

Kapitel 2

Holomorphe Funktionen

Wir beginnen damit, den Begriff der Differenzierbarkeit ins Komplexe zu übertragen, indem wir Funktionen in einer reellen Variablen durch Funktionen in einer komplexen Variablen ersetzen. Da die komplexen Zahlen ebenfalls einen normierten Körper bilden, lässt sich der gewohnte Begriff der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten direkt komplexifizieren.

2.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $z_0 \in \Omega$. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heisst **komplex differenzierbar an der Stelle z_0** , wenn der Grenzwert

$$a := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert; als logische Formel heisst das: $\exists a \in \mathbb{C} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{C}$

$$0 < |h| < \delta \quad \implies \quad z_0 + h \in \Omega \quad \text{und} \quad \left| a - \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right| < \varepsilon.$$

Die Zahl a , wenn sie existiert, ist eindeutig durch diese Bedingung bestimmt; wir nennen sie die **Ableitung von f an der Stelle z_0** und bezeichnen sie mit $f'(z_0) := a$.

Beispiel 2.2. Eine konstante Funktion $f(z) = c$ ist offensichtlich überall komplex differenzierbar und hat die Ableitung $f'(z) = 0$.

Beispiel 2.3. Die Identitätsabbildung $f(z) = z$ ist überall komplex differenzierbar und hat die Ableitung $f'(z) = 1$.

Beispiel 2.4. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f(z) = z^n$ überall komplex differenzierbar und hat die Ableitung

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} = n z^{n-1}.$$

Beispiel 2.5. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gegeben mit $ad - bc \neq 0$ und $c \neq 0$. Dann ist die Möbiustransformation

$$\phi(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

in $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ komplex differenzierbar und hat die Ableitung

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{az + ah + b}{cz + ch + d} - \frac{az + b}{cz + d} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ad - bc}{(cz + ch + d)(cz + d)} \\ &= \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \end{aligned}$$

Beispiel 2.6. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist überall komplex differenzierbar und stimmt mit ihrer Ableitung überein:

$$\exp'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(z + h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(z).$$

Hier haben wir die aus der Analysis bekannte Gleichung (1.19) verwendet.

Übung 2.7. Die Funktion $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ in (1.23) ist überall komplex differenzierbar und $\log'(z) = 1/z$. **Hinweis:** (1.24) und (1.25).

Übung 2.8. Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist nirgendwo komplex differenzierbar. Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nur an der Stelle $z_0 = 0$ komplex differenzierbar.

Um den Begriff der komplexen Differenzierbarkeit über diese elementaren Beispiele hinaus besser zu verstehen, vergleichen wir ihn mit dem der reellen Differenzierbarkeit in der Dimension zwei. Hierzu identifizieren wir, wie im Abschnitt 1.1, den komplexen Zahlenkörper mit dem Vektorraum \mathbb{R}^2 mittels der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + \mathbf{i}y.$$

Unter leichtem Missbrauch der Schreibweise ist es manchmal nützlich, sowohl den Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als auch die komplexe Zahl $x + \mathbf{i}y$ mit dem Buchstaben z zu bezeichnen, obwohl diese beiden Objekte genau genommen etwas Unterschiedliches bedeuten. Genau um diesen Unterschied soll es an dieser Stelle gehen.

Wir betrachten zunächst lineare Abbildungen. Jede reelle 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.1)$$

definiert eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\xi + \beta\eta \\ \gamma\xi + \delta\eta \end{pmatrix} = A\zeta.$$

Die Identitätsabbildung wird durch die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ induziert. Ein anderes wichtiges Beispiel ist die Multiplikation mit \mathbf{i} als Abbildung von \mathbb{C} auf sich selbst. Unter unserer Identifikation von \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 wird hieraus die lineare Abbildung $(\xi, \eta) \cong \xi + \mathbf{i}\eta \mapsto \mathbf{i}(\xi + \mathbf{i}\eta) = -\eta + \mathbf{i}\xi \cong (-\eta, \xi)$. Die dazugehörige Matrix ist

$$\mathbf{I} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Lemma 2.9. *Für jede Matrix (2.1) gilt*

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \delta, \quad \beta = -\gamma$$

Ist dies erfüllt, so ist die Abbildung $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $a := \alpha + \mathbf{i}\gamma$ gegeben.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Formel

$$\mathbf{A}\mathbf{I} - \mathbf{I}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta + \gamma & -\alpha + \delta \\ \delta - \alpha & -\gamma - \beta \end{pmatrix}.$$

Die zweite folgt aus der Tatsache, dass die Komposition $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ durch $\zeta \mapsto \alpha\zeta + \beta\bar{\zeta} + \mathbf{i}(\gamma\zeta + \delta\bar{\zeta})$ für $\zeta = \xi + \mathbf{i}\eta \in \mathbb{C}$ gegeben ist. Dieser Ausdruck stimmt mit $a\zeta$ überein, wenn $\delta = \alpha$, $\beta = -\gamma$ und $a = \alpha + \mathbf{i}\gamma$ ist. \square

Definition 2.10. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ heisst **komplex linear**, wenn sie mit \mathbf{I} kommutiert (das heisst, $\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A}$) und **komplex anti-linear**, wenn sie mit \mathbf{I} anti-kommutiert (das heisst, $\mathbf{A}\mathbf{I} = -\mathbf{I}\mathbf{A}$).*

Übung 2.11. Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ lässt sich auf eindeutige Weise als Summe $A = A' + A''$ einer komplex linearen Matrix A' und einer komplex anti-linearen Matrix A'' darstellen.

