

0

Menschenverstand, Logik und Beweis

Empfindungen, Wahrnehmungen und Aktionen prägen alles Lebendige und führen – durch Wiederholen und Lernen – zur elementaren Erfahrung.

Kommt die Sprache, das heißt Beschreiben und Argumentieren, hinzu, dann gelangen wir auf eine höhere Stufe des Erlebens und der Verarbeitung von Erlebtem. Diese Stufe konsistenter Lebenserfahrung ist das Fundament des gesunden Menschenverstandes.

Die im Gedächtnis gespeicherten Lebensereignisse können auf zweierlei Arten miteinander verknüpft werden: mit Hilfe der (bereits erwähnten) *Induktion*, dem Schließen von Einzelfällen auf das Allgemeine, und der *Deduktion*, der Ableitung des Besonderen aus dem Allgemeinen. Diese Verknüpfungen vervollständigen den gesunden Menschenverstand weiter – was wiederum Voraussetzung für vorwissenschaftliche Erkenntnis, wissenschaftliche Theorien und Planungen ist.

Während die Induktion, wie wir gesehen haben, keinerlei positive Gewissheit zur Folge haben kann, lässt die deduktive Methode sehr wohl Schlüsse mit Gewissheit zu. Die Korrektheit des Schlusses bedeutet jedoch nicht die faktische Wahrheit von Aussagen, wie ich an einigen Beispielen zeigen werde. Dennoch ist die deduktive Logik bei allem Denken, das Aussagen schafft und miteinander verknüpft, unverzichtbar.

Der Mensch ist frei und fähig, auch allen Gesetzen der Logik zuwiderzuhandeln. Selbst das Unwahrscheinliche, Unnatürliche

und Absurde kann er Wirklichkeit werden lassen. Extreme Ungleichheit kann er ebenso erzwingen wie das andere Extrem, die Gleichheit. Hinzu kommt, dass die Umgangssprache organisch gewachsen, komplex und oft mehrdeutig ist. Auch sehr einfach konstruierte sinnvolle Sätze sind nicht frei von logischen Widersprüchen; man denke etwa an die Russell'sche Antinomie (Der Barbier, der alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren) oder noch an die Antinomie des Lügners (Wenn ich sage: »Ich lüge«, lüge ich und spreche gleichzeitig die Wahrheit). Um solche Widersprüche zu vermeiden, ist, wie der berühmte Logiker Alfred Tarski gezeigt hat, sowohl eine Einschränkung der Benutzungsregeln als auch eine Formalisierung nötig, die über den Alltagsverstand hinausgeht. Aber auch die so formalisierte Logik ist nach Karl Popper eine Erweiterung der menschlichen Sprache – und alle Wissenschaft und Philosophie aufgeklärter Alltagsverstand. Somit ist auch Mathematik, das Spiel mit Fiktionen nach den Regeln der Logik, aufgeklärter Alltagsverstand in Form einer Mischung aus formalen und natürlichen Sprachen.

Logisches Schließen ist aber auch ein nützlicher Bestandteil der Kommunikation. Logik macht die Menschen kritischer und hilft, Irreführung durch Pseudoargumente zu verhindern. Alfred Tarski: »Das Hauptproblem, dem sich die Menschheit heute gegenüber sieht, ist das der Normalisierung und Rationalisierung menschlicher Beziehungen.«

Nun folgen ein paar Aspekte der elementaren Logik, sofern sie für das Weitere von praktischer Bedeutung ist. Dabei habe ich mich bemüht, Formalismen so weit wie möglich zu vermeiden.

Ein paar Zutaten: Aussagen

Auf tiefsinnige philosophische Betrachtungen über die Bedeutung der Wörter »wahr« und »falsch« will ich hier verzichten. Innerhalb der Logik gehören sie zu den *evidenten*, nicht weiter definierten Grundbegriffen.

Sehen wir in einem Wörterbuch nach, was das Wort »Aus-sage« bedeutet, so erfahren wir unter anderem, dass es sich um eine »sprachlich gefasste Mitteilung« handelt. In den folgenden Überlegungen steht dieser Begriff für jede Zusammenstellung von Zeichen, die einen Sinn ergeben und die Eigenschaft haben, entweder wahr oder falsch zu sein, aber nicht beides zugleich. Die Entscheidung darüber, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, muss prinzipiell möglich sein, auch wenn sie erst zu einem späteren Zeitpunkt getroffen werden kann – wie etwa bei Prognosen.

In jeder der nächsten drei Zeilen steht eine Aussage:

- (1) Der Mars besteht aus grünem Käse.
- (2) $1 + 1 = 3$.
- (3) Morgen ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.

Dagegen enthält keine der folgenden Zeilen eine Aussage:

- (4) Haltet den Dieb!
- (5) $\underline{a} \times \mathfrak{M} \quad \blacklozenge \mathfrak{M} \bullet \blacklozenge \quad \mathfrak{G} \bullet \blacklozenge \quad \square \square \blacklozenge \bullet \mathfrak{M} \blacklozenge \blacklozenge \mathfrak{M}$
- (6) Diese Aussage ist falsch.

Die Erzeugung neuer Aussagen aus vorhandenen ist ein kreativer Prozess, der in höchstem Maße wünschenswert ist; schließlich möchte man nicht in einem abgeschlossenen, sterilen Gebäude feststehender Aussagen gefangen sein. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, vorhandene Aussagen zu neuen Aussagen zu verknüpfen.

Die einfachste Operation, die wir auf eine einzelne Aussage anwenden können, ist die *Negation* oder *Verneinung*. Nehmen wir als Beispiel die Aussage »Der Mars besteht aus grünem Käse« und kürzen sie mit p ab. Nun bilden wir aus p die neue Zeichen-zusammenstellung »nicht p «. Sie wird dadurch zu einer Aussage, dass wir festsetzen: »nicht p « ist unter genau denselben Bedingungen wahr, unter denen p falsch ist – und »nicht p « ist unter genau denselben Bedingungen falsch, unter denen p wahr ist. Diese Festsetzung versteht »nicht p « mit derselben Eigenschaft

wie die vorgegebene Aussage p (nämlich entweder wahr oder falsch, aber nicht beides zugleich zu sein), und daher ist auch »nicht p « eine Aussage.

Wie wird nun »nicht p « als vollständiger Satz ausgedrückt? Nach den Regeln der Grammatik kann man einen Satz verneinen, indem man an passender Stelle das Wörtchen »nicht« einschleibt. Die Aussage »Der Mars besteht aus grünem Käse« bietet dazu zwei Möglichkeiten, die einen Sinn ergeben: (a): Nicht der Mars besteht aus grünem Käse. Und (b): Der Mars besteht nicht aus grünem Käse.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Aussage (a) nicht die Negation von p sein kann. Also muss es die Aussage (b) sein. Allerdings ist auch hier unklar, ob sich das Wörtchen »nicht« auf grün oder auf Käse bezieht – oder auf beide Bezeichnungen gemeinsam. Wir sind gut beraten, wenn wir letzteres gelten lassen.

Wir können natürlich auch andere Umschreibungen vorschicken, zum Beispiel »Es ist nicht der Fall, dass ...« oder »Es ist falsch, dass ...«. Solche Konstruktionen sind eindeutig und führen erfahrungsgemäß nicht zu Missverständnissen.

Die Vereinbarungen zu einer (nun beliebigen) Aussage p und zu ihrer Verneinung (nicht p) lassen sich in einer übersichtlichen Tabelle darstellen; dabei werden die Buchstaben »W« und »F« als Abkürzungen für »wahr« und »falsch« benutzt. Diese Tabelle (Tab. 1) wird *Wahrheitstafel* von »nicht p « genannt, denn sie kennzeichnet die Bedingungen, unter denen »nicht p « wahr ist. (Natürlich nennt sie auch die Bedingungen, unter denen »nicht p « falsch ist.)

