

# Mengensysteme

Ein Mengensystem ist eine Familie von Teilmengen einer Grundmenge und damit eine Teilmenge der Potenzmenge der Grundmenge. In diesem Kapitel untersuchen wir Mengensysteme, die unter bestimmten mengentheoretischen Operationen stabil sind. Die wichtigsten Mengensysteme sind die Topologien und die  $\sigma$ -Algebren, wobei in der Maßtheorie vor allem die  $\sigma$ -Algebren von Bedeutung sind.

Zwischen Topologien und  $\sigma$ -Algebren bestehen Analogien, die es als sinnvoll erscheinen lassen, diese Mengensysteme parallel zu untersuchen. So lassen sich zum Beispiel die Mengen, die einer Topologie oder  $\sigma$ -Algebra angehören, nur in seltenen Fällen explizit beschreiben. Topologien und  $\sigma$ -Algebren werden daher oft indirekt definiert, indem man ein kleineres Mengensystem angibt, das die Topologie oder die  $\sigma$ -Algebra in einer noch zu präzisierenden Weise erzeugt.

Da bestimmte  $\sigma$ -Algebren durch eine Topologie erzeugt werden, beginnen wir die Untersuchung von Mengensystemen mit Topologien (Abschnitt 1.1) und führen erst dann  $\sigma$ -Algebren ein (Abschnitt 1.2). Die nächsten Abschnitte betreffen Mengensysteme, die für die Erzeugung von  $\sigma$ -Algebren von Bedeutung sind. Dies sind vor allem Dynkin-Systeme (Abschnitt 1.3) und  $\cap$ -stabile Mengensysteme (Abschnitt 1.4) sowie Halbringe und Ringe (Abschnitt 1.5).

Im gesamten Kapitel sei  $\Omega$  eine nichtleere Menge. Wir bezeichnen die Potenzmenge von  $\Omega$  mit

$$2^\Omega$$

Für  $A \in 2^\Omega$  bezeichnen wir die Mächtigkeit von  $A$  mit

$$|A|$$

und das Komplement von  $A$  mit

$$\overline{A}$$

Für disjunkte Mengen  $A, B \in 2^\Omega$  setzen wir

$$A + B := A \cup B$$

Eine Familie  $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq 2^\Omega$  heißt *disjunkt*, wenn  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i, j \in I$  mit  $i \neq j$  gilt, und in diesem Fall setzen wir

$$\sum_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} A_i$$

Für eine Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^\Omega$  heißt die Menge

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

der *Limes inferior* der Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und die Menge

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

heißt der *Limes superior* der Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Es gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für alle außer endlich viele } n \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \right\}$$

und damit  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Jede Teilmenge der Menge  $2^\Omega$  heißt *Mengensystem* auf  $\Omega$ .

## 1.1 Topologien

Ein Mengensystem  $\mathcal{T} \subseteq 2^\Omega$  heißt *Topologie* auf  $\Omega$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\Omega \in \mathcal{T}$  und  $\emptyset \in \mathcal{T}$ .
- (ii) Für jede Familie  $\{Q_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$  gilt  $\bigcup_{i \in I} Q_i \in \mathcal{T}$ .
- (iii) Für jede endliche Familie  $\{Q_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$  gilt  $\bigcap_{i \in I} Q_i \in \mathcal{T}$ .

Ist  $\mathcal{T} \subseteq 2^\Omega$  eine Topologie, so heißt eine Menge  $A \in 2^\Omega$

- *offen* bezüglich  $\mathcal{T}$ , wenn  $A \in \mathcal{T}$  gilt.
- *abgeschlossen* bezüglich  $\mathcal{T}$ , wenn  $\bar{A} \in \mathcal{T}$  gilt.
- *kompakt* bezüglich  $\mathcal{T}$ , wenn es zu jeder Familie  $\{Q_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$  mit  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i$  eine endliche Menge  $J \subseteq I$  gibt mit  $A \subseteq \bigcup_{i \in J} Q_i$ .

### 1.1.1 Beispiele.

- (1) Die Potenzmenge  $2^\Omega$  ist eine Topologie auf  $\Omega$ .
- (2) Das Mengensystem  $\{\emptyset, \Omega\}$  ist eine Topologie auf  $\Omega$ .

**1.1.2 Beispiel (Topologie eines normierten Raumes).** Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Für  $x \in E$  und  $\varepsilon \in (0, \infty)$  sei

$$B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) := \left\{ y \in E \mid \|y - x\| < \varepsilon \right\}$$

Die Menge  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon)$  heißt *offene Kugel* um  $x$  mit Radius  $\varepsilon$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$ . Sei

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} := \left\{ Q \in 2^E \mid \text{für alle } x \in Q \text{ gibt es ein } \varepsilon \in (0, \infty) \text{ mit } B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \subseteq Q \right\}$$

Dann ist  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  eine Topologie auf  $E$  und jede offene Kugel bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  ist offen bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

In der Tat: Wir zeigen zunächst, dass  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  eine Topologie auf  $E$  ist:

- (i) Offenbar gilt  $E \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  und  $\emptyset \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .
- (ii) Sei  $\{Q_i\}_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Mengen in  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  und sei

$$Q := \bigcup_{i \in I} Q_i$$

Sei  $x \in Q$ . Dann gibt es ein  $i \in I$  mit  $x \in Q_i$ . Wegen  $Q_i \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  gibt es ein  $\varepsilon \in (0, \infty)$  mit  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \subseteq Q_i$  und wegen  $Q_i \subseteq Q$  folgt daraus  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \subseteq Q$ .

Daher gilt  $Q \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

- (iii) Sei  $\{Q_i\}_{i \in I}$  eine endliche Familie von Mengen in  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  und sei

$$Q := \bigcap_{i \in I} Q_i$$

Sei  $x \in Q$ . Für alle  $i \in I$  gilt  $x \in Q_i$  und wegen  $Q_i \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  gibt es für alle  $i \in I$  ein  $\varepsilon_i \in (0, \infty)$  mit  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon_i) \subseteq Q_i$ . Sei  $\varepsilon := \min_{i \in I} \varepsilon_i$ . Da  $I$  endlich ist, gilt  $\varepsilon \in (0, \infty)$  und für alle  $i \in I$  ergibt sich  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \subseteq B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon_i) \subseteq Q_i$ . Daraus folgt  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i \in I} Q_i = Q$ . Daher gilt  $Q \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

Daher ist  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  eine Topologie auf  $E$ .

