

Kapitel 1

Zur Geschichte der Darstellungstheorie

Die Darstellungstheorie von Gruppen hat ihre Wurzeln in vielen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Sie wurde berührt und/oder (weiter-)entwickelt zur Beantwortung von Fragen und Problemen der Lieschen Transformationsgruppen, der Invariantentheorie, der Theorie der Differentialgleichungen, der Geometrie, der Arithmetik oder der Algebra – dem Bereich, dem sie heute zugeordnet wird –, aber auch in der Auseinandersetzung mit Grundlagenfragen der theoretischen Physik. In allen diesen Gebieten wurden Erkenntnisse gewonnen, welche sich für die Darstellungstheorie als fundamental herausstellten. Dies geschah nicht selten beiläufig, da das eigentliche Forschungsinteresse in eine andere Richtung ging. Daher können diese Forschungsergebnisse nicht ohne weiteres der Geschichte der Darstellungstheorie zugerechnet werden. Retrospektiv betrachtet, konstituieren sie vielmehr in diesen Fällen ihre Vorgeschichte, denn die Ergebnisse waren noch nicht das Produkt einer systematischen, an darstellungstheoretischen Fragestellungen orientierten Forschung. Die eigentliche Geschichte der Darstellungstheorie beginnt erst mit den Arbeiten von Frobenius und Burnside um die Jahrhundertwende vom 19. zum 20. Jahrhundert. Frobenius und Burnside entwickelten zunächst unabhängig voneinander fundamentale Konzepte der Darstellungstheorie für endliche Gruppen. Von einer Darstellungstheorie für Liegruppen kann man im engeren Sinne erst seit Weyls Arbeiten von 1925/26 sprechen. Weyl hob seinen integrativen Ansatz explizit hervor: „Hier sollen alle diese Fäden zu einem einheitlichen Ganzen verwoben werden.“²⁶

Die Vielfalt der Gebiete, in denen darstellungstheoretische Einsichten formuliert wurden, hatte zur Folge, dass die beteiligten Wissenschaftler die Beiträge der anderen oft gar nicht oder erst spät wahrnahmen. Daher wurden nicht selten Ergebnisse, die aus heutiger Sicht äquivalent sind, mehrfach formuliert und zwischen solchen, die aus heutiger Sicht zusammengehören, wurden selten oder erst spät Bezüge hergestellt. Diese Ignoranz gegenüber anderen Teilgebieten der Mathematik als den eigenen Forschungsgebieten stand nicht nur im Zusammenhang mit dem enormen

²⁶ Weyl (1925, S. 275). Die „Fäden“ verweisen auf Arbeiten von Frobenius, Schur, Young, Schouten und Cartan (s. u.).

Wachstum mathematischen Wissens, der Institutionalisierung der sich herausbildenden Disziplin der Mathematik und ihrer Ausdifferenzierung in viele Teildisziplinen sowie mit ihrer Professionalisierung – alles Entwicklungen, die während der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begannen –, sondern auch mit spezifischen lokalen Forschungsmilieus. Verschiedene mathematische Stile, Schulen und Herangehensweisen verstärkten in manchen Fällen das Ausblenden ganzer Teilgebiete. Beispielsweise beschäftigte sich Frobenius, der von der Berliner Mathematik der strengen Begründung à la Weierstraß und Kronecker geprägt worden war und ein äußerst vielseitiger Mathematiker war, nicht mit der in seinen Augen sicher als ungenügend fundiert erscheinenden Theorie von Lie. Und damit nahm Frobenius auch nicht É. Cartans an die Liesche Schule anknüpfenden strukturtheroretischen Ergebnisse zu kontinuierlichen Gruppen zur Kenntnis, welche ganz im Sinne seiner Forschungsrichtung waren. Diese separaten Entwicklungen spiegeln sich in der Gliederung des Abschnittes in einen zur Entwicklung der Darstellungstheorie von Gruppen endlicher Ordnung (1.1) und einen zu der von Liealgebren und Liegruppen (1.2) wider.

Eine umfassende Geschichte der Darstellungstheorie inklusive ihrer Vorgeschichte zu erarbeiten, ist allein schon aufgrund der Diversität der Forschungsgebiete, welche bei ihrer Herausbildung eine Rolle spielten, eine äußerst anspruchsvolle Aufgabe. Thomas Hawkins zeichnet in seiner Monographie *The emergence of the theory of Lie groups. An essay in the history of mathematics 1869–1926* ein detailreiches Bild der Geschichte der Liegruppen als Ergebnis seiner jahrezehntelangen Forschungen.²⁷ Dazu gehört ganz wesentlich die Vorgeschichte und Geschichte der Darstellungstheorie vor allem in Bezug auf Liegruppen. Hawkins beschreibt, wie zwei disparate Entwicklungslinien – die Darstellungstheorie endlicher Gruppen von Frobenius und Lies Theorie der Transformationsgruppen – letztlich in Weyls bahnbrechenden Arbeiten zur Darstellung von Liealgebren 1925/26 zusammenfließen. Hawkins berücksichtigt und analysiert dabei die verschiedenen Entstehungskontexte, wobei der Fokus auf der Entwicklung der Transformationsgruppen liegt. Neben Hawkins umfassender Monographie sei auch auf das Buch von Charles W. Curtis *Pioneers of representation theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer* hingewiesen. Curtis fokussiert stärker auf den Kontext der Gruppen endlicher Ordnung, in welchem die Darstellungstheorie im heutigen Sinne entstand. Die untersuchte zeitliche Spanne reicht bis in die 1940er Jahre. Curtis stellt dabei häufig Bezüge zur jüngeren Forschung her und bezieht die Geschichte der polynomialen und modularen Darstellung mit ein. Seine Darstellung ist stärker mathematisch orientiert.²⁸

Im Folgenden wird ein kurzer Abriss der Entwicklung der Darstellungstheorie bis Ende der 1920er Jahre gegeben, der sich im Wesentlichen auf die bereits erwähnte Sekundärliteratur stützt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf solchen Entwicklungen, Konstruktionen und Konzepten, welche für die ersten Anwendungen der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik von Bedeutung waren, vgl. Kap. 3, oder/und für van der Waerdens Arbeiten, vgl. Teile II und III. Das sind u. a. die Konzepte der Darstellung einer Gruppe sowie der (vollständigen) Zerleg-

²⁷ Hawkins (2000). Vgl. Hawkins (1971, 1972, 1974, 1982, 1998, 1999).

²⁸ Curtis (1999). Weitere Arbeiten in dieser Richtung sind: Lam (1998a,b); Slodowy (1999); Borel (2001).

barkeit einer Darstellung in irreduzible, das Schursche Lemma, die Konstruktion der (irreduziblen) Darstellungen der Permutationsgruppe S_n , der Drehungsgruppe $SO_3(=SO_3(\mathbb{R}))$ und der $SL_2(\mathbb{R})$, die Konstruktion von Spindarstellungen, Weyls Beweis der vollen Reduzibilität der endlich-dimensionalen Darstellung von komplexen halbeinfachen Liegruppen und der Satz von Peter und Weyl.²⁹ Die vielfältigen Entstehungskontexte werden nur angedeutet, da sie in der Sekundärliteratur ausführlich dargestellt sind. Diese Verkürzung hat leider zur Folge, dass nur in wenigen Fällen die Notation der Originalarbeiten aufgegriffen sowie ausführlich auf die zugrundeliegenden zeitgenössischen Konzepte eingegangen werden kann. Auch dafür sei auf die Sekundärliteratur verwiesen.³⁰ An dieser Stelle sei ebenfalls der physikalische Hintergrund von einigen darstellungstheoretischen Arbeiten Cartans und Weyls hervorgehoben. So ist bereits die frühe Entwicklung der Darstellungstheorie mit physikalischen Fragestellungen eng verknüpft – eine Verbindung, die bis heute immer wieder auftaucht und für die Darstellungstheorie durchaus fruchtbringend war und ist.