Die Operation der Verneinung wird an einer einzigen Aussage vorgenommen. Wir können aber auch zwei oder mehr Aussagen zu einer neuen verknüpfen. Wenn p und q zwei Aussagen

Tab. 1 Wahrheitstafel für »nicht p «.

p	nicht p
W	F
F	W

Tab. 2 Wahrheitstafel für »p und q« und »p oder q«.

p	q	p und q	p oder q
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	F

sind, so können wir die beiden Zeichenzusammenstellungen »p und q« und »p oder q« bilden. Diese beiden Operationen verknüpfen jeweils zwei Aussagen zu einer einzigen. Jede von ihnen wird dadurch zu einer Aussage, dass wir die in Tabelle 2 gezeigten Festsetzungen über die Wahrheit beziehungsweise Falschheit treffen.

Die Aussagen »p und q« und »p oder q« entsprechen im Wesentlichen dem üblichen Sprachgebrauch. Auf einen Punkt ist allerdings zu achten: Das Wort »oder« wird in der Umgangssprache in zweierlei Bedeutung gebraucht. Manchmal bedeutet es, dass *genau* eine (»eine und nur eine«) von zwei Möglichkeiten zutrifft (Beispiel: Morgen Mittag werde ich in München oder in Hamburg sein), und manchmal, dass *mindestens* eine von zwei Möglichkeiten zutrifft – mitunter auch beide (Beispiel: Bei Regen oder Sturm findet das Fest im Saal statt). In der Mathematik hat man sich auf die zweite dieser beiden Deutungen geeinigt. Wir werden also »oder« stets im (nicht ausschließenden) Sinne von »mindestens eine von zwei Möglichkeiten« verwenden. Meinen wir dagegen *genau* eine von zwei Möglichkeiten, sprechen wir von »entweder ... oder«.

Eine Aussage »p oder q«, die immer wahr ist, erhalten wir, wenn wir für die Aussage q die Verneinung von p einsetzen: »p oder nicht p« ist offenbar stets wahr und wird *Tautologie* genannt: Es regnet, oder es regnet nicht.¹

¹ Gewisse Teiltautologien nach dem Halb-voll-halb-leer-Muster führen zu witzigen Aussagen, etwa wenn jemand eine faule Katze sagen lässt: »Wer mittags aufsteht, verschläft nicht den ganzen Tag.« Auch streng befolgte Logik in Alltagssituationen kann zu komischen Effekten führen, wie die scharfsinnige

Tab. 3 Wahrheitstafel für »wenn p , so q « und für » p dann und nur dann, wenn q «.

p	q	wenn p , so q	p dann und nur dann, wenn q
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	F	W	W

Es gibt noch zwei weitere wichtige Operationen, mit denen jeweils zwei Aussagen zu einer einzigen verknüpft werden: »wenn p , so q « und » p dann und nur dann, wenn q «. Sie sind in Tabelle 3 dargestellt. Da viele mathematische Sätze eine der beiden Formen haben, muss man diese Verknüpfungen schon kennen, um den Inhalt der Sätze zu verstehen – noch ehe man diese zu beweisen versucht oder einen gegebenen Beweis verfolgt.

Die Aussage »wenn p , so q « kann als die Forderung betrachtet werden, dass in jedem Fall, in dem die Aussage p wahr ist, auch q wahr sein soll. Mehr ist nicht verlangt; insbesondere wird für den Fall, dass p falsch ist, überhaupt nichts gefordert. Aus der Aussage »Wenn es regnet, gehe ich ins Kino« kann nicht geschlossen werden, dass ich nicht ins Kino gehe, wenn es nicht regnen sollte – im häufigen Gegensatz zur Umgangssprache. Vielleicht *meine* ich ja, dass ich in den Biergarten und nicht ins Kino gehe, wenn es nicht regnet; das ist aber kein Bestandteil meiner Aussage mehr. (Aus der Tatsache allerdings, dass ich *nicht* ins Kino gehe, kann sehr wohl geschlossen werden, dass es *nicht* regnet: Dies ist nämlich äquivalent zu meiner ursprünglichen Aussage, wie wir noch sehen werden.) Eine ähnliche Situation haben wir, wenn es heißt: Ein Genie wird zeit seines Lebens verkannt. Selbst wenn dies wahr wäre, könnte ein Verkannter nicht daraus folgern, er sei ein Genie. Ein Akzeptierter, das heißt nicht Verkannter, müsste

Naivität von Kleinkindern, von Alf oder auch Pumuckl aus den bekannten Fernsehserien zeigt.

aufgrund dieser Aussage aber sehr wohl zu dem Schluss kommen, dass er eben kein Genie ist.

Es soll noch einmal betont werden, dass die Aussage »wenn p , so q « weder behauptet, dass p wahr ist, noch dass q durch irgendein Verfahren aus p hergeleitet werden kann. Alles, was ausgesagt wird, ist dies: Jedes Mal, wenn die Aussage p wahr ist, trifft es auch zu, dass q wahr ist. Nach unseren Festlegungen ist jede der folgenden Aussagen wahr:

- Wenn $2 + 2 = 5$, so $3 + 4 = 7$.
- Wenn $2 + 2 = 5$, so $3 + 4 = 6$.
- Wenn $2 + 2 = 4$, so $3 + 4 = 7$.

Dagegen ist folgende Aussage falsch:

- Wenn $2 + 2 = 4$, so $3 + 4 = 6$.

Ein Blick auf die Wahrheitstafel für »wenn p , so q « bestätigt die Behauptung, die ersten drei Aussagen seien wahr und die vierte falsch.

Jede Aussage der Form »wenn p , so q « nennt man *Implikation* (auch *Bedingungssatz*), wobei »wenn p « als *Vordersatz* und »so q « als *Hintersatz* bezeichnet wird. Implikationen lassen sich auf verschiedene Weise formulieren, zum Beispiel:

- wenn p , dann q
- p ist hinreichend für q
- q ist notwendig für p
- p impliziert q
- q folgt aus p
- p nur, wenn q

Wichtig ist nur, daran zu denken, dass jede dieser Formulierungen dasselbe behauptet wie die Aussage »wenn p , so q «. Eine gewisse Routine bei den verschiedenen Formulierungen derselben Aussage ist unerlässlich, um der benutzten Umgangssprache – die man ja nicht übertrieben formalisieren möchte – die nötige

Klarheit und Eindeutigkeit zu geben. Überlegen Sie sich doch beispielsweise einmal die verschiedenen Formulierungsmöglichkeiten für die Aussage: »Wenn das elektrische Licht brennt, dann ist die Sicherung intakt.«

Es wäre ein Irrtum zu meinen, die Alltagssprache und die Sprache der Logik seien absolut verschieden und die Regeln für den Gebrauch der Wörter »wenn ... dann ...« ließen keine Ausnahmen zu. In Wirklichkeit schwankt er, und gelegentlich stoßen wir auf Fälle, in denen er die aufgestellten Regeln nicht erfüllt. Stellen Sie sich vor, ein Freund befasst sich mit einem sehr schwierigen Problem, und Sie glauben nicht, dass er es jemals lösen werde. Sie drücken nun diesen Unglauben in scherzhafter Form aus: »Wenn du dieses Problem löst, fresse ich einen Besen.« Die Bedeutung ist völlig klar. Sie haben eine Implikation gebildet, deren Hintersatz zweifellos falsch ist (da Sie nicht im Traum daran denken, einen Besen zu fressen – selbst wenn Ihr Freund wider Erwarten sein Problem lösen sollte). Da Sie im übrigen die Wahrheit der ganzen Implikation behaupten, behaupten Sie damit die Falschheit des Vordersatzes, das heißt, Sie geben Ihrer Überzeugung Ausdruck, dass der Freund sein Problem auf keinen Fall lösen wird. Andererseits ist es auch völlig klar, dass Vorder- und Hintersatz der Implikation überhaupt nicht miteinander zusammenhängen.