Wir zeigen nun, dass jede offene Kugel bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  offen bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  ist: Sei  $x \in E$  und  $\varepsilon \in (0, \infty)$ . Für  $y \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon)$  sei  $\eta_y := \|y - x\|$  und  $\varepsilon_y := \varepsilon - \eta_y$ . Wegen  $\eta_y < \varepsilon$  gilt  $\varepsilon_y \in (0, \infty)$ . Für alle  $z \in B_{\|\cdot\|}(y, \varepsilon_y)$  gilt daher

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \varepsilon_y + \eta_y = (\varepsilon - \eta_y) + \eta_y = \varepsilon$$

und damit  $z \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon)$ . Da  $z \in B_{\|\cdot\|}(y, \varepsilon_y)$  beliebig war, ergibt sich

$$B_{\|\cdot\|}(y, \varepsilon_y) \subseteq B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon)$$

Da  $y \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon)$  beliebig war, ergibt sich

$$B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$$

Daher ist jede offene Kugel bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  offen bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

Für einen normierten Raum  $(E, \|\cdot\|)$  wird die in Beispiel 1.1.2 definierte Topologie  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  als die von der Norm  $\|\cdot\|$  *erzeugte Topologie* oder als die *Normtopologie* bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$  bezeichnet.

Wir betrachten nun Durchschnitte von Topologien:

**1.1.3 Satz.** *Sei  $H$  eine nichtleere Indexmenge und sei  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in H}$  eine Familie von Topologien auf  $\Omega$ . Dann ist das Mengensystem*

$$\mathcal{T} := \bigcap_{h \in H} \mathcal{T}_h$$

*eine Topologie auf  $\Omega$ .*

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\mathcal{T}$  die Axiome einer Topologie erfüllt:

- (i) Für alle  $h \in H$  gilt  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{T}_h$ . Daher gilt  $\Omega, \emptyset \in \bigcap_{h \in H} \mathcal{T}_h = \mathcal{T}$ .
- (ii) Sei  $\{Q_i\}_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Mengen in  $\mathcal{T} = \bigcap_{h \in H} \mathcal{T}_h$ . Für alle  $h \in H$  und für alle  $i \in I$  gilt dann  $Q_i \in \mathcal{T}_h$ . Für alle  $h \in H$  folgt daraus  $\bigcup_{i \in I} Q_i \in \mathcal{T}_h$ . Daher gilt  $\bigcup_{i \in I} Q_i \in \bigcap_{h \in H} \mathcal{T}_h = \mathcal{T}$ .
- (iii) Sei  $\{Q_i\}_{i \in I}$  eine endliche Familie von Mengen in  $\mathcal{T} = \bigcap_{h \in H} \mathcal{T}_h$ . Für alle  $h \in H$  und für alle  $i \in I$  gilt dann  $Q_i \in \mathcal{T}_h$ . Für alle  $h \in H$  folgt daraus  $\bigcap_{i \in I} Q_i \in \mathcal{T}_h$ . Daher gilt  $\bigcap_{i \in I} Q_i \in \bigcap_{h \in H} \mathcal{T}_h = \mathcal{T}$ .

Daher ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $\Omega$ . □

Aus Satz 1.1.3 ergibt sich eine wichtige Folgerung:

**1.1.4 Folgerung.** *Zu jedem Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  gibt es eine kleinste Topologie auf  $\Omega$ , die  $\mathcal{E}$  enthält.*

*Beweis.* Wir betrachten die Familie aller Topologien auf  $\Omega$ , die  $\mathcal{E}$  enthalten. Diese Familie ist nichtleer, denn die Potenzmenge  $2^\Omega$  ist eine Topologie mit  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ . Nach Satz 1.1.3 ist der Durchschnitt aller Topologien, die  $\mathcal{E}$  enthalten, ebenfalls eine Topologie. Diese Topologie enthält  $\mathcal{E}$  und ist offenbar die kleinste Topologie, die  $\mathcal{E}$  enthält. □

Für ein Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  bezeichnen wir die kleinste Topologie auf  $\Omega$ , die  $\mathcal{E}$  enthält, mit

$$\tau(\mathcal{E})$$

Diese Topologie wird als die *von  $\mathcal{E}$  erzeugte Topologie* bezeichnet und das Mengensystem  $\mathcal{E}$  wird als *Erzeuger* der Topologie  $\tau(\mathcal{E})$  bezeichnet.

**1.1.5 Beispiel (Topologie eines normierten Raumes).** Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Sei ferner

$$\mathcal{E}_{\|\cdot\|} := \left\{ B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon) \mid x \in E, \varepsilon \in (0, \infty) \right\}$$

Dann gilt

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \tau(\mathcal{E}_{\|\cdot\|})$$

In der Tat: Nach Beispiel 1.1.2 gilt

$$\mathcal{E}_{\|\cdot\|} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$$

und aus der Definition von  $\tau(\mathcal{E}_{\|\cdot\|})$  folgt nun

$$\tau(\mathcal{E}_{\|\cdot\|}) \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$$

Sei nun  $\mathcal{T}$  eine beliebige Topologie auf  $E$  mit  $\mathcal{E}_{\|\cdot\|} \subseteq \mathcal{T}$ . Sei  $Q \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ . Für alle  $x \in Q$  gibt es ein  $\varepsilon_x \in (0, \infty)$  mit  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon_x) \subseteq Q$ . Daraus folgt

$$Q = \bigcup_{x \in Q} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in Q} B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon_x) \subseteq Q$$

und damit  $Q = \bigcup_{x \in Q} B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon_x)$ . Wegen  $B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon_x) \in \mathcal{E}_{\|\cdot\|} \subseteq \mathcal{T}$  gilt daher  $Q \in \mathcal{T}$ . Daraus folgt zunächst

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} \subseteq \mathcal{T}$$

und aus der Definition von  $\tau(\mathcal{E}_{\|\cdot\|})$  folgt nun

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} \subseteq \tau(\mathcal{E}_{\|\cdot\|})$$

Daher gilt  $\tau(\mathcal{E}_{\|\cdot\|}) = \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ .

