ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Department Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

1. Übung

Zürich, 22. Oktober 2004

Bitte beachten: Geben sie unbedingt die Übungsgruppe an, an der Sie teilnehmen (Nummer und Raum oder Name des Übungsgruppenleiters).

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Wörter der Länge n über Σ mit genau k Vorkommen des Symbols $\#$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Wörter der Länge n über Σ mit höchstens k Vorkommen des Symbols $\#$.

Hier wie in allen Aufgaben gilt: **Antworten sind stets zu begründen, eine reine Zahl ist keine Lösung!** **10 Punkte**

Aufgabe 2

(a) Geben Sie eine Sprache $L \neq \{\lambda\}$ an, für die $L^i = L$ gilt für alle $i \geq 1$, und begründen Sie Ihre Behauptung. Gibt es eine endliche Sprache L, die diese Bedingung erfüllt?

(b) Geben Sie die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ als Durchschnitt zweier Sprachen L_1 und L_2 an, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) $L_1 \not\subseteq L_2$ und $L_2 \not\subseteq L_1$,
(ii) $L_1, L_2 \subseteq \{a\}^+\{b\}^+\{c\}^+$,
(iii) $L_1 - L$ und $L_2 - L$ sind unendliche Sprachen.

10 Punkte

Aufgabe 3

(a) Wieviele unterschiedliche Teilworte kann ein Wort der Länge k ($k \in \mathbb{N}$) maximal und wieviele minimal haben?

(b) Geben Sie für den Fall $k = 5$ jeweils ein Wort mit möglichst vielen und eins mit möglichst wenigen Teilworten an. Wählen Sie hierzu ein geeignetes Alphabet.

10 Punkte

Abgabe: Bis **Freitag, den 29. Oktober 2004** in der Vorlesung

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

2. Übung

Zürich, 29. Oktober 2004

Webseite: Die Einteilung der Übungsgruppen, Musterlösungen und weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie *vorläufig* unter

`http://www2.inf.ethz.ch/~sseibert/theoInf0405/`

Bitte beachten: Geben sie unbedingt die Übungsgruppe an, an der Sie teilnehmen (Nummer und Raum oder Name des Übungsgruppenleiters).

Aufgabe 4

Sei h ein Homomorphismus von Σ_1 nach Σ_2. Beweisen Sie mit Hilfe der Induktion, dass für jedes Wort $x = x_1x_2 \dots x_m$, $x_i \in \Sigma_1$ für alle $i = 1, \dots, m$,

$$h(x) = h(x_1)h(x_2)\dots h(x_m).$$

10 Punkte

Aufgabe 5

(a) Sei h ein Homomorphismus von Σ_1 nach Σ_2.
Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma_1^*$ ist $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.
Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma_1^*$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

$$h(L_1)h(L_2) = h(L_1L_2).$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussage:

$$(\{a\}^*\{b\}^*)^* = (\{a,b\}^*)^2.$$

10 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 6

(a) Existiert ein Alphabet Σ, so dass für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ stets $L_1L_2 = L_2L_1$ gilt?

(b) Existiert ein Alphabet Σ, so dass für alle Sprachen $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ stets

$$L_1(L_2 \cap L_3) = L_1L_2 \cap L_1L_3$$

gilt?

Beweisen sie Ihre Behauptung.

10 Punkte

Aufgabe 7

Geben Sie eine unendliche Folge von Wörtern $y_1, y_2, y_3, \ldots$ mit $|y_i| < |y_{i+1}|$ an, so dass eine Konstante c existiert und so dass für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$K(y_i) \leq \lceil \log_2 \log_2 \log_2 |y_i| \rceil + c$$

gilt.

10 Punkte

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 4. November 2004**, 13.00 Uhr.
Es stehen hierzu **Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5** zur Verfügung.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

3. Übung

Zürich, 5. November 2004

Die Webseite zur Vorlesung findet sich ab sofort unter der Adresse

`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf0405/`

Bitte beachten: Geben sie unbedingt die Übungsgruppe an, an der Sie teilnehmen (Nummer und Raum oder Name des Übungsgruppenleiters).

