

Sie nimmt für die folgenden 3-Tupel $(0,0,L)$, $(L,0,0)$, $(L,L,0)$ den Wert L an. Die entsprechenden konjunktiven Elementarglieder lauten $E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3$, $E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3$, $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$. Die disjunktive Verknüpfung dieser Elementarglieder liefert die disjunktive Normalform der Funktion f .

$$f(E_1, E_2, E_3) = (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge E_3).$$

Für die konjunktive Normalform werden alle 3-Tupel mit dem Funktionswert 0 betrachtet. Sind

$$(0,0,0), (0,L,0), (0,L,L), (L,0,L), (L,L,L).$$

Die entsprechenden disjunktiven Elementarglieder sind

$$E_1 \vee E_2 \vee E_3, \quad E_1 \vee E_2 \vee \bar{E}_3, \quad E_1 \vee \bar{E}_2 \vee E_3, \\ \bar{E}_1 \vee E_2 \vee \bar{E}_3, \quad \bar{E}_1 \vee \bar{E}_2 \vee E_3.$$

Ihre konjunktive Verknüpfung liefert die konjunktive Normalform

$$f(E_1, E_2, E_3) = (E_1 \vee E_2 \vee E_3) \wedge (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \wedge (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) \\ \wedge (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \wedge (\bar{E}_1 \vee E_2 \vee E_3).$$

Die Funktion f in der disjunktiven Normalform wird wie folgt vereinfacht:

$$f(E_1, E_2, E_3) = (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) \\ \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) \\ = (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee [(E_1 \wedge \bar{E}_3) \wedge (E_2 \vee \bar{E}_2)] \\ \text{s. Distributivität } a(b+c) = ab+ac \\ \text{mit } a = E_1 \wedge \bar{E}_3, b = E_2 \text{ und } c = \bar{E}_2; \\ = (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee [(E_1 \wedge \bar{E}_3) \wedge L] \\ \text{s. Komplementarität } a + \bar{a} = 1; \\ = (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_3) \\ \text{aus } a \cdot 1 = a \text{ mit } a = E_1 \wedge \bar{E}_3.$$

2 Zahlen

U. Jarecki, Berlin

2.1 Reelle Zahlen

2.1.1 Einführung

Die reellen Zahlen zeichnen sich durch Grundeigenschaften aus, nämlich eine algebraische, eine Ordnungs- und eine topologische Eigenschaft, die auf der Zahlengeraden (**Bild 1**)

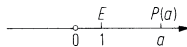


Bild 1. Zahlengerade

deutbar sind. Jeder reellen Zahl a kann genau ein Punkt $P(a)$ oder kurz a auf der Zahlengeraden zugeordnet werden, wobei insbesondere der Zahl 0 der Ursprung O und der Zahl 1 der Einheitspunkt E entspricht. Umgekehrt entspricht jedem Punkt P auf der Geraden genau eine reelle Zahl, die die Koordinate des Punkts P heißt.

Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Besondere Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen,
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	ganze Zahlen,
$\mathbb{Q} = \{p/q p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N},$ $p \text{ und } q \text{ teilerfremd}\}$	rationale Zahlen.

2.1.2 Grundgesetze der reellen Zahlen

Algebraische Eigenschaft. Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind die folgenden Verknüpfungen zweier Zahlen a und b definiert:

Addition $(+)$ mit der Summe $a+b \in \mathbb{R}$, wobei die Eigenschaften gelten:
für beliebige Zahlen a, b, c

$$a+b = b+a, \quad (a+b)+c = a+(b+c);$$

zu zwei beliebigen Zahlen a und b gibt es genau eine Zahl x , so daß gilt:

$$a+x = b, \quad x = b-a \text{ heißt die Differenz von } b \text{ und } a.$$

Multiplikation $(\cdot)$ mit dem Produkt $a \cdot b = ab \in \mathbb{R}$, wobei die Eigenschaften gelten:
für beliebige Zahlen a, b, c

$$ab = ba, \quad (ab)c = a(bc), \quad a(b+c) = ab+ac;$$

zu jeder Zahl $a \neq 0$ und zu jeder Zahl b gibt es genau eine Zahl x , so daß gilt:

$$ax = b, \quad x = b/a \text{ heißt der Quotient von } b \text{ und } a.$$

Hieraus ergeben sich alle elementaren Rechenregeln wie

$$b+(-a) = b-a, \quad -(a-b+c) = -a+b-c, \quad a+(-a) = 0, \\ a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a, \quad a(b-c) = ab-ac;$$