Auf einem Vektorraum können mehrere Normen definiert sein; insbesondere ist jedes strikt positive Vielfache einer Norm wieder eine Norm. Interessanter ist das folgende Beispiel:

**1.1.6 Beispiel (Normen auf  $\mathbb{R}^n$ ).** Für jedes  $p \in [1, \infty]$  ist die Abbildung  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit

$$\|\mathbf{x}\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|^p \right)^{1/p} & \text{falls } p \in [1, \infty) \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$ .

Damit stellt sich die Frage, unter welchen Umständen die von verschiedenen Normen erzeugten Topologien übereinstimmen.

**1.1.7 Beispiel (Topologien äquivalenter Normen).** Sei  $E$  ein Vektorraum und seien  $\|\cdot\|' : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $\|\cdot\|'' : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  Normen. Die Normen  $\|\cdot\|'$  und  $\|\cdot\|''$  heißen *äquivalent*, wenn es reelle Zahlen  $c', c'' \in (0, \infty)$  gibt derart, dass für alle  $x \in E$

$$\begin{aligned} \|x\|' &\leq c'' \cdot \|x\|'' \\ \|x\|'' &\leq c' \cdot \|x\|' \end{aligned}$$

gilt. Sind  $\|\cdot\|' : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $\|\cdot\|'' : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  äquivalente Normen, so gilt

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|'} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|''}$$

In der Tat: Zum Nachweis der behaupteten Identität genügt es, eine der Inklusionen  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|'} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|''}$  und  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|''} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|'}$  zu zeigen.

Sei  $Q \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|'}$ . Für alle  $x \in Q$  gibt es ein  $\varepsilon_x \in (0, \infty)$  mit  $B_{\|\cdot\|'}(x, \varepsilon_x) \subseteq Q$ . Daher gilt

$$Q = \bigcup_{x \in Q} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in Q} B_{\|\cdot\|''}(x, \varepsilon_x/c'') \subseteq \bigcup_{x \in Q} B_{\|\cdot\|'}(x, \varepsilon_x) \subseteq Q$$

und damit  $Q = \bigcup_{x \in Q} B_{\|\cdot\|''}(x, \varepsilon_x/c'') \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|''}$ .

Ist  $E$  ein endlichdimensionaler Vektorraum, so sind alle Normen auf  $E$  äquivalent. In diesem Fall stimmen nach Beispiel 1.1.7 alle von einer Norm erzeugten Topologien auf  $E$  überein und die von einer beliebigen Norm auf  $E$  erzeugte Topologie

$$\mathcal{T}(E)$$

wird als *natürliche Topologie* auf  $E$  bezeichnet.

Ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie und  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$  ein Mengensystem mit der Eigenschaft, dass jede Menge in  $\mathcal{T}$  als Vereinigung von Mengen in  $\mathcal{E}$  dargestellt werden kann, so heißt  $\mathcal{E}$  *Basis* der Topologie  $\mathcal{T}$ ; in diesem Fall gilt insbesondere  $\mathcal{T} = \tau(\mathcal{E})$ .

Das folgende Beispiel zeigt, dass die natürliche Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  eine abzählbare Basis besitzt:

**1.1.8 Beispiel (Natürliche Topologie auf  $\mathbb{R}^n$ ).** Sei  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Norm und sei

$$\mathcal{E}_{\|\cdot\|, \mathbb{Q}} := \left\{ B_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \varepsilon) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \right\}$$

Dann ist  $\mathcal{E}_{\|\cdot\|, \mathbb{Q}}$  abzählbar und eine Basis der natürlichen Topologie  $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ .

In der Tat: Offenbar ist  $\mathcal{E}_{\|\cdot\|, \mathbb{Q}}$  abzählbar und nach Beispiel 1.1.2 gilt

$$\mathcal{E}_{\|\cdot\|, \mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$$

Sei nun  $Q \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ . Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gibt es ein  $\varepsilon_{\mathbf{x}} \in (0, \infty)$  mit  $B_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \varepsilon_{\mathbf{x}}) \subseteq Q$ , und damit gibt es auch ein  $\eta_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$  mit

$$B_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x}}) \subseteq Q$$

Außerdem gibt es ein  $\mathbf{z}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q}^n$  mit  $\|\mathbf{z}_{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \eta_{\mathbf{x}}/2$  und damit

$$\mathbf{x} \in B_{\|\cdot\|}(\mathbf{z}_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}}/2)$$

Für alle  $\mathbf{y} \in B_{\|\cdot\|}(\mathbf{z}_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}}/2)$  gilt  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{z}_{\mathbf{x}}\| + \|\mathbf{z}_{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \eta_{\mathbf{x}}/2 + \eta_{\mathbf{x}}/2 = \eta_{\mathbf{x}}$  und damit  $\mathbf{y} \in B_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x}})$ . Daraus folgt

$$B_{\|\cdot\|}(\mathbf{z}_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}}/2) \subseteq B_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x}})$$

Daher gilt

$$Q = \bigcup_{\mathbf{x} \in Q} \{\mathbf{x}\} \subseteq \bigcup_{\mathbf{x} \in Q} B_{\|\cdot\|}(\mathbf{z}_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}}/2) \subseteq \bigcup_{\mathbf{x} \in Q} B_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x}}) \subseteq Q$$

und damit

$$Q = \bigcup_{\mathbf{x} \in Q} B_{\|\cdot\|}(\mathbf{z}_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}}/2)$$

Daher ist  $\mathcal{E}_{\|\cdot\|, \mathbb{Q}}$  eine Basis von  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ .

Ausgehend von der natürlichen Topologie auf  $\mathbb{R}$  lässt sich eine Topologie auf der Menge  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  definieren:

**1.1.9 Beispiel (Natürliche Topologie auf  $\bar{\mathbb{R}}$ ).** Das Mengensystem

$$\mathcal{T}(\bar{\mathbb{R}}) := \left\{ Q \in 2^{\bar{\mathbb{R}}} \mid Q \cap \mathbb{R} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}) \right\}$$

ist eine Topologie auf  $\bar{\mathbb{R}}$  und wird als *natürliche Topologie* auf  $\bar{\mathbb{R}}$  bezeichnet. Die natürliche Topologie auf  $\bar{\mathbb{R}}$  besteht offenbar genau aus den Mengen der Form  $Q$ ,  $Q \cup \{-\infty\}$ ,  $Q \cup \{\infty\}$ ,  $Q \cup \{-\infty, \infty\}$  mit  $Q \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$ .

