

2. Verformungen. Verzerrungen

2.1 Verschiebung und Verformung beim Zugstab

Der einfachste Fall von Verformung ist bei einem Zugstab zu beobachten. Abb. 2.1 dient zur Erläuterung. Der Zugstab trägt zwei Marken, die vor der Verformung den Abstand ℓ haben. Ihre Lage vor der Verformung wird durch die Koordinaten $x = 0$ und $x = \ell$ auf einer x -Achse angegeben, die raumfest, d.h. nicht auf dem Stab fest ist. Als Ergebnis irgendwelcher physikalischer Einwirkungen, die hier nicht interessieren (Bewegungen, Temperaturänderungen, Kräfte), verschieben sich die Punkte des Stabes längs der x -Achse. Dabei kann sich die Entfernung der Meßmarken ändern, sie muß sich aber nicht ändern. Diese Überlegung zeigt, daß man zwischen Verschiebungen und Verformungen unterscheiden muß. Als Maß für die Verschiebung wird die Funktion $u(x)$ eingeführt. Sie ist definiert als die Verschiebung in x -Richtung, die ein Punkt erfährt, der sich ursprünglich an der Stelle x befunden hat. In Abb. 2.1 sind die Verschiebungen $u(0)$ und $u(\ell)$ der beiden Meßmarken des Stabes gekennzeichnet. Die hier interessierende Verformung, die Verlängerung $\Delta\ell$ der Entfernung der Meßmarken, ist die Differenz

$$\Delta\ell = u(\ell) - u(0) \quad (2.1)$$

der Verschiebungen.

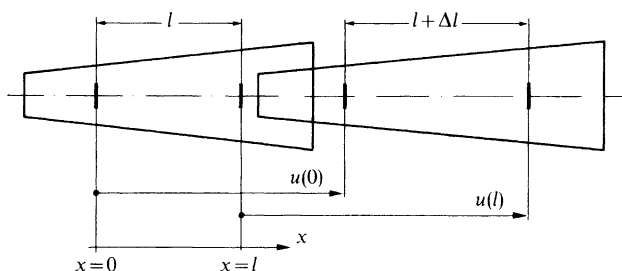


Abb. 2.1. Ein Stab mit zwei Meßmarken bei $x = 0$ und bei $x = \ell$ in einer Ausgangslage (links) und nach einer Verschiebung und Verformung entlang der (unbeweglichen) x -Achse. Verschiebungen $u(0)$ und $u(\ell)$ und Längenänderung $\Delta\ell$

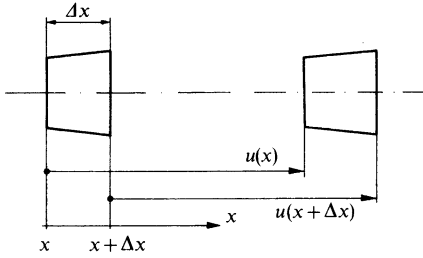


Abb. 2.2. Dieselbe Darstellung wie in Abb. 2.1. Diesmal liegen die Meßmarken auf dem Stab bei x (beliebig) und bei $x + \Delta x$

Man betrachte nun zwei Punkte des Stabes, die sich ursprünglich an den beliebig gewählten, benachbarten Stellen x und $x + \Delta x$ befunden haben. Das zwischen ihnen liegende Stabstück der ursprünglichen Länge Δx erfährt eine Verlängerung Δu , die sich, wie $\Delta \ell$ in (2.1), als Differenz der Verschiebungen darstellt:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x).$$

In Abb. 2.2 werden die Größen dieser Gleichung gezeigt. Das Verhältnis aus Verlängerung und ursprünglicher Länge ist

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ geht dieses Verhältnis über in die Ableitung du/dx . Sie wird *Dehnung* $\epsilon(x)$ *des Stabes an der Stelle* x genannt:

$$\epsilon(x) = \frac{du}{dx}. \quad (2.2)$$

Die Dehnung spielt in der Elastizitätstheorie und in der Festigkeitslehre eine wichtige Rolle, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird. Es ist deshalb sinnvoll, Aussagen über Verformungen mit Hilfe der Funktion $\epsilon(x)$ zu machen. Die Verlängerung $\Delta \ell$ des Abstandes der Meßmarken ist mit (2.1)

$$\Delta \ell = u(\ell) - u(0) = \int_{x=0}^{\ell} \frac{du}{dx} dx = \int_0^{\ell} \epsilon(x) dx. \quad (2.3)$$

Es kann der Sonderfall eintreten, daß $\epsilon(x)$ unabhängig von x ist, d.h. $\epsilon(x) \equiv \epsilon = \text{const.}$ Dann ist die Verlängerung

$$\Delta \ell = \epsilon \int_0^{\ell} dx = \epsilon \ell,$$

woraus sich

$$\epsilon = \Delta \ell / \ell \quad (2.4)$$

ergibt. Diese Gleichung darf nicht als allgemeingültige Definition der Dehnung verstanden werden! Wenn $\epsilon(x)$ nicht konstant ist, liefert die Gleichung nur einen Mittelwert für $\epsilon(x)$. Die allgemeingültige Definition der Dehnung ist in (2.2) angegeben.

2.2 Verschiebungen und Verformungen in einer Ebene

Verschiebungen und Verformungen in nur einer Koordinatenrichtung, wie beim Zugstab, sind ein einfacher Sonderfall. Im allgemeinen Fall hat man es mit Verschiebungen und Verformungen in allen drei Koordinaten des Raumes zu tun. Alle wesentlichen Unterschiede zum eindimensionalen Fall werden schon in dem technisch besonders wichtigen Fall deutlich, in dem Verschiebungen und Verformungen nur in einer Ebene auftreten. Zur Veranschaulichung stelle man sich ein ebenes Blech vor, das an einer Seite festgehalten ist und das durch irgendwelche physikalischen Ursachen so verformt wird, daß alle Punkte in der Blechebene bleiben. Ein auf dem unverformten Blech markiertes Rechteck wird bei diesem Vorgang parallel zu sich verschoben, gedreht und in seiner Form verändert. Abb. 2.3 zeigt die Situation vor und nach der Verformung.

