

4 Die Beweisverfahren

Übersicht

| | | |
|-----|-------------------------------|----|
| 4.1 | Der direkte Beweis | 27 |
| 4.2 | Der indirekte Beweis | 35 |
| 4.3 | Der konstruktive Beweis | 37 |

4.1 Der direkte Beweis

4.1.1 Einfache Zahlentheorie

Beim direkten Beweis geht man von der (gegebenen, wahren) Voraussetzung A aus und zeigt durch Umformen oder Folgern, dass aus A die Aussage B folgt. Mathematisch geschrieben untersucht man:

$$A \implies B$$

Starten wir mit einem Beispiel. Man beweise den ersten Satz:

Satz 4.1

Die Summe zweier gerader ganzer Zahlen ist gerade.

Wie beweist man etwas? Um etwas beweisen zu können, muss man wissen, was man beweisen soll. Was ist überhaupt eine *gerade* Zahl?

Definition 4.2 (gerade Zahl)

Eine ganze Zahl x heißt *gerade Zahl*, wenn es eine ganze Zahl a gibt, so dass $x = 2 \cdot a$. Ansonsten heißt die Zahl *ungerade*. ♦

Wie wird nun der Beweis genau geführt? Wir nehmen uns einfach zwei gerade ganze Zahlen, aber machen das allgemein. Genauer: Für beliebige gerade ganze Zahlen.

Beweis: Seien x und y gerade ganze Zahlen (unsere Voraussetzung). Weil x gerade ist, wissen wir, dass es eine ganze Zahl a gibt, so dass $x = 2a$ ist. Weiterhin ist y gerade, und darum gibt es eine ganze Zahl b mit $y = 2b$.

Dann ist $x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$. Es gibt also eine ganze Zahl c , nämlich $c := a + b$, so dass $x + y = 2c$. Daher gilt: $x + y$ ist eine gerade Zahl. Damit haben wir unseren Satz bewiesen. \square

Zeichenerklärung

- \Rightarrow Implikation. Man schreibt $A \Rightarrow B$ und spricht „A folgt B“. Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind oder wenn A falsch ist. Warum ist das so definiert? Aus etwas Wahrem soll nichts Falsches folgen dürfen, aber aus etwas Falschem darf alles folgen. Die Implikation ist dann möglicherweise sinnlos, aber sie ist wahr.
- $:=$ Eine definierte Gleichheit. $c := a + b$ bedeutet: c wird definiert als die Summe von $a + b$. c ist nicht mehr als ein Name für das rechts stehende Ergebnis.

Unser nächstes Beispiel:

Satz 4.3

Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist ungerade.

Beweis: n sei eine ungerade natürliche Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als $n = 2k + 1$ darstellen (k ist eine natürliche Zahl, einschließlich der 0, die Menge dieser Zahlen hat das Zeichen \mathbb{N}_0). Daraus folgert man:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

Man sieht, es ist n^2 ungerade, denn $2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$ ist nicht gerade. \square

Satz 4.4

Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl n ist gerade.

Beweis: n sei eine gerade natürliche Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als $n = 2k$ darstellen (k ist eine natürliche Zahl). Daraus folgert man:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$$

Somit ist n^2 das Doppelte einer natürlichen Zahl und damit gerade. \square

4.1.2 Aussagenlogik

Jetzt wollen wir weitere Beispiele für direkte Beweise aus der Aussagenlogik und der Mengenlehre liefern, um die Vielfalt des direkten Beweises deutlich zu machen.

Wichtige Zeichen der Aussagenlogik

- \wedge Und-Verknüpfung von Aussagen. Man schreibt $A \wedge B$ und spricht „A und B“. Eine Und-Verknüpfung ist genau dann wahr, wenn beide verknüpften Aussagen wahr sind.
- \vee Oder-Verknüpfung von Aussagen. Man schreibt $A \vee B$ und spricht „A oder B“. Eine Oder-Verknüpfung ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden verknüpften Aussagen wahr ist.
- \neg Negation. Man schreibt $\neg A$ und spricht „nicht A“ oder „not A“. Die Negation einer Aussage ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist.
- \Leftrightarrow Äquivalenz. Man schreibt $A \Leftrightarrow B$ und spricht „A äquivalent B“. Die Äquivalenz ist genau dann wahr, wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ wahr sind.