1.1 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Die grundlegenden Konzepte der Darstellungstheorie von Gruppen, wie vollständige Reduzibilität von Darstellungen oder Charaktere von Darstellungen, wurden von Georg Frobenius Ende der 1890er Jahren in Berlin entwickelt. Dies geschah nur in Bezug auf endliche Gruppen und im Kontext von arithmetischen Fragestellungen. Vorausgegangen war dem die Ausarbeitung einer Theorie der Charaktere. Um die Jahrhundertwende übertrugen William Burnside und Issai Schur Frobenius' Ansatz in andere mathematische Zusammenhänge der Invariantentheorie und erweiterten ihn um neue Konzepte und Erkenntnisse. 1905 entwickelte Schur die Darstellungstheorie systematisch ausschließlich im Rahmen der linearen Algebra. Damit lag erstmals eine umfassende, relativ einfache und eigenständige, d. h. von den Zusammenhängen zu ihren Entstehungskontexten befreite, Präsentation der Darstellungstheorie vor. Während Frobenius kontinuierliche Gruppen nicht in seine Untersuchungen einschloss, erkundeten Burnside und Schur durchaus einige Zusammenhänge zwischen den Darstellungen endlicher und kontinuierlicher Gruppen. Beide interessierten sich zunächst jedoch nicht für den Aufbau einer Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen, vielmehr sahen sie darin eher eine Anwendungsmöglich-

²⁹ Die Bezeichnung der Gruppen folgt hier der Konvention, dass eine abstrakte Gruppe beispielsweise die Gruppe der Drehungen im dreidimensionalen reellen Raum durch $SO_3(\mathbb{R})$ (bzw. SO_3) bezeichnet wird, die zugehörige Matrizenengruppe durch $SO(3, \mathbb{R})$ und die zugehörige Liealgebra durch Kleinbuchstaben.

³⁰ Hawkins (2000) erfasst die diversen konzeptionellen Kontexte in ihrem historischen Zusammenhang und führt auch die zeitgenössische Notation ein. Allerdings wechselt er nicht selten in eine dem heutigen Leser geläufige Darstellung und nutzt heutige Konzepte. Dies fördert meines Erachtens die Verständlichkeit. Durch eine entsprechende Kommentierung versucht Hawkins, den Lesenden vom Ziehen voreiliger Schlüsse abzuhalten.

keit der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, welche deren Leistungsfähigkeit zeigen sollte.

1.1.1 Frobenius

Frobenius war ein vielseitiger Mathematiker. Er studierte in Berlin bei Kronecker und Weierstraß und wurde 1870 dort promoviert. Nach einer Professur am Polytechnikum Zürich, dem Vorläufer der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, wurde er 1892 zum Nachfolger von Kronecker in Berlin berufen. Vier Jahre später veranlasste ihn ein Problem zur Faktorisierung von „Gruppendeterminanten“, das Richard Dedekind ihm gestellt hatte, dazu, eine Theorie von Gruppencharakteren und Darstellungen zu kreieren.³¹ Die Gruppendeterminante Θ ist ein Polynom, dessen Zerlegung in (irreduzible) Faktoren in gewisser Weise die Struktur der betreffenden Gruppe wiedergibt. Frobenius untersuchte diesen Zusammenhang. Er verallgemeinerte den Dedekindschen Begriff von Gruppencharakter. Er zeigte, dass die von ihm für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ (von endlicher Ordnung) definierten Gruppencharaktere $\psi^{(\lambda)}$ auf den Nebenklassen von $\mathfrak{G}$ konstant sind und die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{r \in \mathfrak{G}} \psi^{(\lambda)}(r) \overline{\psi^{(\mu)}(r)} = g \cdot \delta_{\lambda\mu}$$

erfüllen, wobei g die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\delta_{\lambda\mu}$ das Kroneckerdelta ist. Er wies nach, dass die Gruppendeterminante durch die Gruppencharaktere vollständig bestimmt war, und nannte letztere deshalb schlicht Charaktere. Er zeigte, dass die Anzahl der verschiedenen Charaktere gleich der Anzahl der Nebenklassen ist. Er bezeichnete $f_{\psi^{(\lambda)}} := \psi^{(\lambda)}(1)$, wobei 1 die Identität der Gruppe ist, als „Grad“ des Charakters $\psi^{(\lambda)}$ und bewies

$$g = \sum_{\lambda} f_{\psi^{(\lambda)}}^2$$

Mit diesen Mitteln berechnete er Charaktertafeln einiger Familien von Gruppen.³²

In sich anschließenden Arbeiten stellte er seine Theorie der Charaktere in den Rahmen von Matrizen und betonte die Bedeutung dieses Schritts.³³ Er führte den Begriff „Darstellung“ einer endlichen Gruppe durch Matrizen ein und entwickelte grundlegende Konzepte der Darstellungstheorie, wie beispielsweise den Grad einer Darstellung oder die Äquivalenz zweier Darstellungen. Er zeigte, wie Darstellungen und Charaktere zusammenhängen. Die Charaktere sind die Spur von „primitiven“ (d. h. irreduziblen) Darstellungen

$$\psi^{(\lambda)}(r) = \text{Spur} R = \sum r_{ii},$$

³¹ Frobenius knüpfte an Arbeiten von Gauß, Dirichlet und Dedekind zu „Charakteren“ von binären quadratischen Formen an.

³² Frobenius (1896a,b). Vgl. Hawkins (1971, 1974); Curtis (1999).

³³ Frobenius (1897, 1898, 1899).

wobei $R = (r_{ij})$ die Darstellungsmatrix von $r \in \mathfrak{G}$ in der durch den Charakter $\psi^{(\lambda)}$ bestimmten Darstellung ist. Die Zuordnung von Charakter und irreduzibler Darstellung konstruierte Frobenius über die heute als reguläre Darstellung bezeichnete Darstellung bzw. deren Zerlegung.³⁴ Er zeigte, dass zwei irreduzible Darstellungen genau dann äquivalent sind, wenn ihre Charaktere bzw. Spuren gleich sind.

Er bewies den **Satz über die reguläre Darstellung**: Die Anzahl von inäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist gleich der Anzahl der Nebenklassen von $\mathfrak{G}$. Seien $\mu_1, \dots, \mu_k$ die irreduziblen Darstellungen der Gruppe und f_λ der Grad von μ_λ , dann tritt μ_λ genau f_λ -mal in der vollständigen Zerlegung der regulären Darstellung auf.

Damit hatte Frobenius 1897 gezeigt, dass die reguläre Darstellung in irreduzible Darstellungen zerfällt. Dies war ein Vorläufer von dem 1899 von Heinrich Maschke bewiesenen Satz, der besagt, dass jede reduzible Darstellung einer Gruppe endlicher Ordnung vollständig reduzibel ist.³⁵ In Verbindung mit dem Konzept der irreduziblen Darstellung ergab sich daraus das **Theorem der vollständigen Zerlegbarkeit**, also dass für jede Darstellung $\phi : \mathfrak{G} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ einer Gruppe endlicher Ordnung eine Matrix M existiert, so dass

$$M\phi(r)M^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1(r) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2(r) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_m(r) \end{pmatrix}$$

ist, wobei μ_i irreduzible Darstellungen sind. Burnside formulierte dies 1902 explizit (s. u.).