Einschränkende Voraussetzungen: Um die mathematische Beschreibung der Verformung zu vereinfachen, werden folgende Einschränkungen vorausgesetzt:

1. Alle Winkeldrehungen sind sehr klein
2. Jede auf dem Körper markierte Linie darf sich nur so verformen, daß ihre Längenabnahme oder Zunahme im Verhältnis zur Länge vor der Verformung sehr klein ist.

Bei Metallen, Glas, Stein, Holz und bei vielen anderen Werkstoffen kann man z.B. voraussetzen, daß das in (2) genannte Verhältnis kleiner als 0,01 ist, weil für größere Längenänderungen Temperaturänderungen und/oder Kräfte nötig sind, denen der Werkstoff ohne schädigende Veränderungen gar nicht standhalten kann. Die Einschränkungen schließen nicht aus, daß der untersuchte Körper große Parallelverschiebungen (translatorische Verschiebun-

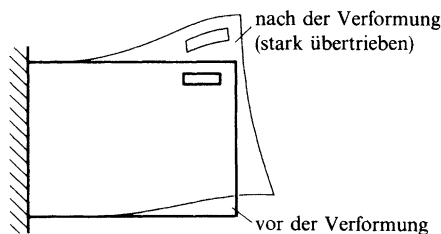


Abb. 2.3. Große ebene Verformung eines Körpers mit aufgezeichnetem Rechteck

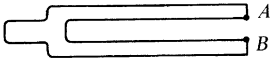


Abb. 2.4. Die Entfernung der Punkte A und B kann sich stark ändern, ohne daß irgendeine ganz im Körper liegende Linie von A nach B ihre Länge stark ändert

gen) ausführt. Sie schließen auch nicht aus, daß z.B. bei der schwingenden Stimmgabel in Abb. 2.4 die Punkte A und B ihre Entfernung gegenüber der Ruhelage stark verändern, denn die gerade Verbindungsline der Punkte kann nicht auf dem Körper markiert werden. Dieses Beispiel zeigt, daß große Formänderungen der Art, wie sie z.B. als Durchbiegungen von Stäben auftreten, zugelassen werden.

2.2.1 Dehnungen und Scherung

Nach diesen Vorbemerkungen wird noch einmal ein Rechteck betrachtet, das auf dem Blech in Abb. 2.3 vor der Verformung aufgezeichnet wird. Seine Kanten der endlichen Längen Δx und Δy sollen vor der Verformung parallel zu den Achsen eines raumfesten x, y -Systems liegen (Abb. 2.5). Nach der Verformung ist das Rechteck beliebig parallel verschoben, wenig gedreht und wenig verformt. Es hat dann eine krummlinig begrenzte Form ohne rechte Winkel in den Ecken. Wenn man das Ausgangsrechteck immer kleiner macht, erhält man nach der Verformung immer genauer ein Parallelogramm (um das zu sehen, überdecke man ein großes Rechteck mit einem Raster aus vielen kleinen und zeichne das verformte Raster in das krummlinig verformte Rechteck). In Abb. 2.5 ist ein Parallelogramm gezeichnet, weil später der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ vollzogen werden soll. Drehung und Verformung sind stark übertrieben dargestellt.

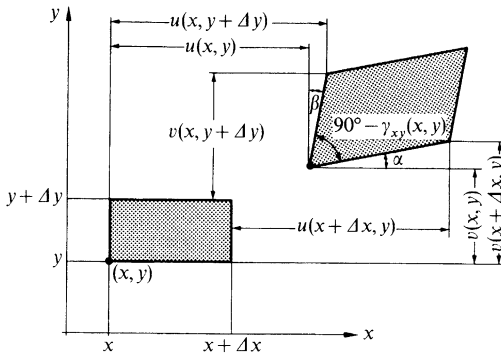


Abb. 2.5. Ebene Verschiebungen u und v aller vier Ecken eines ursprünglich rechteckigen Körperelements. Der Verzerrungszustand im Punkt (x, y) wird durch die Dehnungen ϵ_x und ϵ_y und die Scherung γ_{xy} beschrieben

Die Ecken des unverformten Rechtecks haben von links unten angefangen und im Uhrzeigersinn fortschreitend die Koordinaten (x, y) , $(x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ bzw. $(x + \Delta x, y)$. Jede Ecke wird in x - und in y -Richtung verschoben. Diese Verschiebungen werden u bzw. v genannt. Beide sind Funktionen der Koordinaten x und y , an denen sich der verschobene Punkt ursprünglich befunden hat. So sind z.B. $u(x + \Delta x, y)$ und $v(x + \Delta x, y)$ die Verschiebungen des Punktes rechts unten im Rechteck. Für drei Eckpunkte sind Verschiebungen in Abb. 2.5 angegeben.

