

Einleitung.

Zusammenstellung von Sätzen über analytische Funktionen.

In der nachfolgenden Einleitung sollen einige Definitionen und Sätze über analytische Funktionen zusammengestellt werden, und zwar in derjenigen vielfach beschränkten Gestalt, in welcher dieselben innerhalb der Theorie der elliptischen Funktionen zur Benutzung kommen. Auf die Beweise der Sätze kann hier zumeist nicht ausführlich eingegangen werden; es ist in dieser Hinsicht vielmehr auf die Spezialwerke über die Theorie der analytischen Funktionen zu verweisen.¹⁾

§ 1. Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variablen.

Die komplexe Variable $z = x + iy$ soll alle *endlichen* komplexen Werte annehmen können und zunächst auf diese beschränkt sein. Die Zahlenebene oder „*z-Ebene*“, durch deren Punkte man die Werte von z versinnlicht, stellt demnach nur erst den Inbegriff aller ihrer „im Endlichen gelegenen“ Punkte dar.

Unter einer „*Umgebung*“ des Punktes $z_0 = x_0 + iy_0$ der z -Ebene verstehen wir zweckmäßig alle Punkte z , für welche $|z - z_0| < h$ zutrifft; dabei soll h als eine der Bedingung $h > 0$ genügende endliche reelle Zahl zweckmäßig gewählt sein. Wir fassen also der leichten Anschaulichkeit halber die Umgebung des Punktes $z = z_0$ in der z -Ebene als Inbegriff aller inneren Punkte der Kreisfläche vom Radius h um den Punkt z_0 . Die Aussage, daß irgendein Satz in „der“ Umgebung von $z = z_0$ gelte, läuft darauf hinaus, daß sich eine Zahl h angeben läßt, für deren zugehörige Umgebung des Punktes z_0 der Satz richtig ist.

In einer Umgebung von z_0 sei jedem Werte z eindeutig ein bestimmter endlicher komplexer Wert $w = u + iv$ zugeordnet; diese Zuordnung werde durch das Symbol $w = f(z)$ bezeichnet und w eine „*Funktion*“ von z genannt. Sind z und $z + \Delta z$ zwei verschiedene Punkte jener Umgebung, so hat

$$(1) \quad \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

1) Wir beziehen uns vornehmlich auf W. F. Osgood, „Lehrbuch der Funktionentheorie“, Erster Band, Zweite Auflage (Leipzig und Berlin, 1912); dieses Werk soll kurz durch Angabe des Autors zitiert werden.

einen zugehörigen bestimmten endlichen Wert. Man ändere jetzt bei festgehaltenem z den Wert Δz in irgendeiner Weise entsprechend der Vorschrift $\lim \Delta z = 0$, jedoch natürlich so, daß $z + \Delta z$ dauernd der Umgebung von z_0 angehört. Zeigt sich, daß die entsprechenden Werte (1) unabhängig von der besonderen Art, in der der vorgeschriebene Grenzübergang vollzogen wird, einen bestimmten endlichen, allein von z abhängigen Grenzwert besitzen, so bezeichnen wir denselben durch $f'(z)$ und nennen ihn die „Ableitung“ von $f(z)$ im Punkte z ; wir sagen auch, *die Funktion $f(z)$ habe im Punkte z eine Ableitung*.

Man sagt: *Die Funktion $f(z)$ verhält sich in der Umgebung von z_0 „analytisch“ oder stellt dortselbst eine „analytische Funktion“ dar, wenn sie in jedem Punkte z dieser Umgebung eine Ableitung besitzt.*¹⁾ Ist $f(z)$ in der Umgebung von z_0 analytisch, so kann man aus der Existenz der Ableitung $f'(z)$ zeigen²⁾, daß $f'(z)$ in jedem Punkte jener Umgebung stetig ist. Die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ braucht demnach nicht als ein Merkmal in den „Begriff“ der analytischen Funktion $f(z)$ aufgenommen zu werden. Die Stetigkeit von $f(z)$ selbst in einem Punkte z ist eine unmittelbare Folge der Existenz der Ableitung in diesem Punkte.

Der reelle Bestandteil u und der vom Faktor i befreite imaginäre Bestandteil v der analytischen Funktion:

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$$

sind in der Umgebung von z_0 eindeutige reelle Funktionen der reellen Variablen x und y . Berechnet man für einen einzelnen zugehörigen Punkt z den eindeutig bestimmten Wert $f'(z)$ erstlich, indem man sich dem Punkte z in Richtung der x -Achse annähert, zweitens dadurch, daß man die Annäherung in Richtung der y -Achse vollzieht, so gewinnt man für ein und denselben Wert $f'(z)$ die beiden Darstellungen:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \\ f'(z) &= \frac{\partial(u + iv)}{i \cdot \partial y} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der rechten Seiten folgt: *Die reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ befriedigen die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y},$$

1) Die Benennung „analytisch“ hat Weierstraß im Anschluß an Lagrange eingeführt. Die oben gewählte Begriffserklärung der analytischen Funktionen hat Riemann in Übereinstimmung mit den Anschauungen Cauchys an die Spitze gestellt; s. Riemann, „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe“, Gesammelte mathematische Werke (Leipzig, 1876), S. 3 ff.