Übung 2.12. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die \mathbb{R} -lineare Abbildung, die durch die Matrix (2.1) induziert ist. Dann gibt es zwei komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$, so dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt: $f(z) = az + b\bar{z}$.

Der Differenzierbarkeitsbegriff in der reellen Analysis

Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, so können wir durch unsere Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ die Menge Ω auch als offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 betrachten und f als Abbildung von Ω nach \mathbb{R}^2 . In der reellen Analysis [7] wird Differenzierbarkeit wie folgt definiert.

*Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ heisst **(reell) differenzierbar an der Stelle $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gibt so dass***

$$\lim_{\mathbb{R}^2 \ni h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah|}{|h|} = 0;$$

Als mathematische Formel heisst das $\exists A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{R}^2$

$$0 < |h| < \delta \implies z_0 + h \in \Omega \text{ und } |f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah| < \varepsilon |h|.$$

Wenn dies gilt, ist die Matrix A durch diese Bedingung eindeutig bestimmt; wir nennen sie die **Ableitung von f an der Stelle z_0** und bezeichnen sie mit $df(z_0) := A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Die Abbildung f heisst **partiell differenzierbar** an der Stelle z_0 wenn die Grenzwerte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

existieren. Diese Grenzwerte heissen **partielle Ableitungen** von f an der Stelle z_0 .

Die Funktion f ist also partiell differenzierbar an der Stelle z_0 wenn die Funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ von einer reellen Variablen an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar ist, und die Funktion $y \mapsto f(x_0, y)$ an der Stelle $y = y_0$. Ist f an der Stelle z_0 differenzierbar so ist f an der Stelle z_0 auch partiell differenzierbar und die beiden partiellen Ableitungen von f sind die Spalten der Matrix $df(z_0)$. Das heisst, im Falle der Differenzierbarkeit lässt sich die Ableitung von f in der Form

$$df(z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

schreiben. Dies ist die *Matrix der partiellen Ableitungen* und wird auch die **Jacobi-Matrix** von f an der Stelle z_0 genannt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Zum Beispiel existieren die partiellen Ableitungen der Funktion $f(z) := z^2/\bar{z}$ an der Stelle $z_0 = 0$, jedoch ist diese Funktion im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Die Cauchy–Riemann-Gleichungen

Satz 2.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion und $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0 \in \Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist komplex differenzierbar an der Stelle z_0 .
- (ii) f ist reell differenzierbar an der Stelle z_0 und die Matrix $df(z_0) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist komplex linear.
- (iii) Die Funktionen $u := \operatorname{Re} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $v := \operatorname{Im} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar an der Stelle z_0 , und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \quad (2.3)$$

Dies sind die **Cauchy–Riemann-Gleichungen**.

- (iv) f ist reell differenzierbar an der Stelle z_0 und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0. \quad (2.4)$$

Sind diese vier äquivalenten Bedingungen erfüllt, so ist die komplexe Ableitung von f an der Stelle z_0 durch

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \quad (2.5)$$

gegeben, und die lineare Abbildung $df(z_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist unter unserer Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ durch Multiplikation mit $f'(z_0)$ gegeben.

Beweis. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus der Tatsache, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \quad \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(z_0) + \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt sofort aus Lemma 2.9 und der Tatsache, dass die reelle Ableitung $df(z_0) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ durch die Jacobi-Matrix

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x(z_0) & \partial u / \partial y(z_0) \\ \partial v / \partial x(z_0) & \partial v / \partial y(z_0) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Nach Lemma 2.9 ist diese Matrix nämlich genau dann komplex linear, wenn u und v die Cauchy–Riemann-Gleichungen (2.3) erfüllen.

Wir zeigen, dass (i) äquivalent zu (ii) ist. Dazu wählen wir zwei reelle Zahlen $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ und definieren $a \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ durch

$$a := \alpha + \mathbf{i}\gamma, \quad A := \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.9 ist die Matrix A komplex linear und die Abbildung

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

ist durch Multiplikation mit a gegeben. Also gilt

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - a \right|_{\mathbb{C}} = \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah|_{\mathbb{R}^2}}{|h|_{\mathbb{R}^2}} \quad (2.6)$$

für jedes $h \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit $z_0 + h \in \Omega$. Hier betrachten wir die Terme auf der linken Seite als komplexe Zahlen und die auf der rechten Seite als Vektoren in \mathbb{R}^2 . Insbesondere wird die komplexe Zahl $ah \in \mathbb{C}$ unter dieser Identifikation in den Vektor $Ah \in \mathbb{R}^2$ überführt.

