

CHAPITRE VIII

Modules et anneaux semi-simples

Dans ce chapitre, lorsque nous parlons d'un module (sans préciser), il s'agit d'un module à gauche. Soient A un anneau et M un A -module. Pour tout $a \in A$, on note a_M l'homothétie $x \mapsto ax$ de M . L'application $a \mapsto a_M$ est un homomorphisme de l'anneau A sur un sous-anneau A_M de $\text{End}_{\mathbf{Z}}(M)$, qu'on appelle l'anneau des homothéties de M .

Sauf mention du contraire, les algèbres considérées sont associatives et unifères; par sous-algèbre d'une algèbre E , nous entendons une sous-algèbre contenant l'élément unité de E ; les homomorphismes d'algèbres sont supposés unifères.

Soient K un anneau commutatif et L une K -algèbre commutative. Si E est un K -module, on note $E_{(L)}$ le L -module $L \otimes_K E$ qui s'en déduit par extension des scalaires (II, p. 81). Si A est une K -algèbre et M un A -module à gauche, $A_{(L)}$ est muni d'une structure naturelle de L -algèbre (III, p. 7) et $M_{(L)}$ de la structure de $A_{(L)}$ -module à gauche dont la loi d'action est donnée par la formule $(\lambda \otimes a)(\mu \otimes m) = \lambda\mu \otimes am$.

Pour tout anneau commutatif K et tout groupe G , on note $K[G]$ l'algèbre $K^{(G)}$ du groupe G sur l'anneau K (III, p. 19).

§ 1. MODULES ARTINIENS ET MODULES NOETHÉRIENS

1. Modules artiniens et modules noethériens

DÉFINITION 1. — Soit A un anneau. On dit qu'un A -module M est artinien (resp. noethérien) s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) Tout ensemble non vide de sous-modules de M , ordonné par la relation d'inclusion, possède un élément minimal (resp. maximal) ;
- (ii) Toute suite décroissante (resp. croissante) de sous-modules de M est stationnaire.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de E, III, p. 51, prop. 6.

Pour qu'un A -module M soit artinien (resp. noethérien), il faut et il suffit que M , considéré comme module sur l'anneau A_M des homothéties, le soit.

Soit M un A -module artinien (resp. noethérien). Tout ensemble non vide de sous-modules de M , ordonné par inclusion, qui est filtrant décroissant (resp. filtrant croissant) possède un plus petit élément (resp. un plus grand élément) (E, III, p. 13, prop. 10).

Soient M un A -module artinien (resp. noethérien) et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules de M . Les intersections (resp. sommes) des sous-familles finies de la famille $(M_i)_{i \in I}$ forment un ensemble non vide filtrant décroissant (resp. filtrant croissant) de sous-modules de M . Il existe donc une partie finie J de I tel que $\bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in J} M_i$ (resp. $\sum_{i \in I} M_i = \sum_{i \in J} M_i$).

Exemples. — 1) Un espace vectoriel de dimension finie sur un corps est artinien et noethérien.

2) Soit M un A -module. S'il existe une famille *infinie* $(M_i)_{i \in I}$ de sous-modules non nuls de M dont la somme est directe, M n'est ni artinien, ni noethérien : en effet, pour toute suite infinie (J_n) strictement décroissante (resp. strictement croissante) de parties de I , la suite infinie $(\sum_{i \in J_n} M_i)$ de sous-modules de M est strictement décroissante (resp. strictement croissante). En particulier, un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps n'est ni artinien ni noethérien.

3) On verra plus loin que le \mathbf{Z} -module \mathbf{Z} est noethérien, mais non artinien (VIII, p. 5, exemple 3).

4) Soient p un nombre premier et M_p le composant p -primaire du \mathbf{Z} -module de torsion \mathbf{Q}/\mathbf{Z} (VII, p. 8). Tout sous-module de M_p est égal soit à M_p , soit à $p^{-n}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ pour un entier $n \in \mathbf{N}$ (VII, p. 53, exerc. 3). Par suite, M_p est un \mathbf{Z} -module artinien, mais non noethérien.

PROPOSITION 1. — *Pour qu'un A -module M soit de longueur finie (II, p. 21), il faut et il suffit qu'il soit à la fois artinien et noethérien.*

Supposons que M soit de longueur finie d . Alors toute suite strictement croissante ou strictement décroissante de sous-modules de M comporte au plus $d + 1$ termes (I, p. 42). Par suite M est artinien et noethérien.

Réciproquement, supposons que M soit artinien et noethérien. Soit \mathcal{S} l'ensemble des sous-modules de longueur finie de M . Le sous-module nul appartient à \mathcal{S} , et comme M est noethérien, \mathcal{S} possède un élément maximal N . Raisonnons par l'absurde en supposant que $M \neq N$. L'ensemble des sous-modules de M distincts de N et contenant N possède alors un élément minimal P , puisque M est artinien.

Le module P/N est de longueur 1 et, comme N est un module de longueur finie, il en est de même de P (II, p. 21, prop. 16). Ceci contredit la définition de N .

PROPOSITION 2. — *Pour qu'un A -module M soit noethérien, il faut et il suffit que tout sous-module de M soit de type fini.*

Supposons d'abord que tout sous-module de M soit de type fini. Soit $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de sous-modules de M et soit P sa réunion. C'est un sous-module de M . Il existe par hypothèse une partie finie F de M engendrant le module P ; soit alors $n \in \mathbf{N}$ un entier tel que $F \subset P_n$. On a donc $P_n = P$ et la suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire. Cela prouve que le module M est noethérien.

La réciproque résulte de l'énoncé plus précis suivant :

Lemme 1. — *Soient M un A -module noethérien et E une partie de M . Il existe une partie finie F de E engendrant le même sous-module que E .*

En effet, d'après VIII, p. 2, il existe une partie finie F de E telle que $\sum_{x \in E} Ax = \sum_{x \in F} Ax$.

PROPOSITION 3. — *Soient M un A -module et N un sous-module de M . Pour que M soit artinien (resp. noethérien), il faut et il suffit que N et M/N le soient.*

Nous donnerons la démonstration dans le cas des modules artiniens, le cas des modules noethériens étant analogue.

Supposons M artinien. Tout sous-module de N étant un sous-module de M , le module N est artinien. Soit $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de sous-modules de M/N . Il existe une suite décroissante $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-modules de M contenant N , telle que $P_n = Q_n/N$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (I, p. 39, th. 4). Comme M est artinien, la suite (Q_n) est stationnaire, donc aussi la suite (P_n) . Par suite, le module M/N est artinien.

Réciproquement, supposons les modules N et M/N artiniens et considérons une suite décroissante (P_n) de sous-modules de M . La suite des sous-modules $P'_n = N \cap P_n$ de N est stationnaire. De même, la suite des sous-modules $P''_n = (N + P_n)/N$ de M/N est stationnaire. Il existe donc un entier $m \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $P'_n = P'_m$ et $P''_n = P''_m$ pour tout entier $n \geq m$. La suite (P_n) est alors stationnaire en vertu du lemme suivant :

Lemme 2. — *Soient M un A -module, N , P et Q des sous-modules de M . On suppose que l'on a $P \subset Q$, $N \cap P = N \cap Q$ et $N + P = N + Q$. On a alors $P = Q$.*

Soit x un élément de Q . Il appartient à $N + P$; il existe donc un élément y de P tel que $x - y \in N$. Comme Q contient P , $x - y$ appartient à $N \cap Q$, donc à P . Par suite, x appartient à P .

COROLLAIRE. — Soient M un A -module et $(M_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-modules de M .

a) Si les modules M_i sont artiniens (resp. noethériens), il en est de même de leur somme $\sum_{i \in I} M_i$.

b) Si les modules M/M_i sont artiniens (resp. noethériens), il en est de même du module $M/\bigcap_{i \in I} M_i$.

Par récurrence, il suffit de traiter le cas où $I = \{1, 2\}$. Le module $M_2/(M_1 \cap M_2)$, quotient de M_2 , est isomorphe au sous-module $(M_1 + M_2)/M_1$ de M/M_1 (I, p. 39, th. 4).

Sous l'hypothèse a), M_1 et $(M_1 + M_2)/M_1$ sont artiniens (resp. noethériens) ; il en est donc de même de $M_1 + M_2$ (prop. 3).

