

Mathematische Bildverarbeitung

Übungen und Zusatzmaterial

Diese PDF-Datei beinhaltet die Übungsaufgaben aus dem Buch, die die Entwicklung beziehungsweise Implementation eines numerischen Verfahrens und den anschließenden Test zum Thema haben. Insbesondere befinden sich im Anhang dieses Dokuments die dafür erforderlichen Testdaten. Sie sind durch Abbildungen mit dem folgenden Symbol zu erkennen:



Quellen- und Lizenzinformationen sowie die Originaldatei dieses Bildes können als Anhang abgerufen werden, in den meisten PDF-Betrachtern durch Doppelklick auf das Symbol.

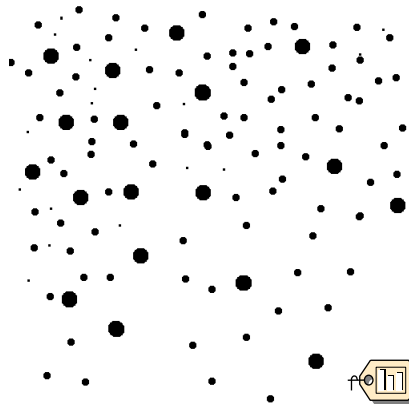
Alle hier enthaltenen, eigenen oder aus den CreativeCommons-Lizenzen by-2.0 oder by-sa-2.0 hervorgegangen Bilder dürfen unter Angabe dieser Quelle zu den Bedingungen unter

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/legalcode>

weitergegeben werden.

- Das Buch „Mathematische Bildverarbeitung“ ist im Vieweg+Teubner Verlag unter der ISBN 978-3-8348-1037-3 erschienen.

Aufgabe 3.11 (Zählen von Kreisen mit Hilfe von morphologischen Methoden). Ein Bild enthalte kreisförmige Objekte verschiedener Größe:



Beschreiben Sie einen Algorithmus (aufbauend auf morphologischen Operationen) der die Anzahl und Größe der Kreise ausgibt. Implementieren Sie den Algorithmus und testen Sie ihn an diesem Bild.

Aufgabe 4.12 (Schnelle Faltung mit der diskreten Fouriertransformation). Die Faltung von $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ist definiert durch

$$(u * v)_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_{n-k}.$$

Der Träger von $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ist

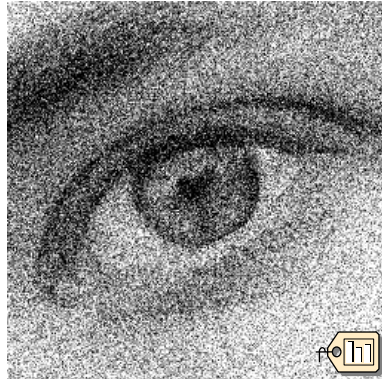
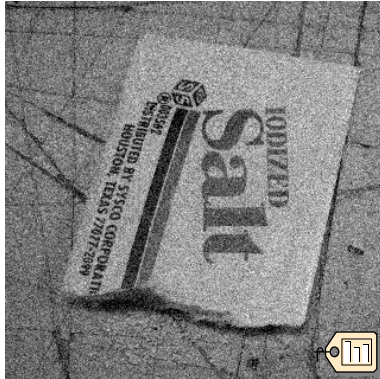
$$\text{supp } u = \{k \in \mathbb{Z} \mid u_k \neq 0\}.$$