Aufgabe 8

Es sei p ein Polynom in einer Variablen und $L \subseteq (\Sigma_{bool})^*$ eine unendliche rekursive Sprache mit der Eigenschaft, dass

$$|L \cap (\Sigma_{bool})^m| \leq p(m) \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

z_n sei für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ das n-te Wort in L bezüglich der kanonischen Ordnung.
Wie kann man $K(z_n)$ in Abhängigkeit von $|z_n|$ nach oben beschränken? **10 Punkte**

Aufgabe 9

In Lemma 2.6 der Vorlesung setzen wir eine unendliche steigende Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ mit der Eigenschaft $K(n_i) \geq \lceil \log_2 n_i \rceil / 2$ voraus.
Wie weit kann man diese Voraussetzung abschwächen (d.h. die rechte Seite der Ungleichung verkleinern), ohne die Aussage des Lemmas zu verletzen? **10 Punkte**

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass Primzahlen keine zufälligen Zahlen sind, d.h. dass für alle hinreichen großen Primzahlen p gilt:

$$K(p) < \lceil \log_2(p+1) \rceil - 1.$$

Hinweis: verwenden Sie den Primzahlsatz. **10 Punkte**

Aufgabe 11

Beweisen Sie, dass für alle $i, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $i < n$, 2^{n-i} unterschiedliche Wörter x in $(\Sigma_{\text{bool}})^n$ existieren, so dass

$$K(x) \geq n - i.$$

10 Punkte

Abgabe: Bis **Freitag, den 12. November 2004**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

4. Übung

Zürich, 12. November 2004

Bitte beachten:

- Geben Sie unbedingt die Übungsgruppe an, an der Sie teilnehmen (Nummer und Raum oder Name des Übungsgruppenleiters).
- Zur Angabe eines endlichen Automaten reicht dessen Darstellung als Diagramm aus.
- Zustandsklassen sind stets explizit anzugeben. (Sie sollen also *nicht* einfach die Definition einer Zustandsklasse kopieren.)

Aufgabe 12

Es sei $L := \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a \text{ ist gerade und } |x|_b \bmod 4 \in \{1,3\}\}$.
Konstruieren sie einen endlichen Automaten M mit $L(M) = L$, und geben Sie zu allen seinen Zuständen q die zugehörigen Klassen $\mathrm{Kl}[q]$ an.

10 Punkte

Aufgabe 13

Es sei $L := \{x0101y \mid x, y \in \{0,1\}^*\}$.
Konstruieren Sie einen endlichen Automaten M mit $L(M) = L$, und geben Sie zu allen seinen Zuständen q die zugehörigen Klassen $\mathrm{Kl}[q]$ an. **10 Punkte**

Aufgabe 14

Es sei $L := \{x \in \{0,1\}^* \mid |x|_1 \bmod 3 = 2 \text{ und } x = 00y11z \text{ für Worte } y, z \in \{0,1\}^*\}$. Stellen Sie die Sprache L geeignet als Schnitt zweier regulärer Sprachen L_1 und L_2 dar. Entwerfen Sie für L_1 sowie für L_2 jeweils einen endlichen Automaten, und konstruieren Sie dann daraus mit Hilfe der aus Lemma 3.2 bekannten Methode einen endlichen Automaten für L. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 15

Es sei $L := \{0^n 1^{2n} 2^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$L \in \mathcal{L}_{RE}$$

10 Punkte

Aufgabe 16*

Beweisen Sie folgende zu Behauptung (3.1) aus Lemma 3.2 äquivalente Behauptung:
Für alle Zustände $p_1 \in Q_1$ und alle Zustände $p_2 \in Q_2$ und alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$(q_{01}, x) \vdash_{M_1}^* (p_1, \lambda) \text{ und } (q_{02}, x) \vdash_{M_2}^* (p_2, \lambda) \iff ((q_{01}, q_{02}), x) \vdash_M^* ((p_1, p_2), \lambda)$$

Führen Sie einen Induktionsbeweis, aber *ohne* Verwendung der Funktion $\hat{\delta}$.
Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, die Schrittrelationen $\vdash_{M_1}$, $\vdash_{M_2}$ und $\vdash_M$ zu verwenden.