Ist (i) erfüllt und $a := f'(z_0)$, so konvergiert die linke Seite in (2.6) gegen Null für $|h| \rightarrow 0$. Daraus folgt dann, dass f an der Stelle z_0 reell differenzierbar ist mit $A = df(z_0)$. Ist umgekehrt (ii) erfüllt und $A := df(z_0)$, so ist A komplex linear, und wir können a wie oben als erste Spalte von A wählen. Nach Voraussetzung konvergiert nun die rechte Seite in (2.6) gegen Null für $|h| \rightarrow 0$. Daraus folgt dann, dass f an der Stelle z_0 komplex differenzierbar ist mit $f'(z_0) = a = \partial f / \partial x(z_0)$. Damit haben wir sowohl die Äquivalenz von (i) und (ii) als auch die restlichen Aussagen des Satzes bewiesen. \square

Korollar 2.14. *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar, so ist f an der Stelle z_0 stetig; als mathematische Formel heisst das $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \Omega$*

$$|z - z_0| < \delta \quad \implies \quad z \in \Omega \quad \text{und} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.13 und einem bekannten Satz aus der Analysis [7], der sagt, dass die Stetigkeit bereits aus der reellen Differenzierbarkeit folgt. Alternativ kann man die Behauptung auch direkt beweisen mit dem gleichen Argument wie für Funktionen einer reellen Variablen [6]. \square

Die gleichen Rechenregeln wie im Reellen gelten auch für komplexe Ableitungen. Insbesondere ist die Ableitung der Summe gleich der Summe der Ableitungen, es gilt die Leibnitz-Regel für das Differenzieren von Produkten, und es gilt die Kettenregel für Kompositionen. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 2.15.

- (i) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $z_0 \in \Omega$, und $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar an der Stelle z_0 . Dann ist $f + g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und es gilt*

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0). \quad (2.7)$$

- (ii) *Seien f, g und z_0 wie in (i). Dann ist $fg : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und es gilt*

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \quad (2.8)$$

- (iii) *Seien f, g und z_0 wie in (i), und sei $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Dann ist $f/g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad (2.9)$$

- (iv) *Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $z_0 \in U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar an der Stelle z_0 , so dass $f(U) \subset V$, und sei $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar an der Stelle $w_0 := f(z_0)$. Dann ist die Komposition $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0). \quad (2.10)$$

Beweis. Es gibt hier zwei Möglichkeiten des Beweises. Entweder kann man die Beweise der entsprechenden Aussagen über Funktionen in einer reellen Variablen [6] direkt und Wort für Wort aufs Komplexe übertragen, oder man kann Satz 2.13 und bekannte Sätze über reelle Differentiation in mehreren Variablen verwenden. Wir überlassen dem Leser die ersten Methode als Übung und konzentrieren uns hier

auf die zweite Methode. Die Aussagen (i) und (iv) folgen unmittelbar aus Satz 2.13 und den entsprechenden Aussagen über die Ableitungen von reellen Funktionen in mehreren Variablen.

Zum Beweis von (ii) schreiben wir $f = f_1 + \mathbf{i}f_2$ und $g = g_1 + \mathbf{i}g_2$ mit $f_1, f_2, g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diese vier Funktionen sind alle an der Stelle z_0 reell differenzierbar, und daher gilt das auch für die Real- und Imaginärteile der Funktion $fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + \mathbf{i}(f_1g_2 + f_2g_1)$. Ausserdem folgt aus der Leibnitz-Regel für Funktionen einer reellen Variablen, dass

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Diese Ableitungen sind alle an der Stelle z_0 zu verstehen und die Produkte in \mathbb{C} . Nach Satz 2.13 erfüllen f und g beide die Gleichung (2.4) an der Stelle z_0 , und daraus folgt

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(z_0) + \mathbf{i}\frac{\partial(fg)}{\partial y}(z_0) = 0.$$

Also ist fg nach Satz 2.13 an der Stelle z_0 komplex differenzierbar, und die Leibnitz-Regel folgt aus der Gleichung $(fg)'(z_0) = \partial(fg)/\partial x(z_0)$.

Zum Beweis von (iii) bemerken wir, dass die Funktion

$$h := \frac{f}{g} = \frac{f\bar{g}}{|g|^2}$$

wiederum nach Satz 2.13 und einem Satz aus der reellen Analysis [7] an der Stelle z_0 reell differenzierbar ist. Aus der Gleichung $f = gh$ und der Leibnitzregel für reelle Ableitungen folgt, dass für jedes $\zeta \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ gilt:

$$df(z_0)\zeta = (dg(z_0)\zeta)h(z_0) + g(z_0)(dh(z_0)\zeta),$$

und daher

$$dh(z_0)\zeta = \frac{1}{g(z_0)}df(z_0)\zeta - \frac{h(z_0)}{g(z_0)}dg(z_0)\zeta = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}\zeta.$$

Daher ist $dh(z_0) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ komplex linear und gegeben durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $g(z_0)^{-2}(f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0))$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Definition 2.16. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heisst **holomorph**, wenn sie an jeder Stelle $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist und die Ableitung $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

Beispiel 2.17 (Polynome). Es folgt sofort aus den Definitionen, dass jede konstante Funktion und die Funktion $f(z) = z$ holomorph sind. Mit Hilfe von Satz 2.15 (i) und (ii) folgt hieraus, dass jedes Polynom

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

mit komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ auf ganz \mathbb{C} holomorph ist.