## Aufgaben

- 1.1.A** Sei  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $\Omega$ . Zu jeder Menge  $A \in 2^{\Omega}$  gibt es eine größte offene Menge  $A^\circ$  mit  $A^\circ \subseteq A$  und eine kleinste abgeschlossene Menge  $A^\bullet$  mit  $A \subseteq A^\bullet$ . Die Menge  $A^\circ$  heißt das *Innere* von  $A$ , die Menge  $A^\bullet$  heißt der *Abschluss* von  $A$ , und die Menge  $\partial A := A^\bullet \setminus A^\circ$  heißt der *Rand* von  $A$ . Der Rand von  $A$  ist abgeschlossen.
- 1.1.B** Sei  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $\Omega$ . Ist  $K \in 2^{\Omega}$  kompakt und  $A \in 2^{\Omega}$  abgeschlossen, so ist  $K \cap A$  kompakt.
- 1.1.C** Mindestens eine der Topologien  $2^{\mathbb{R}}$  und  $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$  kann nicht durch eine Norm auf  $\mathbb{R}$  erzeugt werden. Welche?
- 1.1.D Topologie eines metrischen Raumes:** Sei  $(E, d)$  ein metrischer Raum. Für  $x \in E$  und  $\varepsilon \in (0, \infty)$  sei

$$B_d(x, \varepsilon) := \left\{ y \in E \mid d(y, x) < \varepsilon \right\}$$

Die Menge  $B_d(x, \varepsilon)$  heißt *offene Kugel* um  $x$  mit Radius  $\varepsilon$  bezüglich der Metrik  $d$ . Sei

$$\mathcal{T}_d := \left\{ Q \in 2^E \mid \text{für alle } x \in Q \text{ gibt es ein } \varepsilon \in (0, \infty) \text{ mit } B_d(x, \varepsilon) \subseteq Q \right\}$$

Dann ist  $\mathcal{T}_d$  eine Topologie auf  $E$ . Die Topologie  $\mathcal{T}_d$  wird als die von der Metrik  $d$  erzeugte *Topologie* bezeichnet. Sei ferner

$$\mathcal{E}_d := \left\{ B_d(x, \varepsilon) \mid x \in E, \varepsilon \in (0, \infty) \right\}$$

Dann gilt  $\mathcal{T}_d = \tau(\mathcal{E}_d)$ .

- 1.1.E Hausdorff-Räume:** Ein topologischer Raum  $(E, \mathcal{T})$  heißt *Hausdorff-Raum*, wenn es für alle  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  offene Mengen  $U, V \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in U$  und  $y \in V$  sowie  $U \cap V = \emptyset$ .
- (1) Für jeden metrischen Raum  $(E, d)$  ist  $(E, \mathcal{T}_d)$  ein Hausdorff-Raum.
- (2) In einem Hausdorff-Raum ist jede kompakte Menge abgeschlossen.

## 1.2 $\sigma$ -Algebren

Ein Mengensystem  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  heißt  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
  - (ii) Für jede Menge  $A \in \mathcal{F}$  gilt  $\bar{A} \in \mathcal{F}$ .
  - (iii) Für jede Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  gilt  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ .
- Ist  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  eine  $\sigma$ -Algebra, so heißt eine Menge  $A \in 2^\Omega$  *messbar* bezüglich  $\mathcal{F}$ , wenn  $A \in \mathcal{F}$  gilt.

### 1.2.1 Beispiele.

- (1) Die Potenzmenge  $2^\Omega$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .
- (2) Das Mengensystem

$$\mathcal{F} := \left\{ A \in 2^\Omega \mid A \text{ oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar} \right\}$$

ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .

- (3) Für jede Menge  $A \in 2^\Omega$  mit  $A \notin \{\emptyset, \Omega\}$  ist das Mengensystem

$$\mathcal{F} := \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .

- (4) Das Mengensystem  $\{\emptyset, \Omega\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .

**1.2.2 Lemma.** Sei  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ . Dann gilt:

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
- (2) Für jede Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  gilt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ .
- (3) Für jede endliche Familie  $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$  gilt  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$  und  $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$ .

*Beweis.* Es gilt  $\emptyset = \bar{\Omega} \in \mathcal{F}$  und für jede Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n}$$

und damit  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ . Damit sind (1) und (2) gezeigt. Schließlich folgt (3) aus (1) und (2), da man jede endliche Familie von Mengen in  $\mathcal{F}$  mit Hilfe der Mengen  $\emptyset$  bzw.  $\Omega$  zu einer Folge in  $\mathcal{F}$  erweitern kann, ohne die Vereinigung bzw. den Durchschnitt zu verändern.  $\square$

Den nächsten Satz und die anschließende Folgerung beweist man genau wie im Fall von Topologien:

**1.2.3 Satz.** Sei  $H$  eine nichtleere Indexmenge und sei  $\{\mathcal{F}_h\}_{h \in H}$  eine Familie von  $\sigma$ -Algebren auf  $\Omega$ . Dann ist das Mengensystem

$$\mathcal{F} := \bigcap_{h \in H} \mathcal{F}_h$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .



**1.2.4 Folgerung.** Zu jedem Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  gibt es eine kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , die  $\mathcal{E}$  enthält.

Für ein Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  bezeichnen wir die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , die  $\mathcal{E}$  enthält, mit

$$\sigma(\mathcal{E})$$

Diese  $\sigma$ -Algebra wird als die *von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra* bezeichnet und das Mengensystem  $\mathcal{E}$  wird als *Erzeuger* der  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$  bezeichnet. Für eine Menge  $A \in 2^\Omega$  schreiben wir auch

$$\sigma(A)$$

anstelle von  $\sigma(\{A\})$  und bezeichnen  $\sigma(A)$  als die *von  $A$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra*.