Sous l'hypothèse b), M/M_2 et $M_2/(M_1 \cap M_2)$ sont artiniens (resp. noethériens) ; il en est donc de même de $M/(M_1 \cap M_2)$ (*loc. cit.*).

Exemple 5. — Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille finie de A -modules. Si les modules M_i sont artiniens (resp. noethériens), il en est de même de leur somme directe $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Remarque. — Les définitions et résultats de ce numéro s'étendent aux groupes commutatifs à opérateurs quelconques en remplaçant dans les énoncés sous-modules par sous-groupes stables.

2. Anneaux artiniens et anneaux noethériens

DÉFINITION 2. — On dit qu'un anneau A est artinien (resp. noethérien) à gauche si le A -module à gauche A_s est artinien (resp. noethérien). De même, on dit qu'un anneau A est artinien (resp. noethérien) à droite si le A -module à droite A_d est artinien (resp. noethérien).

Un anneau A est artinien (resp. noethérien) à droite si et seulement si l'anneau opposé A° est artinien (resp. noethérien) à gauche. Pour un anneau A commutatif, les propriétés d'être artinien à gauche et artinien à droite coïncident, et lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que l'anneau A est artinien ; on adopte une convention analogue pour « noethérien ». Il existe des anneaux non commutatifs artiniens à gauche mais non à droite, et des anneaux non commutatifs noethériens à gauche mais non à droite (VIII, p. 13, exerc. 3).

Soit A un anneau. Par définition, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'anneau A est artinien à gauche ;

(ii) Tout ensemble non vide d'idéaux à gauche de A , ordonné par inclusion, possède un élément minimal ;

(iii) Toute suite décroissante d'idéaux à gauche de A est stationnaire.

Compte tenu de la prop. 2 de VIII, p. 3 les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'anneau A est noethérien à gauche ;

(ii) Tout ensemble non vide d'idéaux à gauche de A , ordonné par inclusion, possède un élément maximal ;

(iii) Toute suite croissante d'idéaux à gauche de A est stationnaire ;

(iv) Tout idéal à gauche de A est engendré par une partie finie de A .

Exemples. — 1) Un corps est un anneau artinien et noethérien, à gauche et à droite.

2) Soient A un anneau et D un sous-anneau de A . On suppose que D est un corps et que A est un espace vectoriel à gauche de dimension finie sur D . Comme tout idéal à gauche de A est un sous- D -espace vectoriel de A , l'anneau A est artinien et noethérien à gauche. En particulier, une algèbre de dimension finie sur un corps commutatif est un anneau artinien et noethérien, à gauche et à droite.

3) Un anneau principal (VII, p. 1, déf. 1) est noethérien. Un anneau intègre A qui n'est pas un corps n'est pas un anneau artinien : pour tout élément a de A , non nul et non inversible, la suite des idéaux $a^n A$ (pour $n \in \mathbf{N}$) est strictement décroissante. En particulier, l'anneau \mathbf{Z} des entiers rationnels est noethérien, mais n'est pas artinien.

4) Soit M un A -module, somme directe d'une famille infinie $(M_i)_{i \in I}$ de sous-modules non nuls. Soit E l'anneau des endomorphismes de M . Pour tout $i \in I$, soit \mathfrak{a}_i (resp. \mathfrak{b}_i) l'ensemble des éléments de E dont le noyau contient $\sum_{j \neq i} M_j$ (resp. dont l'image est contenue dans M_i). Alors (\mathfrak{a}_i) est une famille infinie d'idéaux à gauche non nuls de E dont la somme est directe, et (\mathfrak{b}_i) est une famille infinie d'idéaux à droite non nuls de E dont la somme est directe. Par suite l'anneau E n'est artinien (resp. noethérien) ni à gauche, ni à droite (VIII, p. 2, exemple 2). En particulier, l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est artinien (resp. noethérien) ni à gauche, ni à droite.

THÉORÈME 1. — *Soit A un anneau artinien à gauche. Le A -module A_s est de longueur finie.*

Nous utiliserons dans la démonstration le lemme suivant :

Lemme 3. — Soient A un anneau et n un entier naturel. Un A -module artinien M qui est somme d'une famille de sous-modules de longueur $\leq n$ est de longueur finie.

Raisonnons par récurrence sur n . Supposons d'abord $n = 1$. Si M n'était pas de longueur finie, nous pourrions construire une suite $(M_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de sous-modules de longueur 1 de M , avec $M_m \not\subset (\sum_{i < m} M_i)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$. Nous aurions alors $M_m \cap \sum_{i < m} M_i = 0$ pour tout m , et la somme de la famille $(M_m)_{m \in \mathbf{N}}$ serait directe. Mais ceci contredirait le fait que le A -module M est artinien (VIII, p. 2, exemple 2).

Supposons maintenant $n \geq 2$. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules de longueur $\leq n$ de M , de somme M . Choisissons pour tout $i \in I$ un sous-module M'_i de M_i de longueur $\leq n - 1$, tel que M_i/M'_i soit de longueur ≤ 1 . Posons $M' = \sum M'_i$, et notons M''_i l'image de M_i dans $M'' = M/M'$. Les modules M''_i sont de longueur ≤ 1 et leur somme est M'' . Les modules M' et M'' sont artiniens (VIII, p. 3, prop. 3); d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont de longueur finie. Donc M est de longueur finie (II, p. 21, prop. 16).

Démontrons maintenant le th. 1. Notons \mathcal{S} l'ensemble des idéaux à gauche \mathfrak{a} de A , tels que le module A_s/\mathfrak{a} soit de longueur finie. Soit $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de \mathcal{S} . D'après la prop. 1 de VIII, p. 2, le A -module A_s/\mathfrak{a}_i est artinien et noethérien pour tout $i \in I$. Par suite, $A_s/\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ est artinien et noethérien (VIII, p. 4, cor. de la prop. 3), donc de longueur finie (VIII, p. 2, prop. 1). Cela démontre que \mathcal{S} est filtrant décroissant pour la relation d'inclusion. Comme l'anneau A est artinien à gauche, l'ensemble \mathcal{S} possède un plus petit élément \mathfrak{b} . Notons n la longueur du A -module A_s/\mathfrak{b} .

Soient x un élément de A_s et \mathfrak{a} son annulateur (II, p. 28). Le A -module Ax est isomorphe à A_s/\mathfrak{a} . Si Ax est de longueur finie, \mathfrak{a} appartient à \mathcal{S} , donc \mathfrak{a} contient \mathfrak{b} et Ax est de longueur $\leq n$. Ainsi, tout idéal à gauche monogène de A qui est de longueur finie est de longueur $\leq n$. Soit \mathfrak{c} la somme de ces idéaux; c'est un idéal à gauche de A , de longueur finie d'après le lemme 3. Tout idéal à gauche de longueur finie de A est somme d'idéaux à gauche monogènes de longueur finie, donc est contenu dans \mathfrak{c} . Ainsi \mathfrak{c} est le plus grand idéal à gauche de longueur finie de A .

Si \mathfrak{c} était distinct de A , l'ensemble des idéaux à gauche de A contenant \mathfrak{c} et distincts de \mathfrak{c} posséderait un élément minimal \mathfrak{c}' . Le A -module $\mathfrak{c}'/\mathfrak{c}$ serait de longueur 1 et \mathfrak{c}' serait de longueur finie, ce qui contredirait la maximalité de \mathfrak{c} . On a donc $\mathfrak{c} = A$, le A -module A_s est de longueur finie.

COROLLAIRE. — *Tout anneau artinien à gauche est noethérien à gauche.*

Soit A un anneau artinien à gauche. Par le théorème 1, le A -module A_s est de longueur finie. On applique alors la prop. 1 de VIII, p. 2.

Soit A un anneau artinien à gauche (resp. à droite) ; la longueur du A -module A_s (resp. A_d) (I, p. 42) est appelée la *longueur à gauche* (resp. *à droite*) de l'anneau A . Lorsque A est un anneau commutatif et artinien, ces deux longueurs coïncident et sont appelées simplement la *longueur* de A . Lorsque A est artinien à droite et à gauche mais n'est pas commutatif, les longueurs à gauche et à droite de A ne sont pas nécessairement égales (VIII, p. 13, exerc. 3).

Exemple 5. — Les longueurs à gauche et à droite d'un corps sont égales à 1.