Beispiel 2.18 (Rationale Funktionen). Seien $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynome mit komplexen Koeffizienten, so dass q nicht identisch verschwindet, und sei

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}.$$

Nach Satz 2.15 (iii) ist die Funktion

$$f := \frac{p}{q} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph. Jede solche Funktion heisst **rational**. Insbesondere ist jede Möbiustransformation holomorph (siehe auch Beispiel 2.5).

Beispiel 2.19. Es folgt aus Beispiel (2.6), dass die Exponentialabbildung auf ganz \mathbb{C} holomorph ist.

Beispiel 2.20. Die Funktionen **Cosinus** und **Sinus** lassen sich auf die gesamte komplexe Ebene erweitern und sind dort durch

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

definiert (siehe Gleichung (1.22) für $z = \theta \in \mathbb{R}$). Nach Satz 2.15 sind diese Funktionen holomorph und erfüllen die Gleichungen

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \cos^2 + \sin^2 = 1.$$

Beispiel 2.21. Der **hyperbolische Cosinus** und der **hyperbolische Sinus** sind die durch

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

definierten Funktionen auf der komplexen Ebene. Sie sind holomorph und erfüllen die Gleichungen

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad \cosh^2 - \sinh^2 = 1.$$

2.2 Biholomorphe Abbildungen

Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ zwei offene Mengen. Eine bijektive Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heisst **biholomorph** oder **holomorpher Diffeomorphismus**, wenn f und f^{-1} holomorph sind. Nach Satz 2.15 (iv) mit $g = f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ ist die Ableitung einer biholomorphen Abbildung überall ungleich Null, und die Ableitung der Umkehrabbildung ist durch die Formel

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \tag{2.11}$$

für $w \in \Omega'$ gegeben. Eine biholomorphe Abbildung von Ω auf sich selbst nennen wir auch einen **(holomorphen) Automorphismus** von Ω .

Beispiel 2.22. Seien \mathbb{H} und \mathbb{D} die offene obere Halbebene und die offene Einheitskreisscheibe wie in (1.31). Nach Übung 1.24 ist die Abbildung

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}, \quad f(z) := \mathbf{i} \frac{1+z}{1-z},$$

biholomorph. Ihre Umkehrabbildung hat die Form

$$f^{-1}(w) = \frac{w - \mathbf{i}}{w + \mathbf{i}}.$$

Beispiel 2.23. Jede Möbiustransformation der Form

$$f(z) := e^{\mathbf{i}\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad z_0 \in \mathbb{D}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

ist ein holomorpher Automorphismus der offenen Einheitskreisscheibe \mathbb{D} (Übung 1.16).

Beispiel 2.24. Jede Möbiustransformation der Form

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0$$

ist ein holomorpher Automorphismus der offenen oberen Halbebene \mathbb{H} .

Beispiel 2.25. Jedes Polynom der Form

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0,$$

ist ein holomorpher Automorphismus von \mathbb{C} .

Satz 2.26. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass $f'(z_0) \neq 0$ ist. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 , so dass die Menge $V := f(U)$ offen ist und die Einschränkung $f|_U$ eine biholomorphe Abbildung von U nach V ist.

Beweis. Schreiben wir $f = u + \mathbf{i}v$ mit $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so ist die reelle Ableitung von f die Matrix

$$df(z) = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x(z) & \partial u / \partial y(z) \\ \partial v / \partial x(z) & \partial v / \partial y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x(z) & -\partial v / \partial x(z) \\ \partial v / \partial x(z) & \partial u / \partial x(z) \end{pmatrix}.$$

Hier folgt die zweite Identität aus den Cauchy–Riemann–Gleichungen (2.3). Nach (2.5) ist die Determinante dieser Matrix

$$\det(df(z)) = \left| \frac{\partial u}{\partial x}(z) \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x}(z) \right|^2 = |f'(z)|^2.$$

Also ist $\det(df(z_0)) \neq 0$. Daher gibt es, nach dem Satz über inverse Funktionen in [7], offene Umgebungen $U \subset \Omega$ von z_0 und $V \subset \mathbb{C}$ von w_0 , so dass die Einschränkung $f|_U : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Ausserdem folgt aus der reellen Kettenregel, dass die Ableitung der Umkehrabbildung $g := (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ die Gleichung

$$dg(f(z))df(z) = \mathbb{1}$$

für $z \in U$ erfüllt. Daher ist die Matrix $df(z)$ für jedes $z \in U$ invertierbar, und es gilt $dg(f(z)) = df(z)^{-1}$ für jedes $z \in U$. Diese Matrix ist komplex linear, und daher ist g holomorph, nach Satz 2.13. \square

