

---

## Vorwort

Das Buch bietet eine Einführung in grundlegende Konzepte, Modelle und Methoden der Finanzmathematik und wendet sich in erster Linie an finanz- und wirtschaftsmathematisch orientierte Studenten und Absolventen von Fachhochschulen und Universitäten.

Der Text ist in zwei Teile gegliedert. Ein Schwerpunkt und eine Besonderheit des ersten Teils ist die algebraische, nicht-wahrscheinlichkeitstheoretische Darstellung der Bewertung zustandsabhängiger zukünftiger Auszahlungen in allgemeinen Ein- und Mehr-Perioden-Modellen in den Kapiteln 1 und 3. Die seit Black, Scholes und Merton grundlegende Bewertungs-idee besteht in der Replikation dieser Auszahlungen durch selbstfinanzierende Handelsstrategien in arbitragefreien Marktmodellen, und der Preis eines Auszahlungsprofils ist der Anfangswert einer die Auszahlung replizierenden Handelsstrategie. Diese Vorgehensweise kann insofern als deterministisch bezeichnet werden, als dass eine Auszahlung in jedem möglichen Zustand mit Hilfe einer Handelsstrategie nachgebildet wird und die Eintrittswahrscheinlichkeiten von Zuständen dabei keine Rolle spielen. Diese Wahrscheinlichkeiten müssen nicht einmal modelliert werden. Wenn aber die Bewertungsstrategie im Kern nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch ist, dann sollte sie – alleine schon zur Vermeidung irreführender Interpretationen – auch nicht ohne Not so formuliert werden.

Der algebraische Zugang zur Bewertung von Derivaten lässt sich finanzmathematisch als verallgemeinerte Diskontierung zukünftiger zustandsabhängiger Zahlungsströme interpretieren. So ist beispielsweise in arbitragefreien Ein-Perioden-Modellen der Preis einer zustandsabhängigen, replizierbaren Auszahlung  $c \in \mathbb{R}^K$  durch ein Skalarprodukt  $c_0 = \langle \psi, c \rangle$  gegeben, wobei  $\psi \gg 0$  einen Zustandsvektor des Modells bezeichnet. Wir werden sehen, dass alle Komponenten von  $\psi \in \mathbb{R}^K$  aufgrund der Arbitragefreiheit des Modells größer als Null sind. Daher ist  $Q := \frac{\psi}{d}$ , wobei  $d := \sum_{i=1}^K \psi_i > 0$ , formal ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und es kann  $c_0 = d\mathbf{E}^Q[c]$  geschrieben werden. Da  $d$  als Diskontfaktor interpretiert werden kann, ist der Preis  $c_0$  von  $c$  damit als abdiskontierter Erwartungswert in einer durch das Wahrscheinlichkeitsmaß

$Q$  definierten „risikoneutralen Welt“ umgeschrieben worden, aber die Bewertungsstrategie hat mit Wahrscheinlichkeitstheorie nichts zu tun.

Im Rahmen unserer Interpretation sagen wir dagegen, dass durch  $c_0 = \langle \psi, c \rangle$  die zustandsabhängige zukünftige Auszahlung  $c$  in einem verallgemeinerten Sinn auf den aktuellen Zeitpunkt 0 abdiskontiert wird und dann den Wert  $c_0$  besitzt. Ist  $c$  zustandsunabhängig, gilt also  $c(\omega_i) = z \in \mathbb{R}$  für alle  $i = 1, \dots, K$ , so folgt  $c_0 = \langle \psi, c \rangle = \left( \sum_{i=1}^K \psi_i \right) z = d \cdot z$ , und wir erhalten die klassische Diskontierungsformel für den zukünftigen Zahlungsbetrag  $z$ .

Eine weitere Besonderheit des vorliegenden Textes besteht darin, dass das Capital Asset Pricing Model (CAPM) in Kapitel 2 in mathematisch präziser Form aus der Theorie der arbitragefreien Ein-Perioden-Modelle entwickelt wird, und dass mit Hilfe dieser Ideen auch die Theorie und die Ergebnisse der klassischen Portfolio-Optimierung abgeleitet werden.

In Kapitel 4 werden die in den Kapiteln 1 und 3 vorgestellten Bewertungskonzepte auf Binomialbaum-Modelle und auf praxisrelevante Finanzinstrumente angewendet. Insbesondere wird die Bewertung von Standard-Optionen unter Berücksichtigung von Dividendenzahlungen der Underlyings während der Laufzeit der Derivate dargestellt. Durch Grenzübergang werden ferner aus den Binomialbaum-Gleichungen für Call- und Put-Optionen die Black-Scholes-Formeln abgeleitet.