$ab=0$ genau dann, wenn $a=0$ oder $b=0$;

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \\ \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b}, \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Ordnungseigenschaft. In der Menge $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation $\leq$ (kleiner oder gleich) definiert mit den Eigenschaften

$$a \leq a \quad \text{Reflexivität,} \\ \text{Wenn } a \leq b \text{ und } b \leq a, \text{ so } a = b \\ \text{Wenn } a \leq b \text{ und } b \leq c, \text{ so } a \leq c$$

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.
 $a < b$ (a kleiner b) ist erklärt durch $a \leq b$ und $a \neq b$.

$$\text{Ist } a \geq 0 \text{ bzw. } a > 0, \\ \text{dann heißt } a \text{ nichtnegativ bzw. positiv.} \\ \text{Ist } a \leq 0 \text{ bzw. } a < 0, \\ \text{dann heißt } a \text{ nichtpositiv bzw. negativ.}$$

In Verbindung mit den algebraischen Verknüpfungen gilt:

$$\text{Wenn } a \leq b, \text{ so } a+c \leq b+c \text{ für beliebiges } c. \\ \text{Wenn } 0 \leq a \text{ und } 0 \leq b, \text{ so } 0 \leq a \cdot b.$$

Hieraus folgt z.B.

$$a^2 \geq 0 \text{ für beliebige } a \in \mathbb{R}. \\ \text{Wenn } a < b \text{ und } c > 0, \text{ so } ac < bc. \\ \text{Wenn } a < b \text{ und } c < 0, \text{ so } ac > bc.$$

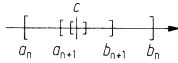
Topologische Eigenschaft. Jede Intervallschachtelung bestimmt genau eine reelle Zahl.

Sind $a \leq b$ zwei reelle Zahlen, dann heißen die Zahlenmengen

$$\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b] \quad \text{abgeschlossene,} \\ \{x | a < x < b\} = (a, b) \quad \text{offene,} \\ \{x | a \leq x < b\} = [a, b) \quad \text{und} \\ \{x | a < x \leq b\} = (a, b] \quad \text{halboffene Intervalle.}$$

a und b sind ihre Randpunkte, und $b-a$ ist ihre Länge.
Für eine beliebige reelle Zahl a heißen die Zahlenmengen

$$\{x | a \leq x\} = [a, \infty) \quad \text{und} \quad \{x | x \leq a\} = (-\infty, a] \\ \text{unbeschränkte halboffene, sowie} \\ \{x | a < x\} = (a, \infty) \quad \text{und} \quad \{x | x < a\} = (-\infty, a) \\ \text{unbeschränkte offene Intervalle.}$$

**Bild 2.** Intervallschachtelung

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei die Intervalllängen $b_n - a_n$ eine Nullfolge bilden. Auf der Zahlengeraden schrumpfen die Intervalle auf einen Punkt zusammen (**Bild 2**), dem eine reelle Zahl c zugeordnet ist.

Beispiel: Die Folge mit den Intervallen $I_n = [(1 + 1/n)^n, (1 + 1/n)^{n+1}]$ $n = 1, 2, 3, \dots$ ist eine Intervallschachtelung, welche die Zahl $e = 2,7182818 \dots$ bestimmt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $(1 + 1/n)^n \leq e \leq (1 + 1/n)^{n+1}$ gilt. Die Randpunkte der Intervalle sind rationale Zahlen; sie sind approximative Werte für die irrationale Zahl e .

2.1.3 Der absolute Betrag

Der absolute Betrag (Modul) einer reellen Zahl a ist definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a \leq 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad |a| = \max(-a, a),$$

wobei $\max(a, b)$ die größte der beiden Zahlen a und b bedeutet. Geometrisch kennzeichnet $|a|$ den Abstand des Punkts a vom Ursprung und $|b - a|$ den Abstand der beiden Punkte a und b . Es gelten $|a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

$$\begin{aligned} | -a | &= | a |, & | ab | &= | a | | b |, & | a : b | &= | a | : | b |, \\ -| a | &\leq a \leq | a |, & || a | - | b || &\leq | a + b | \leq | a | + | b |; \end{aligned}$$

$|a| < c$ genau dann, wenn $-c < a < c$ ($c > 0$).