Beispiel 2.27. Wir betrachten die Exponentialabbildung

$$\exp : \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \rightarrow \Omega' := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Diese Abbildung ist bijektiv, und ihre Ableitung $\exp' = \exp$ ist überall ungleich Null. Daher ist ihre Umkehrabbildung $\log := \exp^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ holomorph, nach Satz 2.26, und hat die Ableitung

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(\log(w))} = \frac{1}{w}$$

für $w \in \Omega'$. Diese Abbildung ist der Hauptzweig des Logarithmus. (Siehe auch Übung 2.7.)

Beispiel 2.28. Die Abbildung

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \xrightarrow{f} \Omega' := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : z \mapsto f(z) := z^2$$

ist bijektiv (siehe (1.5) in Abschnitt 1.1), und ihre Ableitung $f'(z) = 2z$ ist überall ungleich Null. Ihre Umkehrabbildung $g := f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ ist der Hauptzweig der Quadratwurzel:

$$g(w) = \sqrt{w} = \sqrt{|w|}e^{i\arg(w)/2}.$$

Nach Satz 2.26 ist diese Umkehrabbildung holomorph und hat die Ableitung

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$$

für $w \in \Omega'$. Auch hier kann man die Formel für g' direkt aus (1.5) herleiten. Jedoch ist diese Herleitung recht mühsam.

Beispiel 2.29. Die Abbildung $f(z) = z^n$ ist eine Bijektion von der offenen Menge

$$\Omega := \left\{ re^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n} \right\}$$

auf $\Omega' := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Ihre Ableitung ist wieder überall ungleich Null, und daher ist ihre Umkehrabbildung $\Omega' \rightarrow \Omega : w \mapsto \sqrt[n]{w}$ holomorph. Sie heisst Hauptzweig der n -ten Wurzel.

Beispiel 2.30. Die Tangensfunktion

$$f(z) = \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

bildet die offene Menge

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$$

bijektiv auf die Menge

$$\Omega' := \mathbb{C} \setminus \{iy \mid |y| \geq 1\}$$

ab (Übung). Nach Satz 2.15 ist die Ableitung des Tangens

$$\begin{aligned} \tan'(z) &= \frac{\sin'(z) \cos(z) - \sin(z) \cos'(z)}{\cos^2(z)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(z)} \\ &= 1 + \tan^2(z). \end{aligned}$$

Nach Satz 2.26 ist die Umkehrfunktion $\arctan := \tan^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ holomorph und hat die Ableitung

$$\arctan'(w) = \frac{1}{\tan'(\arctan(w))} = \frac{1}{1 + w^2}.$$

Satz 2.31. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \Omega$, so dass $f(z_0) \neq 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und holomorphe Funktionen $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in U$ gilt:

$$e^{g(z)} = f(z), \quad h(z)^n = f(z).$$

Beweis. Da $f(z_0) \neq 0$ ist, gibt es eine von Null verschiedene komplexe Zahl $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass

$$\exp(w_0) = f(z_0).$$

Da $\exp'(w_0) = \exp(w_0) \neq 0$ ist, existieren nach Satz 2.26 offene Umgebungen $W \subset \mathbb{C}$ von w_0 und $V \subset \mathbb{C}$ von $\exp(w_0)$, so dass $\phi := \exp|_W : W \rightarrow V$ ein holomorpher Diffeomorphismus ist. Definiere

$$U := \{z \in \Omega \mid f(z) \in V\}, \quad g := \phi^{-1} \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dann ist $z_0 \in U$ (da $f(z_0) = \exp(w_0) \in V$ ist), die Funktion g ist holomorph und

$$e^{g(z)} = \phi(g(z)) = f(z)$$

für jedes $z \in U$. Damit haben die Funktionen g und $h(z) := e^{g(z)/n}$ die gewünschten Eigenschaften. \square

2.3 Konforme Abbildungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Dann erhält f die Winkel zwischen sich schneidenden Kurven und infinitesimal die Länge von Vektoren bis auf einen von der Richtung unabhängigen Faktor. Um diese Eigenschaften etwas genauer zu formulieren betrachten wir eine Kurve in Ω und ihre Bildkurve unter f . Seien also a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und

$$[a, b] \rightarrow \Omega : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

eine C^1 -Kurve. Wir betrachten die Bildkurve

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto w(t) := f(z(t)).$$

Aus der Kettenregel für reelle Ableitungen folgt, dass dies auch eine C^1 -Kurve ist und ihre Ableitung durch

$$\dot{w}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(z(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(z(t))\dot{y}(t) = f'(z(t))\dot{z}(t) \quad (2.12)$$

gegeben ist. Hieraus folgt, für $t_0 \in [a, b]$ und $z_0 := z(t_0)$, dass

- (a) $\arg(\dot{w}(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{z}(t_0))$,
- (b) $|\dot{w}(t_0)| = |f'(z_0)| \cdot |\dot{z}(t_0)|$.