Ein ähnlicher Satz für hyperkomplexe Zahlen (Algebren) war auch von dem estländischen Mathematiker Theodor Molien, der u. a. bei Felix Klein studiert hatte, aufgestellt und bewiesen worden.³⁶ Durch Eduard Study erfuhr Frobenius von Moliens Arbeiten kurz vor der Publikation seines Artikels (Frobenius, 1897). Beim weiteren Ausbau seiner Theorie der Darstellungen wandte er sich ebenfalls Algebren zu. Er definierte eine assoziative Algebra über $\mathbb{C}$, deren Basis die Gruppenelemente sind und welche heute als Gruppenalgebra bezeichnet wird. Er erwähnte in dieser Arbeit von 1899 die Ergebnisse von Molien.³⁷

Frobenius studierte darüber hinaus die Relation zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. Er konstruierte die heute als induzierte Darstellung bekannte Darstellung und bewies den heute nach ihm benannten Reziprozitätssatz.

³⁴ Der Ausdruck reguläre Darstellung wurde von Frobenius nicht gebraucht.

³⁵ Maschke (1899). Maschke hatte bei F. Klein studiert und lehrte seit Anfang der 1890er Jahre in Chicago bei E. H. Moore.

³⁶ Molien (1893, 1897).

³⁷ Zur Rolle von Algebren, sowie von Maschke und Molien bei der Entstehung der Darstellungstheorie vgl. Hawkins (1972).

Schließlich gelang es Frobenius, unter Zuhilfenahme kombinatorischer Methoden das schwierige Problem der Berechnung der Charaktere der Gruppe der Permutationen S_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zu lösen.³⁸ Dies diente seinem Doktoranden Schur als Grundlage, um in seiner Doktorarbeit die polynomialen Darstellungen von $GL_n(\mathbb{C})$ zu klassifizieren (s. u.). In einer weiteren Arbeit vereinfachte Frobenius die Berechnung der Charaktere mit Hilfe von Young-Tableaus.³⁹ Frobenius erkannte, dass man zur vollständigen Zerlegung einer Darstellung nicht mit rationalen Zahlen auskam. Deshalb führte er zu jedem Charakter $\psi^{(\lambda)}(r)$ eine primitive charakteristische Einheit $\varepsilon^{(\lambda)}(r)$ ein. Damit ließen sich Charaktere als Summe von primitiven charakteristischen Einheiten ausdrücken. Die vollständige Ausreduktion der regulären Darstellung konnte dann mit Hilfe einer Matrix geschehen, deren Einträge dem Körper der rationalen Zahlen, an den die kg primitiven charakteristischen Einheiten adjungiert werden (k die Anzahl der Nebenklassen bzw. der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen; g die Gruppenordnung), entnommen waren. Zur Berechnung der primitiven charakteristischen Einheiten der S_n (und damit auch zur Berechnung der Charaktere) entwickelte Frobenius sehr einfache Formeln, welche auf einem invariantentheoretischen Ansatz (Young-Tableaus) des britischen Mathematikers Alfred Young beruhten. Dabei dienten die Zerlegungen von n in eine Summe von natürlichen Zahlen α_i

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \quad \text{mit } \alpha_i \geq \alpha_{i+1}$$

zur Charakterisierung der Nebenklassen und damit auch der Charaktere bzw. der irreduziblen Darstellungen von S_n .⁴⁰ Weyl übertrug mehr als 20 Jahre später diese Konstruktion auf Liegruppen. Diese Erweiterung war, wie Hawkins überzeugend argumentiert, damals außerhalb der Forschungsfragen von Frobenius.

1.1.2 Burnside

Etwa zur gleichen Zeit wie Frobenius forschte der britische Mathematiker William Burnside zu Gruppen endlicher Ordnung. Burnside hatte in Cambridge studiert und lehrte seit 1885 als Professor am Royal Naval College in Greenwich. Im Anschluss an Arbeiten zur Hydrodynamik und elliptischen Funktionen wandte er sich der Gruppentheorie zu, wobei er auch kontinuierliche Gruppen betrachtete. 1897 publizierte er die erste englischsprachige Monographie über die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung.⁴¹ Darin äußerte er sich noch zurückhaltend über den Nutzen von Matrizen. Burnside kannte die wichtigsten Arbeiten von Lie, Study, Killing und É. Cartan zur Lieschen Theorie der Transformationsgruppen und sah eine Möglichkeit, Frobenius' Arbeiten zu Gruppen endlicher Ordnung dort einzubringen. In drei

³⁸ Frobenius (1900). Vgl. Curtis (1999, Abschn. II.5).

³⁹ Frobenius (1903).

⁴⁰ Frobenius (1903, §10). Vgl. Hawkins (2000, S. 381 f.).

⁴¹ Burnside (1897).

Arbeiten erkundete er 1898 den Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Gruppen, deren infinitesimalen Gruppen und den Gruppen endlicher Ordnung.⁴² Es gelang ihm, zu einer endlichen Gruppe G eine Liegruppe zu definieren, deren Liealgebra die mit der Lieklammer $[a, b] = ab - ba$ versehene Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ ist. Er bewies einige der von Frobenius aufgestellten Sätze nochmals in seinem Rahmen. Burnside und Frobenius verfolgten genauestens die Publikationen des anderen.

In weiteren Arbeiten nutzte Burnside die Darstellungstheorie zum Studium der Struktur endlicher Gruppen. Er entwickelte die Theorie der Charaktere erneut und wählte dabei dezidiert einen anderen Zugang als Frobenius.⁴³ Dieser beruhte auf Ergebnissen aus der Invariantentheorie zur Klassifikation invarianter hermitescher Formen. So entstand die erste systematische Präsentation der Darstellungstheorie endlicher Gruppen – Burnside sah seine Präsentation als „logical presentment“, welche „a self-contained point of view“ einnimmt.⁴⁴ Beispielsweise definierte Burnside den Charakter einer Darstellung einer endlichen Gruppe G in etwa so, wie es heute geläufig ist, als komplexwertige Funktion auf G , deren Wert bei $r \in G$ die Spur der darstellenden Matrix R von r ist. Außerdem führte er das Konzept der irreduziblen Darstellung ein:

„A group of finite order g is said to be *represented* as an *irreducible* group of linear substitutions on m variables when g is simply or multiply isomorphic with the group or linear substitutions, and when it is impossible to choose $m' (< m)$ linear functions of the variables which are transformed among themselves by every operation of the group.“⁴⁵

Wie sich herausstellte, war diese Definition zu Frobenius' Konzept der primitiven Darstellung äquivalent. Burnside prägte auch den Begriff vollständig reduzibel und bewies, dass jede Darstellung einer endlichen Gruppe entweder irreduzibel oder vollständig reduzibel ist. Dabei nutzte er u. a. Maschkes Arbeit. Außerdem bewies er einen im Vergleich zu Frobenius leicht erweiterten Satz über die reguläre Darstellung endlicher Gruppen direkt, ohne Rückgriff auf die Theorie der Charaktere. Um die Orthogonalitätsrelation zu beweisen, führte Burnside die „inverse“ (d. i. kontragrediente) Darstellung ein, die aus einer gegebenen Darstellung entsteht, wenn die Matricelemente komplex konjugiert werden. Schließlich führte er die „Komposition“ von zwei Darstellungen ein, welche von Frobenius für Charaktere behandelt worden war. Diese Konstruktion ist heute als Kroneckerprodukt oder Tensorprodukt zweier Darstellungen bekannt. Der Grad des Kroneckerprodukts zweier Darstellungen ist gerade das Produkt der Grade der beiden Darstellungen, ebenso verhält es sich mit den Charakteren.

Das heute unter dem Namen **Satz von Burnside** bekannte und mit irreduziblen Darstellung von Algebren in Zusammenhang gebrachte Resultat wurde von Burn-

⁴² Burnside (1898a,b,c). Vgl. Hawkins (1972, Kap. 4) bzw. Curtis (1999, Abschn. III.3).