10 Zusatzpunkte

Abgabe: Bis **Freitag, den 19. November 2004**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

5. Übung

Zürich, 19. November 2004

Bitte beachten: Geben Sie unbedingt die Übungsgruppe an, an der Sie teilnehmen (Nummer und Raum oder Name des Übungsgruppenleiters).

Aufgabe 17

Konstruieren Sie einen (deterministischen) endlichen Automaten für die folgende Sprache:

$$L = \{w_1 \dots w_n \mid w_i \in \{a, b\}, \text{ für alle } 1 \leq i \leq n, \\ \text{und es existiert ein } j \in \{1, \dots, n-3\}, \\ \text{so dass } w_j = w_{j+3}\}.$$

10 Punkte

Aufgabe 18

Zeigen Sie, dass jeder (deterministische) EA, der die Sprache

$$L = \{x11001y \mid x, y \in \{0,1\}^*\}$$

akzeptiert, mindestens 6 Zustände hat. **10 Punkte**

Aufgabe 19

Für $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^n$, $w_i \in \Sigma$ für alle $1 \leq i \leq n$, sei $w^R := w_n \dots w_1$.
Es sei $L := \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass L regulär ist,

(a) indem Sie das Pumping-Lemma anwenden und

(b) indem Sie die Methode der Kolmogorov-Komplexität anwenden.

10 Punkte

Aufgabe 20

Es sei $L := \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$L \in \mathcal{L}(EA) \qquad (L \text{ ist regulär.})$$

10 Punkte

Aufgabe 21*

Es sei $L := \{xx^R y \mid x, y \in \{a,b\}^+\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$L \in \mathcal{L}(EA) \qquad (L \text{ ist regulär.})$$

10 Zusatzpunkte

Aufgabe 22*

Es sei $L := \{x110y \mid x, y \in \{0,1\}^*\} \cup \{x011y \mid x, y \in \{0,1\}^*\}$. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten M mit $L(M) = L$ und führen Sie in Analogie zum Beweis von Lemma 3.5 einen Beweis dafür, dass $L(M) = L$ gilt. **10 Zusatzpunkte**

Abgabe: Bis **Freitag, den 26. November 2004**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

6. Übung

Zürich, 26. November 2004

Aufgabe 23

Konstruieren Sie für die Sprache

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a \text{ ist gerade und } |x|_b \geq 3\}$$

einen (deterministischen) EA M mit $L(M) = L$ mit minimaler Anzahl von Zuständen. Beweisen Sie, dass es keinen endlichen Automaten für L gibt, der mit weniger Zuständen auskommt als der von Ihnen konstruierte Automat M. **10 Punkte**

Aufgabe 24

Konstruieren Sie für die Sprache

$$L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$$

eine (deterministische) TM M mit $L(M) = L$. Begründen Sie, weswegen $L(M) = L$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie ein hinreichend grosses Arbeitsalphabet. **10 Punkte**

Aufgabe 25

Verwenden Sie bei den folgenden beiden Teilaufgaben eine Programmiersprache Ihrer Wahl, achten Sie aber darauf, dass Sie trotz eventueller Informalitäten der verwendeten Syntax nur die erlaubten Operationen verwenden.

(a) Schreiben Sie ein Programm, das den Befehl

$$\ll\texttt{if } I \geq J \texttt{ then goto } 1 \texttt{ else goto } 2\gg$$

nur mit Hilfe der Operationen $+1$, -1 und des Tests auf 0 realisiert.