Bestandteil des ersten Teils dieses Buches ist auch eine ausführliche Darstellung des Risikokonzepts Value at Risk in Kapitel 5. Das Delta-Normal-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung des Value at Risk wird so formuliert, dass es sich leicht objektorientiert implementieren lässt. Darüber hinaus wird in diesem Kapitel auch eine Einführung in kohärente Risikomaße gegeben, und der prominenteste Vertreter dieser Maße, der Expected Shortfall, wird detailliert als kohärent nachgewiesen.

Der heute übliche Zugang zur Finanzmathematik in stetiger Zeit wird mit Hilfe von Methoden der stochastischen Analysis entwickelt. Im zweiten Teil des vorliegenden Buches werden grundlegende Konzepte, wie etwa die bedingte Erwartung, Martingale, das stochastische Integral, die Itô-Formel, der Martingal-Darstellungssatz oder der Satz von Girsanov, in Kapitel 6 zunächst im Rahmen endlicher, zeitdiskreter Modelle vorgestellt. Der Vorteil der Konzentration auf diese Modellklasse besteht darin, dass die wesentlichen Begriffsbildungen in großer Allgemeinheit und ohne aufwendigen technischen Apparat dargestellt werden können.

In Kapitel 7 werden die im vorherigen Kapitel eingeführten Konzepte und Zusammenhänge der stochastischen Analysis auf die Bewertung von Derivaten in Binomialbaum-Modellen angewendet. Die Vorgehensweise ist dabei ganz analog zur Bewertung von Optionen innerhalb der stetigen Finanzmathematik, aber sie lässt sich in den diskreten Modellen mit erheblich geringerem technischen Aufwand durchführen.

Im letzten Kapitel 8 wird schließlich eine Einführung in die stetige Finanzmathematik gegeben. Obwohl die stochastische Analysis hier nicht streng und

vollständig entwickelt wird, sind die vorgestellten Begriffsbildungen dennoch aus den beiden vorangegangenen Kapiteln vertraut. Als wesentliche Anwendung werden die Black-Scholes-Formeln in diesem stetigen Rahmen hergeleitet.

Im Text werden Code-Fragmente für die Implementierung von Binomialbaum-Verfahren und Black-Scholes-Formeln, auch unter Berücksichtigung von Dividendenzahlungen, angegeben. Eine vollständige Java-Anwendung mit grafischer Oberfläche, von der aus diese Bewertungsverfahren aufgerufen werden, können einschließlich aller Quelltexte von der Homepage des Autors heruntergeladen werden<sup>1</sup>.

Frau Agnes Herrmann und Herrn Clemens Heine vom Springer Verlag danke ich herzlich für ihre Unterstützung und für die ausgezeichnete Zusammenarbeit.

Ich möchte an dieser Stelle auch meinen wissenschaftlichen Lehrern danken, von denen ich sowohl persönlich als auch fachlich sehr viel gelernt habe und denen ich viel verdanke.

Insbesondere bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Dietmar Arlt, der während meines Studiums in Bonn sein umfassendes Wissen mit ansteckender Begeisterung und hohem persönlichen Einsatz vermittelte.

Weiter danke ich Herrn Prof. Dr. Alfred K. Louis, der sich stets mit großem Engagement für seine Mitarbeiter einsetzte, in dessen Arbeitsgruppe an der Technischen Universität Berlin eine Vielfalt interessanter Themen vertreten war und in der eine ausgezeichnete persönliche und fachliche Atmosphäre herrschte.

Dann danke ich Herrn Prof. Dr. Hans Föllmer, der mir als damaligem Mitarbeiter der Bankgesellschaft Berlin die Möglichkeit gab, seine Vorlesungen und Seminare an der Humboldt-Universität Berlin zu besuchen.

Ein Dank gilt weiter meinen Studenten, deren Fragen und Kommentare an vielen Stellen zu Verbesserungen des Manuskriptes führten. Meinen Kollegen Herrn Prof. Dr. Claus Neidhardt und Herrn Prof. Dr. Jochen Wolf danke ich für ihre Unterstützung und für manche fachliche Diskussion. Schließlich danke ich meinem Sohn Alexander für die Erstellung der schönen Abbildungen.

Daun  
Mai 2011

*Jürgen Kremer*

---

<sup>1</sup> [www.rheinahrcampus.de/kremer](http://www.rheinahrcampus.de/kremer)

Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung  
von Derivaten

Kremer, J.

2011, XVI, 471 S. 57 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-20867-6