Als Maße für die Verformung des Rechtecks interessieren zunächst die Verlängerungen seiner Seiten. Wie beim Zugstab werden sie als Differenzen von Verschiebungen ausgedrückt. Die Seite der Länge Δx verlängert sich um

$$\Delta u = \frac{1}{\cos \alpha} [u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] \approx u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$$

und die Seite der Länge Δy um

$$\Delta v \approx v(x, y + \Delta y) - v(x, y).$$

Die Verhältnisse der Verlängerungen zu den ursprünglichen Längen sind

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}.$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ streben diese Verhältnisse gegen die partiellen Ableitungen $\partial u / \partial x$ bzw. $\partial v / \partial y$. Sie werden Dehnung $\epsilon_x(x, y)$ in x -Richtung bzw. Dehnung $\epsilon_y(x, y)$ in y -Richtung genannt, beide als Funktionen von x und y :

$$\epsilon_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Beide Größen werden besonders anschaulich, wenn man sich in $\epsilon_x(x, y)$ die Koordinate y als Konstante und in $\epsilon_y(x, y)$ die Koordinate x als Konstante vorstellt (das tut man ja auch, wenn man die partiellen Ableitungen bildet). Dann hat ϵ_x dieselbe Bedeutung wie ϵ in (2.2) beim Zugstab, und ϵ_y hat diese Bedeutung für die Querrichtung. Aus der Einschränkung (2) auf S. 30 folgt, daß $\epsilon_x(x, y)$ und $\epsilon_y(x, y)$ für alle x und y sehr kleine Zahlen sind.

In Abb. 2.5 interessiert außer Längenänderungen auch die Änderung der ursprünglich rechten Winkel. Als Maß für diese Änderung wird die Verkleinerung des ursprünglich rechten Winkels an der Ecke mit den Koordinaten (x, y) gewählt, d.h. die *Abnahme des Winkels zwischen den Parallelen zur positiven x -Achse und zur positiven y -Achse*. Dieses Maß wird *Scherung* γ_{xy} genannt. Weil die x -Achse und die y -Achse in der Definition gleiche Rollen spielen, kann man auch γ_{yx} sagen. Wie ϵ_x und ϵ_y ist auch γ_{xy} eine Funktion der Koordinaten x und y , bei denen sich der betrachtete Punkt vor der Verformung befunden hat: $\gamma_{yx}(x, y) = \gamma_{xy}(x, y)$. Für Dehnungen und Scherungen wird als Obergriff die Bezeichnung *Verzerrung* gebraucht.

In Abb. 2.5 ist $\gamma_{xy}(x, y)$ eingezeichnet. In diesem Beispiel ist der ursprünglich rechte Winkel kleiner geworden, so daß $\gamma_{xy}(x, y)$ positiv ist. Man kann γ_{xy} als Summe der Winkel α und β ausdrücken. Wegen der Kleinheit der Winkel gilt $\alpha \approx \tan \alpha$ und $\beta \approx \tan \beta$. Aus dem Dreieck unter dem Parallelogramm liest man ab:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x + u(x + \Delta x, y) - u(x, y)} = \frac{\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}}{1 + \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}}.$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ wird daraus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \epsilon_x(x, y)}$$

oder, da $\epsilon_x(x, y)$ sehr klein gegen 1 ist,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \approx \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ebenso findet man am Dreieck mit dem Winkel β

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y + v(x, y + \Delta y) - v(x, y)} = \frac{\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}}{1 + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}},$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \epsilon_y(x, y)} \approx \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Damit ist die Scherung an der Stelle (x, y) :

$$\gamma_{xy}(x, y) = \gamma_{yx}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.6)$$

In den meisten technisch interessierenden Fällen ist γ_{xy} dem Betrag nach kleiner als 0,01 im Bogenmaß.

2.2.2 Dehnungen und Scherung in einem gedrehten Koordinatensystem

Man muß sich jetzt die Frage vorlegen, ob der Verzerrungszustand des Blechs an einer bestimmten Stelle (x, y) eindeutig beschrieben ist, wenn die drei Funktionen $\epsilon_x(x, y)$, $\epsilon_y(x, y)$ und $\gamma_{xy}(x, y)$ an dieser Stelle bekannt sind. Um diese Frage zu beantworten, muß man ein ξ, η -Koordinatensystem einführen,

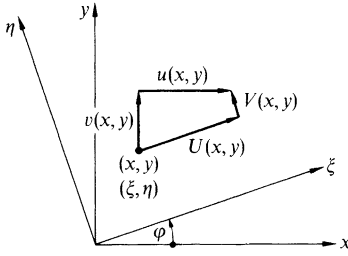


Abb. 2.6. Ein Körperpunkt mit den Koordinaten (x, y) und (ξ, η) und seine Verschiebungs Koordinaten in beiden Koordinatensystemen

das gegen das x, y -Koordinatensystem um einen Winkel φ gedreht ist. In diesem Koordinatensystem muß man die Dehnungen ϵ_ξ und ϵ_η und die Scherung $\gamma_{\xi\eta}$ berechnen. Sie sind in diesem Koordinatensystem genauso definiert, wie ϵ_x , ϵ_y und γ_{xy} im x, y -System. Wenn sich ϵ_ξ und ϵ_η und $\gamma_{\xi\eta}$ eindeutig als Funktionen von ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} und φ ausdrücken lassen, dann lautet die Antwort auf die Frage ja. Die Frage erscheint sehr abstrakt. Sie gewinnt aber eine große praktische Bedeutung, wenn man folgendes bedenkt. In der Praxis müssen Verzerrungen ϵ_x , ϵ_y und γ_{xy} an verformten Körpern meßtechnisch bestimmt werden. Für Dehnungen stehen einfache und sehr genaue Meßverfahren zur Verfügung. Dagegen lassen sich sehr kleine Winkel γ_{xy} nur mit großem Aufwand und ungenau messen. Ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit besteht darin, daß man Dehnungen nicht nur in x - und in y -Richtung mißt, sondern auch in einer gegen die beiden Achsen gedrehten Richtung. Wenn die Dehnung in dieser Richtung eine eindeutige Funktion von ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} und dem Drehwinkel ist, dann kann man daraus rückwärts γ_{xy} bestimmen. Mit dieser Motivation wird nun die anfangs gestellte Aufgabe untersucht.