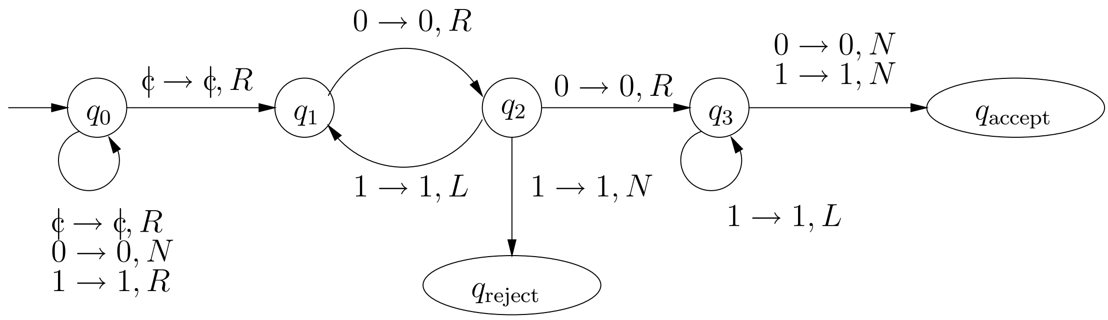
(b) Schreiben Sie Programme, die für zwei gegebene Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ die Addition $a + b$ und die Subtraktion $a - b$ nur mit Hilfe der Operationen $+1$, -1 und des Tests auf 0 berechnen.

10 Punkte

(bitte wenden)

Aufgabe 26

Sei M die folgende NTM:



(a) Geben Sie die ersten 6 Ebenen (alle Konfigurationen bis nach 5 Berechnungsschritten) der Berechnungsbäume $T_M(x)$ für $x = 01$ und für $x = 0010$ an.

(b) Geben Sie die Sprache an, die von M akzeptiert wird.

10 Punkte

Aufgabe 27*

Beweisen Sie folgendes Lemma, das «modifizierte Pumping-Lemma»:
Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y, x, z zerlegen lässt, d.h. $w = yxz$, wobei

1. $|xz| \leq n_0$,
2. $|x| \geq 1$ und
3. entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

10 Zusatzpunkte

Aufgabe 28*

Nennen wir das Pumping-Lemma (bzw. das modifizierte Pumping-Lemma) *ohne* die Bedingung (i) das «vereinfachte Pumping-Lemma».
Finden Sie eine irreguläre Sprache L, auf die das vereinfachte Pumping-Lemma zutrifft, d.h. finden Sie eine Sprache L, für die kein EA M existiert mit $L(M) = L$, für die aber gilt, dass eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass sich jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile $w = yxz$ zerlegen lässt, wobei

- $x \neq \lambda$ und
- entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

Beweisen Sie, dass L die geforderten Eigenschaften hat. **10 Zusatzpunkte**

Abgabe: Bis **Freitag, den 3. Dezember 2004**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

7. Übung

Zürich, 3. Dezember 2004

Aufgabe 29

(a) Seien A und B zwei abzählbare Mengen. Beweisen Sie, dass $A \cup B$ abzählbar ist.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

10 Punkte

Aufgabe 30

Beweisen Sie, dass die Sprache

$$L_{\text{qdiag}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_{i^2} \text{ für ein } i \in \mathbb{N}, \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_{i^2} \text{ nicht}\}$$

nicht in $\mathcal{L}_{RE}$ ist (vgl. Satz 5.5 aus der Vorlesung). **10 Punkte**

Aufgabe 31

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\text{Kod}(M)\#x\#0^i \mid x \in \{0,1\}^*, i \in \mathbb{N}, M \text{ hat mindestens } i+1 \text{ Zustände, und während der Berechnung von } M \text{ auf } x \text{ wird der } i\text{-te Zustand von } M \text{ mindestens einmal erreicht}\}$$

nicht rekursiv ist. **10 Punkte**

Aufgabe 32

Beweisen Sie, dass L_H EE-reduzierbar auf L_U ist. **10 Punkte**

Abgabe: Bis **Freitag, den 10. Dezember 2004**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