Das heisst, dass (a) die Winkel $\arg(\dot{w}(t_0))$ und $\arg(\dot{z}(t_0))$ sich durch einen konstanten Summanden unterscheiden und (b) die Beträge $|\dot{w}(t_0)|$ und $|\dot{z}(t_0)|$ sich durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Dies sind Bedingungen an die Ableitungen einer C^1 -Abbildung, und der Faktor bzw. Summand hängt nicht von der Kurve (wohl aber vom Punkt z_0) ab. Abbildungen mit diesen Eigenschaften heissen **konform**. Die folgenden Übungen zeigen, dass in der Dimension 2 konforme Abbildungen holomorph sind.

Übung 2.32. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Differenz $\arg(A\zeta) - \arg(\zeta)$ ist unabhängig von $\zeta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- (ii) A ist komplex linear.

Übung 2.33. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Der Quotient $|A\zeta| / |\zeta|$ ist unabhängig von $\zeta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- (ii) A ist entweder komplex linear oder komplex anti-linear.

Beispiel 2.34. Wir betrachten den konformen Diffeomorphismus

$$\phi : \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{D}, \quad \phi(z) := \frac{z-1}{z+1}.$$

Die Menge Ω besitzt ein Gitter, das aus Halbgeraden durch den Ursprung und aus konzentrischen Halbkreisen mit Mittelpunkt im Ursprung besteht. Die Halbgeraden werden auf Kreisbögen durch ± 1 abgebildet und die Halbkreise auf Kreisbögen, die auf diesen senkrecht stehen (siehe Abbildung 2.1).

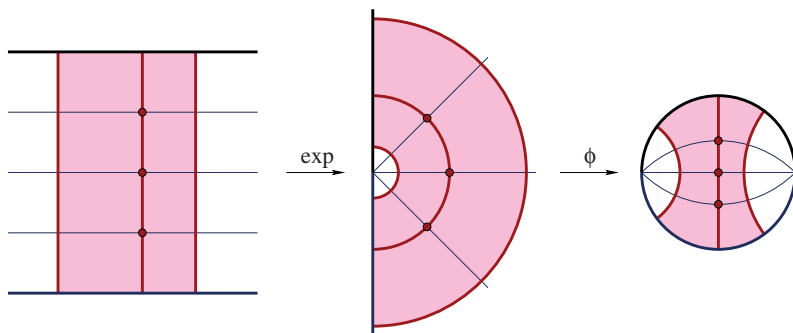


Abbildung 2.1: Konforme Abbildungen

Beispiel 2.35. Sei Ω wie in Beispiel 2.34 und

$$S := \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} \zeta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Die auf S eingeschränkte Exponentialabbildung ist ein konformer Diffeomorphismus $\exp : S \rightarrow \Omega$, der die horizontalen Geraden auf die Halbgeraden abbildet und die vertikalen Intervalle auf die Halbkreise.

Beispiel 2.36. Die Komposition der Abbildungen aus den Beispielen 2.34 und 2.35 (siehe Abbildung 2.1) ist der konforme Diffeomorphismus

$$\psi := \phi \circ \exp : S \rightarrow \mathbb{D}, \quad \psi(\zeta) = \frac{e^\zeta - 1}{e^\zeta + 1}.$$

Beispiel 2.37. Nach Beispiel 2.30 ist der Tangens ein konformer Diffeomorphismus

$$\tan : \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbf{i}((-\infty, -1] \cup [1, \infty)).$$

Übung: Bestimmen Sie das Bild der Geraden $\{\operatorname{Re} z = x_0\}$ und des Intervalls $\{\operatorname{Im} z = y_0\}$.

Steinerkreise

Die folgende Diskussion ist dem Buch von Ahlfors [1, Seite 84ff] entnommen. Sie wird im weiteren Manuskript keine Rolle spielen und kann übersprungen werden.

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene Punkte. Diese Punkte bestimmen zwei Familien von Kreisen die aufeinander senkrecht stehen. Man kann diese Kreise als Koordinatensystem auf der Riemannschen Zahlenkugel betrachten, und sie sind nützlich für die geometrische Beschreibung von Möbiustransformationen. Die **Kreise des Apollonius** werden durch die Gleichung

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \rho \quad (2.13)$$

mit $0 < \rho < \infty$ beschrieben; für $\rho \rightarrow 0$ konvergieren diese Kreise gegen a und für $\rho \rightarrow \infty$ gegen b . Geometrisch erhält man einen Kreis des Apollonius als die Menge aller Punkte in der komplexen Ebene, deren Abstände zu a und b ein festes Verhältnis haben (siehe Abbildung 2.2). Der Kreis (2.13) ist das Urbild des Kreises