Abb. 2.6 zeigt das x, y -System und ein um den Winkel φ gedrehtes ξ, η -System. Der Winkel φ ist positiv bei einer Drehung von der x -Achse aus im Rechtsschraubensinn um die z -Achse. Der mit (x, y) bezeichnete Punkt soll den linken unteren Eckpunkt des unverformten Rechtecks von Abb. 2.5 bezeichnen. Im gedrehten System hat er die Koordinaten (ξ, η) . Zwischen den beiden Koordinatenpaaren bestehen die einfach ablesbaren Beziehungen

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (2.7)$$

$$x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \quad (2.8)$$

Der Punkt wird bei der Verformung in x - und in y -Richtung um Stücke $u(x, y)$ bzw. $v(x, y)$ verschoben. Seine Verschiebungen in ξ - und in η -Richtung seien $U(x, y)$ bzw. $V(x, y)$ genannt. Sie sind in Abb. 2.6 ebenfalls eingezeichnet. Gl. (2.7) gilt auch für die Verschiebungen:

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= u(x, y) \cos \varphi + v(x, y) \sin \varphi, \\ V(x, y) &= -u(x, y) \sin \varphi + v(x, y) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Den Definitionen für Dehnungen und Scherungen im x, y -System, nämlich

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.10)$$

entsprechen im ξ, η -System die Definitionen

$$\epsilon_\xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \epsilon_\eta = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Damit sind alle für die Umrechnung erforderlichen Beziehungen zusammengestellt. Für ϵ_ξ erhält man nach der Kettenregel zunächst

$$\epsilon_\xi = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Darin ist mit (2.9)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi.$$

Weiterhin ist mit (2.8)

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin \varphi.$$

Also erhält man

$$\begin{aligned} \epsilon_\xi &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi \right) \sin \varphi \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Wegen (2.10) ist das

$$\epsilon_\xi = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (2.11)$$

Die Dehnung ϵ_η erhält man, wenn man in ϵ_ξ den Winkel φ durch $\varphi + \pi/2$ ersetzt. Die Formel wird nicht weiter gebraucht.

Nach demselben Verfahren, das ϵ_ξ lieferte, erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\eta} &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ &= \left[\left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi \right) \cos \varphi + \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi \right) \sin \varphi \right] \\ &\quad + \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi \right) \sin \varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi \right) \cos \varphi \right] \\ &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) 2 \sin \varphi \cos \varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

oder

$$\gamma_{\xi\eta} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) 2 \sin \varphi \cos \varphi + \gamma_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (2.12)$$

Die Gleichungen (2.11) und (2.12) beantworten bereits die eingangs gestellte Frage: ϵ_ξ , ϵ_η und $\gamma_{\xi\eta}$ lassen sich in der Tat eindeutig als Funktionen von ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} und φ darstellen. Zwei Dehnungen und eine Scherung beschreiben also den ebenen Verzerrungszustand vollständig und eindeutig.

2.2.3 Der Mohrsche Dehnungskreis

Für die praktische Anwendung der Beziehungen für ϵ_ξ und $\gamma_{\xi\eta}$ werden noch die Additionstheoreme

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

eingeführt. Dann nehmen (2.11) und (2.12) die Formen an:

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\varphi, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos 2\varphi. \quad (2.14)$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die Gln. (1.25) und (1.26) für Spannungen beim ebenen Spannungszustand. Die Dehnungen entsprechen den Normalspannungen, und die halbe Scherung entspricht der Schubspannung. Mit dieser Analogie haben sich die Verzerrungen ϵ_x , ϵ_y und $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$ als Koordinaten eines Tensors 2. Stufe erwiesen. Man nennt ihn den *Verzerrungstensor*.

Nach denselben Konstruktionsvorschriften, die in Abb. 1.12 bis Abb. 1.14 erläutert wurden, kann man Dehnungen und halbe Scherungen für gedrehte Achsensysteme aus einem Mohrschen Dehnungskreis ablesen. Er wird in einem Diagramm mit den Achsenbezeichnungen ϵ_ξ und $\frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}$ gezeichnet (Abb. 2.7). Für jeden ebenen Verzerrungszustand gibt es ein Dehnungshauptachsensystem, in dem die Dehnungen extremale Werte annehmen, während die Scherung null ist. Die Lage der Hauptachsen im x, y -System wird durch Winkel φ_1 und φ_2 angegeben, und die Hauptdehnungen werden ϵ_1 und ϵ_2 genannt. Diese Größen sind aus dem Mohrschen Kreis ablesbar. Man kann sie auch aus Formeln berechnen, die analog zu (1.28) und (1.31) sind:

$$\tan 2\varphi_{1,2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}, \quad (2.15)$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2}. \quad (2.16)$$

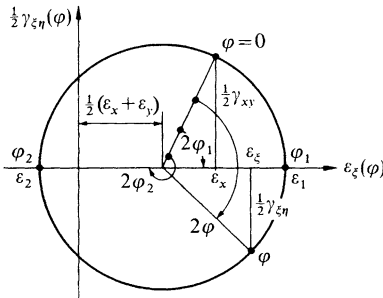


Abb. 2.7. Der Mohrsche Dehnungskreis entsteht aus dem Mohrschen Spannungskreis in Abb. 1.12a und Abb. 1.14, wenn man σ durch ϵ und τ durch $\gamma/2$ ersetzt