Von Interesse sind unter anderem  $\sigma$ -Algebren auf  $\Omega$ , die von einer Topologie auf  $\Omega$  erzeugt werden. Ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $\Omega$ , so wird die  $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$$

als *Borelsche  $\sigma$ -Algebra* bezüglich  $\mathcal{T}$  bezeichnet. Jede Menge  $B \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{T})$  heißt *Borel-Menge* von  $\Omega$  bezüglich  $\mathcal{T}$ .

**1.2.5 Beispiel (Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ ).** Die  $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n))$$

wird als *Borelsche  $\sigma$ -Algebra* (bezüglich der natürlichen Topologie) auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet; vgl. Aufgabe 1.2.A.

Von Interesse ist auch die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\bar{\mathbb{R}}$ :

**1.2.6 Beispiel (Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\bar{\mathbb{R}}$ ).** Die  $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \sigma(\mathcal{T}(\bar{\mathbb{R}}))$$

wird als *Borelsche  $\sigma$ -Algebra* auf  $\bar{\mathbb{R}}$  bezeichnet. Es gilt

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \left\{ B \in 2^{\bar{\mathbb{R}}} \mid B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right\}$$

Die Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  besteht offenbar genau aus den Mengen der Form  $B$ ,  $B \cup \{-\infty\}$ ,  $B \cup \{\infty\}$ ,  $B \cup \{-\infty, \infty\}$  mit  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

## Aufgaben

**1.2.A Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ :** Für jede Norm  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_{\|\cdot\|, \mathbb{Q}})$$

Insbesondere besitzt die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$  einen abzählbaren Erzeuger.

**1.2.B Erzeugte  $\sigma$ -Algebra:** Bestimmen Sie für  $A \in 2^\Omega$  die  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(A)$ .

### 1.3 Dynkin-Systeme

Ein Mengensystem  $\mathcal{D} \subseteq 2^\Omega$  heißt *Dynkin-System* auf  $\Omega$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\Omega \in \mathcal{D}$ .
- (ii) Für jede Menge  $A \in \mathcal{D}$  gilt  $\overline{A} \in \mathcal{D}$ .
- (iii) Für jede disjunkte Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$  gilt  $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ .

**1.3.1 Lemma.** *Jede  $\sigma$ -Algebra ist ein Dynkin-System.*

Die Umkehrung der Implikation von Lemma 1.3.1 ist jedoch falsch; vgl. Beispiel 1.3.6.

**1.3.2 Lemma.** *Sei  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System. Dann gilt für alle  $A, B \in \mathcal{D}$  mit  $B \subseteq A$*

$$A \setminus B \in \mathcal{D}$$

*Beweis.* Wegen  $B \subseteq A$  gilt  $\overline{A} \cap B = \emptyset$  und damit  $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B} = \overline{\overline{A} + B} \in \mathcal{D}$ . □

Den nächsten Satz und die anschließende Folgerung beweist man genau wie im Fall von Topologien:

**1.3.3 Satz.** *Sei  $H$  eine nichtleere Indexmenge und sei  $\{\mathcal{D}_h\}_{h \in H}$  eine Familie von Dynkin-Systemen auf  $\Omega$ . Dann ist das Mengensystem*

$$\mathcal{D} := \bigcap_{h \in H} \mathcal{D}_h$$

*ein Dynkin-System auf  $\Omega$ .*

**1.3.4 Folgerung.** *Zu jedem Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  gibt es ein kleinstes Dynkin-System auf  $\Omega$ , das  $\mathcal{E}$  enthält.*

Für ein Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  bezeichnen wir das kleinste Dynkin-System auf  $\Omega$ , das  $\mathcal{E}$  enthält, mit

$$\delta(\mathcal{E})$$

Dieses Dynkin-System wird als das *von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System* bezeichnet und das Mengensystem  $\mathcal{E}$  wird als *Erzeuger* des Dynkin-Systems  $\delta(\mathcal{E})$  bezeichnet.

**1.3.5 Folgerung.** *Sei  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  ein Mengensystem. Dann gilt*

$$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Lemma 1.3.1. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass das von einem Mengensystem erzeugte Dynkin-System keine  $\sigma$ -Algebra zu sein braucht:

**1.3.6 Beispiel.** Sei  $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$  und sei  $A := \{1, 2\}$  und  $B := \{1, 3\}$ . Für das Mengensystem  $\mathcal{E} := \{A, B\}$  gilt dann  $\delta(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, \overline{A}, B, \overline{B}, \Omega\} \neq 2^\Omega = \sigma(\mathcal{E})$ .

Unter einer zusätzlichen Bedingung an das Mengensystem  $\mathcal{E}$ , die wir im nächsten Abschnitt behandeln, gilt jedoch  $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$ .

## 1.4 $\cap$ -stabile Mengensysteme

Ein Mengensystem  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$  heißt  $\cap$ -stabil, wenn für alle  $A, B \in \mathcal{C}$

$$A \cap B \in \mathcal{C}$$

gilt. Offenbar ist jede Topologie und jede  $\sigma$ -Algebra  $\cap$ -stabil. Andererseits muss ein Dynkin-System nicht  $\cap$ -stabil sein; vgl. Beispiel 1.3.6. Der folgende Satz klärt die Beziehung zwischen  $\sigma$ -Algebren und Dynkin-Systemen:

**1.4.1 Satz.** Für ein Mengensystem  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $\mathcal{F}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.
- (b)  $\mathcal{F}$  ist ein  $\cap$ -stabiles Dynkin-System.

*Beweis.* Wegen Lemma 1.2.2 und Lemma 1.3.1 ist jede  $\sigma$ -Algebra ein  $\cap$ -stabiles Dynkin-System.

Sei nun  $\mathcal{F}$  ein  $\cap$ -stabiles Dynkin-System.