2.1.4 Mittelwerte und Ungleichungen

Sind a_i für $i = 1, 2, 3, \dots, n$ mit $n \geq 2$ positive Zahlen, so sind für sie die Mittelwerte erklärt:

$$\begin{aligned} \text{arithmetisch} \quad A(a_i) &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n, \\ \text{geometrisch} \quad G(a_i) &= \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}, \\ \text{harmonisch} \quad H(a_i) &= \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \right]^{-1}, \\ \text{quadratisch} \quad Q(a_i) &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}/n. \end{aligned}$$

Für sie gelten die Ungleichungen

$$H(a_i) \leq G(a_i) \leq A(a_i) \leq Q(a_i).$$

Ist $\min a_i$ die kleinste und $\max a_i$ die größte der Zahlen a_i , so gilt $\min a_i \leq H(a_i)$ und $Q(a_i) \leq \max a_i$.

Bernoulli'sche und Cauchy-Schwarz'sche Ungleichungen:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\geq 1+nx \quad \text{für } 1+x \geq 0 \text{ und } n = 1, 2, 3, \dots, \\ (1+x)^n &> 1+nx \quad \text{für } 1+x > 0 \text{ und } n = 2, 3, 4, \dots, \text{ und} \\ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \end{aligned}$$

2.1.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzen. Für die Potenzsymbole a^b ist vorauszusetzen, daß $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ oder $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{Z}$ oder $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} a^1 &= a, & a^0 &= 1, & 1^b &= 1, & a^{-b} &= 1/a^b; \\ a^b \cdot a^c &= a^{b+c}, & (a \cdot b)^c &= a^c b^c, & (a^b)^c &= a^{bc}; \\ a^b : a^c &= a^{b-c}, & (a : b)^c &= a^c : b^c. \end{aligned}$$

Wurzeln. Ist $b \neq 0$, so gibt es zu jeder positiven Zahl c genau eine positive Zahl a , so daß $a^b = c$. Diese Zahl $a = \sqrt[b]{c}$ heißt

b -te Wurzel aus a , wobei b der Wurzelexponent und c der Radikand bedeuten. Also ist

$$a^b = c \quad \text{äquivalent} \quad a = \sqrt[b]{c} \quad \text{für } b \neq 0 \quad \text{und} \quad c > 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1} &= 1, & \sqrt[4]{c^b} &= c, & \sqrt[4]{a^c} &= \sqrt[4]{a^c} = a^{c/4}, \\ \sqrt[4]{a^b a^c} &= \sqrt[4]{a^{b+c}}, & \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} &= \sqrt[4]{ab}, & \sqrt[4]{ab} &= \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{b}, \\ \sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{b} &= \sqrt[4]{a/b}. \end{aligned}$$

Logarithmen. Ist $a > 1$, so gibt es zu jeder positiven Zahl c genau eine Zahl b , so daß $a^b = c$. Diese Zahl $b = \log_a c$ heißt der Logarithmus von c zur Basis a , wobei a die Basis und c der Logarithmand oder Numerus bedeuten. Also ist

$$a^b = c \quad \text{äquivalent} \quad b = \log_a c \quad \text{für } a > 1 \quad \text{und} \quad c > 0.$$

Bevorzugte Logarithmen sind der dekadische mit der Basis 10, der natürliche mit der Basis e und der binäre mit der Basis 2. Es gilt

$$\begin{aligned} a^{\log_a c} &= c, & b &= \log_a a^b, & \log_a 1 &= 0, \\ e^{\ln c} &= c, & b &= \ln e^b, & \ln 1 &= 0, \\ \log_a(bc) &= \log_a b + \log_a c, & \log_a(b : c) &= \log_a b - \log_a c, \\ \log_a(1/b) &= -\log_a b, & \log_a b^c &= c \log_a b, \\ \log_a \sqrt[b]{c} &= (1/c) \log_a b, \\ \log_a c &= \log_a b \cdot \log_b c, & \lg a &= \lg e \cdot \ln a \quad \text{mit } \lg e = 0,43429 \end{aligned}$$

2.1.6 Zahlendarstellung in Stellenwertsystemen

Hierzu dient meist das Dezimalsystem mit der Basis (Grundzahl) 10 und den zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9. Jeder natürlichen Zahl n wird dann eine endliche Folge von Ziffern zugeordnet, wobei jedes Glied der Folge neben seinem Ziffern- noch einen Stellenwert hat (z.B. $9021 = 9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$). Ist $g > 1$ eine natürliche Zahl und $\{0, 1, 2, \dots, g-1\}$ eine Ziffermenge, so läßt sich jede natürliche Zahl n als Ziffernfolge im Stellenwertsystem mit der Basis g eindeutig darstellen.