Die zweite Aussage in der Wahrheitstafel von Tabelle 3, » p dann und nur dann, wenn q «, ist eine Abkürzung für » p ist wahr, wenn q wahr ist, und p ist nur dann wahr, wenn q wahr ist«, ein Zusammenhang, dem wir auch die Form »wenn p , so q , und wenn q , so p « geben können. Wie Tabelle 3 zeigt, fordert diese Aussage, dass p und q denselben Wahrheitswert haben, das heißt, dass beide zugleich wahr oder zugleich falsch sind.

Zwei Aussagen p und q mit demselben Wahrheitswert heißen *äquivalent*. Wenn p und q äquivalent sind und wenn bewiesen werden soll, dass p wahr ist, so kann man diesen Beweis auch führen, indem man nachweist, dass q wahr ist. Wie bei der Implikation

gibt es auch für die Äquivalenz verschiedene Formulierungsmöglichkeiten; die gebräuchlichsten von ihnen:

- p dann und nur dann, wenn q
- q dann und nur dann, wenn p
- p genau dann, wenn q
- wenn p , so q , und umgekehrt
- p ist notwendig und hinreichend für q

Die Wendung »dann und nur dann, wenn« ist auch sehr gebräuchlich beim Aufstellen von *Definitionen*, das heißt von Konventionen, durch die festgelegt wird, welchen Sinn man einem neuen Ausdruck geben will.

Spezifikationen namens Quantoren

In der Mathematik kommen oft Ausdrücke vor, wie zum Beispiel $x^2 > -1$, die eine (hier: x) oder mehrere Variable enthalten. Solche Ausdrücke sind keine Aussagen, denn wir können von ihnen nicht behaupten, dass sie entweder wahr oder falsch sind, solange wir nichts über die Werte der in ihnen vorkommenden Variablen wissen (falls wir für x »Katze« einsetzen, wird der Ausdruck sinnlos).

Ein solcher Ausdruck kann aber dadurch zu einer Aussage werden, dass wir gewisse Bedingungen hinzufügen, die sich auf die Variable x beziehen. Sie werden *Quantoren* genannt. Von Interesse sind in unserem Zusammenhang zwei verschiedene Typen. Mit ihrer Hilfe können wir aus $x^2 > -1$ zwei Aussagen, zwei Sätze gewinnen:

- (1) Für alle reellen Werte von x gilt $x^2 > -1$.
- (2) Es gibt einen reellen Wert von x , für den $x^2 > -1$ gilt.

Wer nicht genau weiß, was eine *reelle Zahl* ist, wird mit diesen Aussagen wenig anfangen können. Nun habe ich ein kleines Problem: Es gibt nämlich keine Definition der reellen Zahlen, die

sowohl genau als auch einfach wäre. Dass eine reelle Zahl offiziell als »Dedekind'scher Schnitt in der Menge der rationalen Zahlen« definiert wird, ist nicht sehr hilfreich. Es klingt, als ob ein Dedekind'scher Schnitt so etwas wie ein Kaiserschnitt wäre, durch den reelle Zahlen auf die Welt kommen. Dabei gibt es ein ganz und gar vertrautes, einfaches Bild einer reellen Zahl: sie ist nichts anderes als ein Punkt auf einer Geraden.

Denken Sie sich eine Gerade, und wählen Sie zwei Punkte auf ihr – einen, den Sie „null“ (0), und irgendwo rechts von ihm einen anderen, den Sie „eins“ (1) nennen. Dadurch haben Sie auf der Geraden ein Streckenstück der Länge 1 bestimmt, und der Punkt „eins“ stellt die reelle Zahl 1 dar. Auch jedes andere Streckenstück, zum Beispiel die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1, bestimmt eine reelle Zahl auf der Geraden; Sie brauchen das Streckenstück nur richtig darauf zu legen: das linke Ende auf den Punkt 0. Das rechte Ende des Streckenstücks markiert dann einen Punkt, der die reelle Zahl $\sqrt{2}$ (Quadratwurzel von 2) visualisiert. Jede reelle Zahl wird also durch einen Punkt der Geraden dargestellt. Und umgekehrt visualisiert jeder Punkt der Geraden eine reelle Zahl. Die Gerade *ist* der »reelle Zahlenraum« – den Mathematiker meistens mit dem Symbol \mathbb{R} bezeichnen. Dies ist keineswegs eine genaue und erschöpfende Definition, sondern soll – als kleine Hilfe – nur einen für unsere Zwecke ausreichend klaren Eindruck von einer reellen Zahl vermitteln. Doch nun zurück zu den beiden Behauptungen über reelle Zahlen.

Jeder der obigen Sätze (1) und (2) ist wahr. Satz (1) kann offenbar auch so ausgedrückt werden: Wenn x eine reelle Zahl ist, dann gilt $x^2 > -1$. Im Satz (2) hat die Formulierung »Es gibt einen reellen Wert ...« die Bedeutung »Es gibt *mindestens* einen reellen Wert ...«. Der Quantor »Für alle ...« heißt *Allquantor*, der Quantor »Es gibt einen ...« heißt *Existenzquantor*.²

² In der Umgangssprache geben beide Quantoren oft zu Kontroversen Anlass. So war zu Beginn des Jahres 1997 die Ausstellung »Vernichtungskrieg, Verbrechen der Wehrmacht 1941 – 1944« für die einen Dokumentation einer his-

Beiden Quantoren kommt in der Mathematik eine besonders wichtige Rolle zu. Oft werden Aussagen über alle Elemente einer unendlichen Menge gemacht. Beispielsweise besagt die Goldbach'sche Vermutung (auf die ich noch eingehen werde), dass jede gerade natürliche Zahl größer als 2 Summe von zwei Primzahlen ist. Hier genügt es keineswegs, eine noch so große Überprüfung zu starten – etwa mit Computerhilfe; der Beweis – der bis heute noch nicht erbracht werden konnte – muss sich auf alle (unendlich viele!) geraden Zahlen erstrecken, quasi auf einen Schlag. Auch Existenzbehauptungen sind äußerst wichtig. Definieren kann man zwar alles, zum Beispiel die berühmte Eierlegende Wollmilchsau; von Interesse ist aber, ob so etwas existiert.

Solange Sätze gebildet werden, in denen ein einziger Quantor auf einen Ausdruck mit nur einer Variablen angewendet wird, gibt es erfahrungsgemäß keine Missverständnisse. Es ist jedoch nicht immer sofort ersichtlich, was gemeint ist, wenn zwei Quantoren nacheinander in demselben Ausdruck vorkommen. Man hat hierfür eine Vereinbarung getroffen, die an den folgenden Beispielen erläutert wird:

- (3) Zu jeder positiven Zahl x gibt es eine positive Zahl y , so dass gilt: $x^2 > y^2$.
- (4) Es gibt eine positive Zahl y , so dass für jede positive Zahl x gilt: $x^2 > y^2$.

Diese beiden Aussagen sind nicht gleichwertig. Um deutlich zu machen, worin der Unterschied liegt, vereinbaren wir, dass die Reihenfolge, in der die Variablen x und y im jeweiligen Satz genannt werden, auch die Reihenfolge bestimmt, in der ihre Werte festgelegt werden.

torischen Tatsache (Existenzquantor), für die anderen dagegen – vor allem in München – eine unzulässige pauschale Verurteilung (Allquantor).