PROPOSITION 4. — a) *Soient A un anneau noethérien à gauche et M un A -module à gauche de type fini. Le module M est noethérien et tout sous-module de M est de type fini.*

b) *Soient A un anneau artinien à gauche et M un A -module à gauche. Les conditions suivantes sont équivalentes : le module M est de type fini ; le module M est artinien ; le module M est de longueur finie ; le module M est noethérien.*

Démontrons a). Tout sous-module monogène de M est isomorphe à un quotient de A_s , donc est noethérien par la prop. 3 de VIII, p. 3. Le module M est une somme finie de tels sous-modules, il est donc noethérien par le cor. (VIII, p. 4) de la prop. 3. Tout sous-module de M est alors de type fini (VIII, p. 3, prop. 2).

Supposons maintenant l'anneau A artinien à gauche. On démontre comme dans l'alinéa précédent que si le A -module M est de type fini, il est artinien. S'il est artinien, il est de longueur finie : en effet ses sous-modules monogènes sont isomorphes à des quotients de A_s , donc sont de longueur finie inférieure à celle de A_s et l'assertion résulte du lemme 3. Tout module de longueur finie est noethérien et tout module noethérien est de type fini. Cela démontre b).

PROPOSITION 5. — a) *Soit A un anneau artinien (resp. noethérien) à gauche et soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux qui fasse de B un A -module à gauche de type fini. L'anneau B est artinien (resp. noethérien) à gauche.*

b) *Soit A un anneau artinien (resp. noethérien) à gauche et soit \mathfrak{a} un idéal bilatère de A ; l'anneau A/\mathfrak{a} est artinien (resp. noethérien) à gauche.*

c) *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'anneaux artiniens (resp. noethériens) à gauche. L'anneau $\prod_{i \in I} A_i$ est artinien (resp. noethérien) à gauche.*

Nous traiterons le cas des anneaux artiniens, le cas des anneaux noethériens étant analogue.

Démontrons a). D'après la prop. 4, B_s est un A -module à gauche artinien, et *a fortiori* un B -module à gauche artinien.

L'assertion b) résulte de l'assertion a) appliquée à l'homomorphisme canonique de A sur A/\mathfrak{a} .

Prouvons c). Posons $A = \prod_{i \in I} A_i$. Par hypothèse, $(A_i)_s$ est un A_i -module à gauche artinien, et *a fortiori* un A -module à gauche artinien. D'après l'exemple 5 de VIII, p. 4, le A -module A_s est artinien.

COROLLAIRE. — *Les idéaux premiers d'un anneau commutatif artinien sont ses idéaux maximaux.*

Dans tout anneau commutatif, un idéal maximal est premier. Soit A un anneau commutatif artinien. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A . L'anneau A/\mathfrak{p} est intègre et artinien (prop. 5), donc est un corps (VIII, p. 5, exemple 3). Par conséquent, l'idéal \mathfrak{p} est maximal.

Z

L'anneau de polynômes $\mathbf{Q}[(X_n)_{n \in \mathbf{N}}]$ est intègre ; il n'est pas noethérien (ni artinien) (VIII, p. 14, exerc. 9). C'est un sous-anneau de son corps des fractions, qui est, lui, un anneau artinien (et noethérien).

3. Contremodule

DÉFINITION 3. — *Soient A un anneau, M un A -module et E l'anneau des endomorphismes de M . On appelle contremodule de M le E -module à gauche ayant même groupe additif sous-jacent que M et pour loi d'action $(c, x) \mapsto c(x)$.*

Soit Z le centre de l'anneau A . Pour tout $a \in Z$, l'homothétie a_M appartient à E . Par suite, E est canoniquement muni d'une structure d'algèbre sur Z . En particulier, si M est un Z -module de type fini, le contremodule de M est de type fini.

Lemme 4. — *Soient M un A -module à gauche dont le contremodule est de type fini. Il existe un entier naturel m et une application A_M -linéaire injective de $(A_M)_s$ dans M^m .*

Posons $E = \text{End}_A(M)$. Soit (x_1, \dots, x_m) une famille génératrice finie du E -module M . L'application $\varphi : a \mapsto (ax_1, \dots, ax_m)$ de $(A_M)_s$ dans M^m est A_M -linéaire. Soit a un élément de A_M tel que $\varphi(a) = 0$. L'ensemble des éléments x de M tels que $ax = 0$ est un sous- E -module de M contenant x_1, \dots, x_m , donc égal à M , ce qui entraîne $a = 0$.

PROPOSITION 6. — *Soit M un A -module à gauche artinien (resp. noethérien) dont le contremodule est de type fini. L'anneau A_M des homothéties de M est artinien (resp. noethérien) à gauche.*

Cela résulte du lemme 4 et de la prop. 3 de VIII, p. 3.

COROLLAIRE. — *Soit A un anneau commutatif.*

a) *Soit M un A-module noethérien. L'anneau A_M est noethérien.*

b) *Soit M un A-module de longueur finie. L'anneau A_M est artinien.*

Soit M un A-module. Sous les hypothèses de a) ou de b), le A-module M est de type fini. Comme A est commutatif, A_M est contenu dans l'anneau $\text{End}_A(M)$, de sorte que le contremodule de M est de type fini. Il suffit alors d'appliquer la prop. 6.

Remarque. — Soit A un anneau. Un A-module à gauche artinien M dont le contremodule est de type fini est de longueur finie : en effet, l'anneau A_M des homothéties de M est artinien à gauche (prop. 6) et M est un module artinien sur A_M ; d'après VIII, p. 7, prop. 4, M est un module de longueur finie sur A_M , et donc aussi sur A.

En particulier, tout module artinien de type fini sur un anneau commutatif est de longueur finie. Par contre, un module artinien de type fini sur un anneau non commutatif n'est pas nécessairement de longueur finie (VIII, p. 15, exerc. 12).

4. Polynômes à coefficients dans un anneau noethérien

Soient A un anneau, σ un endomorphisme de l'anneau A et d un endomorphisme du groupe additif de A, satisfaisant la relation

$$(1) \quad d(ab) = \sigma(a)d(b) + d(a)b$$

pour tous $a, b \in A$. Autrement dit, d est une dérivation de l'anneau A dans le (A, A) -bimodule obtenu en munissant le groupe additif de A de la loi d'action à gauche $(a, x) \mapsto \sigma(a)x$, et de la loi d'action à droite $(a, x) \mapsto xa$. On a $d(1) = 0$ (III, p. 122, prop. 3).

Rappelons (IV, p. 2) que $A[X]$ désigne le \mathbf{Z} -module $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[X]$ des polynômes en une indéterminée à coefficients dans A. On le munit de sa structure naturelle de A-module à gauche. La famille $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ en est une base. On identifie A à son image par l'application $a \mapsto a \otimes 1$.

PROPOSITION 7. — *Soient A, σ , d comme ci-dessus. Il existe sur le groupe $A[X]$ une unique structure d'anneau possédant les propriétés suivantes :*

- a) *L'addition de cet anneau est l'addition usuelle de $A[X]$;*
- b) *La multiplication de cet anneau prolonge celle de A ;*

c) *Le produit dans cet anneau d'une suite (a, X, \dots, X) , formée d'un élément a de A suivi de n termes égaux à X , est le polynôme aX^n ;*

d) *On a dans cet anneau $Xa = \sigma(a)X + d(a)$ pour tout $a \in A$.*

Notons E l'anneau des endomorphismes du groupe additif $A[X]$. L'application qui à $a \in A$ associe l'homothétie a_M du A -module à gauche $M = A[X]$ est un homomorphisme d'anneaux de A dans E . Considérons les éléments u , σ_M et d_M de E définis par $u(\sum b_n X^n) = \sum b_n X^{n+1}$, $\sigma_M(\sum b_n X^n) = \sum \sigma(b_n) X^n$, $d_M(\sum b_n X^n) = \sum d(b_n) X^n$. On a, pour tout $a \in A$

$$(2) \quad u a_M = a_M u, \quad \sigma_M a_M = \sigma(a)_M \sigma_M, \quad d_M a_M = \sigma(a)_M d_M + d(a)_M.$$

Posons

$$(3) \quad X_M = \sigma_M u + d_M.$$

Il résulte de (2) que l'on a, pour tout $a \in A$,

$$(4) \quad X_M a_M = \sigma(a)_M X_M + d(a)_M.$$

Considérons l'application $\varphi : A[X] \rightarrow E$ définie par

$$(5) \quad \varphi\left(\sum a_n X^n\right) = \sum (a_n)_M (X_M)^n.$$

C'est un homomorphisme de groupes. On démontre par récurrence que l'on a $(X_M)^n(1) = X^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On a donc $\varphi(P)(1) = P$ pour tout $P \in A[X]$, ce qui prouve que l'homomorphisme φ est injectif. Notons B son image. L'ensemble B est un sous-groupe de E ; il contient 1, est stable par multiplication à gauche par a_M pour $a \in A$, et par X_M d'après (4). C'est donc un sous-anneau de E . L'unique structure d'anneau sur $A[X]$ déduite de celle de B par transport de structure par φ possède les propriétés de la prop. 7, la propriété d) résultant de la formule (4).