⁴³ Burnside (1900, 1904a,b, 1905).

⁴⁴ Burnside (1904a, S. 117).

⁴⁵ Burnside (1900, S. 147, Hervorhebungen im Original). Curtis (1999, S. 105) betont, dass dies heute der Definition einer unzerlegbaren Darstellung entspricht. Eine Darstellung heißt unzerlegbar, falls sie sich nicht als direkte Summe nichttrivialer Darstellungen derselben Gruppe schreiben lässt. Jede irreduzible Darstellung ist also unzerlegbar.

side zur Charakterisierung irreduzibler Darstellungen von endlichen und kontinuierlichen Gruppen benutzt: Sei $a \longrightarrow A$ eine Darstellung einer Gruppe G vom Grad n . Wenn die Darstellung irreduzibel ist, dann gibt es eine Menge von n^2 linear unabhängigen Matrizen $A_1, \dots, A_{n^2}$, die den Gruppenelementen entsprechen. Wenn es umgekehrt eine Menge von n^2 linear unabhängigen Matrizen gibt, dann ist die Darstellung irreduzibel.⁴⁶

In der zweiten, stark überarbeiteten und erweiterten Ausgabe seiner *Theory of groups of finite order* von 1911 stellte Burnside die Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung ausführlich dar und integrierte die wichtigsten Ergebnisse der jüngsten Forschungen zu diesem Gebiet. Diese Monographie eröffnete den englischsprachigen Mathematikern einen Einstieg in diese Forschungsrichtung, die allerdings in Großbritannien kaum aufgegriffen wurde. Für Physiker, die die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik behandelten, diente vielfach das 1923 in der Reihe „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete“ im Springer-Verlag erschienene Lehrbuch *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* von Andreas Speiser als Referenzwerk.⁴⁷ Nach einer Einführung in die Gruppen- und Darstellungstheorie behandelte Speiser nicht nur Anwendungen der Gruppentheorie innerhalb der Mathematik, sondern auch auf die Kristallographie. Durch die Beschränkung auf Gruppen endlicher Ordnung war die Abhandlung für die Verhältnisse in der Quantenmechanik jedoch nicht ausreichend.

1.1.3 Schur

Issai Schur, der seit 1894 bei Frobenius in Berlin studierte, stellte in seinen ersten Arbeiten Anfang des 20. Jahrhunderts die Darstellungstheorie in den Rahmen der sich entwickelnden linearen Algebra. Er führte die heute als polynomiale Darstellung bekannte Art der Darstellung ein – unabhängig und in Unkenntnis der Arbeit des belgischen Mathematikers Jacques Deruyts, der dies 1892 im Rahmen der klassischen Theorie algebraischer Formen geleistet hatte.⁴⁸

Im Rahmen seiner Dissertation behandelte Schur die klassische Invariantentheorie als ein Problem der Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$.⁴⁹ Damit knüpfte er an Studien von Adolf Hurwitz von 1894 an.⁵⁰ Hurwitz hatte gezeigt, dass die klassische Invariantentheorie homogene Polynome untersuchte, welche durch spezielle Darstellungen von $GL(n, \mathbb{C})$ invariant gelassen werden – Darstellungen von $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{C})$

⁴⁶ Burnside (1905, S. 433).

⁴⁷ Speiser (1923).

⁴⁸ Zur Entwicklung der polynomialen Darstellung, vgl. Curtis (1999, Kap. V). Das Gebiet der polynomialen Darstellung wurde von J. A. Green (1980) erneut aufgegriffen, der auch den Zusammenhang von Deruyts Arbeiten mit der Darstellungstheorie herausarbeitete.

⁴⁹ Schur (1901).

⁵⁰ Vgl. Hawkins (2000, Abschn. 10.2).

durch Matrizen $T(A) \in GL(N, \mathbb{C})$, deren Elemente Polynome in a_{ij} sind.⁵¹ Schur stellte für diese Darstellungen die gleichen Fragen wie Frobenius: nach der Möglichkeit der Bestimmung aller solcher Darstellungen und der vollständigen Zerlegung dieser Darstellungen, nach der Spur von irreduziblen Darstellungen und nach ihrem Grad. Er zeigte zunächst, dass man die Untersuchung auf solche Darstellungen beschränken kann, deren Matrizenelemente durch homogene Polynome von gleichem Homogenitätsgrad gegeben werden und deren Darstellungsmatrizen invertierbar sind. Es gelang Schur, einen engen Zusammenhang zwischen den homogenen polynomialen Darstellungen T von $GL(n, \mathbb{C})$ (mit Homogenitätsgrad m) und den Darstellungen τ der symmetrischen Gruppe S_m herzustellen: zu T konstruierte er eine Darstellung τ . Er bewies, dass jede homogene polynomiale Darstellung der $GL(n, \mathbb{C})$ vom Grad $m < n$ vollständig reduzibel ist und dass sie genau dann irreduzibel ist, wenn τ irreduzibel ist. Er zeigte, dass zwei Darstellungen T_i genau dann äquivalent sind, wenn die zu ihnen korrespondierenden Darstellungen τ_i äquivalent sind. Aus diesen Ergebnissen folgerte er, dass die Anzahl der verschiedenen irreduziblen polynomialen Darstellungen vom Grad m gleich der Anzahl der Partitionen von m ist. Außerdem gab er eine Formel für die Charaktere der irreduziblen polynomialen Darstellungen an.

Durch die Korrespondenz zwischen homogenen polynomialen Darstellungen von der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ und Darstellungen von der Permutationsgruppe S_m gelang es Schur, die bekannten Ergebnisse von Frobenius über die Darstellungen der Permutationsgruppe auf die polynomialen Darstellungen von $GL(n, \mathbb{C})$ zu übertragen. Frobenius war voll des Lobes für Schurs Dissertation, in der Schur demonstrierte, wie Frobenius' Theorie zur Lösung eines wichtigen Problems, der Bestimmung von invarianten Formen, benutzt werden konnte. Dass die Arbeit als ein erster Schritt zur Ausdehnung der Darstellungstheorie von Gruppen endlicher Ordnung auf $GL(n, \mathbb{C})$ angesehen werden kann, schien zu dieser Zeit weder für Frobenius noch für Schur eine Rolle zu spielen.

Für seine nur ein Jahr später eingereichte Habilitation löste Schur ein Problem von F. Klein und seiner Schule, nämlich die Bestimmung der endlichen Gruppen von projektiven Transformationen, die isomorph zu einer bestimmten Gruppe sind. Schur führte dieses in Kleins geometrischer Forschung zentrale Problem auf ein allgemeineres, nämlich das der Bestimmung von projektiven Darstellungen einer endlichen Gruppe, zurück und löste es.⁵² Eine projektive Darstellung ist eine Darstellung einer endlichen Gruppe G , deren Darstellungsmatrizen $A(p)$ die Relation

$$A(p)A(q) = a_{p,q}A(pq),$$

erfüllt, wobei $p, q \in G$ und $a_{p,q} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ist $a_{p,q} = 1$ für alle Paare von Gruppenelementen p, q , dann erhält man die gewöhnliche Darstellung.

⁵¹ Schur nannte $T(A)$ eine invariante Form oder Matrix von A .

⁵² Schur (1904, 1907, 1911). Schur gebrauchte anstelle des heutigen Ausdrucks der projektiven Darstellung verschiedene Ausdrücke, beispielsweise den der Darstellung einer Gruppe durch Kollineationen in $\mathbb{P}^{n-1}$ oder den der zum Zahlensystem $r_{p,q}$ gehörenden Darstellung.