2) Osgood, S. 225 und 349.

welche als die „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen“ bezeichnet werden.¹⁾

Eine zwei Punkte der z -Ebene verbindende, in dieser Ebene gelegene Linie soll ein „reguläres Kurvenstück“ heißen, wenn sie sich selbst nicht schneidet, nirgends eine Spitze aufweist, dagegen überall (unter Einschluß der Endpunkte) eine bestimmte Tangente hat, die sich längs der Kurve nirgends unstetig ändert. In vielen Fällen reicht man damit aus, als solche Kurvenstücke gerade Strecken oder Kreisbogen zu benutzen. Eine „reguläre Kurve“ der z -Ebene soll eine solche Kurve sein, die aus endlich vielen regulären Stücken zusammengesetzt ist; man darf annehmen, daß benachbarte Kurvenstücke in ihrem gemeinsamen Endpunkte unter einem von π verschiedenen Winkel zusammenstoßen, da sie anderenfalls nur ein Kurvenstück bilden würden.

Unter T_n wollen wir einen zusammenhängenden, im Endlichen gelegenen „Bereich“ der z -Ebene verstehen, dessen Rand aus n getrennt verlaufenden, geschlossenen regulären Kurven besteht; hierbei ist n irgendeine endliche positive ganze Zahl. Die Randpunkte selber sollen dem Bereiche T_n nicht angehören.²⁾ Der Bereich T_n heißt „ n -fach zusammenhängend“; durch geeignet gewählte $(n-1)$ Querschnitte $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ kann er in einen einfach-zusammenhängenden Bereich T'_1 verwandelt werden. Jeder dieser Querschnitte verbindet zwei Randpunkte von T_n und darf selbst als reguläre Kurve gewählt werden; die Punkte der Querschnitte sind Randpunkte von T'_1 und gehören also nicht mehr diesem Bereiche zu (vgl. Fig. 1, in der $n=3$ ist). Ist es nicht nötig, die Zahl n hervorzuheben, so sprechen wir kurz von einem Bereiche T .

Da jeder Punkt des Bereiches T ein innerer Punkt desselben ist, so läßt sich um denselben ein Bereich eingrenzen, der durchweg aus Punkten von T besteht. Ist jetzt im Bereiche T eine eindeutige und daselbst überall endliche Funktion $w=f(z)$ erklärt, so sagen wir, sie verhalte sich im

Bereiche überall analytisch, falls sie in der Umgebung jeder Stelle von T eine analytische Funktion darstellt. Sie wird in jedem Punkte z von T stetig sein und daselbst eine bestimmte endliche und gleichfalls stetige Ableitung $f'(z)$ besitzen.

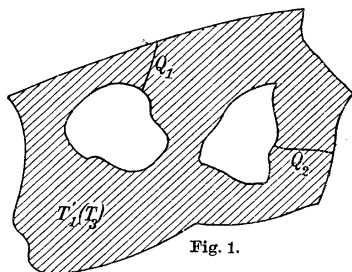


Fig. 1.

1) Betreffs des früheren Auftretens dieser Gleichungen s. Osgood, S. 226.

2) Der Bereich heißt deshalb „nichtabgeschlossen“; auch die „Umgebung“ eines Punktes z_0 war oben als „nichtabgeschlossener“ Bereich erklärt.

So ist z. B. eine rationale ganze Funktion $f(z)$ in jedem Bereiche T analytisch, und dasselbe gilt z. B. von den Funktionen e^z , $\sin z$, $\cos z$. Dagegen wird sich eine gebrochene rationale Funktion $f(z)$ in allen denjenigen etwa in T_n gelegenen Stellen nicht mehr analytisch verhalten, wo sie unendlich wird. Ist m die Anzahl dieser Stellen, so wolle man in T_n um diese Punkte als Mittelpunkte m so klein gewählte Kreise beschreiben, daß diese Kreise weder miteinander noch mit dem Rande von T_n kollidieren. Nimmt man die Flächen dieser Kreise vom Bereiche T_n fort und bereichert man daraufhin den Rand um jene m Peripherieen, so wird $f(z)$ in dem damit gewonnenen Bereiche T_{m+n} wieder allenthalben analytisch sein.

§ 2. Von den Integralen der analytischen Funktionen.

Im Bereiche T_n , in welchem $f(z)$ als eindeutige analytische Funktion erklärt ist, ziehen wir von einem festen Punkte z_0 nach einem Punkte z eine reguläre Kurve. Längs dieser Kurve erstrecken wir das Integral:

$$(1) \quad \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi,$$

wobei wir zur Unterscheidung von der oberen Grenze z die Integrationsvariable mit ξ bezeichnen. Dieses Integral hat einen bestimmten endlichen Wert¹⁾, der einen Zeichenwechsel erfährt, wenn man über die vorgeschriebene Kurve in umgekehrter Richtung, also von z nach z_0 , integriert.

Gilt weiter zunächst $n = 1$, und ist im einfach zusammenhängenden Bereiche T_1 eine geschlossene reguläre Kurve C gezeichnet, so wollen wir unter den beiden Richtungen, in denen wir diese Kurve durchlaufen können, eine beliebig, aber fest wählen. Das in der gewählten Richtung über C erstreckte Integral der analytischen Funktion $f(z)$ werde mit:

$$(2) \quad \oint_{(C)} f(\xi) d\xi$$

bezeichnet. Alsdann gilt der „*Cauchysche Integralsatz*“: *Das über die geschlossene Kurve C erstreckte Integral (2) der analytischen Funktion $f(z)$ hat den Wert 0.* Dieser für die ganze Theorie der analytischen Funktionen grundlegende Satz wird gewöhnlich in der Art bewiesen, daß man die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ beim Beweise benutzt.²⁾ Indessen hat E. Goursat³⁾ ein Beweisverfahren ausgebildet, das ohne die Stetig-

1) Osgood, S. 277 ff. 2) Osgood, S. 129 ff. und S. 284.