1. Es seien $u, h \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mit $\text{supp } u = \{0, \dots, N-1\}$ und $\text{supp } h = \{-r, \dots, r\}$. Dann gilt $\text{supp } u * v \subset \{-r, \dots, N+r-1\}$ (wieso?). Entwickeln und implementieren Sie einen Algorithmus `fftconv`, der die Faltung von u und v auf dem gesamten Träger mit Hilfe der Fouriertransformation berechnet. Eingabe: Zwei Vektoren $u, \mathbb{C}^N, h \in \mathbb{C}^{2r+1}$. Ausgabe: Das Ergebnis $w \in \mathbb{C}^{N+2r}$ der Faltung von u und v .
2. Entwickeln und implementieren Sie analog zum vorigen Aufgabenteil eine zweidimensionale schnelle Faltung `fft2conv`. Eingabe: Ein Grauwertbild $u \in \mathbb{R}^{N \times M}$ und ein Faltungskern $h \in \mathbb{R}^{2r+1 \times 2s+1}$. Ausgabe: Die Faltung $u * h \in \mathbb{R}^{N+2r \times M+2s}$.
3. Was ist der Aufwand für die schnelle Faltung im Gegensatz zur direkten Auswertung der Summen? Für welche Größen von u und h lohnt sich die schnelle Faltung in dieser Hinsicht?
4. Testen Sie den Algorithmus `fft2conv` am Bild



mit Faltungskernen Ihrer Wahl. Vergleichen Sie Ergebnisse und Laufzeiten mit einer Implementierung der direkten Summenbildung nach Unterabschnitt 3.3.3 (auch vor dem Hintergrund der Aufwandsabschätzungen).

Aufgabe 6.42. Implementieren Sie das primale-duale Verfahren zum variationellem Entrauschen (Tabelle 6.1) und testen Sie es an den folgenden Bildern:



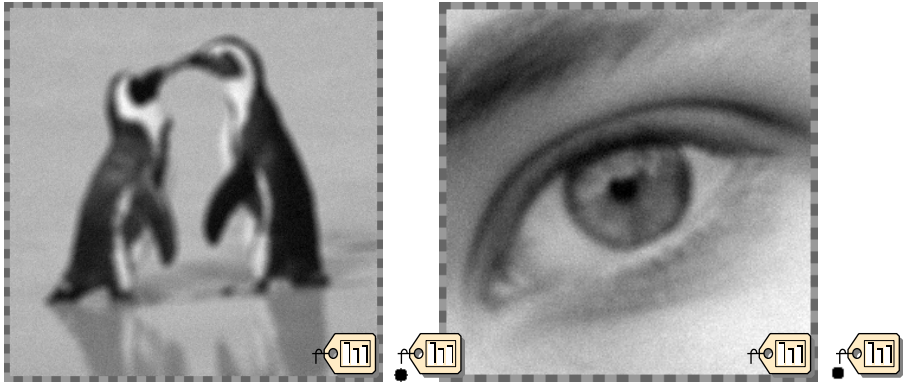
Aufgabe 6.43. Für $K \geq 1$ stelle die Matrix $\kappa \in \mathbf{R}^{(2K+1) \times (2K+1)}$ einen Faltungskern dar, der durch $-K \leq i, j \leq K$ indiziert wird und $\sum_{i=-K}^K \sum_{j=-K}^K \kappa_{i,j} = 1$ erfüllt. Bezeichne weiterhin für $N, M \geq 1$ mit $A_h : \mathbf{R}^{(N+2K) \times (M+2K)} \rightarrow \mathbf{R}^{N \times M}$ den diskreten Faltungsoperator

$$(A_h u)_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-K}^K u_{(i+K-k), (j+K-k)} \kappa_{k,l}.$$

1. Implementieren Sie das in Tabelle 6.2 beschriebene primale-duale Verfahren zur variationalen Entfaltung durch Lösung der Aufgabe

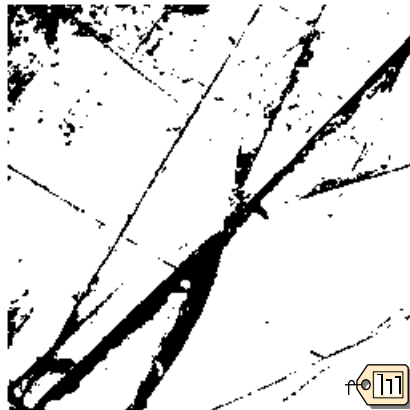
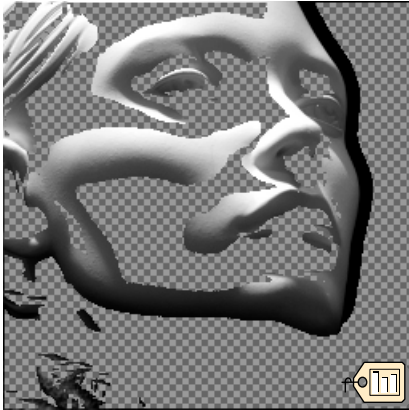
$$\min_{u \in \mathbf{R}^{(N+2K) \times (M+2K)}} \frac{\|A_h u - U^0\|_q^q}{q} + \frac{\lambda \|\nabla_h u\|_p^p}{p}$$