In einer weiteren Arbeit mit dem Titel *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere* entwickelte Schur die Darstellungstheorie aus elementaren Konzepten der linearen Algebra:

„Die vorliegende Arbeit enthält eine durchaus elementare Einführung in die von Hrn. Frobenius begründete Theorie der Gruppencharaktere, die auch als die Lehre von der Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare homogene Substitutionen bezeichnet werden kann.

Eine elementare Begründung dieser Theorie ist zwar in neuerer Zeit bereits von Hrn. Burnside gegeben worden. Hr. Burnside macht jedoch noch von einem dem Gegenstand im Grunde fernliegenden Hilfsmittel, nämlich dem Begriff der *Hermiteischen* Formen, Gebrauch. Ich [Schur] halte es daher nicht für überflüssig, eine neue Darstellung der *Frobeniusschen* Theorie mitzuteilen, die mit noch einfacheren Hilfsmitteln operiert.

Zum Verständnis des Folgenden ist aus der Theorie der linearen Substitutionen im Wesentlichen nur die Kenntnis der Anfangsgründe des Kalküls der Matrizen erforderlich. [...]⁵³

Damit gelang es ihm, einen einfachen, direkten Zugang zu diesem Gebiet zu präsentieren, der weder Kenntnisse der Klassifikation invarianter hermitescher Formen (Burnside) noch der Faktorisierung von Gruppendeterminanten (Frobenius) voraussetzte.

Ausgangspunkt seiner Darstellung war ein Lemma, das heute als **Schurs Lemma** bekannt ist: Seien zwei irreduzible Darstellungen A und B einer endlichen Gruppe G mit Grad f bzw. f' gegeben und es existiere eine konstante $f \times f'$ Matrix P mit

$$A(s)P = PB(s) \quad \text{für alle } s \in G.$$

Dann ist entweder $P = \mathbf{0}$ oder $f = f'$ und P ist invertierbar, so dass die beiden Darstellungen äquivalent sind. Falls im letzten Fall $A(s) = B(s)$ ist, dann ist $P = \lambda I$.⁵⁴ Dieses Lemma war bereits in diesem Spezialfall $A(s) = B(s)$ von Frobenius und Burnside benutzt worden. Schur gab jedoch nicht nur einen einfachen Beweis des Lemmas, sondern nutzte es zur Ableitung der wichtigsten Sätze der Darstellungstheorie. Dadurch erhielt das Lemma nicht nur eine zentrale Stellung in seiner Arbeit, sondern auch in der gegenwärtigen Darstellungstheorie.

Darüber hinaus verallgemeinerte er einige bekannte Sätze, beispielsweise dass zwei beliebige (und nicht nur irreduzible) Darstellungen genau dann äquivalent sind, wenn sie denselben Charakter haben, und fügte auch neue Erkenntnisse hinzu. Zu letzteren zählten die Orthogonalitätsrelationen zwischen den zum Gruppenelement s gehörigen Matrizenelementen $a_{ij}(s)$ von $A(s)$ einer irreduziblen Darstellung von Grad f

$$\sum_{s \in G} a_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = \frac{|G|}{f} \delta_{il} \delta_{jk}$$

($|G|$ bezeichnet dabei die Ordnung der Gruppe) und für eine weitere zur ersten in-äquivalenten Darstellung vom gleichen Grad mit Matrizenelementen $b_{ij}(s)$ von $B(s)$

$$\sum_{s \in G} a_{ij}(s^{-1})b_{kl}(s) = 0$$

für alle $i, j, k, l \in 1, \dots, f$.⁵⁵

⁵³ Schur (1905, S. 406).

⁵⁴ Vgl. Satz I. und II. in §2 in Schur (1905).

⁵⁵ Vgl. Satz IV. in §2 in Schur (1905).

Frobenius hatte die Entstehung dieser Arbeit von Schur mit Interesse verfolgt und eigene Vorschläge beigesteuert. Es folgten zwei gemeinsam verfasste Arbeiten, in welchen sie den Zusammenhang zwischen Darstellungen über den komplexen und über den reellen Zahlen untersuchten sowie den Satz von Burnside erweiterten. Außerdem studierte Schur Darstellungen über algebraischen Zahlkörpern.⁵⁶

Nach diesen grundlegenden Beiträgen zur Darstellungstheorie widmete sich Schur diesem Gebiet erst wieder Anfang der 1920er Jahre und zwar im Zusammenhang mit der Invariantentheorie. Schur war, nach einer Berufung 1913 als außerordentlicher Professor an die Universität Bonn, nach Berlin zurückgekehrt. Zunächst erhielt er dort 1916 eine Anstellung als außerordentlicher Professor und zwei Jahre nach Frobenius' Tod ein Ordinariat. Vermutlich angeregt durch eine gemeinsame Arbeit mit Alexander Ostrowski zur Invariantentheorie 1922, bot Schur im Wintersemester 1923/24 eine Vorlesung dazu an. Die Aufzeichnungen seines Studenten Richard Brauer zeigen, dass Schur sich auf Cayleys Problem, die Anzahl gewisser Kovarianten anzugeben („Abzählungsproblem“), und den Satz von Hilbert und Hurwitz über die endliche Basis von Invarianten konzentrierte. 1924 nutzte Schur Arbeiten von Hurwitz und von Molien sowie die in seiner Dissertation entwickelte polynomiale Darstellung, um Cayleys Problem für Invarianten bezüglich der Drehungsgruppe $SO_n(\mathbb{R})$ und der orthogonalen Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ zu lösen und berechenbare Formeln anzugeben.⁵⁷ Dabei bemerkte er, dass die Theorie der Charaktere und der Darstellungen auf jede kontinuierliche Gruppe ausgedehnt werden kann, die ein für stetige Integranden konvergierendes Hurwitz-Integral zulässt. Die (endliche) Summation über die Gruppenelemente konnte in diesem Fall durch eine Integration à la Hurwitz ersetzt werden. Die Orthogonalitätsrelationen zwischen den Charakteren der Drehungsgruppe konnten als (translationsinvariantes) Maß interpretiert werden. Die volle Reduzibilität der Darstellungen von $SO_n(\mathbb{R})$ folgte. Schur berechnete die irreduziblen Charaktere von $SO_n(\mathbb{R})$ und den Grad der zugehörigen Darstellungen, sofern nicht n gerade war und damit zu einer „zweiseitigen“ Darstellung Anlass gab.

Die Schursche Arbeit war für Weyl eine der beiden Schlüsselarbeiten zur Übertragung der Theorie von Frobenius auf halbeinfache kontinuierliche Gruppen, welche er kurze Zeit später entwickelte (vgl. Abschn. 1.2.2). Schur kam 1927/28 auf die polynomialen Darstellungen zurück und dann mit Blick auf die analytischen und algebraischen Eigenschaften von Darstellungen von Liegruppen im Kontext des Weylschen Ansatzes.⁵⁸ Er leitete Ergebnisse seiner Dissertation nochmals auf eine andere Weise ab, u. a. entwickelte er die sogenannte Schur-Weyl-Reziprozität zwischen den Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe und denen der symmetrischen. Die Bestimmung aller stetigen Darstellungen der $GL_n(\mathbb{C})$ behandelte Schur 1928.

⁵⁶ Vgl. Curtis (1999, Abschn. IV.3 und 4).

⁵⁷ Schur (1924a,b,c). Schur nahm Bezug auf Hurwitz (1897); Molien (1897). Vgl. Hawkins (2000, Abschn. 10.5).

⁵⁸ Schur (1927, 1928).