$$\begin{aligned} n &= (a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0)_g = \sum_{i=0}^m a_i g^i \\ \text{für } a_i &\in \{0, 1, 2, \dots, g-1\}. \end{aligned}$$

Das Binär- oder Dualsystem hat die Basis 2 und die Ziffermenge $\{0, 1\}$. Die Darstellung der natürlichen Zahl 18 ist z.B. $(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (18)_{10} = 18$. Da das Binärsystem ebenso wie das Dezimalsystem ein Stellenwertsystem ist, sind die für das Rechnen mit Stellenwerten gültigen Regeln übertragbar. Lediglich das kleine Einspluseins und Einmaleins sind verschieden. Im Binärsystem gilt:

$$\begin{aligned} \text{Addition} \quad 0+0 &= 0; 0+1 = 1; 1+0 = 1; 1+1 = 10. \\ \text{Multiplikation} \quad 0 \cdot 0 &= 0; 0 \cdot 1 = 0; 1 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Beispiel: Addition bzw. Multiplikation von Dezimalzahlen im Binärsystem.

$$\begin{array}{r} 41 + 13 \\ \hline 1101 \cdot 1101 \\ \hline 1101 \\ 0000 \\ \hline 1101 \\ \hline 111 \\ \hline 110110 \quad (= 54) \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \cdot 5 \\ \hline 1101 \cdot 101 \\ \hline 1101 \\ 0000 \\ \hline 1101 \\ \hline 111 \\ \hline 1000001 \quad (= 65) \end{array}$$

Das Hexadezimalsystem hat die Basis 16 und die Ziffernmenge $\{0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Dabei entsprechen die hexadezimalen Ziffern A, B, ..., F den Dezimalzahlen 10, 11, ..., 15. So ist

$$(940)_{10} = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = (3AC)_{16}.$$

2.1.7 Endliche Folgen und Reihen. Binomischer Lehrsatz

Eine endliche reelle Zahlenfolge ist durch eine reellwertige Funktion auf einer endlichen Menge $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, der Indexmenge, erklärt, die jedem $k \in I$ genau eine reelle Zahl a_k zuordnet. Sie wird dargestellt durch $(a_k)_{k \in I}$ oder $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ oder (a_k) für $k \in I$. Die Zahlen a_k heißen Glieder der Folge. Folgen können durch verschiedenartige Zuordnungsvorschriften erklärt sein. Oft lassen sie sich als Funktionsgleichungen $a_k = f(k)$ darstellen.

Arithmetische Folgen

Bei einer Folge (a_k) für $k \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ heißt die Differenz (s. A 10.6.3).

$$\Delta^1 a_k = a_{k+1} - a_k$$

für $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ von 1. Ordnung,

$$\Delta^2 a_k = \Delta^1 a_{k+1} - \Delta^1 a_k$$

für $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ von 2. Ordnung,

$$\Delta^j a_k = \Delta^{j-1} a_{k+1} - \Delta^{j-1} a_k$$

für $k \in \{1, 2, \dots, n-j\}$ von j -ter Ordnung.

Haben für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n-j\}$ die Differenzen j -ter Ordnung den gleichen Wert, dann heißt die Folge (a_k) arithmetische Folge j -ter Ordnung. Einfache Beispiele für arithmetische Folgen 1., 2. und 3. Ordnung sind $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ mit $\Delta^1 a_k = 1$, $\{1, 4, 9, 16, \dots, n^2\}$ mit $\Delta^2 a_k = 2$, $\{1, 8, 27, 64, \dots, n^3\}$ mit $\Delta^3 a_k = 6$. Insbesondere ist jede arithmetische Folge 1. Ordnung darstellbar durch die Gleichung

$$a_k = a + (k-1)d \quad \text{für } k \in I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

(a Anfangsglied und d Differenz der Folge).

Geometrische Folge. Bei ihr hat der Quotient a_{k+1}/a_k von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern stets den gleichen Wert q . Mit dem Anfangsglied a wird

$$a_k = aq^{k-1} \quad \text{für } k \in I = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Reihen. Ist (a_k) für $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ eine reelle Zahlenfolge, dann heißt der Ausdruck

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

endliche reelle Reihe mit den Gliedern $a_1, a_2, \dots, a_n$. a_1 bzw. a_n sind das Anfangs- bzw. Endglied.