3) S. dessen Abhandlung „Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après Cauchy“, Amer. Math. Soc. Transact., B. 1, S. 14 (1900); übrigens s. auch Osgood, S. 349.

keit von $f'(z)$ arbeitet. Es wurde dieserhalb auch oben die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ nicht in die Begriffserklärung einer analytischen Funktion aufgenommen.

Indem wir ein für allemal daran festhalten, nur reguläre Kurven als Integrationsbahnen zu benutzen, folgt aus dem Cauchyschen Satze: *Im einfach zusammenhängenden Bereiche T_1 ist der Wert des Integrals (1) unabhängig von der zwischen z_0 und z gewählten Bahn, so daß das Integral (1) bei festgehaltener unteren Grenze z_0 eine „eindeutige“ Funktion $F(z)$ der oberen Grenze ist:*

$$(3) \quad F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi.$$

Sind nämlich zwischen z_0 und z , wie in Fig. 2, zwei Bahnen C_1 und C_2 gewählt, so wird, wenn wir an die in der vorgeschriebenen Pfeilrichtung durchlaufene Kurve C_1 die entgegen der Pfeilrichtung beschriebene Kurve C_2 anfügen, dadurch eine geschlossene Kurve C gewonnen. Durch Zerlegung des über diese Kurve C erstreckten Integrals, das infolge des Cauchyschen Integralsatzes den Wert 0 hat, in die beiden auf C_1 und auf die dem Pfeil entgegen z_0

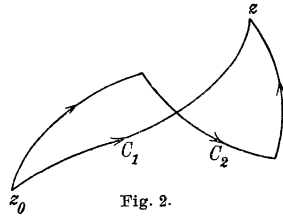


Fig. 2.

durchlaufene Kurve C_2 bezogenen Summanden ergibt sich, indem wir neuerdings im zweiten Summanden die ursprüngliche Integrationsrichtung wieder herstellen, der ausgesprochene Satz.

Der Cauchysche Integralsatz kommt unten gewöhnlich in einer etwas allgemeineren Fassung zur Verwendung. In einem vorgelegten Bereiche T_n denken wir einen durch m reguläre Kurven $C_1, C_2, \dots, C_m$ berandeten Teilbereich T_m gelegen. Es wird alsdann $f(z)$ nicht nur in T_m , sondern auch noch in jedem Randpunkte von T_m analytisch sein. Durch Hinzufügung von $(m-1)$ Querschnitten verwandeln wir T_m in einen T_1' von einfachem Zusammenhang. Für eine geschlossene Kurve C dieses T_1' gilt der Cauchysche Integralsatz. Im vorliegenden Falle dürfen wir als eine solche Kurve C aber auch den gesamten Rand von T_1' benutzen, der sich aus den m Kurven $C_1, C_2, \dots, C_m$ und jeweils den beiden „Ufern“ der Querschnitte $Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1}$ zusammensetzt. Als „positiven Umlaufssinn“ sehen wir, wie bei berandeten Bereichen allgemein üblich ist, den in Fig. 3 durch

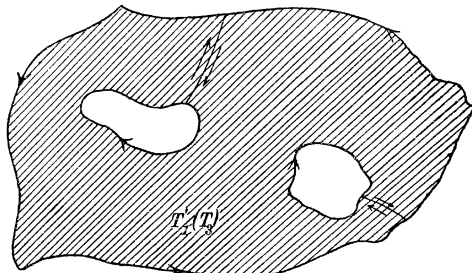


Fig. 3.

Pfeile angedeuteten an, bei welchem also die Fläche des Bereiches $\mathbf{T}_1'$ zur linken Hand gelegen ist. Hierbei werden die beiden Ufer des einzelnen Querschnittes in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sein. Zerlegen wir also das über den Gesamtrand C von $\mathbf{T}_1'$ genommene Integral in die einzelnen Summanden, welche sich auf die genannten Bestandteile von C beziehen, so werden je die beiden Summanden, welche zu den beiden Ufern des einzelnen Querschnitts gehören, sich als entgegengesetzt gleich aufheben. Es restieren also nur die auf die m Kurven $C_1, C_2, \dots, C_m$ bezogenen Summanden. So folgt: *Das über den Gesamtrand von $\mathbf{T}_m$ im positiven Umlaufssinne erstreckte Integral hat den Wert 0:*

$$(4) \quad \sum_{k=1}^m \int_{(C_k)} f(\xi) d\xi = 0.$$

Wir kehren zum Bereiche $\mathbf{T}_1$ und zu der in demselben gewonnenen eindeutigen Funktion (3) zurück. In einer ganz dem Bereiche $\mathbf{T}_1$ angehörenden Umgebung von z wähle man einen zweiten Punkt $(z + \Delta z)$ und darf alsdann den Wert $F(z + \Delta z)$ als Integral, geführt über die in (3) benutzte Bahn vermehrt um die von z nach $(z + \Delta z)$ gezogene Gerade, darstellen. Die Differenz der beiden Werte $F(z + \Delta z)$ und $F(z)$ ist demnach gleich dem Integral, genommen über diese Gerade:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi.$$