1.2 Darstellungstheorie halbeinfacher Liealgebren und Liegruppen

Die Darstellungstheorie von Gruppen wurde, wie gezeigt, zunächst für Gruppen endlicher Ordnung entwickelt. Die Darstellung kontinuierlicher Gruppen kam dabei höchstens als Anwendung der Darstellungstheorie Gruppen endlicher Ordnung und nicht als eigenständiger Forschungsgegenstand vor. Die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, also von Liegruppen und Liealgebren, wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts von Sophus Lie und Friedrich Engel entwickelt und ausgebaut.⁵⁹ In ihren Arbeiten, und stärker noch in denen von Wilhelm Killing, finden sich bereits Ergebnisse, welche darstellungstheoretisch interessant sind. Die ersten wichtigen Schritte hin zu einer Darstellungstheorie halbeinfacher Liealgebren und Liegruppen wurden jedoch von Élie Cartan 1894 in seiner Dissertation unternommen.

Cartans Dissertation, die dafür grundlegenden Arbeiten von Killing, Cartans erneute Hinwendung zu diesem Thema 1913/14 sowie die invariantentheoretische Auseinandersetzung Eduard Studys mit Lies Transformationsgruppen werden im Folgenden im Abschnitt zur Vorgeschichte kurz skizziert. Sie sind zur Vorgeschichte zu zählen, da Cartan seine Ergebnisse mit der Darstellungstheorie von Gruppen endlicher Ordnung nicht in Verbindung brachte – Killings und Studys Forschungen liegen zeitlich vor der Entwicklung der Darstellungstheorie. Anschließend werden Weyls bahnbrechende Arbeiten zur Darstellungstheorie der Liealgebren und Liegruppen präsentiert. Weyl verknüpfte die separaten Entwicklungen zu kontinuierlichen und endlichen Gruppen von Cartan und Schur in einem darstellungstheoretischen Forschungsansatz. Weyls Motivation für diese Forschung entsprang dabei aus seinem Erkenntnisinteresse an physikalischen Grundlagen der Relativitätstheorie.

1.2.1 Zur Vorgeschichte: Killing, Study, Cartan

In Paris stießen seit Anfang der 1880er Jahre die Arbeiten von Sophus Lie zu Transformationsgruppen aufgrund ihres Bezugs zu partiellen Differentialgleichungen und damit ihrer Anwendungsmöglichkeit auf Probleme der Physik auf starkes Interesse. Gaston Darboux, Émil Picard und Henri Poincaré ermunterten junge Studenten zu einem Studienaufenthalt bei Lie in Leipzig. Arthur Tresse, ein guter Freund Cartans, verbrachte 1891/92 fast ein Jahr dort und schrieb nach seiner Rückkehr seine Promotion zu einem Problem, das Lie ihm gestellt hatte. Als Tresse in Leipzig ankam, hatten Friedrich Engel und einige Studierende bereits begonnen, sich den Arbeiten von Wilhelm Killing zu widmen. Killing war aufgrund seines durch Vorlesungen von Weierstraß geweckten Interesses an der Fundierung der Geometrie (im Sinne Felix Kleins) auf Probleme gestoßen, welche mit Lies Arbeiten zu Transforma-

⁵⁹ Vgl. die ausführliche Darstellung von Hawkins (2000).

tionsgruppen in enger Beziehung standen.⁶⁰ Killing entwickelte Ende der 1880er Jahre eine Strukturtheorie für halbeinfache Liealgebren, die allerdings lückenhaft und fehlerbehaftet war und die unvollendet blieb.⁶¹ Zu dieser Zeit arbeitete Killing, der in Berlin studiert und bis dahin meist als Lehrer seinen Lebensunterhalt verdient hatte, als Mathematikprofessor an dem Priesterseminar Lyceum Hosianum in Braunsberg. Es ist wohl Engel zu verdanken, dass Killing in der dortigen mathematischen Isolation seine Forschungen zur Strukturtheorie vorantrieb, systematisierte und publizierte. Lies und Killings Ansätze unterschieden sich jedoch sowohl in ihrem Erkenntnisinteresse als auch in ihren Methoden. Um diese Beziehung zwischen den unterschiedlichen Ansätzen fruchtbar zu machen, bemühten sich Engel und seine Studierende um ein besseres Verständnis von Killings Arbeiten. Nachdem Tresse Cartan nach seiner Rückkehr nach Paris auf Killings Arbeiten aufmerksam gemacht hatte, begann auch Cartan diese zu studieren.

In einer Reihe von Artikeln und in seiner Dissertation „Sur la structure des groupes finis et continus“ gelang es Cartan 1893/94, einige grundlegende Gedankengänge Killings auf eine solide Basis zu stellen.⁶² Cartan übernahm nicht Killings Forschungsprogramm, sondern konzentrierte sich auf solche Aspekte, welche für die Entwicklung einer Art Galois-theorie für Differentialgleichungen wichtig sein konnten. Letztere wurde im Pariser Forschungsmilieu als eine der bedeutsamsten Anwendungsmöglichkeiten der Theorie von Lie betrachtet. Man hoffte, dass die Integration von Systemen von Differentialgleichungen, welche unter kontinuierlichen Gruppen invariant waren, vereinfacht werden konnte und damit letztlich Fortschritte auf dem Gebiet der mathematischen Physik erzielt werden konnten. Mit diesem Ziel vor Augen klärte Cartan Killings abstrakte Konzepte auf und entwickelte sie weiter. Er verbesserte die Begriffe der einfachen Liealgebra, der halbeinfachen bzw. auflösbaren (zu einer Liealgebra assoziierten) Gruppe, indem er andere, in der Regel äquivalente Definitionen wählte.

Cartan erkannte, dass es Killing, in moderner Terminologie ausgedrückt, letztlich um die Bestimmung aller irreduziblen Darstellungen aller halbeinfachen Liealgebren ging. Killing hatte ein Strukturtheorem aufgestellt: Jede Liealgebra $\mathfrak{g}$, für die $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ gilt, ist die Summe aus einer einfachen oder halbeinfachen Unter-algebra $\mathfrak{s}$ und einem Ideal $\mathfrak{r}$ von Rang 0:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}.$$

Die Algebren von Rang 0 waren jedoch noch nicht klassifiziert. Killing behauptete, dass das Strukturproblem ohne eine Klassifikation dieser Algebren gelöst werden könne, indem die oben genannte allgemeinere Frage nach den irreduziblen Darstellungen von einfachen Algebren beantwortet werde. Killing gelang eine relativ gute Klassifikation der einfachen Liealgebren, wie Cartan in seiner Dissertation 1894

⁶⁰ Vgl. Hawkins (2000, Kap. 4 u. 5).

⁶¹ Killing (1888a,b, 1889, 1890). Cartan (1893b, S. 785) meinte dazu: „[...] les considérations qui conduisent M. Killing à ces résultats manquent de rigueur. Il était, par suite, désirable de refaire ces recherches, d'indiquer ses théorèmes inexacts et de démontrer ses théorèmes justes.“

⁶² Cartan (1893a,b,c, 1894).

zeigte. Killing hatte Strukturtypen A bis D, E_6, E_7, E_8, G_2, F_4 (in moderner Bezeichnung, die sich aber an Killings Notationsweise anlehnt) bestimmt; Cartan zeigte, dass ein weiterer von Killing angegebener Typ mit F_4 äquivalent war. Killings Versuche, die Darstellungen dieser Strukturen zu finden, waren jedoch nicht sehr erfolgreich. Dies gelang Cartan zumindest für eine kleine, im Pariser Umfeld aber als sehr wichtig angesehene Menge von Liealgebren durch seine Theorie der Wurzeln. Letztere war zum Teil schon in Killings Konzept der „Nebenwurzeln“ angelegt.⁶³ Für jede einfache lineare Liealgebra, die irreduzibel auf dem zugrunde liegenden Vektorraum operiert, bestimmte er so die nichttriviale irreduzible Darstellung von minimalen Grad.⁶⁴

In seiner Dissertation gab Cartan auch einen algebraischen Beweis der vollen Reduzibilität der Liealgebra $sl_2(\mathbb{C})$ von $SL(2, \mathbb{C})$. Dieses Ergebnis formulierte er jedoch nicht als einen eigenständigen Satz, sondern er deduzierte es innerhalb eines anderen Beweises.⁶⁵ Die irreduziblen Darstellungen von $sl_2(\mathbb{C})$ waren bereits von Lie im dritten Teil seiner Monographie zu Transformationsgruppen bestimmt worden, allerdings in einem geometrischen Kontext als projektive Gruppen von Normkurven.⁶⁶ In heutiger Terminologie konstruierte Lie den Vektorraum V_m der homogenen Polynome in zwei Unbekannten vom Grad m über $\mathbb{C}$ als irreduziblen $sl_2(\mathbb{C})$ -Modul mit höchstem Gewicht m . Es ist unklar, wann genau Lie seine Charakterisierung vornahm und welchen Stellenwert sie in seinem Forschungsprogramm einnahm.