Für das Rechnen mit dem Summenzeichen gelten die Regeln

$$\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \quad (\text{Zerlegung}),$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1+j}^{n+j} a_{k-j} \quad (\text{Indexverschiebung}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=1}^n 1 = n, \quad \sum_{k=m}^m a_k = a_m.$$

m und n sind natürliche Zahlen, wobei $1 \leq m < n$.

Arithmetische Reihen. Sie sind aus den Gliedern einer arithmetischen Folge aufgebaut. Die Summenformel für die arithmetische Reihe 1. Ordnung lautet

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-1)d]$$

$$= \sum_{k=1}^n [a + (k-1)d] = (n/2)[2a + (n-1)d].$$

Sonderfälle von arithmetischen Reihen 1., 2. und 3. Ordnung sind

$$\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6,$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = [n(n+1)/2]^2.$$

Geometrische Reihe. Sie besteht aus den Gliedern einer geometrischen Folge und hat die Summenformel

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \begin{cases} na & \text{für } q = 1, \\ a \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \end{cases}$$

(a Anfangsglied und q Quotient der Reihe). Wird a durch b^{n-1} und q durch a/b ersetzt, so ergibt sich für $a \neq b$

$$\begin{aligned} b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \dots + a^{n-2}b + a^{n-1} \\ = \sum_{k=1}^n a^{k-1}b^{n-k} = \frac{b^n - a^n}{b-a} \quad \text{oder} \\ b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \dots + a^{n-2}b + a^{n-1}). \end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz

Das Zeichen $n!$ (n -Fakultät) ist erklärt durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 0! = 1.$$

Es hat nur für nichtnegative ganze Zahlen einen Sinn. So ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Der Binomialkoeffizient $\binom{c}{k}$ (c über k), wobei c eine beliebige reelle Zahl und k eine nichtnegative ganze Zahl ist, ist erklärt durch

$$\binom{c}{k} = \frac{c(c-1)(c-2) \dots [c-(k-1)]}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$\binom{c}{0} = 1,$$

$$\text{z.B.} \quad \binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = -\frac{5}{16}.$$

Ist insbesondere c eine positive ganze Zahl n , so ergibt sich hieraus $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, für $n \geq k > 0$, $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{k} = 0$ für $0 < n < k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Bild 3. Pascalsches Zahlendreieck

Diese Binomialkoeffizienten werden anschaulich durch das Pascalsche Zahlendreieck wiedergegeben (Bild 3), aus dem sich

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

ablesen lassen. Hiermit kann durch vollständige Induktion der binomische Lehrsatz bewiesen werden.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad n \geq 0, \quad \text{ganz;}$$

z.B.

$$\begin{aligned} (a \pm b)^3 &= \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2(\pm b) + \binom{3}{2} a(\pm b)^2 + \binom{3}{3} (\pm b)^3 \\ &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3. \end{aligned}$$

2.1.8 Unendliche reelle Zahlenfolgen und Zahlenreihen

Eine reellwertige Funktion auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, durch die jedem $n \in \mathbb{N}$ genau eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird, heißt unendliche reelle Zahlenfolge auf $\mathbb{N}$ und wird dargestellt durch

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder } (a_1, a_2, a_3, \dots) \text{ oder } (a_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Es heißen $\mathbb{N}$ die Indexmenge und a_n das allgemeine Glied der Folge.

Grenzwerte. Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n) auf $\mathbb{N}$ oder (a_n) konvergiert gegen a oder ist eine a -Folge; in Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Konvergente Folgen mit dem Grenzwert 0 heißen Null-Folgen.

Beispiele: Die harmonische Folge $(1/n)$ für $n \in \mathbb{N}$ ist Nullfolge, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, da $|1/n| = 1/n < \varepsilon$ für alle $n > 1/\varepsilon = N$.

Die geometrische Folge (q^{n-1}) für $n \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$, $q \neq 0$ ist Nullfolge, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$, da $|q^{n-1}| = |q|^{n-1} < \varepsilon$ für alle $n > 1 + (\lg \varepsilon / \lg |q|) = N$ ($\lg |q| < 0$).

Folgen, die keinen Grenzwert haben, heißen divergent. Eine Folge (a_n) auf $\mathbb{N}$ heißt divergent gegen plus bzw. minus unendlich, in Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$, wenn es zu jeder Zahl $M \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $M < a_n$ bzw. $a_n < M$ für alle $n > N$. Jede monotone und beschränkte Folge hat einen Grenzwert. Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent, und gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $a_n \leq b_n$ für alle $n > N$, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ folgen $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca$ für jedes $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n = a/b, \quad b_n \neq 0.$$

Reihen

Ist (a_n) eine unendliche reelle Zahlenfolge auf $\mathbb{N}$, dann ist mit der Folge der Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

eine unendliche reelle Zahlenfolge (s_n) auf $\mathbb{N}$ erklärt, die unendliche reelle Zahlenreihe heißt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Konvergiert die Folge (s_n) gegen den Grenzwert s , so heißt die Reihe konvergent und s ist ihre Summe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Eine Reihe, die nicht konvergiert, heißt divergent.