- (i) Es gilt  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
- (ii) Für jede Menge  $A \in \mathcal{F}$  gilt  $\overline{A} \in \mathcal{F}$ .
- (iii) Sei  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  und

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Um zu zeigen, dass  $A \in \mathcal{F}$  gilt, konstruieren wir eine disjunkte Folge  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  mit

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

Die Folge  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit

$$C_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$$

(und damit  $C_0 = \emptyset$ ) ist monoton wachsend und die Folge  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$B_n := C_n \setminus C_{n-1}$$

ist disjunkt mit

$$C_n = \sum_{k=1}^n B_k$$

Daher gilt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n B_k = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

Außerdem gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} B_n &= C_n \setminus C_{n-1} \\ &= \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \\ &= A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \\ &= A_n \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k} \\ &= A_n \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k} \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{F}$  ein  $\cap$ -stabiles Dynkin-System ist, folgt daraus  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$  und damit  $A \in \mathcal{F}$ .

Damit ist gezeigt, dass  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.  $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass für einen  $\cap$ -stabilen Erzeuger das erzeugte Dynkin-System mit der erzeugten  $\sigma$ -Algebra übereinstimmt:

**1.4.2 Satz.** *Sei  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  ein  $\cap$ -stabiles Mengensystem. Dann ist  $\delta(\mathcal{E})$   $\cap$ -stabil und es gilt*

$$\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$$

*Beweis.* Ist  $\mathcal{E}$  leer, so gilt  $\delta(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \Omega\} = \sigma(\mathcal{E})$ . Sei also  $\mathcal{E}$  nichtleer. Nach Folgerung 1.3.5 gilt

$$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$$

Zum Beweis der Inklusion

$$\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E})$$

genügt es zu zeigen, dass das Dynkin-System  $\delta(\mathcal{E})$   $\cap$ -stabil ist, denn dann ist  $\delta(\mathcal{E})$  nach Satz 1.4.1 eine  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{E}$  und damit auch  $\sigma(\mathcal{E})$  enthält.

Für  $B \in \delta(\mathcal{E})$  sei

$$\mathcal{D}_B := \left\{ C \in 2^\Omega \mid C \cap B \in \delta(\mathcal{E}) \right\}$$

Dann ist  $\mathcal{D}_B$  ein Dynkin-System:

- (i) Es gilt  $\Omega \cap B = B \in \delta(\mathcal{E})$ . Daher gilt  $\Omega \in \mathcal{D}_B$ .
- (ii) Sei  $C \in \mathcal{D}_B$ . Dann gilt  $C \cap B \in \delta(\mathcal{E})$  und  $C \cap B \subseteq B \in \delta(\mathcal{E})$ . Aus Lemma 1.3.2 folgt  $\overline{C} \cap B = B \setminus C = B \setminus (C \cap B) \in \delta(\mathcal{E})$ . Daher gilt  $\overline{C} \in \mathcal{D}_B$ .
- (iii) Sei  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_B$  disjunkt. Dann ist auch die Folge  $\{C_n \cap B\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \delta(\mathcal{E})$  disjunkt und es gilt  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} C_n) \cap B = \sum_{n \in \mathbb{N}} (C_n \cap B) \in \delta(\mathcal{E})$ . Daher gilt  $\sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{D}_B$ .

Sei  $E \in \mathcal{E}$ . Für alle  $F \in \mathcal{E}$  gilt, da  $\mathcal{E}$   $\cap$ -stabil ist,  $F \cap E \in \mathcal{E} \subseteq \delta(\mathcal{E})$  und damit  $F \in \mathcal{D}_E$ . Daraus folgt zunächst  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$  und sodann

$$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$$

Sei  $D \in \delta(\mathcal{E})$ . Für alle  $E \in \mathcal{E}$  ergibt sich aus der letzten Inklusion  $D \in \mathcal{D}_E$  und damit  $E \in \mathcal{D}_D$ . Daraus folgt zunächst  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D$  und sodann

$$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$$

Für alle  $C, D \in \delta(\mathcal{E})$  ergibt sich aus der letzten Inklusion  $C \in \mathcal{D}_D$  und damit  $C \cap D \in \delta(\mathcal{E})$ . Daher ist das Dynkin-System  $\delta(\mathcal{E})$   $\cap$ -stabil.  $\square$

## Aufgaben

**1.4.A** Der Durchschnitt einer nichtleeren Familie von  $\cap$ -stabilen Mengensystemen auf  $\Omega$  ist ein  $\cap$ -stabiles Mengensystem.

**1.4.B** Ein Mengensystem  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$  heißt  $\cup$ -stabil, wenn für alle  $A, B \in \mathcal{C}$

$$A \cup B \in \mathcal{C}$$

gilt. Jede Topologie und jede  $\sigma$ -Algebra ist ein  $\cup$ -stabiles Mengensystem.

**1.4.C** Ein Mengensystem  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$  heißt *Verband*, wenn es  $\cup$ -stabil und  $\cap$ -stabil ist. Jede Topologie und jede  $\sigma$ -Algebra ist ein Verband.

## 1.5 Halbringe und Ringe

Ein Mengensystem  $\mathcal{H} \subseteq 2^\Omega$  heißt *Halbring* auf  $\Omega$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\emptyset \in \mathcal{H}$ .
- (ii) Für alle  $A, B \in \mathcal{H}$  gilt  $A \cap B \in \mathcal{H}$ .
- (iii) Für alle  $A, B \in \mathcal{H}$  gibt es eine endliche disjunkte Familie  $\{C_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{H}$  mit  $A \setminus B = \sum_{j \in J} C_j$ .

Der Begriff des Halbringes ist durch das folgende Beispiel motiviert:

**1.5.1 Beispiel (Halbring der halboffenen Intervalle auf  $\mathbb{R}^n$ ).** Wir setzen

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b} \right\} \\(\mathbf{a}, \mathbf{b}] &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\} \\[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}\end{aligned}$$

und bezeichnen

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  als *offenes Intervall*,
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  als *halboffenes Intervall* und
- $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  als *abgeschlossenes Intervall*.