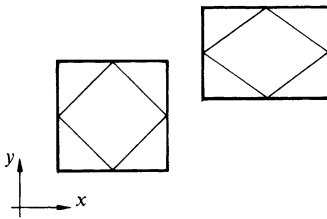


Abb. 2.8. Wenn das auf einem Körper markierte, dick gezeichnete Quadrat sich zu dem kantenparallelen Rechteck verformt, dann liegen die Kanten in den Dehnungshauptachsen. Das unter 45° gedrehte, dünn ausgezogene Quadrat erfährt bei demselben Verzerrungszustand die größtmögliche Scherung (Hauptscherung)

Abb. 2.8 veranschaulicht den Begriff Dehnungshauptachsen. Sie zeigt links in einem x, y -System in dicken Linien ein infinitesimal kleines Quadrat vor der Verformung. Nach der Verformung (rechts) sind die rechten Winkel erhalten geblieben. Die Scherung γ_{xy} ist also null. Daraus schließt man, daß die Kanten des Quadrats die Richtungen der Dehnungshauptachsen haben. Eine Seite des Rechtecks ist länger und die andere ist kürzer als die Seite des ursprünglichen Quadrats. Daran erkennt man, daß eine Hauptdehnung positiv und eine negativ ist. Dem Quadrat ist in dünnen Linien ein weiteres Quadrat eingeschrieben. Seine Seiten sind um 45° gegen die Dehnungshauptachsen geneigt. Aus dem Mohrschen Kreis ergibt sich, daß zu diesen Achsen die maximale bzw. die minimale Scherung gehört. Dem entspricht die starke Abnahme bzw. Zunahme der rechten Winkel bei der Verformung. Entsprechend der Gl. (1.32) für die Hauptschubspannung τ_{max} gilt für diese sog. Hauptscherung:

$$\gamma_{max} = |\epsilon_1 - \epsilon_2|. \quad (2.17)$$

2.2.4 Dehnungsmessung

Dehnungen werden in der Praxis mit einem sog. Dehnungsmeßstreifen gemessen. Das ist ein Kunststoffstreifen, in den in vielen engen Mäanderwindungen ein aus Metallfolie herausgeätzter elektrischer Leiter eingebettet ist (Abb. 2.9). Das von den Leiterbahnen eingenommene Rechteck ist in beiden Richtungen nur wenige Millimeter lang. Der Streifen wird fest auf den Körper geklebt, dessen Dehnungen man messen will, so daß er dieselben ebenen Verzerrungen erfährt wie der Körper an dieser Stelle. Wenn eine Dehnung ϵ_x in Richtung der eingezeichneten x -Achse auftritt, wird der elektrische Leiter etwas länger. Dabei wird er zugleich etwas dünner (diese Erscheinung wird in Abschnitt 3.3 erklärt; hier mag die Feststellung genügen). Verlängerung und Dickenabnahme erhöhen den elektrischen Widerstand. Darauf beruht das Meßverfahren. Man legt eine elektrische Spannung an die Enden und mißt die Stromstärke. Nach einem Eichversuch kann man die Größe von ϵ_x direkt am



Abb. 2.9. Dehnungsmeßstreifen

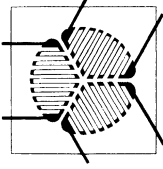


Abb. 2.10. Dehnungsmeßstreifenrosette mit $\alpha = 60^\circ$

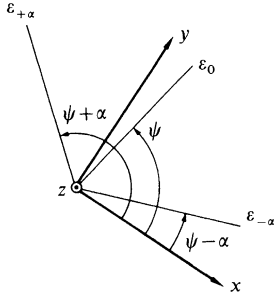


Abb. 2.11. Die Rosette mißt die Dehnungen $\epsilon_{-\alpha}$, ϵ_0 und $\epsilon_{+\alpha}$ in bekannten Richtungen auf einem Körper. Diese Richtungen werden in dem noch unbekannten x, y -System der Dehnungshauptachsen durch den Winkel ψ gekennzeichnet

Amperemeter ablesen. Eine Dehnung in y -Richtung und eine Scherung γ_{xy} haben auf den Widerstand keinen Einfluß. Es gibt sog. Dehnungsmeßstreifenrosetten, auf denen drei Leiterbahnen so angeordnet sind, daß Dehnungen in drei Richtungen gemessen werden, die paarweise um denselben Winkel α auseinanderliegen (Abb. 2.10). Üblich sind $\alpha = 45^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$. Aus den drei Meßwerten und dem Winkel α können sowohl die Lage der Dehnungshauptachsen als auch die Hauptdehnungen berechnet werden. Das wird im folgenden gezeigt.

In Abb. 2.11 sind in dünnen Linien die drei Meßrichtungen und dick das in seiner Lage noch unbekannte System der Dehnungshauptachsen gezeichnet. Die Hauptachsen werden mit x bzw. y bezeichnet. Dann ist

$$\epsilon_x = \epsilon_1, \quad \epsilon_y = \epsilon_2, \quad \gamma_{xy} = 0,$$

wobei ϵ_1 und ϵ_2 noch unbekannt sind. Der ebenfalls unbekannte Winkel, um den die mittlere Meßrichtung aus der x -Achse herausgedreht ist, sei ψ genannt. Er ist positiv bei einer Drehung von der x -Achse aus im Rechtsschraubensinn um die z -Achse. Diese Vereinbarung liegt allen Beziehungen im Mohrschen Kreis zugrunde. Die beiden äußeren Meßrichtungen sind dann um $\psi - \alpha$ bzw. um $\psi + \alpha$ gegen die x -Achse gedreht. Die gemessenen Dehnungen werden ϵ_0 für die mittlere und $\epsilon_{-\alpha}$ bzw. $\epsilon_{+\alpha}$ für die äußeren Meßrichtungen genannt. Sie sind mit den Hauptdehnungen im x, y -System durch (2.13) verknüpft:

$$\begin{aligned} \epsilon_{-\alpha} &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos(2\psi - 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\cos 2\psi \cos 2\alpha + \sin 2\psi \sin 2\alpha), \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{+\alpha} &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos(2\psi + 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\cos 2\psi \cos 2\alpha - \sin 2\psi \sin 2\alpha).\end{aligned}$$