Als Lie das Ergebnis 1893 publizierte, war es für ihn jedoch durchaus relevant, denn Eduard Study hatte entdeckt, dass eine von Clebsch und Gordan Anfang der 1870er Jahre für die Invariantentheorie entwickelte Methode, die sogenannte Clebsch-Gordan-Reihe, für die Theorie von Lie weitreichende Folgen haben könnte.⁶⁷ Study glaubte, dass die Methode – im heutigen Fachjargon – Sätze über die vollständige Reduzibilität für eine große Klasse von Strukturen, darunter auch die halbeinfachen, implizieren und ihre Charakterisierung (als minimale nichtlineare invariante Mannigfaltigkeiten) ermöglichen könnte. Study hatte sich 1885 unter Klein in Leipzig habilitiert und lernte Lies Theorie dort durch persönlichen Kontakt mit Engel kennen, der gerade von seinem Forschungsaufenthalt bei Lie in Norwegen zurückgekehrt war. Damit studierte er sie, bereits bevor Lie 1886 Kleins Nachfolger in Leipzig wurde. Studys Forschungsschwerpunkt lag auf der Invariantentheorie. Lie regte an, dass Study die Verbindungen zwischen Geometrie und der Invariantentheorie herausarbeitete. Study bewies mit Engels Hilfe die vollständige Reduzibilität von $sl_2(\mathbb{C})$. Allerdings wurde dieser Beweis niemals publiziert – es findet sich lediglich ein Hinweis darauf in Lies Monographie⁶⁸ – und es ist daher auch unklar, wann genau Study, der 1888 als Privatdozent nach Marburg ging, dies gelang. Study stellte

⁶³ Killing (1889).

⁶⁴ Cartan (1894).

⁶⁵ Cartan (1894, S. 100-102).

⁶⁶ Lie (1893).

⁶⁷ Zur Bedeutung der Clebsch-Gordan-Reihe (auch Clebsch-Gordan-Formel genannt) im Rahmen der gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik siehe Abschn. 11.2, S. 216 f.

⁶⁸ Lie (1893, S. 785-787).

auch einen (lückenhaften) Beweis für die volle Reduzibilität von $sl_3(\mathbb{C})$ auf und charakterisierte die zugehörigen Gruppen erfolgreich. Aufgrund dieser Ergebnisse von Study vermutete Lie, dass die volle Reduzibilität von $sl_n(\mathbb{C})$ wahrscheinlich für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb gab er neben der Klassifizierung von $sl_2(\mathbb{C})$ durch irreduzible Darstellungen ebensolche für zwei weitere Liealgebren an.⁶⁹

Fast zwanzig Jahre nach seiner Beschäftigung mit der Strukturtheorie von Killing kehrte Cartan zu einem Problemkreis aus seiner Dissertation zurück. Dies geschah im Rahmen seiner Konzentration auf geometrische Fragestellungen und nicht mehr in Hinblick auf eine Anwendung auf Differentialgleichungssysteme. Durch diese Verschiebung von Interessen traten andere, grundlegendere Fragestellungen in den Vordergrund. In drei Artikeln gelangen ihm wichtige Schritte hin zu einer Darstellungstheorie von Liegruppen.⁷⁰ In moderner Terminologie ausgedrückt bestimmte Cartan über $\mathbb{C}$ alle endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen halbeinfacher Algebren, klassifizierte alle reellen halbeinfachen Liealgebren und bestimmte dazu über $\mathbb{C}$ als auch über $\mathbb{R}$ alle endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen aller reellen Liealgebren. Damit hatte er Killings allgemeinere Frage und Studys Klassifikationsproblem vollständig beantwortet. Allerdings brachte Cartan seine Begrifflichkeiten und Konstruktionen nicht mit der von Frobenius und Schur entwickelten Darstellungstheorie für endliche Gruppen in Verbindung, auch wenn in Paris die Bedeutung dieser Theorie von Poincaré hoch eingeschätzt wurde. Cartan betrachtete seine Theorie als Lösung des geometrischen Problems der Bestimmung aller Gruppen projektiver Transformationen, die „nichts Ebenes“ invariant lassen. Im folgenden wird seine Vorgehensweise aus heutiger, darstellungstheoretischer Sicht kurz skizziert.

Cartan führte den Begriff des Gewichts ein und zeigte, dass dominante Gewichte Multiplizität 1 haben. Die Bestimmung der irreduziblen Darstellungen von (halb-)einfachen Algebren führte er zurück auf das Problem, für jeden der Strukturtypen A bis G von einfachen Algebren $\mathfrak{g}$ von Rang r die linear unabhängigen dominanten Gewichte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ zu bestimmen und dann zu jedem λ_i einen $\mathfrak{g}$ -Modul mit dominanten Gewicht λ_i zu konstruieren. Für jedes dominante Gewicht λ , das sich dann als $\sum_{i=1}^r p_i \lambda_i$ mit $p_i \in \mathbb{N}$ und $p_i \geq 0$ ausdrücken lässt, konstruierte Cartan aus diesen einen irreduziblen $\mathfrak{g}$ -Modul. Dies geschah durch Konstruktion einer Unter algebra in einem (Tensor-)Produkt Raum. Da, wie Cartan zeigte, $\mathfrak{g}$ -Moduln zum gleichen Gewicht isomorph sind, erhielt Cartan dadurch alle irreduziblen Moduln zu einer einfachen Algebra. Er beschrieb auch, wie entsprechende Moduln von halbeinfachen Algebren zu konstruieren sind. Cartan präsentierte in seinem Artikel 1913 nur die Ergebnisse, nicht deren aufwändige Berechnungen.

Im Fall der Strukturtypen B und D erhielt Cartan auch solche Darstellungen der orthogonalen Liealgebren $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$, welche über eine Dekade später in der Quantenmechanik Bedeutung erlangten und in der Folge als Spindarstellung bezeichnet wurden.⁷¹ In seinem Artikel hob Cartan diese Darstellungen nicht besonders hervor,

⁶⁹ Vgl. Hawkins (2000, Abschn. 7.2), Borel (2001, Kap. V, §§1 u. 2).

⁷⁰ Cartan (1913, 1914a,b).