Si $A[X]$ est muni d'une structure d'anneau possédant les propriétés de la prop. 7, l'homothétie à gauche γ_X de cet anneau (I, p. 92) applique nécessairement bX^n sur $\sigma(b)X^{n+1} + d(b)X^n$ pour $b \in A$ et $n \in \mathbf{N}$, donc est égale à X_M . L'homothétie γ_a est nécessairement égale à a_M pour tout $a \in A$. Il s'ensuit que l'on a $\gamma_P = \varphi(P)$ pour tout $P \in A[X]$, d'où l'assertion d'unicité de la prop. 7.

L'ensemble $A[X]$, muni de l'unique structure d'anneau satisfaisant aux conditions de la prop. 7, est noté $A[X]_{\sigma, d}$ et appelé *l'anneau de polynômes en X à coefficients dans A , relatif à σ et d* . On le note simplement $A[X]_{\sigma}$ lorsque d est l'application nulle, et $A[X]$ lorsque de plus σ est l'application identique de A . Cette notation est compatible avec celle introduite en IV, p. 1 pour un anneau A commutatif.

Remarque. — L'anneau $A[X]_{\sigma,d}$ possède la propriété universelle suivante : étant donné un anneau A' , un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow A'$ et un élément x de A' tels que $xf(a) = f(\sigma(a))x + f(d(a))$ pour tout $a \in A$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $g : A[X]_{\sigma,d} \rightarrow A'$ qui prolonge f et applique X sur x .

L'assertion d'unicité est claire. Montrons que l'application $g : A[X]_{\sigma,d} \rightarrow A'$ définie par $g(\sum a_n X^n) = \sum f(a_n)x^n$ possède les propriétés requises. Elle prolonge f , applique X sur x et est un homomorphisme de groupes. On a $g(1) = 1$. Pour $a \in A$ et $Q = \sum a_n X^n$ dans $A[X]_{\sigma,d}$, on a

$$g(aQ) = g\left(\sum aa_n X^n\right) = \sum f(aa_n)x^n = f(a) \sum f(a_n)x^n = g(a)g(Q)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} g(XQ) &= g\left(\sum (\sigma(a_n)X^{n+1} + d(a_n)X^n)\right) \\ &= \sum (f(\sigma(a_n))x^{n+1} + f(d(a_n))x^n) = x \sum f(a_n)x^n = g(X)g(Q). \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a $g(P)g(Q) = g(PQ)$ pour P, Q dans $A[X]_{\sigma,d}$ et donc que g est un homomorphisme d'anneaux.

THÉORÈME 2. — Soit A un anneau noethérien à gauche et soient σ un automorphisme de A et d un endomorphisme du groupe additif de A satisfaisant la relation (1). L'anneau $A[X]_{\sigma,d}$ est noethérien à gauche.

Posons $B = A[X]_{\sigma,d}$. Pour tout entier $n \geq 0$, notons B_n l'ensemble des éléments de B de la forme $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. C'est un sous- A -module à gauche de B . L'application $\varphi_n : B_n \rightarrow A_s$ définie par $\varphi_n(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = a_n$ est A -linéaire.

Soit \mathfrak{b} un idéal à gauche de B . Pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\mathfrak{a}_n = \varphi_n(\mathfrak{b} \cap B_n)$ est un idéal à gauche de A . Comme on a $Xa = \sigma(a)X + d(a)$ pour tout $a \in A$, on a

$$(6) \quad \varphi_{n+1}(XQ) = \sigma(\varphi_n(Q))$$

pour tout $Q \in B_n$, d'où $\sigma(\mathfrak{a}_n) \subset \mathfrak{a}_{n+1}$. Par conséquent, la suite des idéaux $\mathfrak{a}'_n = \sigma^{-n}(\mathfrak{a}_n)$ de A est croissante. Comme l'anneau A est noethérien à gauche, il existe un entier $m \geq 0$ tel que l'on ait $\mathfrak{a}'_n = \mathfrak{a}'_{n+1}$ pour $n \geq m$. Comme σ est surjectif, on a la relation

$$(7) \quad \sigma(\mathfrak{a}_n) = \mathfrak{a}_{n+1}$$

pour tout entier $n \geq m$.

Soit \mathfrak{c} l'idéal à gauche de B engendré par $\mathfrak{b} \cap B_m$; comme le A -module à gauche B_m est de type fini et que l'anneau A est noethérien à gauche, le A -module à gauche $\mathfrak{b} \cap B_m$ est de type fini (VIII, p. 7, prop. 4 a)). L'idéal à gauche \mathfrak{c} est donc

engendré par une partie finie de B . Il est clair qu'il est contenu dans \mathfrak{b} . Démontrons qu'il est égal à \mathfrak{b} en démontrant par récurrence que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(8) \quad \mathfrak{b} \cap B_n \subset \mathfrak{c}.$$

La relation (8) est vraie par construction pour $n \leq m$. Supposons désormais que n soit un entier $\geq m$ tel que $\mathfrak{b} \cap B_n \subset \mathfrak{c}$. Soit P un élément de $\mathfrak{b} \cap B_{n+1}$. Alors $\varphi_{n+1}(P)$ appartient à $\mathfrak{a}_{n+1} = \sigma(\mathfrak{a}_n)$ et il existe donc un élément Q de $\mathfrak{b} \cap B_n$ tel que $\varphi_{n+1}(P) = \sigma(\varphi_n(Q))$. Posons $R = P - XQ$. Compte tenu de la relation (6), on a $\varphi_{n+1}(R) = 0$, c'est-à-dire $R \in B_n$. Comme P et Q appartiennent à l'idéal à gauche \mathfrak{b} de B , il en est de même de R ; ainsi, R et Q appartiennent à $\mathfrak{b} \cap B_n$, qui est contenu dans l'idéal \mathfrak{c} d'après l'hypothèse de récurrence. Par suite, P appartient à \mathfrak{c} . Cela prouve que l'on a $\mathfrak{b} \cap B_{n+1} \subset \mathfrak{c}$.

Ainsi, \mathfrak{b} est égal à \mathfrak{c} ; c'est donc un idéal de type fini de B . Cela démontre que l'anneau B est noethérien à gauche.

Si l'endomorphisme σ de l'anneau A n'est pas un automorphisme, l'anneau $A[X]_{\sigma,d}$ n'est pas nécessairement noethérien à gauche, même lorsque A est un anneau commutatif noethérien (VIII, p. 21, exerc. 26).

COROLLAIRE 1 (Hilbert). — *Soit A un anneau commutatif et noethérien. Pour tout entier $n \geq 0$, l'algèbre de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau noethérien.*

Cela résulte par récurrence du théorème 2, compte tenu de la prop. 8 de III, p. 26.

COROLLAIRE 2. — *Soit A un anneau commutatif et noethérien. Une A -algèbre commutative engendrée par un nombre fini d'éléments est un anneau noethérien.*

Une telle algèbre est isomorphe à une algèbre de la forme $A[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ où $n \geq 0$ et \mathfrak{a} un idéal de $A[X_1, \dots, X_n]$. On applique alors le corollaire 1 et la prop. 5 de VIII, p. 7.

COROLLAIRE 3. — *Tout anneau commutatif est réunion d'une famille filtrante croissante de sous-anneaux noethériens.*

Soit en effet A un anneau commutatif. Les sous-anneaux de A qui sont engendrés (en tant que \mathbb{Z} -algèbres) par un nombre fini d'éléments sont noethériens d'après le cor. 2. Ils forment une famille filtrante croissante de sous-anneaux de A , dont la réunion est A .