8. Übung

Zürich, 10. Dezember 2004

Aufgabe 33

Seien $L \in \mathcal{L}_{RE}$ und $L^C \in \mathcal{L}_{RE}$. Zeigen Sie, dass dann auch $L \in \mathcal{L}_R$ gilt. **10 Punkte**

Aufgabe 34

Beweisen Sie die folgende Aussage:

> Sei M eine Mehrband-Turingmaschine, die immer hält. Dann existiert eine zu M äquivalente Mehrband-Turingmaschine A mit
>
> $$\mathrm{Time}_A(n) \leq \frac{\mathrm{Time}_M(n)}{2} + 2n.$$

10 Punkte

Aufgabe 35

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $2^n \in \Theta(2^{n+a})$ für jede positive Konstante $a \in \mathbb{N}$.

(b) $2^{b \cdot n} \in \Theta(2^n)$ für jede positive Konstante $b \in \mathbb{N}$.

(c) $\log_b n \in \Theta(\log_c n)$ für alle reellen Zahlen $b, c > 1$.

(d) $(n+1)! \in O(n!)$.

(e) $\log(n!) \in \Theta(n \cdot \log n)$.

10 Punkte

Aufgabe 36

Beweisen Sie, dass die Funktion $f(n) = c^n$ für jede Konstante $c \in \mathbb{N}, c \geq 2$ zeitkonstruierbar ist. **10 Punkte**

Aufgabe 37*

Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes von Rice, indem Sie den Fall II. beweisen, d.h.:

> Führen Sie einen detaillierten Beweis von $L_{H,\lambda} \leq_{\mathrm{EE}} L$, falls $\mathrm{Kod}(M_\emptyset) \notin L$, wobei L wie im Beweis von Satz 5.9 (Satz von Rice) gewählt ist.

10 Zusatzpunkte

Aufgabe 38*

Wir betrachten die folgende Sprache:

$$L = \{\mathrm{Kod}(M) \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass L nicht rekursiv ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L rekursiv aufzählbar ist.

10 Zusatzpunkte

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 23. Dezember 2004**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

9. Übung

Zürich, 23. Dezember 2004

Aufgabe 39

Seien $f : I\!N \to I\!N$ und $g : I\!N \to I\!N$ zwei zeitkonstruierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $f \cdot g : I\!N \to I\!N$, $f \cdot g(n) = f(n) \cdot g(n)$, zeitkonstruierbar ist. **10 Punkte**

Aufgabe 40

Analysieren Sie die Zeitkomplexität der deterministischen Simulation einer NTM aus Satz 4.2 der Vorlesung. **10 Punkte**

Aufgabe 41

Analysieren Sie die Zeitkomplexität der $(k+2)$-Band-TM A aus dem Beweis des Satzes 6.5. **10 Punkte**

Aufgabe 42

Beschreiben Sie einen Polynomialzeit-Verifizierer für die folgenden Sprachen:

(a) COMPOSITE $= \{x \in (\Sigma_{\text{bool}})^* \mid \mathit{Nummer}(x)$ ist keine Primzahl$\}$,

(b) HK $= \{x \in \{0, 1, \#\}^* \mid x$ kodiert einen ungerichteten Graphen, der einen Hamiltonischen Kreis enthält$\}$.

10 Punkte

Aufgabe 43*

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : I\!N \to I\!N, f(n) = \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$$

platzkonstruierbar ist. **10 Zusatzpunkte**

Abgabe: Bis **Freitag, den 14. Januar 2005**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

10. Übung

Zürich, 14. Januar 2005

Aufgabe 42

(a) Beschreiben Sie einen Polynomialzeit-Verifizierer für die Sprache

$$\text{COMPOSITE} = \{x \in (\Sigma_{\text{bool}})^* \mid \textit{Nummer}(x) \text{ ist keine Primzahl}\}.$$

(b) Beschreiben Sie einen Polynomialzeit-Verifizierer und eine polynomielle NTM für die Sprache HK (das Problem des Hamiltonischen Kreises aus Beispiel 2.4).