Hieraus folgt vermöge des Integralbegriffs und der Stetigkeit der Funktion $f(z)$ im betrachteten Punkte z , daß:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z},$$

wie man auch in der Umgebung von z den Grenzübergang $\lim \Delta z = 0$ vollzieht, stets gleich dem bestimmten endlichen Werte $f(z)$ ist. Daraus folgt: *Die im einfach zusammenhängenden Bereiche $\mathbf{T}_1$ eindeutige Funktion $F(z)$, d. h. das Integral der Funktion $f(z)$, betrachtet in seiner Abhängigkeit von der oberen Grenze z , ist in $\mathbf{T}_1$ überall analytisch und hat $f(z)$ zur Ableitung.*

Zu grundlegenden Sätzen führt der Rückgang auf den anfänglich vorgelegten Bereich $\mathbf{T}_n$ für den Fall, daß $n > 1$ ist. Wir verwandeln $\mathbf{T}_n$ durch $(n - 1)$ Querschnitte $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ in einen $\mathbf{T}_1'$ von einfachem Zusammenhang und wollen dabei, um zwischen einem linken und rechten Ufer des einzelnen Querschnittes Q unterscheiden zu können, jeden Querschnitt Q in einer der beiden Arten mit einer durch einen Pfeil anzudeutenden Richtung versehen.

Im Innern von T_1' ist die durch das Integral (3) bei festgehaltenem z_0 gegebene Funktion $F(z)$ eine eindeutige analytische Funktion von z . Als neu kommt jedoch hinzu, daß wir die Integration ohne Einbuße der bisher gewonnenen Sätze bis zu irgendeinem „inneren“ Punkte z eines Querschnittes Q heran, sowohl von der linken als von der rechten Seite ausdehnen können. Wir wollen einen solchen Punkt z , je nachdem er von links oder von rechts her erreicht wird, mit z_l bzw. z_r bezeichnen. Einer Ergänzung bedarf dabei der Begriff der Umgebung eines Punktes z_l oder z_r . Die Umgebung eines inneren Querschnittspunktes z wird durch Q in zwei Teile zerlegt, wobei dann der links liegende Teil die Umgebung von z_l ist, der rechts liegende Teil aber die von z_r ; die vom Querschnitt Q gelieferten Randpunkte der einzelnen Umgebung dürfen derselben als zugehörig betrachtet werden. Entsprechend wollen wir jetzt auch jeden inneren Querschnittspunkt z zweimal, nämlich als z_l und z_r dem Bereiche T_1' zurechnen.

In dem so ergänzten Bereiche T_1' ist $F(z)$ eindeutig, wobei jedoch selbstverständlich für einen inneren Querschnittspunkt z zwischen den beiden Werten $F(z_l)$ und $F(z_r)$ zu unterscheiden ist. Hier gilt nun als erster Satz: Sind z und z' irgend zwei innere Punkte eines und desselben Querschnittes Q , so gilt:

$$(5) \quad F(z_r') - F(z_l') = F(z_r) - F(z_l),$$

so daß längs Q die Differenz der Funktionswerte in je zwei gegenüberliegenden „Uferpunkten“ konstant ist. Offenbar ist nämlich jede der beiden Differenzen:

$$F(z_l') - F(z_l), \quad F(z_r') - F(z_r)$$

darstellbar als das Integral:

$$\int_z^{z'} f(\xi) d\xi,$$

genommen längs des zwischen z und z' verlaufenden Teiles von Q .

Die längs Q konstante Wertdifferenz (5) werde mit ω bezeichnet; ist sie, wie wir einstweilen annehmen wollen, nicht gleich 0, so heißt sie eine „Periode“ des Integrales $\int f(\xi) d\xi$, eine Benennung, deren Bedeutung später ersichtlich werden wird. Wie man sich mittels Fig. 4 deutlich machen wolle, kann man ω als Integral:

$$(6) \quad \omega = \int_{(P)} f(\xi) d\xi$$

darstellen, wo P eine von z_l nach z_r

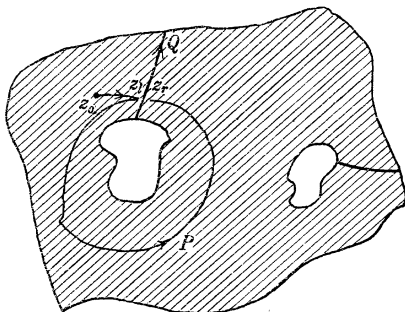


Fig. 4.

laufende Kurve ist, welche abgesehen von ihren Endpunkten nur aus inneren Punkten von $\mathbf{T}_1'$ besteht. Denken wir z_i und z_r unter Fortnahme des Querschnitt Q wieder in einen Punkt z verschmolzen, so liefert P eine geschlossene Kurve im ursprünglichen Bereiche $\mathbf{T}_n$ und soll, so gedacht, ein „Periodenweg“ des Bereiches $\mathbf{T}_n$ heißen.

Der Vergleich der Gleichung (6) mit dem Cauchyschen Integralsatz wird durch folgende Überlegung näher erläutert. Ist C irgendeine geschlossene Kurve im $\mathbf{T}_n$, so wird das längs C erstreckte Integral sich nicht ändern, wenn man die Kurve C im $\mathbf{T}_n$ einer stetigen und ohne Zerreißen vor sich gehenden Gestaltsänderung unterzieht. Es ist dies eine einfache Folge des Cauchyschen Integralsatzes. Im $\mathbf{T}_1$ ist jede geschlossene Kurve durch eine Änderung fraglicher Art auf einen Punkt zusammenziehbar; der zugehörige Integralwert ist deshalb immer 0. Im $\mathbf{T}_n$ mit $n > 1$ ist diese Zusammenziehung auf einen Punkt keineswegs immer und jedenfalls bei dem obigen Periodenwege P nicht möglich. Daher läßt sich über das Integral (6) zunächst nur aussagen, daß es irgendeinen endlichen Wert ω hat.