EXERCICES

1) Soient A un anneau principal qui n'est pas un corps et P un système représentatif d'éléments extrémaux de A . Pour qu'un A -module M soit artinien, il faut et il suffit qu'il soit de torsion et qu'il existe une partie finie S de P telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i) Pour tout $\pi \in P - S$, le composant π -primaire M_π de M (VII, p. 8) est réduit à 0 ;
- (ii) Pour tout $\pi \in S$, l'ensemble des éléments de M annulés par π , considéré comme espace vectoriel sur le corps $A/\pi A$, est de dimension finie.

¶ 2) Soient A un anneau, M un A -module de longueur finie n et R un ensemble d'endomorphismes nilpotents de M , stable par composition.

a) Si $n = 1$, tout élément de R est nul. Si $n > 1$, démontrer qu'il existe un sous-module N de M , distinct de 0 et de M , stable par tous les éléments de R . (On peut supposer que R possède un élément $s \neq 0$; en choisir un pour lequel $s(M)$ ait la plus petite longueur possible, et démontrer que l'on a $srs = 0$ pour tout $r \in R$. En déduire que l'on peut prendre $N = s(M)$ si $Rs = \{0\}$, et $N = \sum_{r \in R} r(s(M))$ si $Rs \neq \{0\}$.)⁽¹⁾

b) Déduire de a) qu'il existe une suite de Jordan-Hölder $(M_i)_{0 \leq i \leq n}$ de M telle que l'on ait $r(M_i) \subset M_{i+1}$ pour tout $r \in R$ et $0 \leq i \leq n-1$. En déduire que l'on a $r_1 \dots r_n = 0$ pour toute suite $(r_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n éléments de R .

3) a) Donner un exemple de corps commutatif K et d'isomorphisme φ de K sur l'un de ses sous-corps K' , tel que K soit de dimension infinie sur K' . On définit sur le groupe additif $A = K \times K$ une structure d'anneau en posant $(x, y)(x', y') = (xx', xy' + y\varphi(x'))$ (II, p. 179, exerc. 7). Les seuls idéaux à gauche de A sont $\{(0, 0)\}$, $\{0\} \times K$ et A , mais, pour tout sous- K' -espace vectoriel E de K , $\{0\} \times E$ est un idéal à droite de A . En déduire que A est artinien et noethérien à gauche, mais ni artinien ni noethérien à droite.

b) Donner un exemple de module de longueur finie dont l'anneau d'endomorphismes n'est ni artinien ni noethérien à gauche.

c) A l'aide de la même méthode qu'en a), donner un exemple d'anneau artinien à gauche et à droite, dont la longueur à gauche est distincte de la longueur à droite.

4) Soit $\rho : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux.

a) Si, en tant que A -module à droite, B est libre et non nul, et si l'anneau B est artinien (resp. noethérien) à gauche, l'anneau A est artinien (resp. noethérien) à gauche.

b) Donner un exemple où A est un corps commutatif, où B , considéré comme espace vectoriel à droite sur A est de dimension finie, et où B n'est ni artinien ni noethérien à gauche (utiliser l'exerc. 3).

⁽¹⁾ Cette démonstration nous a été communiquée par A. Rosenberg.

5) Soit n un entier ≥ 1 . Pour qu'un anneau A soit artinien (resp. noethérien) à gauche, il faut et il suffit que l'anneau de matrices $M_n(A)$ le soit. Si A est artinien à gauche, la longueur à gauche de $M_n(A)$ est égale à n fois celle de A .

6) Soient A un anneau et e un élément idempotent de A .

a) Soient \mathfrak{a}_1 un idéal à gauche de l'anneau eAe et \mathfrak{a} l'idéal à gauche de A engendré par \mathfrak{a}_1 . On a $\mathfrak{a}_1 = e\mathfrak{a}e = \mathfrak{a} \cap eAe$.

b) Pour tout idéal à gauche \mathfrak{a} de A , on a $\mathfrak{a} \cap eAe \subset e\mathfrak{a}e$; donner un exemple où cette inclusion est stricte (prendre pour A un anneau de matrices).

c) On a $\mathfrak{a} \cap eAe = e\mathfrak{a}e$ pour tout idéal bilatère \mathfrak{a} de A .

d) Si l'anneau A est artinien (resp. noethérien) à gauche, il en est de même des anneaux eAe et $(1-e)A(1-e)$.

e) Donner un exemple où eAe et $(1-e)A(1-e)$ sont des corps commutatifs et où il existe dans A des suites infinies strictement croissantes et des suites infinies strictement décroissantes d'idéaux bilatères. (On pourra choisir un espace vectoriel V de dimension infinie sur un corps commutatif K , munir le groupe additif $A = K \times V \times K$ de la structure d'anneau définie par $(\lambda, x, \mu)(\lambda', x', \mu') = (\lambda\lambda', \lambda x' + \mu'x, \mu\mu')$ et poser $e = (1, 0, 0)$.)

7) a) Soient A un anneau et \mathcal{J} l'ensemble des idéaux à gauche de A de la forme Ae , où e est un élément idempotent de A . Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Toute partie non vide de \mathcal{J} possède un élément minimal ;
- (ii) Toute partie non vide de \mathcal{J} possède un élément maximal ;
- (iii) Il n'existe pas de famille infinie d'idéaux non nuls appartenant à \mathcal{J} dont la somme soit directe ;
- (iv) Il n'existe pas de famille infinie (e_i) d'éléments idempotents non nuls de A telle que $e_i e_j = 0$ pour $i \neq j$.

b) Donner un exemple d'anneau A dans lequel tout ensemble non vide d'idéaux à gauche *monogènes* possède un élément maximal et un élément minimal (de sorte que les conditions de a) sont satisfaites), bien que A ne soit ni artinien ni noethérien à gauche (utiliser l'exerc. 3).

c) Soit M un module. Si tout ensemble non vide de sous-modules *de type fini* de M possède un élément maximal, M est noethérien.

d) Donner un exemple de module non artinien dans lequel tout ensemble non vide de sous-modules de type fini possède un élément minimal.

8) Soient A un anneau, B et D deux sous-anneaux de A . Démontrer que si D est un corps et que l'anneau B est artinien à gauche, $B \cap D$ est un corps.

9) Soit A un anneau commutatif non nul et soit I un ensemble infini. Les anneaux $A[(X_i)_{i \in I}]$ et $A[[X_i)_{i \in I}]]$ ne sont ni artiniens ni noethériens.

10) Soient A un anneau, \mathfrak{a} et \mathfrak{b} deux idéaux bilatères de A . Si les anneaux A/\mathfrak{a} et A/\mathfrak{b} sont artiniens (resp. noethériens) à gauche, il en est de même de l'anneau $A/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$; par contre, l'anneau $A/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ n'est pas nécessairement artinien (resp. noethérien) à gauche.

11) Soient A, B des anneaux, M un A -module à gauche de type fini, P un A -module à droite de type fini et N un (A, B) -bimodule. Si le B -module à droite N est artinien (resp. noethérien), il en est de même des B -modules à droite $\text{Hom}_A(M, N)$ et $P \otimes_A N$.

12) Soit K un corps commutatif. Notons $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de l'espace vectoriel $V = K^{(\mathbb{N})}$. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes de V en posant :

$$\begin{aligned} u_0(e_0) &= 0 & u_0(e_1) &= 0 & u_0(e_{n+1}) &= e_n \text{ pour } n \geq 1 \\ u_m(e_0) &= e_m & u_m(e_n) &= 0 \text{ pour } m \geq 1 \text{ et } n \geq 1. \end{aligned}$$

Soit A la sous- K -algèbre unifère de $\text{End}_K(V)$ engendrée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Démontrer que le A -module à gauche V est artinien, de type fini (et même monogène), mais n'est pas noethérien.

13) a) Soit $\rho : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Supposons que A soit noethérien à gauche et qu'il existe une partie finie S de B , dont les éléments commutent entre eux et à ceux de $\rho(A)$, telle que l'anneau B soit engendré par $\rho(A)$ et S . Alors B est noethérien à gauche.

b) Soit A un anneau commutatif non nul. Donner un exemple de A -algèbre associative et unifère, engendrée par un nombre fini d'éléments, qui n'est un anneau noethérien ni à gauche, ni à droite (on pourra considérer l'algèbre associative libre $\text{Libas}_A(I)$ (III, p. 21, déf. 2), où I est un ensemble de cardinal ≥ 2).