Das sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten ϵ_1 , ϵ_2 und ψ . Mit den Abkürzungen

$$A = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad B = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\psi, \quad C = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin 2\psi \quad (2.18)$$

lauten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_{-\alpha} &= A + B \cos 2\alpha + C \sin 2\alpha, \\ \epsilon_0 &= A + B, \\ \epsilon_{+\alpha} &= A + B \cos 2\alpha - C \sin 2\alpha.\end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha} &= 2C \sin 2\alpha, \\ 2\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha} &= 2B(1 - \cos 2\alpha).\end{aligned}\right\} \quad (2.20)$$

Division dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\frac{\epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}{2\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}} = \frac{C}{B} \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}.$$

Aus (2.18) folgt $C/B = \tan 2\psi$ und folglich

$$\tan 2\psi = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \frac{\epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}{2\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}. \quad (2.21)$$

Von den zwei um 90° verschiedenen Lösungen dieser Gleichung für ψ wählt man willkürlich eine aus. Weiterhin folgt aus (2.18), (2.19) und (2.20)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) &= A = \epsilon_0 - B = \epsilon_0 - \frac{2\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}{2(1 - \cos 2\alpha)} = \frac{\epsilon_{-\alpha} + \epsilon_{+\alpha} - 2\epsilon_0 \cos 2\alpha}{2(1 - \cos 2\alpha)}, \\ \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) &= \frac{C}{\sin 2\psi} = \frac{\epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}{2 \sin 2\alpha \sin 2\psi}.\end{aligned}$$

Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert schließlich die gesuchten Hauptdehnungen:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_{-\alpha} + \epsilon_{+\alpha} - 2\epsilon_0 \cos 2\alpha}{2(1 - \cos 2\alpha)} \pm \frac{\epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}{2 \sin 2\alpha \sin 2\psi}. \quad (2.22)$$

Darin ist $\sin 2\psi$ die Größe aus (2.21). Mit diesen Ergebnissen für ϵ_1 , ϵ_2 und ψ ist die Aufgabe gelöst.

Beispiel 2.2-1

Mit einer Dehnungsmeßstreifenrosette mit dem Winkel $\alpha = 45^\circ$ werden die Dehnungen $\epsilon_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_{-\alpha} = 2,27 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon_{+\alpha} = 5,73 \cdot 10^{-5}$ gemessen. Man zeichne Abb. 2.11 für diesen konkreten Fall. Wie groß ist die maximale Scherung im Bogenmaß und im Gradmaß?

Lösung: (2.21) und (2.22) vereinfachen sich mit $\alpha = 45^\circ$ zu

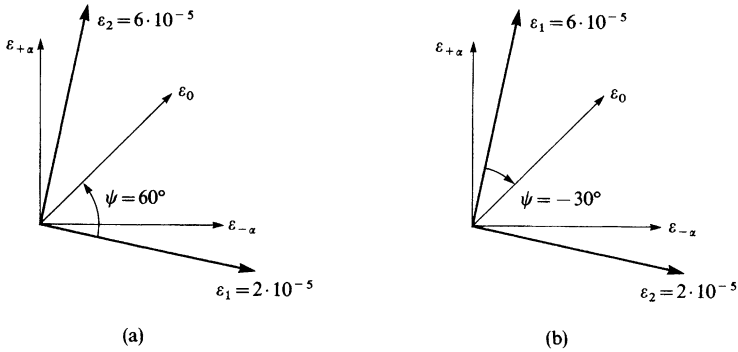


Abb. 2.12. Dehnungshauptachsen und Hauptdehnungen ϵ_1, ϵ_2 im System der Meßachsen für die Lösungen $\psi = 60^\circ$ (a) und $\psi = -30^\circ$ (b). Die Bilder unterscheiden sich nur durch die Bezeichnung der Hauptdehnungen

$$\tan 2\psi = \frac{\epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}{2\epsilon_0 - \epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}} = \frac{2,27 - 5,73}{10 - 2,27 - 5,73} = -1,73$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_{-\alpha} + \epsilon_{+\alpha}}{2} \pm \frac{\epsilon_{-\alpha} - \epsilon_{+\alpha}}{2 \sin 2\psi} = 4 \cdot 10^{-5} \pm \frac{-1,73}{\sin 2\psi} \cdot 10^{-5}.$$

Die erste Gleichung hat die Lösungen $\psi = 60^\circ$ und $\psi = -30^\circ$. Sei willkürlich $\psi = 60^\circ$. Dann erhält man aus der zweiten Gleichung $\epsilon_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ und $\epsilon_2 = 6 \cdot 10^{-5}$. Damit wird Abb. 2.12a gezeichnet. Die Lösung $\psi = -30^\circ$ liefert denselben Verzerrungszustand. Mit ihr erhält man nämlich $\epsilon_1 = 6 \cdot 10^{-5}$ und $\epsilon_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ und damit Abb. 2.12b. Das ist derselbe Sachverhalt. Die maximale Scherung ist $\gamma_{max} = |\epsilon_1 - \epsilon_2|/2 = 4 \cdot 10^{-5} = 0,0023^\circ$. Sie tritt in einem Achsensystem auf, das gegen das Hauptachsensystem um 45° gedreht ist.