Satz 4.5

Seien A und B Aussagen, dann gilt:

$$A \vee (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$$

Das hört sich schon sehr schwierig an, aber mit einer Wahrheitstafel kann dies sehr leicht gelöst werden; Schritt für Schritt müssen die Wahrheitswerte eingetragen und jeder Fall betrachtet werden. Wir machen es vor:

Beweis: 1. Schritt: Wir tragen alle möglichen Kombinationen für die Wahrheitswerte der Aussagen A und B ein:

| A | B | $A \vee (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$ |
|-----|-----|--|
| w | w | |
| w | f | |
| f | w | |
| f | f | |

2. Schritt: Bekannte Wahrheitswerte werden nach rechts übertragen, auch die Wahrheitswerte der Negation können ohne Probleme eingetragen werden:

| A | B | $A \vee (A \wedge \neg B) \iff A$ | | | |
|-----|-----|-----------------------------------|---|---|---|
| w | w | w | w | f | w |
| w | f | w | w | w | w |
| f | w | f | f | f | f |
| f | f | f | f | w | f |

3. Schritt: Wir überlegen uns, was die Konjunktion bedeutet.

| A | B | $A \vee (A \wedge \neg B) \iff A$ | | | |
|-----|-----|-----------------------------------|----------|--|---|
| w | w | w | f | | w |
| w | f | w | w | | w |
| f | w | f | f | | f |
| f | f | f | f | | f |

4. Schritt: Was bedeutet das „oder“?

| A | B | $A \vee (A \wedge \neg B) \iff A$ | | | |
|-----|-----|-----------------------------------|--|----------|--|
| w | w | w | | w | |
| w | f | w | | w | |
| f | w | f | | f | |
| f | f | f | | f | |

5. Schritt: Nun bleibt noch die Äquivalenz zu untersuchen. Das bedeutet, wir müssen schauen, ob in der vorigen Tabelle die fett markierten Wahrheitswerte in jeder Zeile übereinstimmen, dann ist die Äquivalenz der Aussagen wahr.

| A | B | $A \vee (A \wedge \neg B) \iff A$ | | | |
|-----|-----|-----------------------------------|--|--|--|
| w | w | w | | | |
| w | f | w | | | |
| f | w | w | | | |
| f | f | w | | | |

Und tatsächlich, es stimmt alles überein. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Um Platz und Schreibarbeit zu sparen, vereinigt man die einzelnen Bewertungsschritte oft in einer Wahrheitstabelle. Dann sieht es so aus:

| A | B | $A \vee (A \wedge \neg B) \iff A$ | | | | | | |
|-----|-----|-----------------------------------|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | f | f | w | w |
| w | f | w | w | w | w | w | w | w |
| f | w | f | f | f | f | f | w | f |
| f | f | f | f | f | f | w | w | f |

4.1.3 Gesetze der Aussagenlogik

Satz 4.6

(*De Morgansche Regeln für die Aussagenlogik*)

- a) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
b) $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$

Beweis: (mit Hilfe von Wahrheitstafeln) Da man ganz einfach wie oben beschrieben vorgehen kann, zeigen wir hier nur die fertig ausgefüllte Wahrheitstafel, darin ist fett gesetzt, was wir zuletzt vergleichen müssen:

a)

| A | B | $\neg (A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|---|---|---|----------|---|---|----------|---|---|
| w | w | f | w | w | w | w | f | w | f | f | w |
| w | f | w | w | f | f | w | f | w | w | w | f |
| f | w | w | f | f | w | w | w | f | w | f | w |
| f | f | w | f | f | f | w | w | f | w | w | f |

b)

| A | B | $\neg (A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$ | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|---|---|---|----------|---|---|----------|---|---|
| w | w | f | w | w | w | w | f | w | f | f | w |
| w | f | f | w | w | f | w | f | w | f | w | f |
| f | w | f | f | w | w | w | w | f | f | f | w |
| f | f | w | f | f | f | w | w | f | w | w | f |

□

Nun haben wir Beweise mit Wahrheitstafeln geführt. Wir fassen zusammen: Beim direkten Beweis beweist man die Aussage durch logische Schlussfolgerungen. Genau dies wollen wir für Beispiele aus der Mengenlehre weiter einüben:

4.1.4 Mengenlehre

Wichtige Zeichen der Mengenlehre

- \cap Schnitt. Man schreibt $A \cap B$ und spricht „A geschnitten B“. $A \cap B$ enthält genau die Elemente, die in A und in B enthalten sind.
- \cup Vereinigung. Man schreibt $A \cup B$ und spricht „A vereinigt B“. $A \cup B$ enthält genau die Elemente, die in mindestens einer der Mengen A und B enthalten sind.
- \emptyset Die *leere Menge*; sie enthält keine Elemente.
- \setminus Subtraktion von Mengen. Es ist definiert $A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$. Anschaulich gesagt: In $A \setminus B$ ist „A ohne B“
- \in Element von. $a \in A$ heißt: a ist ein Element von A .
- \subseteq Teilmenge. Es ist $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$. Beachte die Doppelpunkte; man liest: A ist Teilmenge von B ist definiert als: für alle a aus A gilt: a ist Element von B . Es kann sein, dass A und B gleich sind. Meistens hat das Zeichen \subset die gleiche Bedeutung wie \subseteq . Wenn man echte Teilmengen meint, dann schreibt man am besten \subsetneq . Es gibt aber Autoren, für die sind \subset und \subsetneq gleichbedeutend. Man muss hier immer auf die Zeichenerklärungen achten.
- \forall Allquantor. Man schreibt z.B. $\forall n$ und sagt: „Für alle n “. Gleiche Bedeutung hat das Zeichen \bigwedge .
- \exists Existenzquantor. Man schreibt z.B. $\exists n$ und spricht: „Es existiert ein n “. Gleiche Bedeutung hat das Zeichen \bigvee .

Beispiel: (Mengenlehre) Zeige für Mengen A, B, C Folgendes:

- a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sei Ω eine Menge und seien $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$, dann gilt:

- c) $A \cap B = \emptyset \implies A \subseteq \Omega \setminus B$
- d) $A \subseteq \Omega \setminus B \iff B \subseteq \Omega \setminus A$

Beweis: a) Gemäß der Definition der Verknüpfungen gilt:

$$\begin{aligned}
 x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
 &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
 &\iff x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\
 &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned}$$

b) Gemäß der Definition der Verknüpfungen gilt:

$$\begin{aligned}
 x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee x \in (B \cap C) \\
 &\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
 &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
 &\iff x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\
 &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

c) Zu zeigen ist: $x \in A \Rightarrow x \in \Omega \setminus B$. $x \in A \Rightarrow x \in \Omega$, da $A \subseteq \Omega$ und $x \notin B$, da $A \cap B = \emptyset$. Aus diesen beiden Erkenntnissen folgt nun $x \in \Omega \setminus B$.

d) Beachte, dass hier die Implikation in beide Richtungen zu zeigen ist.

' \Rightarrow ': Zu zeigen ist: $x \in B \Rightarrow x \in \Omega \setminus A$. Sei $x \in B \Rightarrow x \in \Omega$, da $B \subseteq \Omega$. Weiter ist $x \notin A$, da $A \subseteq \Omega \setminus B$. Aus diesen beiden Erkenntnissen folgt nun $x \in \Omega \setminus A$.

' \Leftarrow ': Für die andere Richtung müssen wir zeigen, dass $x \in A \Rightarrow x \in \Omega \setminus B$. Diese Aussage ist aber die gleiche, wie die bereits gezeigte Hinrichtung. Man vertausche einfach die Rollen von A und B .

Hinweis: Ω , sprich *Omega*, der letzte Buchstabe des griechischen Alphabets, wird oft als Zeichen für *die Gesamtheit* verwendet. Siehe Tabelle 9.1. \square

4.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Um die folgenden zwei Beweise zu verstehen, müssen wir zunächst den Begriff der Fakultät und des Binomialkoeffizienten einführen:

Definition 4.7

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir *n-Fakultät*:

$$n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{i=1}^n i & \text{sonst} \end{cases}$$

und den *Binomialkoeffizienten* n über k :

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Beispiele:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

Nun sind wir gewappnet, Folgendes zu beweisen:

Satz 4.8

Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Dann ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis: Dies kann man durch direktes Nachrechnen leicht zeigen, wir rechnen die rechte Seite aus:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} \end{aligned}$$

Jetzt bedenken wir, dass wir ja am Ende irgendwas stehen haben wollen wie:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Wir bringen die beiden Brüche auf den Hauptnenner $(n-k)! \cdot k!$.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &\stackrel{(*)}{=} \frac{k(n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

□

Wir hoffen, dass jeder von euch den Schritt $(*)$ versteht. Eigentlich ganz einfach, man muss nur Folgendes bedenken:

$$\frac{k}{k!} = \frac{k}{k(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!}$$

bzw.

$$\frac{n-k}{(n-k)!} = \frac{n-k}{(n-k) \cdot (n-k-1)!} = \frac{1}{(n-k-1)!}$$

Alles klar? Das war der direkte Beweis. Was wir eben gerade bewiesen haben, ist das Bildungsgesetz im *Pascalschen Dreieck*.