14) Soit V un espace vectoriel de dimension *infinie dénombrable* sur un corps K . L'ensemble \mathcal{J} des endomorphismes de rang fini de V est un idéal bilatère de l'anneau $B = \text{End}_K(V)$. Démontrer que les seuls idéaux bilatères de l'anneau $A = B/\mathcal{J}$ sont $\{0\}$ et A , mais que A n'est noethérien ni à gauche ni à droite.

¶ 15) Soient A un anneau commutatif et M un A -module de type fini.

a) On suppose que pour toute suite croissante $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'idéaux de A la suite $(\mathfrak{a}_n M)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. Démontrer que le A -module M est noethérien. (Se ramener au cas où le A -module M est fidèle et où, pour tout idéal $\mathfrak{a} \neq 0$ de A , le A -module $M/\mathfrak{a}M$ est noethérien; il existe alors un sous-module N_0 de M maximal parmi les sous-modules $N \subset M$ tels que M/N soit fidèle; prouver que le A -module M/N est noethérien, puis que l'anneau A est noethérien et conclure.)

b) *On suppose que pour toute suite décroissante $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'idéaux de A la suite $(\mathfrak{a}_n M)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. Démontrer que le A -module M est artinien. (Se ramener au cas où le A -module M est fidèle; démontrer qu'alors A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, puis, en s'inspirant de la preuve de la prop. 1 de VIII, p. 169, que le radical de A

est nilpotent ; en déduire qu'il existe une suite finie $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots, \mathfrak{m}_n)$ d'idéaux maximaux de A dont le produit annule M ; conclure en raisonnant par récurrence sur n .)

16) a) Soient A un anneau commutatif et $\rho : A \rightarrow B$ un homomorphisme injectif d'anneaux qui fait de B un A -module à gauche de type fini. Supposons que pour toute suite croissante (resp. décroissante) $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'idéaux de A , la suite $(\mathfrak{a}_n B)_{n \in \mathbb{N}}$ soit stationnaire (ce qui est le cas si l'anneau B est noethérien (resp. artinien) à droite). Démontrer que l'anneau A est noethérien (resp. artinien) (utiliser l'exerc. 15).

b) Donner un exemple d'anneau B , artinien et noethérien à droite et à gauche, et de sous-anneau A de B tel que B soit de type fini en tant que A -module à droite et à gauche, et que l'anneau A ne soit ni noethérien ni artinien à droite ou à gauche (on pourra choisir un anneau intègre convenable C , de corps des fractions K , prendre pour B l'anneau des matrices $M_3(K)$ et pour A le sous-anneau de B formé des matrices $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ telles que $a_{ij} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq 3$ et $a_{22} \in C$.)

17) Soient E un monoïde, e son élément neutre, S une partie de E et S' le sous-monoïde de E engendré par S . On dit que S *permet un calcul des fractions à gauche* sur E si les deux conditions suivantes (tautologiques lorsque E est commutatif) sont satisfaites :

- (i) Pour tout $a \in E$ et tout $s \in S$, il existe $b \in E$ et $t \in S'$ tels que $ta = bs$.
- (ii) Quels que soient $a \in E$, $b \in E$ et $s \in S$ tels que $as = bs$, il existe $t \in S'$ tel que $ta = tb$.

a) Supposons qu'il existe un homomorphisme u de E dans un monoïde E' tel que tout élément de $u(S)$ soit inversible dans E' et que, quels que soient a, b dans E tels que $u(a) = u(b)$, il existe $s \in S'$ tel que $sa = sb$. Alors S permet un calcul des fractions à gauche sur E .

b) Supposons que S permette un calcul des fractions à gauche sur E . Dans $E \times S'$, on note $(a, s) \sim (b, t)$ la relation : « il existe c et d dans E tels que l'on ait $ca = db$ et $cs = dt \in S'$ ». C'est une relation d'équivalence. On pose $S^{-1}E = (E \times S') / \sim$ et l'on note $\varepsilon : E \rightarrow S^{-1}E$ l'application qui à $a \in E$ associe la classe de (a, e) . Il existe sur $S^{-1}E$ une unique structure de monoïde telle que ε soit un homomorphisme unifié, que $\varepsilon(s)$ soit inversible pour tout $s \in S$ et que, pour $(a, s) \in E \times S'$, la classe dans $S^{-1}E$ de (a, s) soit égale à $\varepsilon(s)^{-1}\varepsilon(a)$. On dit que $S^{-1}E$ est *le monoïde des fractions à gauche de E associé à S* . Il coïncide avec celui défini en I, p. 17 lorsque le monoïde E est commutatif.

c) Soient a, b dans E . Pour que l'on ait $\varepsilon(a) = \varepsilon(b)$, il faut et il suffit qu'il existe $s \in S'$ tel que $sa = sb$. Pour que ε soit injectif (resp. bijectif), il faut et il suffit que tout élément de S soit simplifiable à droite (resp. inversible).

d) Soit f un homomorphisme unifié de E dans un monoïde F tel que tout élément de $f(S)$ soit inversible dans F . Il existe un homomorphisme $\bar{f} : S^{-1}E \rightarrow F$ et un seul tel que $f = \bar{f} \circ \varepsilon$. Si f est injectif, \bar{f} est injectif.

e) On dit que S permet un calcul des fractions à droite sur E s'il permet un calcul des fractions à gauche sur le monoïde E° opposé de E . Définir dans ce cas le monoïde des fractions à droite ES^{-1} de E associé à S , observer que l'on a $(ES^{-1})^\circ = S^{-1}(E^\circ)$, et réécrire b) pour les monoïdes de fractions à droite. Si S permet un calcul des fractions à gauche et à droite sur E , les monoïdes $S^{-1}E$ et ES^{-1} sont canoniquement isomorphes.

18) a) Soient A un anneau, S une partie de A et S' la plus petite partie de A , contenant 1 et S , stable par multiplication. On dit que S permet un calcul des fractions à gauche sur A si les deux conditions suivantes (tautologiques lorsque A est commutatif) sont satisfaites :

- (i) Pour tout $a \in A$ et tout $s \in S$, il existe $b \in A$ et $t \in S'$ tels que $ta = bs$.
- (ii) Quels que soient $a \in A$ et $s \in S$ tels que $as = 0$, il existe $t \in S'$ tel que $ta = 0$.

Il revient au même de dire que S permet un calcul des fractions à gauche sur le monoïde obtenu en munissant l'ensemble A de la seule multiplication (exerc. 17). Démontrer qu'il existe alors sur le monoïde multiplicatif $S^{-1}A$ une unique addition telle que $S^{-1}A$, muni de cette addition et de sa multiplication, soit un anneau et que l'application canonique $\varepsilon : A \rightarrow S^{-1}A$ (*loc. cit.*) soit un homomorphisme d'anneaux. On dit que $S^{-1}A$ est l'anneau des fractions à gauche de A associé à S . Lorsque A est commutatif, il coïncide avec celui défini en I, p. 108.

b) Pour que S permette un calcul des fractions à gauche sur A , il faut et il suffit qu'il existe un anneau B et un homomorphisme d'anneaux $u : A \rightarrow B$ tel que tout élément de $u(S)$ soit inversible dans B et que, quel que soit $a \in u^{-1}(0)$, il existe $s \in S$ tel que $sa = 0$.

c) Supposons que S permette un calcul des fractions à gauche sur A . Le noyau de l'homomorphisme canonique $\varepsilon : A \rightarrow S^{-1}A$ est l'ensemble des $a \in A$ tels qu'il existe $s \in S$, avec $sa = 0$.

Soit f un homomorphisme de A dans un anneau B tel que tout élément de $f(S)$ soit inversible dans B . Il existe un homomorphisme $\bar{f} : S^{-1}A \rightarrow B$ et un seul tel que $f = \bar{f} \circ \varepsilon$. Si f est injectif, \bar{f} est injectif.

d) Formuler les énoncés analogues à a), b), c), relatifs au calcul des fractions à droite ; si S permet un calcul des fractions à droite sur A , on note AS^{-1} l'anneau des fractions à droite de A . On a dans ce cas $(AS^{-1})^\circ = S^{-1}(A^\circ)$. Si S permet un calcul des fractions à gauche et à droite sur A , les anneaux $S^{-1}A$ et AS^{-1} sont canoniquement isomorphes.

e) Soit A un anneau non nul sans diviseur de zéro. Pour que A admette un corps des fractions à gauche (I, p. 155, exerc. 15), il faut et il suffit que l'ensemble S des éléments non nuls de A permette un calcul des fractions à gauche sur A , et dans ce cas $S^{-1}A$ est le corps des fractions à gauche de A .