2.3 Verschiebungen und Verformungen im allgemeinen räumlichen Fall

Die Methoden zur Beschreibung des ebenen Verzerrungszustandes lassen sich ohne Mühe für den allgemeinen räumlichen Fall verallgemeinern. Auch hier sollen die einschränkenden Voraussetzungen von S. 30 gelten. Abb. 2.13 zeigt im Vordergrund vor der Verformung einen Quader der Abmessungen Δx , Δy und Δz mit Kanten parallel zu den Achsen eines raumfesten x, y, z -Systems. Man muß ihn sich an einer beliebigen Stelle im Innern des betrachteten Körpers genauso markiert denken, wie das Rechteck auf dem Blech in Abb. 2.5. Nach einer beliebig großen Parallelverschiebung, einer kleinen Drehung und einer kleinen Verformung hat der Quader (bei hinreichend kleinen Abmessungen Δx , Δy und Δz) die hinten gezeigte Gestalt eines Parallelepipeds mit veränderten Längen und Winkeln. Für jeden Körperpunkt müssen Verschiebungen in allen drei Achsenrichtungen und jeweils als Funktion von allen drei Koordinaten definiert werden. Der Eckpunkt, der

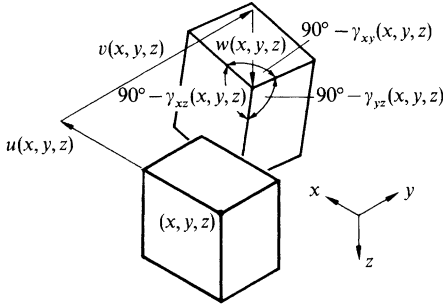


Abb. 2.13. Die räumliche Verallgemeinerung von Abb. 2.5. Verschiebungen und Verformungen an einem infinitesimal kleinen Quader aus einem Körper. Die Scherungen $\gamma_{xy}(x, y, z)$, $\gamma_{yz}(x, y, z)$ und $\gamma_{zx}(x, y, z)$

ursprünglich die Koordinaten (x, y, z) hatte, wird entlang den x -, y - und z -Achsen um Stücke verschoben, die $u(x, y, z)$ bzw. $v(x, y, z)$ bzw. $w(x, y, z)$ genannt werden. Entsprechend den Überlegungen, die zu (2.5) und (2.6) führten, kann man nun drei Dehnungen und drei Scherungen definieren:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z(x, y, z) &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \gamma_{yx}(x, y, z) &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &= \gamma_{zy}(x, y, z) &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_{zx}(x, y, z) &= \gamma_{xz}(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Die Dehnungen bedürfen keiner weiteren Erklärung. Die Scherungen sind diejenigen kleinen Winkel, um die sich ursprünglich rechte Winkel zwischen Kanten des Quaders an der Ecke (x, y, z) verkleinern. So ist z.B. $\gamma_{yz}(x, y, z)$ der Winkel, um den sich der rechte Winkel zwischen den Kanten in positiver y - und in positiver z -Richtung verkleinert. Alle Scherungen sind in Abb. 2.13 eingezeichnet.

Die Dehnungen und die halben Scherungen sind die Koordinaten des Verzerrungstensors für den räumlichen Verzerrungszustand. Sie werden wie die Koordinaten des Spannungstensors in (1.2) in einer symmetrischen Matrix zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Auch für den räumlichen Verzerrungszustand gibt es ein System orthogonaler Dehnungshauptachsen, in denen die sog. Hauptdehnungen ϵ_1 , ϵ_2 und

ϵ_3 auftreten, während alle Scherungen null sind. Man muß sich das anschaulich so vorstellen: Bei einer bestimmten Ausrichtung des Quaders von Abb. 2.13 im Körper bleiben die rechten Winkel erhalten. In dieser Ausrichtung haben die Kanten des Quaders die Richtungen der Dehnungshauptachsen für den betrachteten Körperpunkt. Die dabei auftretenden Dehnungen der Kantenlängen sind die Hauptdehnungen.

Wenn für ein bestimmtes x, y, z -System alle Koordinaten des Verzerrungstensors in (2.24) gegeben sind, kann man die Lage der Dehnungshauptachsen im x, y, z -System und die Größen der Hauptdehnungen rechnerisch bestimmen. Dabei ergeben sich Gleichungen, die genauso aufgebaut sind wie (1.10) bis (1.13), aus denen Hauptspannungen und die Lage von Spannungshauptachsen berechnet werden. In den Gleichungen muß man jeden Buchstaben σ durch ϵ und jeden Buchstaben τ durch $\frac{1}{2}\gamma$ ersetzen. An die Stelle von σ in (1.12) tritt z.B. ϵ . Diese Gleichung liefert die drei Hauptdehnungen ϵ_1, ϵ_2 und ϵ_3 .

2.4 Übungsaufgaben

- 2.1 In die Achse eines geraden Stabes der Länge ℓ wird eine x -Achse so gelegt, daß in der Stabmitte $x = 0$ ist. Durch eine geeignete ungleichmäßige Erwärmung des Stabes wird eine mit x veränderliche Dehnung ϵ in der Form $\epsilon(x) = \epsilon_0(x/\ell)^3$ mit $\epsilon_0 = \text{const}$ erzeugt. Wie groß sind die Verlängerungen der linken Stabhälfte ($\Delta\ell_\ell$), der rechten Stabhälfte ($\Delta\ell_r$) und des gesamten Stabes ($\Delta\ell_{ges}$)? Wie groß sind die mittleren Dehnungen der linken Stabhälfte ($\epsilon_{m\ell}$), der rechten Stabhälfte (ϵ_{mr}) und des gesamten Stabes (ϵ_{mges})?
Geg.: $\ell = 1\text{m}$, $\epsilon_0 = 64 \cdot 10^{-3}$
- 2.2 Das Gerät in Abb. A2.2 besteht aus zwei starren Hebeln und einem elastischen Spanndraht. Wie groß ist die Dehnung ϵ im Spanndraht bei einer Verkleinerung der Spaltbreite d um Δd ?
Geg.: $\ell = 20\text{cm}$, $a = 5\text{cm}$, $d = 2\text{mm}$, $\Delta d = 0,1\text{mm}$, $\alpha = 40^\circ$

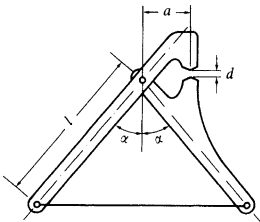


Abb. A2.2.