In Satz (3) wird zuerst x , dann y genannt, was bedeutet, dass der Wert für x zuerst gewählt und dass dann unter Berücksichtigung der für x getroffenen Wahl ein Wert für y festgelegt wird. Es gibt noch einen zweiten Unterschied zwischen den beiden Festlegungen: Für x müssen wir *alle* positiven Werte durchprobieren – zumindest prinzipiell –, während wir für y nur *einen* Wert benötigen, der sich allerdings bei Änderung (das heißt bei erneuter Festlegung) von x auch wieder ändern kann. Wie auch immer die positive Zahl x gewählt wird, wir können zum Beispiel für y den (positiven) Wert $x/2$ nehmen: $x^2 > y^2$ wird zu $x^2 > (1/4)x^2$, ein Ausdruck, der für jede positive Zahl x zutrifft. Satz (3) ist somit wahr.

Satz (4) ist dagegen falsch – und das soll nun gezeigt werden. Hier wird y an erster und x an zweiter Stelle genannt. Daher muss zuerst eine Zahl für y gewählt werden – eine Wahl, die bei der nachfolgenden Festlegung von x bekannt sein muss. Wieder genügt ein einziger Wert für y , aber für x muss jede mögliche Wahl ins Auge gefasst werden. Es stellt sich heraus, dass es unmöglich ist, ein einziges y so zu wählen, dass für den nun festgehaltenen Wert y für alle möglichen Zahlen x , die wir nacheinander einsetzen können, stets $x^2 > y^2$ gilt. In der Tat, nehmen wir an, irgendjemand habe uns die spezielle positive Zahl z als geeigneten Wert für y vorgeschlagen, dann ist einer der Werte, die für x in Frage kommen, die Zahl $z/2$. Mit diesen Werten wird dann $x^2 > y^2$ zu $(1/4)z^2 > z^2$, ein Ausdruck, der für keine positive Zahl zutrifft.

Sehr ähnlich verhält es sich zum Teil mit den folgenden Paaren von Aussagen – wie sich der Leser leicht überlegen mag:

- (a1): Für jedes x gibt es ein y , so dass $x + y = 5$ gilt.
- (a2): Es gibt ein y , so dass $x + y = 5$ ist für jedes x .
- (b1): Für jeden Mann gibt es eine vollkommene Frau.
- (b2): Es gibt eine vollkommene Frau für jeden Mann.

Die diskutierten Beispiele illustrieren auch die Argumentationsweise, mit deren Hilfe man Aussagen, in denen Quantoren vorkommen, zu beweisen hat. Zum Beweis ihrer Wahrheit muss man sich bei Aussagen der Form »Für alle x gilt ...« alle Werte für x nacheinander eingesetzt denken – oder aber eine Begründung angeben, die für alle zugelassenen x -Werte gültig ist. Um zu beweisen, dass die Aussage falsch ist, genügt es, einen einzigen zugelassenen Wert für x anzugeben, für den die (durch die drei Punkte angedeutete) Bedingung nicht erfüllt ist. Man nennt einen solchen x -Wert ein *Gegenbeispiel* für die betreffende Aussage.

Betrachten wir dagegen eine Aussage der Form »Es gibt ein x , so dass ...«, so genügt es für den Beweis ihrer Wahrheit, einen einzigen zugelassenen Wert für x anzugeben, für den die (durch die drei Punkte angedeutete) Bedingung erfüllt ist. Dagegen würde der Beweis dafür, dass die Aussage falsch ist, erfordern, dass *jeder* für x zugelassene Wert berücksichtigt wird.

Ein paar Rezepte: Beweise

Fast unmerklich sind wir von einfachen Aussagen, von Operationen, die wir auf sie angewendet haben, beziehungsweise Verknüpfungen zwischen ihnen mit Hilfe der vorstehenden Beispiele auf das Konzept der Beweisführung gekommen. Und genau darum geht es in der Logik, nämlich um die Folgerungsbeziehung, die zwischen Annahmen (*Prämissen*) und der Behauptung (*Conclusio*, *Schlussfolgerung*) eines korrekten Schlusses (*Deduktion*) besteht. Logik ist die Wissenschaft – nicht selten auch die Kunst – des Schließens. Ein Schluss ist dann und nur dann korrekt, wenn es nicht der Fall ist, dass seine Prämissen wahr und die Conclusio falsch sind.

Man muss kein besonders scharfsinniger Sherlock Holmes sein, um einzusehen, dass in dem folgenden (korrekten) Schluss,

der in allen Lehrbüchern der Logik steht, die (wahre) Conclusio aus den (wahren) Prämissen folgt:

Alle Menschen sind sterblich;
alle Griechen sind Menschen;
also sind alle Griechen sterblich.

Aber: Es kümmert die Logik nicht, ob die Prämissen oder die Conclusio tatsächlich wahr oder falsch sind; für die Korrektheit ist nur gefordert, dass die Conclusio wahr sein muss, *wenn* die Prämissen wahr sind. Demnach kann es neben korrekten Schlüssen, in denen Prämissen und Conclusio wahr sind (wie im obigen Beispiel), auch Deduktionen geben, die ebenfalls völlig korrekt sind, aber eine oder mehrere falsche Prämissen und (oder) eine falsche Conclusio enthalten. Ein paar solcher Beispiele will ich nun nennen.

Beispiel für einen korrekten Schluss mit lauter falschen Aussagen:

Alle Menschen sind klug;
alle Primaten sind Menschen;
also sind alle Primaten klug.

Es ist aber keineswegs so, dass falsche Prämissen bei einem korrekten Schluss immer zu einer falschen Conclusio führen müssen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Alle Politiker sind alt;
alle Achtziger sind Politiker;
also sind alle Achtziger alt.

Vielmehr kann aus einer falschen Prämisse *alles* folgen. Genau das ist der Grund, weshalb Mathematiker in logischer Hinsicht so genau und pingelig sein müssen. Bertrand Russell wurde einmal gefragt, ob er denn aus $2 + 2 = 3$ folgern könne, dass er der Papst sei. »Na klar«, antwortete Russell. »Aus $2 + 2 = 3$ folgt $2 = 1$.

Der Papst und ich sind zwei Personen. Da aber 2 gleich 1 ist, sind wir nur eine Person. Also bin ich der Papst.«

In all diesen Fällen sehen wir, dass die Conclusio wahr sein müsste, wenn die Prämissen wahr wären – ganz gleich, wie es um die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen tatsächlich steht; und das genügt für die Korrektheit. Es gibt nur eine einzige Kombination von Wahrheitswerten, die in einem korrekten Schluss *nicht* vorkommen kann: wenn die Prämissen wahr und die Conclusio falsch sind. All dies zeigt, dass die Korrektheit eines Schlusses nicht einfach von den Wahrheitswerten von Prämissen und Conclusio abhängt. Sie garantiert nur, dass die Conclusio wahr ist, *falls* die Prämissen wahr sind; sie liefert uns keinerlei Hinweis darauf, ob auch nur eine einzige Prämisse tatsächlich wahr ist, und auch keine Information über den Wahrheitswert der Conclusio, falls mindestens eine Prämisse falsch ist.