⁷¹ Cartan (1913, S. 86 f., 91 f.).

dies tat erst Weyl 1924.⁷² Ihre herausragende Stellung anerkennend untersuchte Cartan diese weiter und publizierte Mitte der 1930er Jahre eine Monographie zur Theorie der Spinoren.⁷³

1.2.2 Weyl

Die Entwicklung der Darstellungstheorie für Liealgebren und -gruppen in den Jahren 1924 und 1925 durch Weyl war aufs Engste mit Weyls Interesse an einer Fundierung der theoretischen Physik verbunden. Wie Weyl selbst festhielt – und wie Hawkins ausführlich darlegt, kam Weyl zur Darstellungstheorie durch seinen Wunsch, die mathematische Struktur, die dem „formalen Apparat“ der Relativitätstheorie zugrunde lag, zu verstehen.⁷⁴ Mit dem formalen Apparat meinte Weyl wohl den Tensorkalkül der allgemeinen Relativitätstheorie. Im Zuge seiner Forschungen zur reinen Infinitesimalgeometrie, welche er zur Schaffung einer einheitlichen Theorie von Gravitation und elektromagnetischen Feldern nutzte, lernte Weyl sowohl Cartans Arbeiten (Cartan, 1894, 1913, 1914a,b) zur Klassifikation von Liealgebren als auch die darstellungstheoretischen Arbeiten von Frobenius und Schur (insbesondere Schur, 1901, 1924a) kennen – erstere bei seiner Auseinandersetzung mit dem „Raumproblem“, letztere bei der Entwicklung der Tensoralgebra. Weyl erkannte die besondere Bedeutung, welche Gruppen und ihren Darstellungen dabei zukam. Mit Cartan und Schur stand Weyl im brieflichen Kontakt, durch welchen nicht nur Weyl selbst, sondern auch seine Briefpartner von den relevanten Beiträgen des jeweils anderen Kollegen erfuhren. Außerdem war Weyl Zielscheibe einer öffentlichen Kritik Studys, der ein Fehlen von algebraischen invariantentheoretischen Methoden in der Relativitätstheorie beklagte.⁷⁵

In einem an Schur gerichteten, in den *Sitzungsberichte[n] der Preussischen Akademie der Wissenschaften* publizierten Brief vom November 1924 skizzierte Weyl auf der Grundlage von Cartans Ergebnissen eine Darstellungstheorie für $SO_n(\mathbb{R})$, welche bereits Schurs invariantentheoretischen Ansatz übertraf.⁷⁶ In der gruppentheoretischen Fundierung der Tensorrechnung verband Weyl die Herangehensweisen von Cartan und Schur mit topologischen Überlegungen.⁷⁷ Weyl brachte mit-

⁷² Weyl (1924c, S. 339). Vgl. nachfolgenden Abschnitt.

⁷³ Cartan (1938).

⁷⁴ Hawkins (1998), Hawkins (2000, Kap. 11). „But for myself I [Weyl] can say that the wish to understand what really is the mathematical substance behind the formal apparatus of relativity theory led me to the study of representations and invariants of groups“ (Weyl, 1949, S. 541).

⁷⁵ Vgl. Hawkins (2000, Kap. 11), Scholz (2004) sowie Abschn. 7.1 und 7.4. Zu Weyl und Liegruppen vgl. auch Borel (1986).

⁷⁶ Weyl (1924c).

⁷⁷ Weyl (1924b,a). Beziehungen zwischen der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen und Tensoralgebra hatte bereits 1919 der niederländische Mathematiker Jan Arnoldus Schouten gesehen und sie in seiner Monographie zum Ricci-Kalkül veröffentlicht (Schouten, 1924). Weyl lernte Schoutens Ergebnisse erst durch diese Publikation kennen.

tels Young-Tableaus Cartans irreduzible Moduln mit Symmetrietypen von gewissen Tensoren in direkte Verbindung. Jede irreduzible Darstellung von $SL_n(\mathbb{C})$ konnte durch die durch sie induzierte Wirkung auf gewisse, durch Symmetriebedingungen ausgezeichnete Unterräume von Tensoren charakterisiert werden. Damit hatte Weyl als erster bewusst darstellungstheoretische Konzepte für Liegruppen herangezogen und fruchtbar werden lassen.

Weyl entwickelte im Anschluss systematisch die Darstellungstheorie von Liealgebren und Liegruppen. Neben den Arbeiten von Schur und Cartan integrierte er weitere Methoden und Konzepte aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, wie etwa aus der Theorie von Lie, der Theorie der Charaktere von Frobenius, der Tensoralgebra, der Invariantentheorie, der Riemannschen Flächen, der linearen Algebra, der Topologie und aus der Integralgleichungstheorie von Hilbert.⁷⁸ Er stellte eine Theorie der Charaktere für alle halbeinfachen Gruppen (und nicht nur für die ‚klassischen‘ Gruppen $SL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$ und $Sp_{2n}(\mathbb{C})$) auf, gab Formeln für die irreduziblen Charaktere an und bestimmte die zu diesen gehörigen Darstellungen. Außerdem verallgemeinerte er die von Killing und Cartan entwickelte Strukturtheorie für halbeinfache Liegruppen. Schließlich zeigte er die Verbindung zwischen Darstellungstheorie und Invariantentheorie für jede halbeinfache Gruppe auf – bis dahin war dies nur für die spezielle lineare Gruppe $SL_n(\mathbb{C})$ und die spezielle orthogonale Gruppe $SO_n(\mathbb{R})$ bekannt. Er bewies zudem einen Satz über die Existenz einer endlichen Basis für Invarianten: die Invarianten jeder Darstellung einer halbeinfachen Gruppe haben eine endliche Basis. Damit verallgemeinerte er den ursprünglich von Hurwitz 1897 nur für $SL_n(\mathbb{C})$ und nur auf eine spezielle Darstellung bezogenen Satz.

Dieser knappe Überblick zeigt nicht nur den großen Umfang der Weylschen Arbeiten zur Darstellungstheorie aus den Jahren 1924 bis 1926 auf, deren ausführliche Darstellung den Rahmen dieser Arbeit übersteigt, sondern auch den durch sie bewirkten enormen Erkenntnisfortschritt. An dieser Stelle sei Weyls Beweis der vollen Reduzibilität endlich-dimensionaler Darstellungen von komplexen halbeinfachen Liealgebren herausgehoben.⁷⁹ Denn dieser war, wie die vorliegende Abhandlung deutlich zeigt, von nicht geringer Bedeutung für die Anwendung der Darstellungstheorie in der Quantenmechanik. Außerdem entwickelte van der Waerden auf Anregung des Physikers Hendrik Casimir einige Jahre später einen rein algebraischen Beweis des Satzes (vgl. Kap. 16).

Cartan knüpfte an Weyls Arbeiten an und forschte weiter zu den Zusammenhängen zwischen Liegruppen und Riemannscher Geometrie, aus denen seine Theorie symmetrischer Räume hervorging. Auch Schur nahm Weyls Anstöße in seinen Forschungen auf.

Zusammen mit Fritz Peter bewies Weyl 1927 den heute nach ihnen benannten Satz über die Vollständigkeit des orthogonalen Systems von Funktionen $r_{ij}^{(\mu)}(s)$, wobei μ über alle inäquivalenten irreduziblen unitären Darstellungen einer Liegruppe läuft und $r_{ij}^{(\mu)}(s)$ ein Matricelement der zur irreduziblen Darstellung μ gehörigen

⁷⁸ Weyl (1925, 1926a,b).

⁷⁹ Für eine Skizze des Weylschen Beweises siehe Borel (1986, S. 57–59).

Darstellungsmatrix zu dem Gruppenelement s ist.⁸⁰ Damit konnten sie für kontinuierliche Gruppen einen zum Satz über die reguläre Darstellung für Gruppen endlicher Ordnung analogen Zerlegungssatz beweisen. Diese Arbeit war ein zentraler Baustein in der Entwicklung der kommutativen und nichtkommutativen harmonischen Analysis.⁸¹

⁸⁰ Peter und Weyl (1927). Vgl. Hawkins (2000, Abschn. 12.7).

⁸¹ Mackey (1992).

Zwischen zwei Disziplinen

B. L. van der Waerden und die Entwicklung der
Quantenmechanik

Schneider, M.

2011, XXIII, 403 S. 29 Abb., 4 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-642-21824-8