Die gewonnenen Ergebnisse setzen uns in den Stand, auch für $n > 1$ das Integral (3) mit einer im ursprünglichen (unzerschnittenen) $\mathbf{T}_n$ frei beweglichen oberen Grenze z als Funktion dieses Argumentes z zu charakterisieren. Kehren wir noch einmal zum $\mathbf{T}_1'$ zurück und gestatten der von z_0 ausziehenden Integrationsbahn eine einmalige Überschreitung des Querschnitts Q von der rechten zur linken Seite, um z demnächst wieder auf $\mathbf{T}_1'$ zu beschränken, so gelangen wir jetzt in $\mathbf{T}_1'$ zu Funktionswerten $F_1(z)$, welche in den einzelnen Punkten z zu den bisherigen Werten $F(z)$ in der einfachen Beziehung stehen:

$$(7) \quad F_1(z) = F(z) + \omega.$$

Dabei werden sich die Funktionswerte $F_1(z)$ auf dem rechten Ufer von Q stetig und ohne Unterbrechung des analytischen Charakters an die linksseitigen Werte $F(z)$ anschließen. Die erste Begriffserläuterung einer analytischen Funktion knüpften wir zwar oben (am Schlusse von § 1) an eine in $\mathbf{T}_n$ eindeutige Funktion; es ist aber jetzt sofort verständlich, wenn wir (immer unter der Voraussetzung eines von 0 verschiedenen ω) sagen, das Integral (3) stelle in $\mathbf{T}_n$ eine mehrdeutige analytische Funktion dar, und es seien $F(z)$ und $F_1(z)$ zwei verschiedene „Zweige“ dieser Funktion.

Die allgemeine Auffassung ist nun unmittelbar gewonnen. Die $(n - 1)$ gerichteten Querschnitte $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ mögen für unser Integral (im $\mathbf{T}_1'$) die konstanten Wertdifferenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ lie-

fern. Nach Analogie von (6) können wir ω_k auch als Integralwert für einen bestimmten Periodenweg P_k erklären:

$$(8) \quad \omega_k = \int_{(k)} f(\xi) d\xi.$$

Unter den ω seien $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ von 0 verschieden. Ist dann $\nu > 0$, so ist das Integral (3) mit einer in T_n frei beweglichen oberen Grenze z eine unendlich vieldeutige analytische Funktion, und es wird irgendein „Zweig“ dieser Funktion durch den zuerst herausgegriffenen Zweig $F(z)$ in der Gestalt:

$$(9) \quad F(z) + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_\nu \omega_\nu$$

mittels ganzer Zahlen¹⁾ m darstellbar sein; umgekehrt können wir irgendein System solcher Zahlen m wählen und dann immer zu einem Zweige (9) unserer Funktion mit diesen m gelangen. Man hat eben nur in T_n einen von z_0 nach z führenden Integrationsweg zu wählen, welcher die wieder hinzuzudenkenden Querschnitte Q einzeln in der erforderlichen Anzahl von Malen überschreitet.

§ 3. Erklärung analytischer Funktionen durch Potenzreihen.

Eine zweite von Weierstraß in seinen Berliner Vorlesungen benutzte Methode der Erklärung analytischer Funktionen ist diejenige durch *Potenzreihen*. Um die Allgemeingültigkeit und Bedeutung dieser Erklärungsweise zu erkennen, ist zunächst an die grundlegenden Konvergenzsätze der Potenzreihen zu erinnern.

Es sei eine kurz durch das Symbol $\mathfrak{P}(z)$ zu bezeichnende Potenzreihe:

$$(1) \quad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n + \dots$$

vorgelegt, wobei z eine komplexe Variable ist und die $c_0, c_1, \dots$ endliche komplexe Konstante bedeuten. Man denke für $n > 0$ die reell und nicht-negativ zu nehmenden Wurzeln $\sqrt[n]{|c_n|}$ der absoluten Beträge der c_n gebildet. Gibt es dann nach Auswahl einer beliebig großen positiven Zahl M stets noch ein (und damit unbegrenzt viele) n , so daß:

$$(2) \quad \sqrt[n]{|c_n|} > M$$

zutrifft, so kann die Reihe (1) für kein von 0 verschiedenes z konvergent sein. Es ist nämlich in diesem Falle leicht zu sehen, daß nach Auswahl eines bestimmten, nicht verschwindenden z in der Reihe (1) Glieder nachweisbar sind, welche absolut genommen eine beliebig groß

1) Wenn nichts weiter hinzugesetzt wird, sind hiermit immer irgendwelche endlichen positiven oder negativen ganzen Zahlen, unter Einschluß der Zahl 0, gemeint.

gewählte positive Zahl übersteigen. Das aber steht mit dem Begriffe der Konvergenz im Widerspruch.¹⁾