Pascalsches Dreieck

Das *Pascalsche Dreieck* ist ein Zahlenschema, in dem jede neue Zahl die Summe der diagonal darüber stehenden ist. Auf dem obersten Platz steht eine 1. Nicht besetzte Felder denkt man sich als mit 0 besetzt.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

So ist der Zusammenhang zu den Binomialkoeffizienten:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

4.2 Der indirekte Beweis

Beim indirekten Beweis geht man so vor:

1. Man nimmt an, das Gegenteil der Behauptung gälte, und zieht daraus Folgerungen.
2. Man führt die Argumentation zu einem Widerspruch.
3. Da der Beweisgang legitim und logisch war und aus etwas Richtigem nicht etwas Falsches folgen kann, muss somit die getroffene Annahme falsch sein; also ist das Gegenteil der Annahme richtig, und es folgt die Behauptung.

Wir betrachten das nächste Beispiel:

4.2.1 Wurzel aus 2 ist nicht rational.

Satz 4.9

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen das Gegenteil an und führen dies zu einem Widerspruch.

Beweis: Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational. Wenn $\sqrt{2}$ rational ist, dann lässt sie sich als Bruch zweier ganzer Zahlen p und q darstellen. Also $\sqrt{2} = p/q$. Dabei sei der Bruch p/q schon gekürzt, d. h. p und q teilerfremd. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass p positiv ist, ansonsten betrachte $-p$ und $-q$ mit dem gleichen Quotienten. Nun können wir $\sqrt{2} = p/q$ umschreiben zu:

$$2 = p^2/q^2 \Leftrightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \quad (4.1)$$

Daraus ergibt sich, dass p gerade ist. Somit lässt sich p auch als $2 \cdot n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$) schreiben. Einsetzen in 4.1 liefert:

$$(2n)^2 = 2 \cdot q^2 \Leftrightarrow 4 \cdot n^2 = 2 \cdot q^2 \Leftrightarrow 2 \cdot n^2 = q^2$$

Hieraus ergibt sich, dass auch q gerade ist. Insbesondere haben p und q damit den gemeinsamen Teiler 2. Wir hatten aber angenommen, dass p und q teilerfremd sind. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme. Und da eine Behauptung entweder wahr oder falsch ist, folgt die Wahrheit der Behauptung. \square

4.2.2 Es gibt unendlich viele Primzahlen

Jetzt zu einem Beweis, den Euklid angab. Es gibt durchaus viele Möglichkeiten, die folgende Behauptung zu beweisen. So stehen in „Das Buch der Beweise“ (übrigens ein sehr lesenswertes Buch, siehe 1.3) insgesamt sechs verschiedene Beweise für die folgende Behauptung, aber dennoch wollen wir den Widerspruchsbeweis von Euklid angeben:

Satz 4.10

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt, nehmen das Gegenteil an und führen dies zu einem Widerspruch. Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen. Wenn es nur endlich viele Primzahlen gibt, sagen wir r Stück, dann können wir diese alle in einer endlichen Menge $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ von Primzahlen zusammenfassen.

Nun können wir eine neue Zahl konstruieren, indem wir die Primzahlen multiplizieren und 1 addieren. Diese neue Zahl ist $n := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$. Sie kann keine Primzahl sein, denn sie ist größer als die größte Primzahl gemäß unserer Annahme. Sei p ein Primteiler von n . Man sieht, dass p von allen p_i verschieden ist, da sonst p sowohl die Zahl n als auch das Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ teilen würde, somit auch die 1, was nicht sein kann. Und hier haben wir unseren *Widerspruch!*

Es kann somit nicht endlich viele Primzahlen geben. Damit muss es unendlich viele Primzahlen geben. \square

Vielleicht war das etwas zuviel des Guten? Darum noch einmal etwas langsamer für diejenigen, die mit den obigen Ausführungen nicht so recht etwas anfangen konnten:

Wenn der Satz nicht gilt, dann gibt es nur endlich viele Primzahlen

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \dots, p_r,$$

wobei p_r die größte Primzahl sei. Man bildet das Produkt aller Primzahlen und addiert 1:

$$n := p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot \dots \cdot p_r + 1$$

Die entstehende Zahl n ist keine Primzahl, denn sie ist größer als die größte Primzahl p_r . Sie muss sich daher aus den Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_r multiplikativ zusammensetzen; n muss daher durch mindestens eine der Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_r teilbar sein. Andererseits erkennt man bei Division von n durch eine Primzahl, dass n wegen der Addition von 1 durch keine Primzahl teilbar ist. Immer bleibt der Rest 1.