19) Soient A un anneau, S une partie de A qui permet un calcul des fractions à gauche sur A (exerc. 18) et S' la plus petite partie de A contenant 1 et S , stable par multiplication. On note $S^{-1}A$ l'anneau des fractions à gauche de A associé à S et $\varepsilon : A \rightarrow S^{-1}A$ l'homomorphisme canonique.

a) Soit M un A -module. On note $S^{-1}M$ le $S^{-1}A$ -module $S^{-1}A \otimes_A M$, et on l'appelle le *module des fractions à gauche* de M associé à S . Démontrer que tout élément de $S^{-1}M$ peut s'écrire $\varepsilon(s)^{-1} \otimes x$ avec $x \in M$ et $s \in S'$, et que, pour x, y dans M et s, t dans S' , la relation $\varepsilon(s)^{-1} \otimes x = \varepsilon(t)^{-1} \otimes y$ équivaut à l'existence d'un couple (c, d) d'éléments de A tels que l'on ait $cx = dy$ et $cs = dt \in S'$.

b) On note ε_M l'application A -linéaire canonique $x \mapsto 1 \otimes x$ de M dans $S^{-1}M$. Son image engendre le $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$; son noyau est formé des éléments $x \in M$ tels qu'il existe $s \in S'$ vérifiant $sx = 0$. Pour que l'application ε_M soit injective (resp. bijective), il faut et il suffit que, pour tout $s \in S$, l'homothétie $x \mapsto sx$ de M soit injective (resp. bijective).

c) Pour que l'on ait $S^{-1}M = 0$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in M$, il existe $s \in S$ tel que $sx = 0$.

d) Soit N un sous-module de M . L'application $S^{-1}A$ -linéaire canonique de $S^{-1}N$ dans $S^{-1}M$ est injective. (*Autrement dit, le A module à droite $S^{-1}A$ est plat.*) On identifiera $S^{-1}N$ à son image dans $S^{-1}M$ par cette application. Le sous-module $\varepsilon_M^{-1}(S^{-1}N)$ de M se compose des éléments $x \in M$ tels qu'il existe $s \in S'$, avec $sx \in N$. On dit que c'est le *saturé à gauche* de N pour S .

e) L'application $N' \mapsto \varepsilon_M^{-1}(N')$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des sous- $S^{-1}A$ -modules de $S^{-1}M$ sur l'ensemble ordonné des sous- A -modules de M qui sont *saturés* (i.e. égaux à leur saturé) à gauche pour S . L'isomorphisme réciproque est $N \mapsto S^{-1}N$.

f) Si le A -module M est noethérien, le $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$ est noethérien. Si le A -module M est artinien, le $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$ est artinien et l'application $\varepsilon_M : M \rightarrow S^{-1}M$ est surjective.

g) Si l'anneau A est noethérien (resp. artinien) à gauche, il en est de même de l'anneau $S^{-1}A$.

h) Formuler les énoncés analogues à ceux de cet exercice pour les modules de fractions à droite des modules à droite.

20) Prouver qu'un anneau noethérien à gauche A sans diviseur de zéro admet un corps des fractions à gauche (exerc. 18) (si a et s sont des éléments non nuls de A , utiliser le fait que la suite des idéaux $(As + Asa + \dots + Asa^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire pour prouver que $Aa \cap As$ n'est pas réduit à 0).

21) Soient A un anneau, σ un endomorphisme de l'anneau A et d un endomorphisme nilpotent du groupe additif de A satisfaisant la relation $d(ab) = \sigma(a)d(b) + d(a)b$.

a) Montrer que l'ensemble $S = \{X\}$ permet un calcul des fractions à gauche (exerc. 18) sur l'anneau $B = A[X]_{\sigma, d}$ (VIII, p. 10). Si σ est injectif, l'homomorphisme canonique de B dans $S^{-1}B$ est injectif et on identifie B à un sous-anneau de $S^{-1}B$. Si σ est bijectif, S permet aussi un calcul des fractions à droite sur B , et tout élément de $S^{-1}B$ s'écrit de façon

unique sous la forme $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n X^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une famille à support fini d'éléments de A . Écrire, pour $a \in A$, l'élément $X^{-1}a$ de $S^{-1}B$ sous cette forme.

b) Démontrer que la multiplication de l'anneau $A[X]_{\sigma,d}$ se prolonge par continuité en une multiplication sur l'ensemble $A[[X]]$ des séries formelles en X à coefficients dans A . Le groupe additif $A[[X]]$, muni de cette multiplication, est un anneau que l'on note $A[[X]]_{\sigma,d}$ (ou simplement $A[[X]]_{\sigma}$ si $d = 0$). Donner un exemple où une série formelle $u \in A[[X]]$ de terme constant égal à 1 ne possède dans l'anneau $A[[X]]_{\sigma,d}$ d'inverse ni à droite ni à gauche.

c) Montrer que les éléments inversibles de $A[[X]]_{\sigma}$ sont ceux dont le terme constant est inversible dans A .

d) Formuler et démontrer l'analogue de a) en remplaçant l'anneau $A[X]_{\sigma,d}$ par l'anneau $A[[X]]_{\sigma,d}$.

e) On suppose que A est un corps et σ un automorphisme de A . Alors $S^{-1}A[[X]]_{\sigma}$ (où $S = \{X\}$) est un corps, dont tout élément s'écrit de façon unique $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n X^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une famille d'éléments de A n'ayant qu'un nombre fini de termes d'indice < 0 non nuls. On note ce corps $A((X))_{\sigma}$.

f) On suppose que A est un corps commutatif. Décrire le centre du corps $A((X))_{\sigma}$. En déduire un exemple de corps de degré infini sur son centre.

22) Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G tel que le groupe quotient G/H soit isomorphe à \mathbf{Z} . Soit g un élément de G dont l'image canonique dans G/H engendre G/H . Soient C un anneau commutatif, A l'algèbre $C[H]$ de H sur C (III, p. 19), $(e_h)_{h \in H}$ sa base canonique et σ l'automorphisme de A qui applique e_h sur $e_{ghg^{-1}}$.

a) Démontrer qu'il existe un homomorphisme u et un seul de l'anneau $B = A[X]_{\sigma}$ dans l'anneau $C[G]$ qui prolonge l'injection canonique de $A = C[H]$ dans $C[G]$ et applique X sur l'élément e_g de la base canonique de $C[G]$.

b) Posons $S = \{X\}$. Démontrer que u se prolonge en un *isomorphisme* de l'anneau $S^{-1}B$ (cf. exerc. 21) sur $C[G]$. En déduire que si l'anneau $C[H]$ est noethérien à gauche, l'anneau $C[G]$ est noethérien à gauche.

23) Soient A un anneau, I un ensemble, $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de l'anneau A et $d = (d_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes du groupe additif de A , satisfaisant les relations

$$\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i \quad \sigma_i \circ d_j = d_j \circ \sigma_i \quad d_i \circ d_j = d_j \circ d_i$$

pour $i \in I, j \in I, i \neq j$ et

$$d_i(ab) = \sigma_i(a)d_i(b) + d_i(a)b$$

pour $i \in I, a \in A, b \in A$.

a) Prouver qu'il existe un unique anneau B dont le groupe additif est le groupe additif $A[\mathbf{X}]$ des polynômes à coefficients dans A en la famille d'indéterminées $\mathbf{X} = (X_i)_{i \in I}$, et dont le produit satisfait aux conditions suivantes :

- (i) Les éléments X_i ($i \in I$) de B sont deux à deux permutables ;
- (ii) Pour tout $a \in A$ et tout multiindice $\nu = (\nu_i)_{i \in I} \in \mathbf{N}^{(I)}$, le produit dans B , dans cet ordre, de a par une suite finie formée de ν_i éléments égaux à X_i pour tout $i \in I$, est le polynôme $a\mathbf{X}^\nu$;
- (iii) Pour tout $a \in A$ et tout $i \in I$, on a dans l'anneau B la relation $X_i a = \sigma_i(a)X_i + d_i(a)$.

