anzusehen:

$$\llbracket \phi_j \rrbracket e_j = 0. \quad (12.1.24)$$

Dieses zu fordern, ist zur Einführung der (absoluten) Temperatur im Sinne einer Messgröße wichtig.

Übung 12.1.2: Die Entropie des idealen Gases

Man starte von den Gleichungen (12.1.5 / 13) und kombiniere sie zur sog. GIBBSschen Gleichung:

$$Tds = du + p dv, \quad (12.1.25)$$

wobei die spezifische Entropie s , die spezifische innere Energie u und der Druck p jeweils Funktionen von zwei Veränderlichen sein können, nämlich (p, v) oder (p, T) oder (v, T) . Man wähle nun speziell die thermische und die kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases nach (6.4.1) und (6.5.2) und integriere die Gleichung (12.1.25) zwischen einem Referenzzustand „0“ und einem aktuellen Zustand. Es ist zu zeigen, dass für die spezifische Entropie des idealen Gases gilt:

$$\begin{aligned} s - s_0 &= \zeta \frac{R}{M} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{R}{M} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right), \quad s - s_0 = (\zeta + 1) \frac{R}{M} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \zeta \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right), \\ s - s_0 &= \zeta \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + (\zeta + 1) \frac{R}{M} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right), \end{aligned} \quad (12.1.26)$$

je nachdem, welche Wahl der Zustandsvariablen zur Beschreibung eines Problems besonders günstig ist.

12.2 Die Entropiekonzept als Maß für (Un-) Ordnung und (Ir-) Reversibilität

Neben seiner auf die Form von Materialgleichungen restriktiven Wirkung, birgt das Entropiekonzept die bestechende Möglichkeit in sich, den Ordnungszustand eines Systems und den Grad der Irreversibilität einer Prozessführung zu quantifizieren. Beides wollen wir anhand von einfachen Beispielen besser verstehen.

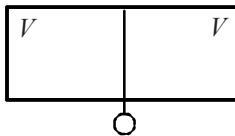


Abb. 12.1: Durch einen Schieber abgetrennte Kammerhälften.

Wir betrachten zunächst die in Abb. 12.1 dargestellte, durch einen Schieber in zwei gleichgroße Volumina V getrennte, nach außen adiabatisch abgeschirmte Gaskammer. In der einen Hälfte soll sich ein durch den Anfangsdruck p_A und die Anfangstemperatur T_A eindeutig gekennzeichnetes ideales Gas befinden. Sein spezifisches Volumen ist nach der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase (6.4.1) dann nämlich durch

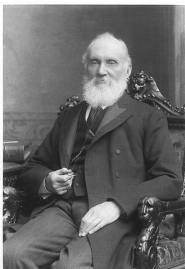
$$v_A = \frac{R}{M} \frac{T_A}{p_A} \quad (12.2.1)$$

gegeben. Nun entfernen wir den Schieber. Ein turbulenter Strömungsvorgang setzt ein, und nach einiger Zeit kommt das ideale Gas durch interne Reibungsvorgänge wieder zur Ruhe. Offenbar ist dieser Vorgang irreversibel, denn „von selbst“ wird das Gas sich nicht wieder in der ursprünglichen Hälfte sammeln. Wir wollen berechnen, um wieviel die Entropie nach diesem Prozess gestiegen ist. Da die Masse konstant ist, können wir genauso gut die Änderung der spezifischen Entropie berechnen und dabei Gleichung (12.1.26) nutzen. Jede der angegebenen Darstellungen kann im Prinzip verwendet werden, wobei der aktuelle Zustand durch Größen nach Eintreten von Ruhe und der 0-Zustand durch Größen am Anfang gegeben ist. Letztere sind vorgegeben, erstere müssen wir noch errechnen. Durch Anwendung des globalen Energiesatzes (vgl. die Ausführungen in Abschnitt 7.2 und in der Übung 7.2.1) auf das gesamte Volumen findet man:

$$T_E = T_A, \quad (12.2.2)$$

d. h. die Temperatur ändert sich nicht. Man mag das dahingehend interpretieren, dass sich das ideale Gas einerseits bei Volumenvergrößerung abkühlt und andererseits durch die Reibung wieder erwärmt. Beide Effekte sind jedoch gleich stark. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom sog. JOULE-THOMSON-Effekt. Für den Enddruck liefert dann die ideale Gasgleichung (6.4.1):

$$p_E = \frac{1}{2} p_A. \quad (12.2.3)$$



William THOMSON, 1. Baron KELVIN, genannt LORD KELVIN oder auch KELVIN OF LARGS wurde am 26. Juni 1824 in Belfast, Irland geboren und starb am 17. Dezember 1907 in Netherhall bei Largs, Schottland. THOMSON besuchte die Glasgow University bereits im zarten Alter von zehn Jahren. 1841 ging er nach Cambridge und erhielt seinen B.A. im Jahre 1845. 1846 wurde er Professor of Natural Philosophy an der University of Glasgow, wo er für den Rest seiner Karriere verblieb. Er war ein extrem vielseitiger Physiker und arbeitete sowohl theoretisch als auch experimentell. Besonders erwähnenswert ist sein Versuch, das Alter der Erde abzuschätzen und sein Mitwirken am Bau des ersten transatlantischen Telegraphenkabels. Er publizierte mehr als 600 Arbeiten,

wurde 1851 in die Royal Society gewählt und war ihr Präsident von 1890 bis 1895.

Also wird sich die spezifische Entropie erhöhen und zwar nach $(12.1.26)_2$ um:



<http://www.springer.com/978-3-642-19869-4>

Streifzüge durch die Kontinuumstheorie

Müller, W.H.

2011, XVI, 342 S. 249 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-19869-4