für gegebene Daten $U^0 \in \mathbf{R}^{N \times M}$ und Parameter $\lambda > 0$. Testen Sie es am folgenden Bildern/Faltungskernen:



2. Wie lautet ein Verfahren, welches zusätzlich die Beschränkungen $\underline{U}^0 \leq u_{i,j} \leq \overline{U}^0$ für $1 \leq i \leq N + 2K, 1 \leq j \leq M + 2K$ mit $\underline{U}^0 = \min_{i,j} U_{i,j}^0$ und $\overline{U}^0 = \max_{i,j} U_{i,j}^0$ realisiert?
3. Implementieren und testen Sie diese Beschränkungen. Sind Unterschiede in den Ergebnissen im Vergleich zu dem Verfahren ohne Beschränkungen feststellbar?

Aufgabe 6.45. Implementieren Sie das primale-duale Inpainting-Verfahren nach Tabelle 6.3 und testen Sie es an den folgenden Beispielbildern/Masken:



Zusatz: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 6.44, um eine modifizierte Dualitätslücke $\tilde{\mathcal{G}}$ nach Beispiel 6.144 aufzustellen. Weisen Sie deren Konvergenz $\tilde{\mathcal{G}}(u^n, w^n) \rightarrow 0$ für die Iterierten (u^n, w^n) nach und modifizieren Sie das Programm so, dass es abbricht, sobald $\tilde{\mathcal{G}}$ einen bestimmten Wert unterschritten hat.

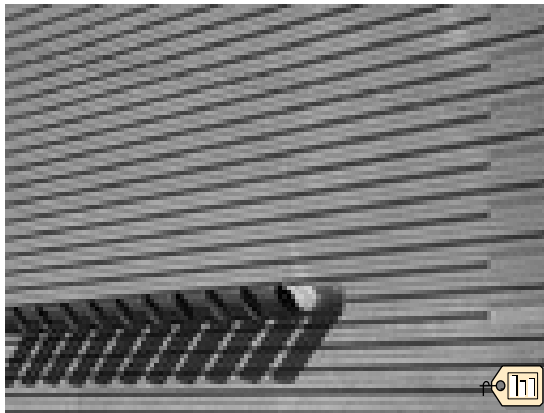
Aufgabe 6.47. Es seien $N, M \in \mathbf{N}$ positiv, $U^0 \in \mathbf{R}^{N \times M}$ und $K \in \mathbf{N}$ mit $K \geq 1$. Betrachte für $1 \leq p < \infty$ die Interpolationsaufgabe

$$\min_{u \in \mathbf{R}^{KN \times KM}} \frac{\|\nabla_h u\|_p^p}{p} + I_{\{A_h u = U^0\}}(u)$$

mit

$$(A_h u)_{i,j} = \frac{1}{K^2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K u_{((i-1)K+k), ((j-1)K+l)}.$$

Verwenden Sie den Algorithmus aus Tabelle 6.4, um ein numerisches Verfahren für die Lösung zu implementieren und testen Sie es an den Bildern:



Zusatz: Implementieren und testen Sie auch das alternative Lösungsverfahren aus Aufgabe 6.46. Gibt es Unterschiede in der praktischen Anwendung?

Mathematische Bildverarbeitung

Einführung in Grundlagen und moderne Theorie

Bredies, K.; Lorenz, D.

2011, X, 445 S., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1037-3