In manchen Fällen kann es außerordentlich schwierig sein, die Frage nach der Korrektheit zu beantworten. So hat zum Beispiel noch niemand die nötigen Entdeckungen gemacht, um zu entscheiden, ob der folgende Schluss korrekt ist: Als Prämissen sind alle bewiesenen Sätze der Mathematik zugelassen; *also* ist jede gerade ganze Zahl größer als 2 die Summe zweier Primzahlen. Die Schwierigkeit rührt nicht etwa von der Unbestimmtheit her, die in dem einen oder anderen Teil dieser Aussage stecken mag. Die Behauptung, um die es geht, ist *klar* (es handelt sich um die Goldbach'sche Vermutung); das Problem besteht darin, herauszufinden, ob sie *wahr* ist – wahr im Sinne eines korrekten Schlusses aus den Prämissen.

Um es noch einmal deutlich zu sagen: In der Logik kommt es nicht auf die *faktische* Wahrheit von Aussagen an, sondern auf die Korrektheit von Schlüssen. (Korrektheit und Wahrheit haben in der Logik genauso viel beziehungsweise wenig miteinander zu tun wie Recht und Gerechtigkeit im sozialen Leben.)

Sätze als Implikationen: Beweisspielarten

Viele mathematische Sätze können in der Form einer Implikation angegeben werden: Wenn p , so q . Doch wie beweist man solche Implikationen? Wir können die äußere Form eines Beweises wie folgt darstellen:

Es sei p .

Dann ... (bla bla bla) ...

Also gilt q .

Wie kann die Argumentationskette »Dann ... (bla bla bla) ...« schlüssig und nachvollziehbar konstruiert werden? Es ist nun an der Zeit, ein paar Verfahren anzugeben, mit denen Implikationen bewiesen werden können.

An dieser Stelle schiebe ich einen kleinen Nachtrag über die Implikation ein, genauer: über äquivalente Formen der Implikation.

Durch das Aufstellen der Wahrheitstabellen für die folgenden beiden Aussagen ist leicht zu erkennen, dass diese äquivalent sind:

- (a): »Wenn p , so q .« (Beispiel: Wenn es regnet, gehe ich ins Kino.)
- (b): »Wenn nicht q , so nicht p .« (Wenn ich nicht ins Kino gehe, regnet es nicht.)

Auch die folgenden Aussagen sind zur Implikation »wenn p , so q « äquivalent:

- (c): »Wenn p und nicht q , so q .«
- (d): »Wenn p und nicht q , so nicht p .«

Es gibt noch weitere gebräuchliche Äquivalenzen der Implikation. Auch wenn die letzten beiden Aussagen etwas formal

anmuten und seltsam klingen, sofern wir sie auf umgangssprachliche Beispiele anwenden, sind sie mit der Implikation »wenn p , so q « äquivalent; die Wahrheitstafeln zeigen es.

Die dritte Spalte in der Wahrheitstafel von Tabelle 3 (Seite 6) zeigt, dass wir in der Mathematik keine Implikationen zu betrachten brauchen, in denen sich p als falsch erweist; denn in diesen Fällen ist »wenn p , so q « wahr, unabhängig davon, was für eine Aussage für q eingesetzt wird. Bei mathematischen Überlegungen können wir daher unsere Aufmerksamkeit auf Implikationen beschränken, in denen p wahr ist. Für diese Fälle zeigt uns aber die Tabelle 3, dass »wenn p , so q « unter genau denselben Umständen als wahre Aussage betrachten können, unter denen q wahr ist. Somit besteht also ein möglicher Weg, die Implikation »wenn p , so q « zu beweisen, darin, mit der (wahren) Voraussetzung p zu beginnen und aus ihr abzuleiten, dass dann auch q wahr ist. Zu dieser Ableitung dürfen beliebige logisch korrekte Schlüsse benutzt werden. Ein Beweis, der auf diesem Wege geführt wird, wird als *direkter Beweis* der Implikation »wenn p , so q « bezeichnet.

Als Beispiel (B-1) beweisen³ wir folgende Implikation:

Wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist, so ist auch n^2 ($= n \cdot n$) ungerade.

Beweis: Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Jede ungerade natürliche Zahl n kann in der Form $n = 2m + 1$ dargestellt werden, wobei m eine nichtnegative ganze Zahl ist. Quadriert man beide Seiten dieser Gleichung, so folgt:

$$n^2 = (2m + 1)^2.$$

³ Beweise in Kästen können übersprungen werden; das tut dem Verständnis des Haupttextes keinen Abbruch. Der Leser kann bei Bedarf später darauf zurückkommen.

Die rechte Seite dieser Gleichung ist offensichtlich das Quadrat einer Summe. Wenn wir darauf den (vielleicht noch aus dem Schulunterricht bekannten) binomischen Lehrsatz

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

anwenden, so folgt:

$$n^2 = 4m^2 + 4m + 1.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann leicht in die Form $2k + 1$ gebracht werden, wobei k eine geeignete nichtnegative ganze Zahl ist:

$$n^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1 = 2k + 1.$$

Diese Darstellung zeigt aber, dass n^2 ungerade ist, und damit ist der Beweis erbracht.

Dies ist kein bis in die kleinstmöglichen Schritte gehender Beweis. Wir haben auf Bekanntes oder bereits Bewiesenes zurückgegriffen (zum Beispiel auf die allgemeine Darstellung einer ungeraden Zahl, auf die arithmetischen Rechenregeln und auf den binomischen Lehrsatz). Das ist erlaubt. Komplexere Beweise werden zuerst oft nur in größeren Argumentationslinien konzipiert; erst nach und nach werden dann die Beweisschritte verfeinert. Für den direkten Beweis besteht hier die Grundidee darin, den binomischen Lehrsatz auf die Darstellung des Quadrats einer ungeraden Zahl anzuwenden: $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Der Rest ist Arrangement.

Wollte man die bewiesene Aussage penibel und vollständig aus der formalen Logik ableiten, würde so ein Projekt bald unübersichtlich werden. Für den Mathematiker (wie auch für den Laien) ist beispielsweise die mathematische Aussage » $1 + 1 = 2$ « trivial. Und doch: In ihrem legendären und monumentalen Versuch »Principia Mathematica«, die Mathematik als strenge Methode

der Logik aufzubauen, benötigen Bertrand Russell und Alfred N. Whitehead immerhin 362 Seiten, bis sie in der Lage sind, diese arithmetische Aussage zu beweisen.

Wir haben schon bemerkt, dass im Fall der Äquivalenz zweier Aussagen ein Beweis für eine der beiden Aussagen zugleich als Beweis für die andere gilt. Auf Seite 16 habe ich unter (b) bis (d) äquivalente Formen der Implikation (a) »wenn p , so q « angegeben. Da jede dieser vier Aussagen die Form einer Implikation hat, kann es sein, dass wir für die eine oder andere von ihnen einen direkten Beweis anzugeben vermögen. Einen direkten Beweis für eine der Aussagen (b) bis (d) nennt man einen *indirekten Beweis* oder auch *Widerspruchsbeweis* der Implikation »wenn p , so q «. (Für besondere Formen indirekter Beweise gibt es noch andere Namen, auf die ich hier nicht eingehe.)

Ein Alibi wird in Krimis als indirekter Beweis vorgeführt. Das formale Schema ist stets das gleiche: Angenommen, ich wäre zur Tatzeit am Tatort in München gewesen. Dann hätte ich aber nicht gleichzeitig am Betriebsausflug nach Salzburg teilnehmen können, was Frau Müller, mit der ich mich unentwegt unterhalten habe, sicher bestätigen wird. Dies ist ein Widerspruch zur Anfangsannahme, da ich mich nicht gleichzeitig an verschiedenen Orten befinden kann. Folglich ist sie falsch.

Beispiel (B-2)

Folgende Implikation ist indirekt zu beweisen: Wenn n eine natürliche Zahl ist, deren Quadrat gerade ist, so ist auch n gerade.