4.3 Der konstruktive Beweis

4.3.1 Nullstelle einer Funktion

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Wir behaupten, dass diese Funktion eine Nullstelle besitzt. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, dies nachzuweisen. Entweder wir können die Nullstelle x_0 direkt angeben und vorrechnen, dass $f(x_0) = 0$ gilt (das nennen wir *konstruktiv*), oder wir argumentieren mit Sätzen, die wir in der Analysis lernen, die uns die Existenz einer Nullstelle garantieren, ohne dass sie sagen, wie der Wert x_0 konkret ist (das nennen wir *nicht-konstruktiv*).

1. Möglichkeit - Konstruktiver Beweis: Durch kurzes Betrachten der Funktion bzw. ihres Funktionsgraphen stellen wir fest, dass $x_0 = 1$ eine Nullstelle der Funktion ist. Wir weisen dies *konstruktiv* durch Einsetzen nach. Es gilt:

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$$

Damit haben wir die Nullstelle direkt angegeben und durch Einsetzen gezeigt, dass $x_0 = 1$ wirklich eine Nullstelle der Funktion ist.

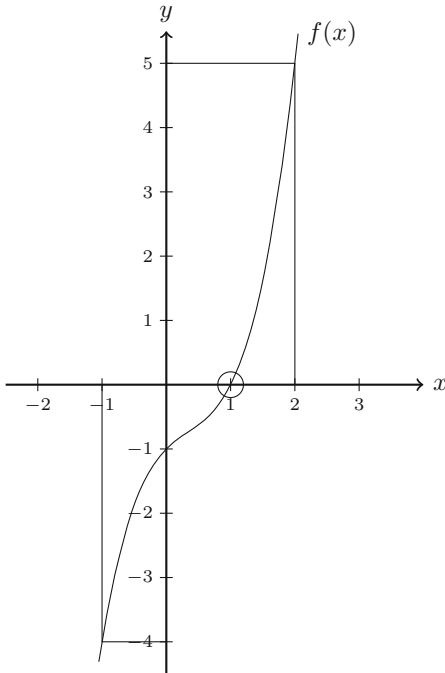


Abb. 4.1: Eine stetige Funktion, die eine Nullstelle haben muss.

2. Möglichkeit - Nicht-konstruktiver Beweis: Eine andere Möglichkeit, die Behauptung „Die Funktion besitzt eine Nullstelle“ zu beweisen, ist der *nicht-konstruktive* Weg, d. h., wir geben die Nullstelle nicht an, sondern zeigen nur, dass eine Nullstelle existiert. Hierbei wenden wir den *Zwischenwertsatz* an. Dieser besagt:

Satz 4.11 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei weiterhin $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.

Die Abbildung 4.1 verdeutlicht die Situation. Unsere Funktion ist stetig (was das genau bedeutet, lernt man in der Analysis-Vorlesung, jetzt müsst ihr es glauben). Die Voraussetzung für den Zwischenwertsatz ist damit erfüllt. Des Weiteren gilt (siehe auch Zeichnung) $f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 1 - 1 = -4 < 0$ und $f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 1 = 5 > 0$. Daher muss im Intervall $] -1, 2[$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle existieren. Wir können diese aber mit Hilfe des Satzes nicht genau angeben, wir wissen nur, dass *mindestens* eine existiert!

Wir hoffen, der Unterschied dieser beiden Methoden ist deutlich geworden.

Florian Modler studiert Mathematik in Hannover,
Georg Lauenstein studiert Verkehrswesen in Berlin.

Mathematisch für Anfänger

Beiträge zum Studienbeginn von Matroids Matheplanet

Wohlgemuth, M. - Wohlgemuth, M. (Hrsg.)

2011, XVI, 320 S. 50 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8274-2852-3