10 Punkte

Aufgabe 44

Sei

$$\text{NEXPTIME} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(2^{n^d})$$

und sei

$$\text{VEXPTIME} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \{V(A) \mid A \text{ ist ein } (2^{n^d})\text{-Verifizierer}\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\text{NEXPTIME} = \text{VEXPTIME}.$$

10 Punkte

Aufgabe 45

Beweisen Sie Lemma 6.8 der Vorlesung, d.h. beweisen Sie

> Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen. Falls $L_1 \leq_p L_2$ und L_1 ist NP-schwer, dann ist auch L_2 NP-schwer.

10 Punkte

Aufgabe 46

Das Problem SETCOVER ist wie folgt definiert:

$$\text{SETCOVER} = \{((X, \mathcal{F}), k) \ \mid \ \begin{array}{l} X \text{ ist eine endliche Menge und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X), \text{ und} \\ \text{es existiert ein } C \subseteq \mathcal{F}, \text{ mit } X = \bigcup_{S \in C} S \text{ und } |C| \leq k\}, \end{array}$$

wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichnet.
Zeigen Sie, dass SETCOVER NP-vollständig ist. **10 Punkte**

Abgabe: Bis **Freitag, den 21. Januar 2005**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. J. Hromkovič
Prof. Dr. M. Bläser

11. Übung

Zürich, 21. Januar 2005

Aufgabe 47

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von VC auf CLIQUE an, d.h. zeigen Sie

$$\text{VC} \leq_p \text{CLIQUE}.$$

10 Punkte

Aufgabe 48

Das Problem HITTING-SET ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\text{HITTING-SET} = \{((X,\mathcal{F}),k) \quad | \quad & X \text{ ist eine endliche Menge und } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)\text{, und} \\ & \text{es existiert ein } C \subseteq X\text{, mit} \\ & C \cap S \neq \emptyset \text{ für alle } S \in \mathcal{F} \text{ und } |C| \leq k.\},\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X bezeichnet.
Zeigen Sie, dass HITTING-SET NP-vollständig ist. **10 Punkte**

Aufgabe 49

Beweisen Sie, dass MIN-VC ein NP-schweres Optimierungsproblem ist. **10 Punkte**

(bitte wenden)

Aufgabe 50

Sei U ein Optimierungsproblem, sei A ein zulässiger Algorithmus für U. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Wir sagen, dass A ein $f(n)$-Approximationsalgorithmus für U ist, falls

$$\text{Güte}_A(x) \leq f(n)$$

für jede Eingabe x der Länge n. Beweisen Sie die folgende Aussage:

> Falls $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ kein polynomieller (n^k)-Approximationsalgorithmus für TSP.

Tipp: Benutzen Sie, dass das Problem des Hamiltonschen Kreises (HK) (Beispiel 2.4) NP-vollständig ist. **10 Punkte**

Aufgabe 51*

Finden Sie für jede ganze Zahl $n \geq 4$ eine Instanz I_n des Δ-TSP mit der Eigenschaft

$$\frac{\mathrm{SB}(I_n)}{\mathrm{Opt}_{\Delta-\mathrm{TSP}}(I_n)} \geq \frac{2n-2}{n+1}.$$

Dabei bezeichne $\mathrm{SB}(I_n)$ den maximal möglichen Wert einer von SB auf I_n berechneten Lösung. **10 Zusatzpunkte**

Abgabe: Bis **Freitag, den 28. Januar 2005**, 10.30 Uhr in die Sammelkästen im Hauptgebäude im Raum E 18.1-5.

http://www.springer.com/978-3-8348-0650-5

Theoretische Informatik
Formale Sprachen, Berechenbarkeit,
Komplexitätstheorie, Algorithmik, Kommunikation und
Kryptographie
Hromkovič, J.
2011, II, 415 S. 87 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8348-0650-5