Soll demnach Konvergenz vorliegen, so muß eine positive endliche Zahl G angegeben werden können, für welche:

$$(3) \quad 0 \leq \sqrt[n]{|c_n|} \leq G$$

bei allen $n > 0$ gilt. Man denke sich die Bildpunkte der Zahlwerte $\sqrt[n]{|c_n|}$ auf der Zahlenlinie markiert, die also sämtlich dem von 0 und G eingegrenzten Intervall angehören. Diese unendlich vielen Bildpunkte werden im genannten Intervalle mindestens eine Häufungsstelle h aufweisen, die auch mit einem der Endpunkte 0 oder G zusammenfallen kann²⁾; es können aber auch mehrere oder unendlich viele Häufungsstellen der Bildpunkte von $\sqrt[n]{|c_n|}$ vorliegen. Kann man, was bei endlich vielen Häufungsstellen stets möglich ist, unter diesen eine angeben, die dem Zahlwert nach alle übrigen übertrifft, so nennen wir deren Zahlwert g . Ist eine solche Angabe nicht möglich, so gibt es für die Häufungsstellen doch eine obere Grenze, die wir alsdann mit g bezeichnen. In jedem Falle ist g eine bestimmte dem Intervall $0 \leq g \leq G$ angehörende Zahl, welche die folgende Eigenschaft hat: Nach Auswahl einer *beliebig* kleinen von 0 verschiedenen positiven Zahl ε gibt es nur noch endlich viele Indizes n , für welche $\sqrt[n]{|c_n|} > g + \varepsilon$ ist, aber stets unendlich viele, für welche $\sqrt[n]{|c_n|} > g - \varepsilon$ gilt.

Ist nun zunächst $g > 0$, so ist $R = g^{-1}$ eine von 0 verschiedene endliche positive Zahl. Die Reihe (1) soll alsdann erstlich für ein z mit einem absoluten Betrage $|z| > R$ untersucht werden. Man wähle eine positive Zahl s aus dem Intervall:

$$|z| > s > R,$$

so daß $g > s^{-1}$ folgt. Eine Zahl ε der eben genannten Bedeutung wähle man so, daß auch noch $g - \varepsilon > s^{-1}$ und also:

$$s(g - \varepsilon) = p > 1$$

1) Siehe hier und weiterhin Osgood, S. 89, 96 ff. und 335 ff.

2) Der Punkt h heißt eine Häufungsstelle der markierten Punkte $\sqrt[n]{|c_n|}$, falls sich in *jeder* Umgebung von h mindestens ein Punkt $\sqrt[n]{|c_n|}$ findet (und damit unbegrenzt viele). Der Begriff der Umgebung eines inneren Punktes oder eines Endpunktes vom fraglichen Intervall der Zahlenlinie ist dabei in sinngemäßer Übertragung der Erklärung der Umgebung eines inneren Punktes oder Randpunktes vom Bereiche T (vgl. S. 1 und 7) zu geben. Über eine Methode „fortgesetzter Halbierung von Intervallen“ oder „Einschachtelung immer kleinerer Intervalle“ zum Beweise der im Texte behaupteten Existenz mindestens einer Häufungsstelle h sehe man Osgood, S. 16 und 31; wir kommen auf diese Methode unten bei anderer Gelegenheit zurück.

gilt. Nun gibt es noch eine nicht begrenzte Anzahl von Indizes n (die demnach auch nach oben hin nicht unter einer endlichen Grenze bleiben können), für welche $\sqrt[n]{|c_n|} > g - \varepsilon$ ist. Für alle diese gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| &> s(g - \varepsilon) = p, \\ |c_n z^n| &> p^n.\end{aligned}$$

Mithin sind in der Reihe Glieder nachweisbar, die absolut genommen jede noch so groß gewählte Zahl übersteigen; die Reihe ist also für den gewählten Wert z divergent.

Es sei zweitens ϱ irgendeine unterhalb R liegende positive Zahl und z sei ein *beliebiger* komplexer Wert, für dessen absoluten Betrag nur $|z| \leq \varrho$ vorgeschrieben sein soll. Man wähle jetzt eine Zahl r entsprechend der Vorschrift:

$$\varrho < r < R.$$

Dann ist $g < r^{-1}$, und man kann eine Zahl ε der Art wählen, daß auch noch $g + \varepsilon < r^{-1}$ und also:

$$r(g + \varepsilon) = q < 1$$

gilt. Jetzt kann man einen solchen endlichen Index m angeben, daß $\sqrt[n]{|c_n|} < g + \varepsilon$ für alle $n \geq m$ richtig ist. Also wird für alle diese Indizes n :

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| &< r(g + \varepsilon) = q, \\ |c_n z^n| &< q^n\end{aligned}$$

zutreffen. Durch Rückgang auf die geometrische Reihe erkennt man, daß die Reihe (1) jetzt absolut und demnach auch unbedingt, d. h. unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder konvergiert.

Ist endlich $g = 0$, so können wir in der vorstehenden Betrachtung für ϱ eine beliebige endliche Zahl wählen und gelangen die Konvergenz der Reihe (1) betreffend zu demselben Ergebnis wie soeben.

In dem am Anfang betrachteten Falle, wo also eine endliche Zahl g nicht existiert, können wir sagen, es sei $g = \infty$. Ist g endlich und > 0 , so heißt $R = g^{-1}$ der „*Konvergenzradius*“ und der um den Nullpunkt der z -Ebene beschriebene Kreis des Radius R der „*Konvergenz-kreis*“ der Reihe $\mathfrak{P}(z)$.¹⁾ Ist endlich $g = 0$, so tritt *die ganze z -Ebene* (vgl. S. 1) an Stelle des Konvergenzkreises und $\mathfrak{P}(z)$ heißt dann „*beständig konvergent*“.