b) L'anneau B est noté $A[\mathbf{X}]_{\sigma, d}$. Il possède la propriété universelle suivante : étant donné un anneau C , un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow C$ et une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de C deux à deux permutables tels que $x_i f(a) = f(\sigma_i(a))x_i + f(d_i(a))$ pour tout $a \in A$ et tout $i \in I$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $g : B \rightarrow C$ prolongeant f tel que $g(X_i) = x_i$ pour $i \in I$.

c) Soit J une partie de I . Notons B' l'anneau $A[(X_i)_{i \in J}]_{(\sigma_i)_{i \in J}, (d_i)_{i \in J}}$. Pour tout $i \in I - J$, il existe un unique endomorphisme σ'_i de l'anneau B' et un unique endomorphisme d'_i du groupe additif de B' tel que :

$$\begin{array}{lll} \sigma'_i(a) = \sigma_i(a) & d'_i(a) = d_i(a) & \text{pour } a \in A, \\ \sigma'_i(X_j) = X_j & d'_i(X_j) = 0 & \text{pour } j \in J, \\ d'_i(PQ) = \sigma'_i(P)d'_i(Q) + d'_i(P)Q & & \text{pour } P \in B, Q \in B. \end{array}$$

Posons $\sigma' = (\sigma'_i)_{i \in I - J}$ et $d' = (d'_i)_{i \in I - J}$. La bijection canonique de $A[(X_i)_{i \in I}]$ sur $A[(X_j)_{j \in J}][(X_i)_{i \in I - J}]$ est un isomorphisme de l'anneau $B = A[(X_i)_{i \in I}]_{\sigma, d}$ sur l'anneau $B'[(X_i)_{i \in I - J}]_{\sigma', d'}$.

d) Si l'anneau A est noethérien à gauche, que l'ensemble I est fini et que, pour tout $i \in I$, l'endomorphisme σ_i de A est bijectif, l'anneau $B = A[\mathbf{X}]_{\sigma, d}$ est noethérien à gauche.

e) Supposons que, pour tout $i \in I$, σ_i soit l'application identique de A . Notons E l'anneau des endomorphismes du groupe additif de A . Montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux ψ de $B = A[\mathbf{X}]_{\sigma, d}$ dans E tel que $\psi(X_i) = d_i$ pour $i \in I$ et que, pour tout $a \in A$, $\psi(a)$ soit l'homothétie à gauche $b \mapsto ab$ de A .

f) Conservons les hypothèses de e). Supposons de plus que A soit un anneau de polynômes $C[(T_i)_{i \in I}]$ à coefficients dans un anneau C (non nécessairement commutatif), et que, pour tout $i \in I$, d_i soit la dérivation $P \mapsto \frac{\partial P}{\partial T_i}$ de A . Démontrer que, si C est non nul et sans torsion sur \mathbf{Z} , l'homomorphisme $\psi : B \rightarrow E$ est injectif. Démontrer que, si C est un anneau de caractéristique $p > 0$ (V, p. 2), le noyau de ψ est l'idéal à gauche de B engendré par les éléments X_i^p ($i \in I$).

¶ 24) Soient G un groupe, e son élément neutre et A un anneau commutatif non nul. Notons $A[G]$ l'algèbre du groupe G sur A (III, p. 19).

a) Soient I un ensemble fini, $(G_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G et $(g_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de G . Démontrer que si G est réunion de la famille $(g_i G_i)_{i \in I}$, l'un des sous-groupes G_i est d'indice fini dans G .

b) Supposons que toute classe de conjugaison dans G distincte de $\{e\}$ soit infinie et que l'anneau A soit intègre. Démontrer que si \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont deux idéaux bilatères non nuls de l'anneau $A[G]$, on a $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$. (Choisir des éléments $a = \sum a_{gg}g$ et $b = \sum b_{gg}g$ de \mathfrak{a} et \mathfrak{b} avec $a_e \neq 0$ et $b_e \neq 0$. En utilisant a), démontrer que, quitte à remplacer a par hah^{-1} avec $h \in G$ convenable, on peut supposer que $a_g b_{g^{-1}} = 0$ pour tout $g \neq e$ dans G .)

*c) Démontrer que, pour que l'anneau $A[G]$ soit artinien à gauche (resp. à droite), il faut et il suffit que l'anneau A soit artinien et que le groupe G soit fini. (Si $A[G]$ est artinien à gauche, déduire du th. 1 de VIII, p. 5 que le groupe G est de longueur finie; pour prouver qu'il est fini, se ramener au cas où A est un corps et G un groupe simple, puis utiliser b) et la prop. 1 de VIII, p. 169) *

25) On conserve les notations de l'exerc. 24.

a) Pour tout sous-groupe H de G , soit I_H le noyau de la surjection canonique $\mathbf{Z}[G] \rightarrow \mathbf{Z}^{(G/H)}$. Alors l'application $H \mapsto I_H$ est une injection croissante de l'ensemble des sous-groupes de G dans celui des idéaux à gauche de $\mathbf{Z}[G]$; si H est un sous-groupe distingué de G , l'idéal I_H est bilatère.

b) Supposons que l'anneau $A[G]$ soit noethérien à gauche. Il est alors aussi noethérien à droite. Pour tout sous-groupe H de G , l'anneau $A[H]$ est noethérien à gauche; en particulier l'anneau A est noethérien. Si H est distingué dans G , l'anneau $A[G/H]$ est noethérien à gauche. Tout sous-groupe de G admet un système générateur fini.

c) Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le groupe G possède une suite de composition dont les quotients sont finis ou isomorphes à \mathbf{Z} ;

(ii) Le groupe G possède une suite de composition $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que G_1 soit d'indice fini dans G et que G_i/G_{i+1} soit isomorphe à \mathbf{Z} pour $0 \leq i \leq n-1$.

Lorsqu'elles sont satisfaites et que l'anneau A est noethérien, l'anneau $A[G]$ est noethérien à gauche (utiliser l'exerc. 22).

26) Soient K un corps commutatif, A l'anneau des polynômes $K[T]$ et σ l'endomorphisme $P(T) \mapsto P(T^2)$ de l'anneau A . L'anneau $A[X]_\sigma$ n'est pas noethérien à gauche, bien que l'anneau A soit noethérien.

27) Soient D un corps, σ un automorphisme de D , d un endomorphisme du groupe additif de D satisfaisant à la relation (1) de VIII, p. 9, A l'anneau $D[X]_{\sigma,d}$ (VIII, p. 10). Étant donné un élément non nul $P = \sum_n a_n X^n$ de A , le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le *degré* de P et noté $\deg(P)$. On pose $\deg(0) = -\infty$.

a) Soient F, G des éléments de A , avec $G \neq 0$; montrer qu'il existe des éléments bien déterminés Q, R (resp. Q', R') de A tel que $F = QG + R$ et $\deg(R) < \deg(G)$ (resp. $F = GQ' + R'$ et $\deg(R') < \deg(G)$).

b) En déduire que tout idéal à gauche (resp. à droite) de A est monogène. Si F, G, H, K sont des éléments de A satisfaisant à $AF + AG = AH$ et $AF \cap AG = AK$, on a $\deg(F) + \deg(G) = \deg(H) + \deg(K)$ (observer que le D -espace vectoriel A/AF est de dimension $\deg(F)$).

c) Pour que l'idéal AF de A soit maximal, il faut et il suffit que F soit *irréductible*, c'est-à-dire ne soit pas le produit de deux polynômes non constants.

28) Soient B un anneau, A un sous-anneau de B , x un élément de B tel qu'on ait $A + Ax = A + xA$, et que l'anneau B soit engendré par $A \cup \{x\}$.

a) Soit M un A -module à gauche noethérien; prouver que le B -module $M_{(B)} = B \otimes_A M$ est noethérien. En particulier, si l'anneau A est noethérien à gauche, il en est de même de B .

b) On suppose que le A -module M est de longueur finie n ; prouver que tout sous- B -module de $M_{(B)}$ possède une partie génératrice de cardinal $\leq n$ (adapter la démonstration du th. 1).



<http://www.springer.com/978-3-540-35315-7>

Algèbre

Chapitre 8

Bourbaki, N.

2012, X, 489 p., Softcover

ISBN: 978-3-540-35315-7