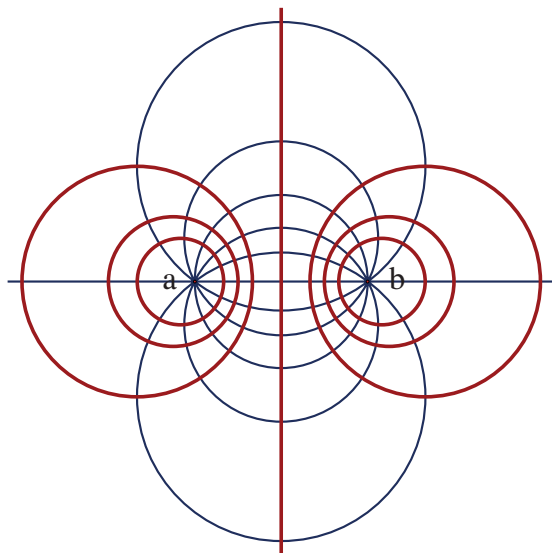


Abbildung 2.2: Steinerkreise

$|\zeta| = \rho$ (mit Mittelpunkt Null und Radius ρ) unter der Möbiustransformation

$$z \mapsto \zeta = \frac{z - a}{z - b}.$$

Die Kreise durch a und b sind die Urbilder der Geraden durch den Ursprung unter dieser Abbildung. Nennen wir A die Schar der Apolloniuskreise und B die Schar der Kreise durch a und b . Dies sind die durch a und b bestimmten **Steinerkreise**, und sie haben eine Vielzahl interessanter Eigenschaften, darunter die folgenden.

- (a) Jeder Punkt auf der Riemannschen Zahlenkugel, mit Ausnahme von a und b , liegt auf je genau einem Kreis der Schar A und der Schar B .
- (b) Die Kreise der Scharen A und B schneiden sich im rechten Winkel.
- (c) Die Reflektion an einem Kreis der Schar A (siehe Übung 1.31) bildet jeden Kreis der Schar B auf sich selbst ab und jeden Kreis der Schar A auf einen anderen Kreis der Schar A . Das gleiche gilt, wenn man A und B vertauscht.
- (d) Die Grenzpunkte a, b werden durch die Reflektion an jedem Kreis der Schar A ineinander überführt, aber nicht durch eine Reflektion an irgendeinem anderen Kreis.

Im Fall $a = 0$ und $b = \infty$ sind die konzentrischen Kreise mit Mittelpunkt Null die Apolloniuskreise, und die Geraden durch den Ursprung sind die Kreise der Schar B . Ist ϕ eine Möbiustransformation, so bildet ϕ die durch a, b bestimmten Steinerkreise auf die durch $a' := \phi(a)$ und $b' := \phi(b)$ bestimmten Steinerkreise ab. Das lässt sich zum Beispiel daran ablesen, dass

$$w = \phi(z) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{w - a'}{w - b'} = k \cdot \frac{z - a}{z - b}$$

für eine geeignete von Null verschiedene Konstante $k \in \mathbb{C}$. Diese Situation ist offensichtlich besonders interessant, wenn a und b Fixpunkte von ϕ sind, denn dann bildet ϕ jeden Apolloniuskreis auf einen Apolloniuskreis und jeden Kreis durch a, b auf einen Kreis durch a, b ab.

Übung 2.38. Sei ϕ eine Möbiustransformation der Form

$$\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad (2.14)$$

und

$$\lambda := \frac{(\alpha + \delta)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}. \quad (2.15)$$

Wir bezeichnen mit $\text{Fix}(\phi) := \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \phi(z) = z\}$ die Menge der Fixpunkte von ϕ in der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$. Ist ϕ nicht die Identität, so gilt

$$\#\text{Fix}(\phi) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 4.$$

Andernfalls hat ϕ genau zwei Fixpunkte.

Definition 2.39. Seien ϕ und λ wie in (2.14) und (2.15). Ist $\phi \neq \text{id}$, so heisst ϕ **elliptisch**, wenn $0 \leq \lambda < 4$, **parabolisch**, wenn $\lambda = 4$, **hyperbolisch**, wenn $\lambda > 4$, und **loxodromisch**, wenn $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ ist.

Nach Übung 2.38 ist eine Möbiustransformation ϕ genau dann parabolisch, wenn sie genau einen Fixpunkt hat. Hat ϕ genau zwei Fixpunkte a und b , so gibt es eine von Null verschiedene Konstante $k \in \mathbb{C}$, so dass

$$w = \phi(z) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{w - a}{w - b} = k \cdot \frac{z - a}{z - b}. \quad (2.16)$$

Bringt man ϕ nun in die Form (2.14) und berechnet die Konstante λ in (2.15), so ergibt sich

$$\lambda = k + \frac{1}{k} + 2.$$

Daher ist ϕ die Identität für $k = 1$, elliptisch für $k \in S^1 \setminus \{1\}$, hyperbolisch für $k > 0$ und $k \neq 1$ und loxodromisch für $k \notin [0, \infty) \cup S^1$. Hier bezeichnen wir mit S^1 den Einheitskreis in \mathbb{C} :

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Ist ϕ elliptisch, so bildet ϕ jeden Apolloniuskreis auf sich selbst ab und rotiert die Kreise durch die Fixpunkte a, b . Ist ϕ hyperbolisch, so bildet ϕ jeden Kreis durch die beiden Fixpunkte a, b auf sich selbst ab. Für $k > 1$ verkleinert sich unter ϕ das Verhältnis des Abstandes zu b zum Abstand zu a , so dass die Apolloniuskreise unter Iteration von ϕ gegen b konvergieren; für $0 < k < 1$ konvergieren sie gegen a .