Um die gewonnenen Ergebnisse formell gleich noch in etwas er-

1) Über die im Texte gewählte Art der Einführung des Konvergenzkreises s. J. Hadamard, „Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor“, Journ. de Math. (4) Bd. 8 (1892).

weiterter Gestalt zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir an Stelle von (1):

$$(4) \quad c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \dots,$$

indem wir unter z_0 irgendeinen fest gewählten Wert verstehen. Dabei soll $\mathfrak{P}(z - z_0)$ nicht nur eine symbolische Bezeichnung für die Reihe (4) sein, sondern bei einem z , für welches die Reihe (4) konvergiert, soll $\mathfrak{P}(z - z_0)$ zugleich den eindeutig bestimmten endlichen Summenwert bezeichnen. Verstehen wir unter $\mathfrak{G}_n(z - z_0)$ die von der Summe der n ersten Glieder dargestellte rationale ganze Funktion $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(5) \quad \mathfrak{G}_n(z - z_0) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1},$$

so darf man im Falle der Konvergenz für jeden Wert n schreiben:

$$(6) \quad \mathfrak{P}(z - z_0) = \mathfrak{G}_n(z - z_0) + \mathfrak{R}_n(z - z_0)$$

und nennt $\mathfrak{R}_n(z - z_0)$ den „Reihenrest“. Für ein endliches $g > 0$ ist der „Konvergenzkreis“ jetzt natürlich der Kreis vom Radius $R = g^{-1}$ um den Mittelpunkt z_0 .

Die oben gewonnenen Ergebnisse liefern nun folgenden Satz: *Ist $g = \infty$, so ist $\mathfrak{P}(z - z_0)$ für kein von z_0 verschiedenes z konvergent. Ist g endlich, so sei $\mathbf{T}$ für $g > 0$ ein beliebiger Bereich im „Innern“ des Konvergenzkreises und für $g = 0$ irgendein fest gewählter endlicher Bereich der z -Ebene. Im Bereiche $\mathbf{T}$ konvergiert $\mathfrak{P}(z - z_0)$ überall, und zwar in der Art, daß nach Auswahl einer positiven, von 0 verschiedenen, aber beliebig klein wählbaren Zahl δ ein endlicher Index m angebar ist, so daß für alle $n \geq m$ die Bedingung:*

$$(7) \quad |\mathfrak{R}_n(z - z_0)| < \delta$$

erfüllt ist, gleichgültig welcher besondere Wert z aus $\mathbf{T}$ vorliegt. Da nämlich alle Punkte z von $\mathbf{T}$ die Bedingung $|z| < R$ erfüllen, bzw. da $\mathbf{T}$ (im Falle $g = 0$) ein bestimmt gewählter endlicher Bereich sein sollte, so läßt sich in jedem Falle eine Zahl ϱ obiger Bedeutung wählen usw. Wie hervorgehoben, gelten die gemachten Angaben für alle Punkte z in $\mathbf{T}$ mit den gleichen Zahlen δ und m ; die Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ heißt dieserhalb im Bereiche $\mathbf{T}$ „gleichmäßig“ konvergent.

Die Summenwerte $\mathfrak{P}(z - z_0)$ stellen eine im Bereiche $\mathbf{T}$ erklärte, daselbst überall eindeutige und endliche „Funktion“ vor. *Diese Funktion $\mathfrak{P}(z - z_0)$ ist in $\mathbf{T}$ aber auch überall stetig*, wie aus (6) und (7) hervorgeht. Es ist nämlich $\mathfrak{G}_n(z - z_0)$ für jedes bestimmte n stetig, und der Absolutwert des Reihenrestes kann für hinreichend groß gewähltes n kleiner als δ gemacht werden.

Man denke in $\mathbf{T}$ von z_0 nach einer beliebigen Stelle z eine reguläre Kurve C gewählt; dann hat das längs dieser Kurve C erstreckte Integral:

$$(8) \quad \int_{z_0}^z \mathfrak{P}(\xi - z_0) d\xi$$

einen bestimmten endlichen Wert¹⁾. Zuzufolge (6) gilt für jedes n :

$$\int_{z_0}^z \mathfrak{P}(\xi - z_0) d\xi = \int_{z_0}^z \mathfrak{G}_n(\xi - z_0) d\xi + \int_{z_0}^z \mathfrak{R}_n(\xi - z_0) d\xi,$$

wo die rechts stehenden Integrale wieder längs C zu erstrecken sind. Für das erste Glied rechter Hand gilt unabhängig von der ausgewählten Kurve C :

$$\int_{z_0}^z \mathfrak{G}_n(\xi - z_0) d\xi = c_0(z - z_0) + \frac{1}{2} c_1(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n} c_{n-1}(z - z_0)^n.$$

Für das zweite Glied gilt, da die Länge der Kurve C endlich ist, mit Rücksicht auf (7) folgendes: Hat man eine positive, von 0 verschiedene, aber beliebig kleine Zahl η gewählt, so gibt es einen endlichen Index m der Art, daß für alle $n \geq m$:

$$\left| \int_{z_0}^z \mathfrak{R}_n(\xi - z_0) d\xi \right| < \eta$$

zutrifft. Da nun die unendliche Reihe:

$$(9) \quad c_0(z - z_0) + \frac{1}{2} c_1(z - z_0)^2 + \frac{1}{3} c_2(z - z_0)^3 + \cdots$$

zufolge des bekannten Gesetzes $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ denselben Konvergenzkreis besitzt wie die Reihe (4), so folgt aus den vorstehenden Formeln, daß der Summenwert der in $\mathbf{T}$ gleichmäßig konvergenten Reihe (9) gleich dem Integrale (8) ist.