Wir können einen indirekten Beweis für die Implikation »wenn p , so q « liefern, indem wir einen direkten Beweis für die Implikation »wenn nicht q , so nicht p « durchführen. Wenn wir sie voll ausschreiben, so wird daraus: Wenn n keine gerade natürliche Zahl ist, so ist n auch keine natürliche Zahl, deren Quadrat gerade ist. Somit lautet die Hauptidee

für den indirekten Beweis: Falls n eine ungerade natürliche Zahl wäre, so folgte nach Beispiel (B-1), dass n^2 ebenfalls ungerade wäre. (In dieser Kurzfassung fehlen einige Schritte – lassen Sie sich dadurch nicht aus der Ruhe bringen.)

Der nächste Fall (B-3) stellt geradezu ein Paradebeispiel für einen indirekten Beweis dar. Betrachten wir die Gleichung $x \cdot x = 2$ oder kurz $x^2 = 2$, wobei x eine unbekannte (positive) Zahl sein soll, und fragen: Welche Zahl, mit sich selbst multipliziert, ergibt 2? Es ist soweit klar, dass x keine ganze Zahl sein kann. Deshalb die Frage: *Von welcher Natur ist die Lösung?* Können wir als Lösung einen Bruch n/m finden, worin n und m ganz sind? Wie der Beweis im folgenden Kasten zeigt, ist dies in der Tat unmöglich. Bezeichnen wir die gesuchte Lösung mit \spadesuit . Es gilt also

$$\spadesuit \cdot \spadesuit = \spadesuit^2 = 2.$$

Beispiel (B-3)

Zeige, dass \spadesuit , die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$, irrational ist (damit ist gemeint, dass \spadesuit nicht als gekürzter Bruch dargestellt werden kann).

Indirekter Beweis: Angenommen, \spadesuit sei rational; dann kann \spadesuit als gekürzter Bruch dargestellt werden, etwa $\spadesuit = n/m$, worin n und m ganz und teilerfremd sind. Dann folgt $n = \spadesuit \cdot m$ und nach Quadrieren beider Seiten $n^2 = \spadesuit^2 \cdot m^2 = 2m^2$ (denn für \spadesuit^2 können wir ja 2 schreiben).

Diese Gleichung zeigt, dass n eine ganze Zahl ist, deren Quadrat gerade ist, und das bedeutet nach Beispiel (B-2), dass auch n selbst gerade ist. Wir dürfen folglich n in der Form einer allgemeinen geraden Zahl schreiben, $n = 2r$ (mit einem geeigneten r), und finden nach Einsetzen in die obige Gleichung:

$$n^2 = (2r)^2 = 2m^2 \text{ oder } 4r^2 = 2m^2 \text{ oder } 2r^2 = m^2.$$

Diese Gleichung zeigt aber, dass auch m eine ganze Zahl ist, deren Quadrat gerade ist. Daher ist m ebenfalls gerade, und das widerspricht der Annahme, dass n und m teilerfremd sind. Damit ist aber die Behauptung bewiesen.

Anmerkung. Natürlich haben Sie es erraten: Die Lösung ♠ wird gewöhnlich als $\sqrt{2}$ (»Quadratwurzel von 2«) geschrieben, mit dem »Wurzelzeichen« $\sqrt{}$ (auch »Radikalzeichen« genannt). Es liegt nicht an der Symbolik, ob eine Zahl irrational ist, sondern allein am Beweis; (z. B. ist die positive Quadratwurzel von 4, $\sqrt{4}$, *nicht* irrational, sondern sogar ganz, nämlich 2.)

Wie man sich hoffnungslos verbeißt

Mathematische Beweise vermitteln oft den Eindruck, dass sie eine Ansammlung von Rätseln und Tricks sind: Mathematik ist im Bewusstsein vieler Menschen schwer nachvollziehbare Gedankenakrobatik. Doch ganz so schlimm ist es nicht: Mathematiker kochen auch nur mit Wasser; auch sie haben keine fertigen Rezepte, um neue Aussagen zu beweisen, sie benötigen eine gewisse Erfahrung, vergleichbar der eines Schachspielers. Die »Eröffnungsmöglichkeiten« für einen Beweis sind allerdings oft vielfältiger als beim Schachspiel, und so ist es auch nicht verwunderlich, dass sich zahlreiche einfach zu verstehende Aussagen bis heute einer Beweisführung (beziehungsweise einer Widerlegung) widersetzt haben. Betrachten wir ein solches Beispiel.

Vor etwa dreißig Jahren waren die Lehrbücher des deutschen Mathematikers Lothar Collatz (1910 bis 1990) vielen Studenten vertraut. Seine »Optimierungsaufgaben« (zusammen mit Wolfgang Wetterling) und seine »Numerische Behandlung von Differentialgleichungen« zieren immer noch ein Bücherregal meines

Arbeitszimmers. Bereits als er selbst noch studierte, hatte sich Collatz ein Problem gestellt, das bis heute nicht gelöst werden konnte. Dabei scheint es geradezu beleidigend einfach zu sein:

Für das erste Glied a_0 unserer Folge nehmen wir eine beliebige natürliche Zahl. Ist nun diese Zahl gerade, dann soll das nächste Glied, a_1 , die Hälfte von a_0 betragen:

$$a_1 = a_0/2.$$

Ist dagegen a_0 ungerade (und würde deshalb nach Halbierung keine natürliche Zahl ergeben), dann soll das nächste Glied a_1 wie folgt gebildet werden:

$$a_1 = 3 \cdot a_0 + 1 \text{ (oder kurz } 3a_0 + 1).$$

Alle nachfolgenden Glieder (a_2, a_3, a_4, \dots) werden ebenfalls nach dieser Regel gebildet.

Ein Beispiel. Nehmen wir als Anfangsglied a_0 die Zahl 50. Da 50 gerade ist, lautet das nächste Glied $a_1 = 50/2 = 25$. Dieses Glied ist ungerade, folglich ist das dritte Glied $a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 25 + 1 = 76$. Diese Zahl lässt sich wieder halbieren, und wir erhalten als viertes Glied $a_3 = 38$. Das nächste Glied a_4 ist gleich 19, a_5 gleich 58 (das heißt, wir müssen $3 \cdot 19 + 1$ bilden, da 19 ungerade ist) und so weiter.

Immer, wenn ein Folgenglied gerade ist und daher durch 2 geteilt werden kann, ist das nächste Folgenglied kleiner, und immer, wenn ein Folgenglied ungerade ist, wird das nachfolgende größer sein.

Man stellt sehr schnell fest, dass man nach einigem Auf und Ab auf die Zahl 1 trifft – und dass man sich von da an ewig in der Schleife $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ dreht, wie wir an einigen Beispielen sogleich sehen werden.

Dieses Collatz'sche oder $(3n+1)$ -Problem⁴, wirft die Frage auf, ob man *immer*, also unabhängig von der natürlichen Zahl a_0 , von der man ausgeht, irgendwann auf die Zahl 1 stößt.

⁴ Es wird als »Problem E16« aufgeführt in: Richard K. Guy, »Unsolved Problems in Number Theory«, New York/Heidelberg/Berlin 1981.

Tab. 4 Folgen des $(3n+1)$ -Problems für die natürlichen Zahlen von 1 bis 9.

a_0	Folge
1	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
2	$2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
3	$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
4	$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
5	$5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
6	$6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
7	$7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
8	$8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.
9	$9 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ usw.

Rechnen wir einige Beispiele durch, wobei wir für a_0 der Reihe nach die ersten neun natürlichen Zahlen nehmen (Tabelle 4).