Beispiel: Die unendliche geometrische Reihe. Ihre n -te Partialsumme

lautet $s_n = \sum_{k=1}^n a q^{k-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a/(1-q)$, und damit ergibt sich

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = a/(1-q) \quad \text{für } |q| < 1.$$

Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ lautet die

$$n\text{-te Partialsumme } s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ und damit}$$

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Für konvergente Reihen mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \text{ gilt: } \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cA;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B.$$

Konvergenzkriterium von Leibniz. Ist die Folge (a_n) auf $\mathbb{N}$ mit $a_n > 0$ eine monotone Nullfolge, dann ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1/n)$ ist konvergent, weil die Folge $(1/n)$ auf $\mathbb{N}$ eine monotone Nullfolge ist. Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1/n) = \ln 2$.

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent ist. Jede absolut konvergente Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ist konvergent, und es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt bezüglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- (konvergente) Majorante, wenn es einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \geq N$, und wenn sie konvergiert;
- (divergente) Minorante, wenn es einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a_n| \geq c_n$ für alle $n \geq N$, und wenn sie divergiert.

Majoranten- und Minorantenkriterium. Besitzt eine Reihe eine (konvergente) Majorante, dann ist sie absolut konvergent. Besitzt sie eine (divergente) Minorante, dann ist sie nicht absolut konvergent. Demnach sind Reihen mit nichtnegativen Gliedern, die eine (divergente) Minorante besitzen, divergent.

Die verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ ist für $\alpha > 1$ konvergent und für $\alpha \leq 1$ divergent.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n(n+1)}$ ist divergent, da wegen $1/\sqrt{n(n+1)} > 1/(n+1)$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)$ eine (divergente) Minorante ist.

Wurzel- und Quotientenkriterium. Existieren die Grenz-

werte $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\text{für } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \text{ konvergent und}$$

$$\text{für } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \text{ divergent.}$$

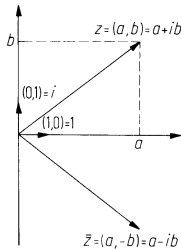


Bild 4. Gaußsche Zahlenebene

Existieren die Grenzwerte nicht oder sind sie gleich 1, dann sind die Kriterien auf die Reihe nicht anwendbar.

2.2 Komplexe Zahlen

2.2.1 Komplexe Zahlen und ihre geometrische Darstellung

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Erweiterung der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die komplexen Zahlen sind als geordnete Paare von reellen Zahlen definiert: $z = (a, b)$, wobei $a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ der Realteil von z und $b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil von z heißt. Sie können daher in einem ebenen Koordinatensystem (Bild 4) als Punkte der Gaußschen oder komplexen Zahlenebene oder als Zeiger dargestellt werden.

Die Gleichheit zweier komplexer Zahlen ist erklärt durch: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ genau dann, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. Ist $z = (a, b)$, dann heißt $\bar{z} = (a, -b)$ konjugiert zu z .

2.2.2 Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned} \text{Addition:} \quad z_1 + z_2 &= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation:} \quad z_1 \cdot z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2). \end{aligned}$$

Wegen $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$ gilt mit $(a, 0) = a$ und $(0, 1) = i$

$$z = (a, b) = a + bi, \quad \text{wobei } i^2 = i \cdot i = -1.$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} \text{Addition:} \quad (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i > i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Subtraktion:} \quad (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i > i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation:} \quad (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i > i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Division:} \quad \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} > i \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \\ & \quad a_2^2 + b_2^2 > 0 \end{aligned}$$

Konjugiert komplexe Zahl zu $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$. Es gilt

$$(\bar{\bar{z}}) = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2.$$

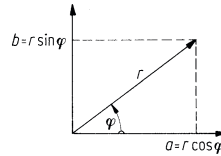


Bild 5. Polarkoordinaten

2.2.3 Darstellung in Polarkoordinaten.

Absoluter Betrag

Mit $a = r \cos \varphi$ und $b = r \sin \varphi$ ist $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Geometrisch (Bild 5) bedeutet r die Länge des Zeigers z und φ den Winkel zwischen dem Zeiger z und dem positiven Teil der reellen Achse. $r = |z|$ heißt absoluter Betrag oder Modul von z , $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$ das Argument von z . Es gilt

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos \varphi = a/r, \quad \sin \varphi = b/r.$$

Der Winkel φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ heißt Hauptwert von $\operatorname{Arg}(z)$.