Das Mengensystem

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) := \left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}] \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \right\}$$

ist ein Halbring und wird als *Halbring der halboffenen Intervalle* auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$  auch durch den Halbring der halboffenen Intervalle des  $\mathbb{R}^n$  erzeugt wird:

**1.5.2 Beispiel (Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ ).** Es gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$$

Außerdem enthält die Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  alle offenen und alle abgeschlossenen Intervalle und jede abzählbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

In der Tat: Sei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon \in (0, \infty)$ . Dann gilt

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(\mathbf{x}, \varepsilon) = (\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{1}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( \mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{1}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \right]$$

und damit  $B_{\|\cdot\|_\infty}(\mathbf{x}, \varepsilon) \in \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$ . Daher gilt  $\mathcal{E}_{\|\cdot\|_\infty} \subseteq \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$  und insbesondere

$$\mathcal{E}_{\|\cdot\|_\infty, \mathbb{Q}} \subseteq \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$$

Nach Beispiel 1.1.8 ist das Mengensystem  $\mathcal{E}_{\|\cdot\|_\infty, \mathbb{Q}}$  eine abzählbare Basis der Topologie  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty}$ . Daraus ergibt sich nun  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty} \subseteq \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$  und damit

$$\sigma(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty}) \subseteq \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$$

Sei nun  $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gibt es  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  und

$$J = (\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( \mathbf{a}, \mathbf{b} + \frac{1}{n} \mathbf{1} \right)$$

Da jedes offene Intervall in  $\mathbb{R}^n$  eine Menge in  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty}$  ist, folgt daraus  $J \in \sigma(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty})$ . Daher gilt  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty})$  und damit

$$\sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty})$$

Daher gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty}) = \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n))$$

Außerdem gilt für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( \mathbf{a} - \frac{1}{n} \mathbf{1}, \mathbf{b} \right]$$

und damit  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , und für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ergibt sich dann  $\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{x}, \mathbf{x}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .  
Damit ist auch die abschließende Behauptung gezeigt.

Wir betrachten nun Intervalle auf  $\bar{\mathbb{R}}$ :

**1.5.3 Beispiel (Halbring der halboffenen Intervalle auf  $\bar{\mathbb{R}}$ ).** Für  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$  setzen wir

$$(a, b) := \left\{ x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x < b \right\}$$

$$(a, b] := \left\{ x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b \right\}$$

$$[a, b] := \left\{ x \in \bar{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b \right\}$$

und bezeichnen

- $(a, b)$  als *offenes Intervall*,
- $(a, b]$  als *halboffenes Intervall* und
- $[a, b]$  als *abgeschlossenes Intervall*.

Das Mengensystem

$$\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}) := \left\{ (a, b] \mid a, b \in \bar{\mathbb{R}} \text{ mit } a \leq b \right\}$$

ist ein Halbring und wird als *Halbring der halboffenen Intervalle* auf  $\bar{\mathbb{R}}$  bezeichnet.

**1.5.4 Beispiel (Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\bar{\mathbb{R}}$ ).** Es gilt

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}))$$

In der Tat: Sei  $(a, b] \in \mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}})$ .

- Im Fall  $b = -\infty$  gilt  $(a, b] \cap \mathbb{R} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und damit  $(a, b] \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ .
- Im Fall  $b \in \mathbb{R}$  gilt  $(a, b] \cap \mathbb{R} = (a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und damit  $(a, b] \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ .
- Im Fall  $b = \infty$  gilt  $(a, b] \cap \mathbb{R} = (a, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und damit  $(a, b] \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ .

Daraus folgt zunächst  $\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  und sodann

$$\sigma(\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}})) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$$

Sei nun  $Q \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ . Dann gilt  $Q \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und damit

- Im Fall  $Q \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  gilt  $Q \in \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}))$ .
- Im Fall  $Q = \{\infty\}$  gilt  $Q = (-\infty, \infty] \setminus \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}))$ .
- Im Fall  $Q = \{-\infty\}$  gilt  $Q = \bar{\mathbb{R}} \setminus (-\infty, \infty] \in \sigma(\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}))$ .

Daraus folgt zunächst  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \subseteq \sigma(\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}))$  und sodann

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{J}(\bar{\mathbb{R}}))$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir betrachten abschließend eine weitere Klasse von Mengensystemen, die mit Halbringen verwandt sind:

Ein Mengensystem  $\mathcal{R} \subseteq 2^\Omega$  heißt *Ring* auf  $\Omega$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\emptyset \in \mathcal{R}$ .
- (ii) Für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ .
- (iii) Für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \cup B \in \mathcal{R}$ .

**1.5.5 Lemma.** *Jeder Ring ist ein Halbring.*

*Beweis.* Wegen  $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$  ist jeder Ring  $\cap$ -stabil. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung der Implikation von Lemma 1.5.5 im allgemeinen falsch ist:

**1.5.6 Beispiel.** Sei  $\Omega := \{1, 2, 3\}$  und  $\mathcal{H} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$ . Dann ist  $\mathcal{H}$  ein Halbring, aber kein Ring.

Der Durchschnitt einer nichtleeren Familie von Ringen auf  $\Omega$  ist ein Ring; vgl. Aufgabe 1.5.F. Daher gibt es zu jedem Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$  einen kleinsten Ring

$$\varrho(\mathcal{E})$$

auf  $\Omega$ , der  $\mathcal{E}$  enthält. Dieser Ring wird als der *von  $\mathcal{E}$  erzeugte Ring* bezeichnet und das Mengensystem  $\mathcal{E}$  wird als *Erzeuger* des Ringes  $\varrho(\mathcal{E})$  bezeichnet. Der folgende Satz gibt eine explizite Darstellung des von einem Halbring erzeugten Ringes:

**1.5.7 Satz (Der von einem Halbring erzeugte Ring).** *Sei  $\mathcal{H} \subseteq 2^\Omega$  ein Halbring und sei*

$$\mathcal{R} := \left\{ A \in 2^\Omega \mid A = \sum_{i \in I} H_i \text{ mit } I \text{ endlich und } \{H_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H} \text{ disjunkt} \right\}$$

*Dann gilt  $\mathcal{R} = \varrho(\mathcal{H})$ .*

*Beweis.* Es gilt  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \varrho(\mathcal{H})$ . Daher genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{R}$  ein Ring ist.