Bis heute ist die Behauptung, die Folge führe immer zu 1, nicht bewiesen und daher nur eine Vermutung. Dabei wurden alle Zahlen bis 700 Milliarden mit dem Computer getestet. Ein mögliches Gegenbeispiel, das die Vermutung widerlegen würde, kann es nur oberhalb dieser gigantischen Prüfstrecke geben und wird bestimmt nicht einfach zu finden sein. »Es gibt bis heute keine durchschlagende theoretische Einsicht, mit der sich die Vermutung beweisen oder widerlegen ließe.« So kennzeichnet Albrecht Beutelspacher die Situation in seinem unterhaltsamen Buch »In Mathe war ich immer schlecht ...«. Mit elementaren Mitteln gelangt man rasch zu Fragen und Vermutungen ohne Ende. Jeder kann versuchen, dieses leicht verständliche, offene Problem zu lösen. Aber Vorsicht – man kann sich sehr schnell darin verstricken und verbeißen! Ein paar elementare Überlegungen dazu können Sie spaßeshalber nachvollziehen.^{1/5} Und selbstverständlich auch eigene Beweisideen erproben.

⁵ Hochgestellte Ziffern, denen auf dieser Seite keine Fußnoten entsprechen – wie hier die 1 –, verweisen auf die Anmerkungen, ab Seite 339. Auch eine Verwechslung mit Potenzen ist nicht zu befürchten.

Ratschläge eines berufenen Mathematikers

George Pólya (1888 bis 1985) gibt heuristische Ratschläge, die er auf den Innendeckel seines Buches »Schule des Denkens« (englischer Titel: »How to Solve It«) setzen ließ:

- »Erstens: Du musst die Aufgabe verstehen.
- Zweitens: Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und den Unbekannten. Du musst vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann. Du musst schließlich einen Plan der Lösung erhalten.
- Drittens: Führe deinen Plan aus.
- Viertens: Prüfe die erhaltene Lösung.«

Auf dem gegenüberliegenden Innendeckel werden diese Richtlinien dann bis auf die niedrigste Stufe von Einzelstrategien aufgegliedert, die im geeigneten Moment ins Spiel gebracht werden können:

- »Wenn du die vorgegebene Aufgabe nicht lösen kannst, schau dich nach einer geeigneten verwandten Aufgabe um.
- Beginne von hinten.
- Beginne von vorn.
- Schränke die Bedingung ein.
- Erweitere die Bedingung.
- Suche ein Gegenbeispiel.
- Rate und teste.
- Teile und herrsche.
- Ändere die Begriffsform.«

Wer glaubt, noch unbewiesene Aussagen beweisen zu können, halte sich vor Augen, was David Hilbert, einer der größten Mathematiker um die Jahrhundertwende, auf die Frage geantwortet hat, warum er sich nicht bemühe, die Fermat'sche Vermutung

(auch als »letzter Fermat'scher Satz« bekannt; siehe den Abschnitt »Das Vermächtnis des professionellen Amateurs« ab Seite 43) zu beweisen: Ehe er begänne, müsste er sich drei Jahre lang intensiv darauf vorbereiten, und seine Zeit sei ihm zu kostbar, um sie in Aktivitäten zu stecken, die wahrscheinlich zu einem Misserfolg führen würden.

Der formale, manchmal strenge Charakter der Mathematik ist Ausdruck einer gewissen »Macht« der Beweise: In jedem mathematischen Beweis steckt – gleichsam in potenzieller Weise – eine unbeschränkte Anzahl anderer analoger Beweise. Eine bewiesene Aussage über ein beliebiges ebenes Dreieck ist zum Beispiel gültig für alle denkbaren, unendlich vielen ebenen Dreiecke. Sehr deutlich tritt dieser Umstand bei dem folgenden Beweisverfahren zutage. Es heißt *Beweis durch vollständige Induktion* und schließt die elementare Beweisrezeptur ab.

Endlicher Beweis unendlich vieler Aussagen

Bei der Einführung des Allquantors (Seite 10) habe ich schon erwähnt, dass oft Aussagen über alle Elemente einer unendlichen Menge gemacht werden. Da nützt es nichts, eine (Computer-) Überprüfung – und sei sie noch so umfassend – zu starten; es ist vielmehr ein Beweis erforderlich, der sich auf die unendlich vielen Objekte, für die die Behauptung gelten soll, erstreckt. Ein mathematisches Verfahren, das den Beweis unendlich vieler Aussagen – quasi auf einen Schlag – bewerkstelligt, ist die vollständige Induktion.

Betrachten wir einen Satz S und eine unendliche Folge von Sätzen S_1, S_2, S_3, \dots von der Art, dass S dann und nur dann wahr ist, wenn jeder einzelne der Sätze S_1, S_2, S_3, \dots wahr ist. Dazu zwei Anmerkungen:

1. Im Ausdruck S_3 (beispielsweise) ist die »3« eine Nummer und heißt *Index* (Mehrzahl: Indizes). Ein Index dient lediglich der Nummerierung der Glieder (Terme, Ausdrücke) einer (endlichen oder unendlichen) Liste. Oft, wie auch hier, wird der Index so gewählt, dass er mit der (natürlichen) Variablen n des entsprechenden Satzes gleichgesetzt wird; also bezeichnet S_{37} die spezielle Aussage, für die die Variable n den Wert 37 erhält.
2. Die drei Pünktchen deuten an, dass es *so weitergeht*, und daher muss der Leser wissen, *wie* es weitergeht. Das lässt sich bestimmen, indem genügend viele Anfangsterme angegeben werden. Auch in unserem Fall brauchen wir nicht blind zu raten: Der Satz, der nach S_3 kommt, ist S_4 – und natürlich so weiter.

S ist also äquivalent zur Aussage » S_1 und S_2 und S_3 und ...«, die sich aus unendlich vielen Aussagen zusammensetzt.

Meistens behaupten Sätze dieser Art, dass eine Bedingung, in der eine Variable n vorkommt, erfüllt wird, sobald man für n eine beliebige natürliche Zahl einsetzt.

Beispiel (B-4)

Der Satz S :

»Wenn n ganz und positiv ist, so gilt

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

kann ausgedrückt werden durch:

$$S_1: 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$$\text{und } S_2: 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$\text{und } S_3: 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

und so weiter mit unendlich vielen Aussagen.

Auf welche Art können wir versuchen, einen solchen Satz zu beweisen? Die bisher angegebenen Methoden dienen zum Be-

weisen beliebiger Implikationen. Natürlich kann es vorkommen, dass eine der Methoden bequemer zum Ziel führt als eine andere, oder auch, dass uns mit den angegebenen Methoden gar kein Beweis glückt.²

Für Fälle wie Beispiel (B-4) steht uns die Methode der vollständigen Induktion zur Verfügung. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt:

Schritt 1: Beweis des Satzes S_1 .

Schritt 2: Beweis der Implikation: Wenn S_k , so S_{k+1} .

Zum Beweis des Satzes S_1 (Schritt 1) darf jede anwendbare Methode benutzt werden. Oft gelingt es, die spezielle Aussage einfach nur zu verifizieren (durch Einsetzen des Wertes 1 für die Variable n in den formelmäßigen Ausdruck von Satz S_1).

In Zusammenhang mit Schritt 2 ist ein Punkt besonders zu beachten: Es geht nicht um die Frage, ob S_k wahr ist oder nicht, sondern nur darum, dass jedes Mal, wenn S_k wahr ist, gefolgert werden kann, auch S_{k+1} sei wahr. Bewiesen werden muss also die Implikation »Wenn S_k , so S_{k+1} «. Außerdem müssen wir noch sicher sein, dass der Beweis, den wir für die Implikation »Wenn S_k , so S_{k+1} « geben, für jede natürliche Zahl k gültig ist. Im nachfolgenden Kasten finden Sie den detaillierten Beweis.