Multiplikation und Division. Mit $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ gilt

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad \text{und}$$

$$z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Für $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ lautet die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$, und es gilt $z \cdot \bar{z} = r^2$ oder $r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|$.

Moivre'sche Formel. Die Multiplikationsregel liefert mit

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Absoluter Betrag. Es ist $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|,$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

2.2.4 Potenzen und Wurzeln

Ist $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ und a eine beliebige reelle Zahl, dann ist

$$\begin{aligned} z^a &= [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^a \\ &= r^a \{ \cos[a(\varphi + 2k\pi)] + i \sin[a(\varphi + 2k\pi)] \} \end{aligned}$$

mit $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$. Für $k=0$ ergibt sich der **Hauptwert** $z^a = r^a [\cos(a\varphi) + i \sin(a\varphi)]$.

Für $a > 0$ wird $0^a = 0$ festgesetzt. Ist $a = n$ eine ganze Zahl, dann ist $\cos[n(\varphi + 2k\pi)] = \cos(n\varphi)$ und $\sin[n(\varphi + 2k\pi)] = \sin(n\varphi)$, so daß gilt

$$z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $a = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ wird festgesetzt $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$, so daß

$$\begin{aligned} 2\sqrt[n]{z} &= z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \end{aligned}$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}.$$

Hierbei hat $\sqrt[n]{z}$ für $r > 0$ genau n verschiedene Werte mit dem gleichen Betrag $\sqrt[n]{r}$. Sie liegen in der Gaußschen Zahlenebene in den Eckpunkten eines regelmäßigen n -Ecks.

Beispiel: Wertemenge von $\sqrt[3]{-1}$. Wegen $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ ist

$$\sqrt[3]{-1} = 1^{1/3} (\cos \pi + i \sin \pi)^{1/3} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$$

für $k \in \{0, 1, 2\}$. Somit gilt $\sqrt[3]{-1} = \left\{ \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

2.3 Gleichungen

2.3.1 Algebraische Gleichungen

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$, wobei $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ Konstante (Koeffizienten der Gleichung) und z eine Variable (Unbekannte) bedeuten, heißt für $a_0 \neq 0$ eine algebraische Gleichung n -ten Grades.

Fundamentalsatz der Algebra. Jede algebraische Gleichung n -ten Grades ($n \geq 1$) hat in der Menge der komplexen Zahlen mindestens eine Lösung oder Wurzel. Sind die Koeffizienten reell, dann ist die zu einer Lösung konjugiert komplexe Zahl ebenfalls eine Lösung.

Lösungsformeln für algebraische Gleichungen

1. Grades (lineare Gleichung) $a_0 z + a_1 = 0$: $z = -a_1/a_0$.

2. Grades (quadratische Gleichung) $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$:

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Von der komplexen Wurzel $\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}$ ist stets der Hauptwert zu nehmen.

Für reelle Koeffizienten bestimmt die Diskriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$ der quadratischen Gleichung Anzahl und Art der Lösungen, und zwar für

$$\Delta > 0 \text{ zwei reelle } (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2})/2a_0,$$

$$\Delta = 0 \text{ eine reelle } -a_1/2a_0,$$

$$\Delta < 0 \text{ zwei konjugiert komplexe}$$

$$(-a_1 \pm i \sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2})/2a_0.$$

Beispiel: Die Gleichung $4z^2 + 4z + 5 = 0$ hat die Diskriminante $\Delta = -4$, und ihre Lösungsformel lautet

$$z = -(1/2) \pm i.$$

3. Grades (kubische Gleichung) $a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$: Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 werden als reell vorausgesetzt. Die Gleichung wird durch die Substitution $z = y - (a_1/3a_0)$ und anschließende Division durch a_0 auf die reduzierte Form

$$y^3 + py + q = 0$$

gebracht. Diese Gleichung 3. Grades hat die Lösungsformeln $y = u + v$, $y = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$, $y = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$, wobei