- 2.3 Der rechteckige Blechstreifen in Abb. A2.3 (durchgezogene Linien) wird in der x, y -Ebene so verformt, daß er die gestrichelte Lage einnimmt. Die Verzerrung

ist homogen. Wie groß sind ϵ_ξ , ϵ_η und $\gamma_{\xi\eta}$ im eingezeichneten ξ, η -System?
 Geg.: $a = 2 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$, $\Delta a = 1 \text{ mm}$, $\Delta b = 0,4 \text{ mm}$, $\varphi = 30^\circ$

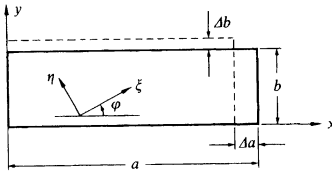


Abb. A2.3.

- 2.4 Der rechteckige Blechstreifen in Abb. A2.4 wird in der x, y -Ebene so verformt, daß alle Parallelen zur x -Achse in Parallelen zu der Parabel $y = ax^2$ übergehen, während alle Parallelen zur y -Achse in sich verschoben werden. Die Parabel $y = ax^2$ wird durch den Punkt $x_1 = 1000 \text{ mm}$, $y_1 = 10 \text{ mm}$ bestimmt. Wie groß ist die Scherung γ_{xy} des Blechs als Funktion von x für alle Punkte, die vor der Verformung auf der Geraden $y = \text{const}$ lagen?

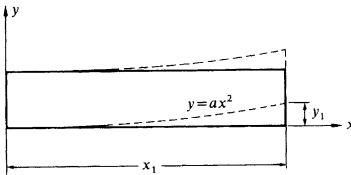


Abb. A2.4.

- 2.5 An den Enden eines zylindrischen Stabes mit der Länge ℓ und dem Radius r greifen in entgegengesetzten Richtungen Torsionsmomente gleicher Größe M_T an. Die Verformung des Stabes kann sowohl durch den Verdrehwinkel φ der beiden Stabenden gegeneinander als auch durch den Steigungswinkel γ der wendelförmig verformten Mantellinien des Zylinders beschrieben werden. γ ist die Scherung eines ursprünglich rechteckigen Flächenelements zwischen zwei Mantellinien. Drücken Sie φ durch γ , ℓ und r aus. Welche Länge ℓ_0 muß der Stab haben, damit bei der Scherung $\gamma = \gamma_0$ der Verdrehwinkel $\varphi = 2\pi$ ist?
 Geg.: ℓ , $r = 10 \text{ cm}$, $\gamma_0 = 10^{-3} \approx 0,05^\circ$

- 2.6 Das Brett der Dicke d in Abb. A2.6 wird durch an den Enden angreifende Momente gebogen. Da die Schnittgröße $M_y(x)$ längs des Brettes konstant ist, wird das Brett zu einem Kreisbogen verformt. Die Mittelschicht des Brettes wird nicht gedehnt. Welchen Krümmungsradius ρ_{min} muß die Mittelschicht mindestens haben, wenn die Dehnung in den äußersten Fasern des Brettes dem Betrage nach die Größe ϵ_{max} nicht überschreiten darf?
 Geg.: $d = 5 \text{ cm}$, $\epsilon_{max} = 5 \cdot 10^{-3}$

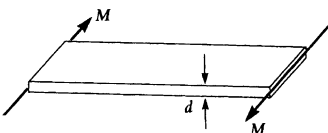


Abb. A2.6.

- 2.7 In einem Punkt der Oberfläche eines Körpers werden bei zwei verschiedenen Belastungen mit Dehnmeßstreifenrosetten die Verzerrungszustände gemessen. Daraus werden in dem einen Fall die in Abb. A2.7 gekennzeichneten Dehnungshauptachsen x, y mit den Hauptdehnungen ϵ_x und ϵ_y ermittelt und in dem anderen die Dehnungshauptachsen ξ, η mit den Hauptdehnungen ϵ_ξ und ϵ_η . Wie groß sind die Hauptdehnungen ϵ_1 und ϵ_2 , wenn beide Belastungen gemeinsam am Körper angreifen? Unter welchem Winkel φ_0 im mathematisch positiven Sinn liegt die Hauptachse der größeren Hauptdehnung gegen die x -Achse geneigt? Um welchen Winkel γ_{xy} verkleinert sich dabei der gekennzeichnete 90° -Winkel? Hinweis: Die Verzerrungszustände beider Belastungsfälle müssen linear überlagert werden.

Geg.: $\epsilon_x = 10^{-4}$, $\epsilon_y = -2 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_\xi = 1,5 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_\eta = 0,5 \cdot 10^{-4}$

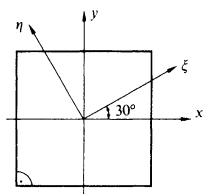


Abb. A2.7.

Festigkeitslehre

Ein Lehr- und Arbeitsbuch

Wittenburg, J.

2011, XI, 643 S., Hardcover

ISBN: 978-3-642-20912-3