Beweis des Satzes S von Beispiel (B-4)

Satz S: Wenn n ganz und positiv ist, so gilt

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Schritt 1. Der Satz S_1 besagt $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ und das ist offenbar richtig.

Schritt 2. Wir beweisen die Implikation »Wenn S_k , so S_{k+1} «, worin S_k die Aussage

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

und S_{k+1} die Aussage

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{2}$$

ist. Für diese Implikation werden wir einen direkten Beweis führen.

Wir gehen davon aus, dass S_k , *Induktionsannahme* genannt, wahr ist; dass wir also überall dort, wo $1 + 2 + 3 + \cdots + k$ steht, $k(k + 1)/2$ schreiben können.

Damit lautet die Aussage S_{k+1} wie folgt:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k \cdot (k + 1)}{2} + (k + 1).$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt $(k + 1) \cdot (k + 2)/2$, wenn wir die darin vorkommenden Terme auf den gemeinsamen Nenner 2 bringen und vereinfachen. Somit haben wir die Aussage S_{k+1} aus S_k hergeleitet. Da diese Überlegungen für jede positive ganze Zahl k gelten, ist der Satz S bewiesen.

Wodurch sind wir berechtigt, die Schritte 1 und 2 als Beweis für den Satz S gelten zu lassen? Oft wird diese Gültigkeit einfach als Axiom postuliert; ein Axiom ist ein grundlegender Lehrsatz, der als gültig angesehen wird und der nicht weiter bewiesen zu werden braucht. Sinnverwandt ist der Begriff des Postulats – eine Grundannahme, die unbeweisbar, aber glaubhaft ist. Es ist aber durchaus plausibel, die Schritte 1 und 2 als Beweis anzuerkennen, ohne sie axiomatisch zu fordern: Wenn ein Satz für eine konkrete natürliche Zahl n_0 gilt und wenn bewiesen wird, dass er, wann immer dies für eine beliebige natürliche Zahl k der Fall ist, zwingend auch für den Nachfolger $k + 1$ gilt, dann muss der Satz wohl für alle natürlichen Zahlen (ab n_0) gültig sein.

Beide Schritte – sowohl der Nachweis für einen konkreten Fall als auch der Schluss von k auf $k + 1$, *Induktionsschluss* genannt – sind unerlässlich. Es kann durchaus sein, dass der In-

duktionsschluss gelingt, die Behauptung aber trotzdem für keine natürliche Zahl wahr ist. Oder umgekehrt: Der Nachweis für einen konkreten Wert gelingt, aber der Induktionsschluss versagt.

Der »Satz vom Affen«

Die Sätze, die sich durch vollständige Induktion beweisen lassen, sind Legion – in allen Bereichen der Mathematik. Ein skurriles Beispiel: Betrachten wir das deutsche Alphabet, dem wir das Leerzeichen (den Zwischenraum) und die Interpunktionszeichen hinzufügen. Damit kann nicht nur jedes Wort, jeder Satz, sondern auch jede beliebige Folge daraus mechanisch konstruiert werden. In der entstehenden unendlichen Liste stehen sinnlose Kombinationen neben berühmten Werken. Auch das Buch, das Sie gerade lesen, sowie alle künftigen Bücher lassen sich auf diese Weise erzeugen – und zwar in allen möglichen Variationen, also zum Beispiel auch ohne Druckfehler. Da dies, so meint man, auch ein Affe könnte, nennt man diese Einsicht den »Satz vom Affen«: Die Menge aller Wörter über einem gegebenen Alphabet ist abzählbar.⁶

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der Anzahl⁷ der Wörter der Länge n über einem gegebenen Alphabet.

⁶ *Abzählbar* wird eine Menge genannt, wenn man alle ihre Elemente *durchnummern* kann. Im nächsten Kapitel gehe ich ausführlich darauf ein. Der Ausdruck »Wörter *über* einem Alphabet« (statt »Wörter aus einem Alphabet«) hat sich in der mathematischen Umgangssprache eingebürgert – auch in wörtlicher Übersetzung im Englischen und Französischen. Sinngemäß bedeutet der Ausdruck, dass *alle* Buchstaben des Alphabets zur Bildung von Wörtern herangezogen werden (und nicht bloß ein Teil davon).

⁷ Vollständige Induktion *nach* der Anzahl ...« ist ebenfalls ein Ausdruck der mathematischen Umgangssprache, der spezifiziert, *nach welcher* Variablen der Beweis zu führen ist. Gelegentlich sagt man auch kurz »Induktion *über* (n zum Beispiel)«

Vielleicht mussten Sie in der Schule mit dem »binomischen Lehrsatz« vorlieb nehmen, der ebenfalls durch Induktion über n bewiesen wird:

$$(a + b)^n = a^n + \text{Kauderwelsch} + b^n.$$

Spezialfall: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ach ja.

Im Prolog (Seite XXV) sprach ich von der Induktion (als dem Schließen von Einzelfällen auf das Allgemeine in den Naturwissenschaften) und vom damit verwandten Prinzip der Kausalität (dem Postulat der Verknüpfung von Ursache und Wirkung): Diese naturwissenschaftlichen Denkweisen sind Karl Popper zufolge keine Quelle sicherer Erkenntnis, weil wir die Natur doch nur bruchstückhaft kennen können und sie so komplex ist, dass sich Gegenbeispiele nie mit Sicherheit ausschließen lassen. Diese Induktion kann nie *vollständig* sein.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion in der Mathematik ist ebenfalls ein Schluss von Einzelfällen auf das Allgemeine – nur mit dem Unterschied, dass hier *alle* (unendlich viele, aber wohldefinierte) Einzelfälle auf einen Schlag erfasst und bewiesen werden. Die Einschränkung auf eine überschaubare Gesetzmäßigkeit, die in mathematischen Aussagen zum Ausdruck kommt, macht es möglich, unendlich viele Spezialfälle in einem künstlichen, einfachen Rahmen zu verallgemeinern – ohne Ausnahme. Um sie von der Induktion in den Naturwissenschaften deutlich zu unterscheiden, wird die vollständige Induktion oft auch »mathematische Induktion« genannt.

An dieser Stelle möchte ich noch eine Bemerkung über das formale Wesen vieler mathematischer Beweise anbringen, also über den Abschnitt »Dann ... (bla bla bla) ...«, der sich zwischen den beiden Teilen »Es sei p « und »Also gilt q « einer Implikation befindet. In vielen Fällen scheint diese Argumentationskette für den Laien nicht leichtverständlich konstruiert zu sein. Der Leser möge sich trösten: Für den Berufsmathematiker sind die Beweise

auch nicht immer einfach nachzuvollziehen. Auch er muss sich oft gehörig anstrengen, um einen für ihn neuen Beweis würdigen zu können. Das liegt einfach daran, dass sich der Urheber eines Beweises wie ein Architekt verhält, der sein fertiges Gebäude der Öffentlichkeit vorstellt: Das Werk glänzt, aber es ist ihm nicht anzusehen, wie es im Detail konstruiert wurde; längst sind die Hilfskonstruktionen und das Baugerüst wieder abmontiert und verschwunden. Das erinnert an die ägyptischen Pyramiden: Bei einigen weiß man bis heute nicht mit Sicherheit, wie sie genau gebaut wurden – aber sie stehen.

<http://www.springer.com/978-3-8274-2884-4>

Abenteuer Mathematik

Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion

Basieux, P.

2011, XXVI, 394 S. 35 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8274-2884-4