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} \text{ und}$$

$$v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}},$$

$$\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und}$$

$$\varepsilon^2 = \cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Von den komplexen Wurzeln ist stets der Hauptwert zu nehmen. Die Gleichung $y^3 + py + q = 0$ hat für

$$(q/2)^2 + (p/3)^3 > 0 \text{ eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen,}$$

$$(q/2)^2 + (p/3)^3 = 0 \text{ zwei verschiedene reelle Lösungen, wobei } p \neq 0 \text{ und } q \neq 0,$$

$$(q/2)^2 + (p/3)^3 < 0 \text{ drei verschiedene reelle Lösungen.}$$

Beispiel: Die Gleichung $z^3 + 9z^2 + 18z + 9 = 0$ geht durch die Substitution $z = y - 3$ über in

$$y^3 - 9y + 9 = 0.$$

Für die einzelnen Ausdrücke ergeben sich die Werte

$$(q/2)^2 + (p/3)^3 = -27/4, \quad \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} = 3\sqrt{3}i/2,$$

$$-q/2 \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} = \sqrt{3}(-\sqrt{3}/2 \pm 1/2i)$$

$$= \sqrt{3}[\cos(\pm 150^\circ) + i \sin(\pm 150^\circ)]$$

und damit

$$u = \sqrt{3}(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ), \quad v = \sqrt{3}(\cos(-50^\circ) + i \sin(-50^\circ));$$

$$\varepsilon u = \sqrt{3}(\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ), \quad \varepsilon v = \sqrt{3}(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ);$$

$$\varepsilon^2 u = \sqrt{3}(\cos(-70^\circ) + i \sin(-70^\circ)),$$

$$\varepsilon^2 v = \sqrt{3}(\cos(-170^\circ) + i \sin(-170^\circ)).$$

Für y ergeben sich dann $y = 2\sqrt{3}\cos 50^\circ$, $y = 2\sqrt{3}\cos 170^\circ$, $y = 2\sqrt{3}\cos 70^\circ$, woraus wegen $z = y - 3$ die Formeln für die Ausgleichsgleichung folgen.

2.3.2 Polynome

$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ mit $a_0 \neq 0$. P_n heißt Polynom oder ganze rationale Funktion n -ten Grades. Die Konstanten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ heißen die Koeffizienten und n der Grad des Polynoms, $n = \text{Grad } P_n$. Die Koeffizienten sind hier stets reell, während für die Variable z auch komplexe Zahlen zugelassen werden. Beim Null-Polynom sind alle Koeffizienten Null. Die Werte z , die Lösungen der algebraischen Gleichung n -ten Grades $P_n(z) = 0$ sind, heißen Nullstellen des Polynoms P_n .

Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren. Für eine beliebige Zahl λ läßt sich das Polynom auch darstellen durch $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - \lambda) + P_n(\lambda)$. Hierbei ist $Q_{n-1}(z)$ ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades.

$$Q_{n-1}(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-2} z + b_{n-1}.$$

Seine Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ lassen sich durch die Koeffizienten von $P_n(z)$ und durch λ gemäß den Rekursionsformeln ausdrücken.

$$b_0 = a_0, \quad b_k = b_{k-1} \lambda + a_k, \quad \text{wobei } b_n = P_n(\lambda).$$

Sie können leicht mit Hilfe des Horner-Schemas berechnet werden (s. A 10.4.4).

Zerlegungssatz: Jedes Polynom n -ten Grades mit $n \geq 1$ läßt sich als Produkt von n Linearfaktoren und dem Faktor a_0 darstellen.

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = a_0(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n).$$

Das System der Zahlen $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, die nicht notwendig voneinander verschieden sind, heißt ein vollständiges System von Nullstellen des Polynoms P_n .

Beispiel: Das Polynom $P_4(z) = (1/2)z^4 - (3/2)z^3 + 2z^2 - 4$ hat die vier Nullstellen $z_1 = -1, z_2 = 2, z_3 = 1 + i\sqrt{3}, z_4 = 1 - i\sqrt{3}$. Seine Produktdarstellung mit Linearfaktoren lautet demnach

$$P_4(z) = (1/2)(z + 1)(z - 2)[z - (1 + i\sqrt{3})][z - (1 - i\sqrt{3})].$$

Aus dem Zerlegungssatz folgt: Ein Polynom n -ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Hat es mehr, so ist es das Nullpolynom.

Identitätssatz: Zwei Polynome sind dann und nur dann identisch gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind.

Dubbel Mathematik

Eine kompakte Ingenieurmathematik zum
Nachschlagen

Jarecki, U.; Schulz, H.-J.

2011, X, 120 S. 100 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-22058-6