Übung 2.40. Welche der Möbiustransformationen

$$w = \frac{z}{2z-1}, \quad w = \frac{2z}{3z-1}, \quad w = \frac{3z-4}{z-1}, \quad w = \frac{z}{2-z}$$

ist elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch?

Übung 2.41. Sei $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation mit genau zwei Fixpunkten a, b .

- (i) ϕ ist genau dann hyperbolisch, wenn es einen Kreis $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ gibt, der die Punkte a, b enthält, so dass jedes der beiden Intervalle auf C , die a und b verbinden, durch ϕ auf sich selbst abgebildet wird.
- (ii) ϕ ist genau dann elliptisch, wenn es einen Kreis $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ gibt, der die Punkte a, b nicht enthält und invariant unter ϕ ist.

Übung 2.42. Ist $\phi \neq \text{id}$ eine Möbiustransformation, deren n -te Iterierte $\phi^n = \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi$ die Identität ist, so ist ϕ elliptisch.

Übung 2.43. Ist ϕ eine hyperbolische oder loxodromische Möbiustransformation, so konvergiert $\phi^n(z)$ gegen einen der Fixpunkte, solange z nicht der andere Fixpunkt ist.

Übung 2.44. Wie verhalten sich die Steinerkreise im Limes $b \rightarrow a$? Dies führt zu einer Diskussion von Kreisen, die für die Beschreibung parabolischer Möbiustransformationen nützlich sind (siehe Ahlfors [1, Seite 87/88]).

Übung 2.45. Jede loxodromische Möbiustransformation lässt sich als Komposition einer elliptischen und einer hyperbolischen darstellen.

2.4 Harmonische Funktionen

Der **Laplace-Operator** auf dem \mathbb{R}^2 ist der Differentialoperator

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Eine C^2 -Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heisst **harmonisch**, wenn sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt.

Sei nun $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten Ω wieder als Teilmenge des \mathbb{R}^2 und bezeichnen Real- und Imaginärteil von F mit

$$u := \text{Re } F, \quad v := \text{Im } F.$$

Dies sind reellwertige C^1 -Funktionen auf Ω , die nach Satz 2.13 die Cauchy–Riemann-Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.17)$$

Sind die Funktionen $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar (wie wir später sehen werden ist diese Bedingung immer erfüllt), so gilt

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Hier folgt die zweite Gleichung aus (2.17) und die dritte aus der Tatsache, dass die zweiten Ableitungen kommutieren [7]. Ebenso gilt $\Delta v = 0$. Also sind u und v harmonische Funktionen. Erfüllen zwei harmonische Funktionen die Cauchy–Riemann-Gleichungen (2.17), so nennen wir v **zu u konjugiert**. Die nächste Übung zeigt, dass es lokal für jede harmonische Funktion u eine dazu konjugierte Funktion v gibt. Mit anderen Worten, jede harmonische Funktion ist lokal der Realteil einer holomorphen Funktion.

Übung 2.46. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Wir nehmen an, dass Ω bezüglich einem Punkt $z_0 \in \Omega$ **sternförmig** ist, das heisst, wenn $z \in \Omega$ ist, so ist auch $z_0 + t(z - z_0) \in \Omega$ für $0 \leq t \leq 1$. Sei $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$v(z_0 + \zeta) := \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0 + t\zeta)\eta - \frac{\partial u}{\partial y}(z_0 + t\zeta)\xi \right) dt$$

für $\zeta = \xi + \mathbf{i}\eta \in \mathbb{C}$ mit $z_0 + \zeta \in \Omega$. Dann ist v harmonisch und zu u konjugiert. Also ist u der Realteil der holomorphen Funktion $F := u + \mathbf{i}v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Übung 2.47. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass u genau dann harmonisch ist, wenn die Funktion

$$f := \frac{\partial u}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial y} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph ist.

Übung 2.48. Sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$.

- (a) Ist $F(\Omega) \subset \mathbb{R}$, so ist F lokal konstant.
- (b) Ist $F(\Omega) \subset S^1 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$, so ist F lokal konstant.



<http://www.springer.com/978-3-0348-0168-3>

Funktionentheorie

Salamon, D.A.

2012, VIII, 218 S., Softcover

ISBN: 978-3-0348-0168-3

A product of Birkhäuser Basel