- (i) Wegen  $\emptyset \in \mathcal{H}$  und  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$  gilt  $\emptyset \in \mathcal{R}$ .
- (ii) Sei  $A, B \in \mathcal{R}$ . Dann gibt es endliche disjunkte Familien  $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}$  und  $\{H_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{H}$  mit  $A = \sum_{i \in I} G_i$  und  $B = \sum_{j \in J} H_j$ , und es gilt

$$A \setminus B = \left( \sum_{i \in I} G_i \right) \setminus \left( \sum_{j \in J} H_j \right)$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I} G_i \cap \bigcap_{j \in J} \overline{H_j} \\
&= \sum_{i \in I} \bigcap_{j \in J} G_i \cap \overline{H_j} \\
&= \sum_{i \in I} \bigcap_{j \in J} G_i \setminus H_j
\end{aligned}$$

Da  $\mathcal{H}$  ein Halbring ist, gilt  $G_i \setminus H_j \in \mathcal{R}$ . Da  $\mathcal{H}$   $\cap$ -stabil ist, ist auch  $\mathcal{R}$   $\cap$ -stabil und es gilt  $\bigcap_{j \in J} G_i \setminus H_j \in \mathcal{R}$ . Da die Familie  $\{G_i\}_{i \in I}$  disjunkt ist, gilt sogar  $A \setminus B = \sum_{i \in I} \bigcap_{j \in J} G_i \setminus H_j \in \mathcal{R}$ .

- (iii) Sei  $A, B \in \mathcal{R}$ . Da  $\mathcal{R}$   $\cap$ -stabil ist, gilt  $A \cap B \in \mathcal{R}$ , und aus (ii) folgt  $A \setminus B \in \mathcal{R}$  und  $B \setminus A \in \mathcal{R}$ . Wegen  $A \cup B = (A \setminus B) + (A \cap B) + (B \setminus A)$  gilt dann auch  $A \cup B \in \mathcal{R}$ .

Daher ist  $\mathcal{R}$  ein Ring.  $\square$

## Aufgaben

- 1.5.A** Sei  $\mathcal{H} \subseteq 2^\Omega$  ein Halbring und sei  $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}$  eine endliche Familie. Dann gibt es eine endliche disjunkte Familie  $\{C_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{H}$  und eine Familie  $\{J_i\}_{i \in I} \subseteq 2^J$  mit  $\bigcup_{i \in I} J_i = J$  derart, dass

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \sum_{j \in J} C_j$$

und für alle  $i \in I$

$$A_i = \sum_{j \in J_i} C_j$$

gilt.

- 1.5.B** Ist der Durchschnitt einer nichtleeren Familie von Halbringen auf  $\Omega$  ein Halbring?
- 1.5.C** Jedes offene Intervall des  $\mathbb{R}^n$  ist eine offene Menge bezüglich der natürlichen Topologie, und jedes abgeschlossene Intervall des  $\mathbb{R}^n$  ist eine abgeschlossene Menge bezüglich der natürlichen Topologie.
- 1.5.D** **Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ :** Sei

$$\mathcal{J}(\mathbb{Q}^n) := \left\{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}] \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}^n \right\}$$

Dann gilt  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}(\mathbb{Q}^n))$ .

- 1.5.E** Jeder Ring ist ein Verband.
- 1.5.F** Der Durchschnitt einer nichtleeren Familie von Ringen auf  $\Omega$  ist ein Ring.
- 1.5.G** Für ein Mengensystem  $\mathcal{R} \subseteq 2^\Omega$  sind folgende Aussagen äquivalent:
- (a)  $\mathcal{R}$  ist ein Ring.
  - (b)  $\mathcal{R}$  ist ein  $\cup$ -stabiler Halbring.

**1.5.H Ideale:** Sei  $\mathcal{R} \subseteq 2^\Omega$  ein Ring. Ein Mengensystem  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$  heißt *Ideal* in  $\mathcal{R}$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
- (ii) Für alle  $A \in \mathcal{I}$  und alle  $B \in \mathcal{R}$  mit  $B \subseteq A$  gilt  $B \in \mathcal{I}$ .
- (iii) Für alle  $A, B \in \mathcal{I}$  gilt  $A \cup B \in \mathcal{I}$ .

Jedes Ideal in einem Ring ist ein Ring.

**1.5.I Algebren:** Ein Mengensystem  $\mathcal{R} \subseteq 2^\Omega$  heißt *Algebra* auf  $\Omega$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\Omega \in \mathcal{R}$ .
- (ii) Für alle  $A \in \mathcal{R}$  gilt  $\bar{A} \in \mathcal{R}$ .
- (iii) Für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \cup B \in \mathcal{R}$ .

Jede  $\sigma$ -Algebra ist eine Algebra, und jede Algebra ist ein Ring.

**1.5.J  $\sigma$ -Ringe:** Ein Mengensystem  $\mathcal{R} \subseteq 2^\Omega$  heißt  *$\sigma$ -Ring* auf  $\Omega$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\emptyset \in \mathcal{R}$ .
- (ii) Für alle  $A, B \in \mathcal{R}$  gilt  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ .
- (iii) Für jede Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$  gilt  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ .

Jede  $\sigma$ -Algebra ist ein  $\sigma$ -Ring, und jeder  $\sigma$ -Ring ist ein Ring.

**1.5.K  $\sigma$ -Ideale:** Sei  $\mathcal{R} \subseteq 2^\Omega$  ein  $\sigma$ -Ring. Ein Mengensystem  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$  heißt  *$\sigma$ -Ideal* in  $\mathcal{R}$ , wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Es gilt  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
- (ii) Für alle  $A \in \mathcal{I}$  und für alle  $B \in \mathcal{R}$  mit  $B \subseteq A$  gilt  $B \in \mathcal{I}$ .
- (iii) Für jede Folge  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$  gilt  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$ .

Jedes  $\sigma$ -Ideal in einem  $\sigma$ -Ring ist ein  $\sigma$ -Ring.

**1.5.L** Stellen Sie die Inklusionen zwischen den in diesem Kapitel betrachteten Klassen von Mengensystemen in einem Diagramm dar.

**1.5.M Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}$ :** Sei

$$\mathcal{E} := \left\{ (-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Dann gilt  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$ .

**1.5.N Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\bar{\mathbb{R}}$ :** Sei

$$\bar{\mathcal{E}} := \left\{ [-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Dann gilt  $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\bar{\mathcal{E}})$ .



<http://www.springer.com/978-3-642-21025-9>

Maß und Wahrscheinlichkeit

Schmidt, K.D.

2011, XII, 484 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-21025-9