Hiernach ist der Wert des Integrales (8) von der Auswahl der Kurve C unabhängig: Das Integral (8) als Summenwert der Reihe (9) stellt in $\mathbf{T}$ eine überall endliche, eindeutige und stetige Funktion von z dar. Weiter findet man im Anschluß an (8) wie oben (S. 6): Die gewonnene Funktion hat im Punkte z eine Ableitung, welche gleich $\mathfrak{P}(z - z_0)$ ist.

Man wolle jetzt die Glieder der Reihe (4) einzeln differenzieren und die in $\mathbf{T}$ wiederum gleichmäßig konvergente Reihe bilden:

$$(10) \quad \mathfrak{P}'(z - z_0) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \cdots,$$

deren Summenwert, wie angegeben, $\mathfrak{P}'(z - z_0)$ heiße. Die Anwendung

1) Siehe für das Folgende Osgood, S. 303 ff.

der vorstehenden Überlegung auf die Reihe (10) an Stelle der Reihe (4) ergibt sofort:

$$\mathfrak{P}(z - z_0) = c_0 + \int_{z_0}^z \mathfrak{P}'(\xi - z_0) d\xi.$$

Somit hat $\mathfrak{P}(z - z_0)$ in jedem Punkte z von $\mathbf{T}$ eine Ableitung, nämlich $\mathfrak{P}'(z - z_0)$; es ist also $\mathfrak{P}(z - z_0)$ im Sinne der S. 2 gegebenen Erklärung in $\mathbf{T}$ eine „analytische“ Funktion. Indem wir demnach die frühere Bezeichnung $f(z)$ an Stelle von $\mathfrak{P}(z - z_0)$ aufnehmen, haben wir das Ergebnis: *Eine Potenzreihe (4) stellt in jedem Bereiche $\mathbf{T}$, der im Innern ihres Konvergenzkreises bzw. für $g = 0$ als beliebiger endlicher Bereich gewählt wurde, eine analytische Funktion:*

$$(11) \quad f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

dar, die in $\mathbf{T}$ differenziert und integriert werden kann, indem man, kurz gesagt, Differentiation bzw. Integration an der Reihe (11) „gliedweise“ vollzieht; die dabei entspringenden Reihen haben denselben Konvergenzkreis wie die Reihe (11), sind also insbesondere für $g = 0$ wieder „beständig konvergent“.

Aus der letzten Angabe geht hervor, daß auch:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \dots$$

und, indem man dieselbe Schlußweise wiederholt, auch:

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(z - z_0) + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots$$

in $\mathbf{T}$ für jedes n eine analytische Funktion darstellt, gegeben durch die rechts stehende daselbst gleichmäßig konvergente Reihe. Setzen wir hier und in (11) speziell $z = z_0$ ein, so folgt:

$$c_0 = f(z_0), \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es folgt: *Ist eine analytische Funktion $f(z)$ in einem Bereiche $\mathbf{T}$ durch eine daselbst konvergente Reihe (11) darstellbar, so ist diese Reihe notwendig die Taylorsche Reihe:*

$$(12) \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \frac{z - z_0}{1!} + f''(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{2!} + \dots$$

dieser Funktion.

§ 4. Die Cauchysche Integralformel und die Cauchy-Taylorsche Reihe.

Die Funktion $f(z)$ sei innerhalb und auf dem Rande C eines einfach zusammenhängenden Bereiches $\mathbf{T}_1$ überall eindeutig und analytisch. Man denke jetzt z im Innern von $\mathbf{T}_1$ irgendwo fest gewählt, während

demgegenüber ξ ein in $\mathbf{T}_1$ und auf dem Rande von $\mathbf{T}_1$ variabler Punkt sei. Dann ist der Quotient:

$$(1) \quad \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

in der Umgebung jedes von z verschiedenen Punktes des Bereiches $\mathbf{T}_1$ und natürlich auch längs des Randes C analytisch¹⁾; indessen ist dies im Punkte $\xi = z$ nicht mehr notwendig der Fall, und insbesondere ist der Quotient (1) hier sicher nicht mehr analytisch, wenn $f(z)$ von 0 verschieden ist, da in diesem Falle dem Quotienten im Punkte z kein endlicher Wert zukommt. Zieht man demnach um z als Mittelpunkt innerhalb $\mathbf{T}_1$ eine Kreisperipherie k vom Radius r und nimmt die im Innern von k liegenden Punkte dem Bereiche $\mathbf{T}_1$ fort, so restiert ein Bereich $\mathbf{T}_2$, und es wird der Quotient (1) in $\mathbf{T}_2$, unter Einschluß der Randkurven C und k überall eindeutig und analytisch sein. Der Cauchysche Integralsatz (4) S. 6 ergibt demnach:

$$\int_{(C)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{(k)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Längs des Kreises k ist $|\xi - z|$ konstant gleich r , und wir können schreiben:

$$\xi - z = re^{i\vartheta}, \quad d\xi = i \cdot r e^{i\vartheta} d\vartheta,$$

wobei die Integrationsvariable ϑ von 2π bis 0 abzunehmen hat. Kehren wir die Integrationsrichtung längs k um, so folgt:

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\vartheta}) d\vartheta, \\ \int_{(k)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= i \int_0^{2\pi} (f(z + re^{i\vartheta}) - f(z)) d\vartheta + 2i\pi f(z). \end{aligned}$$

Der Wert des rechts stehenden Integrales ist, wie aus der letzten Gleichung folgt, unabhängig von r . Da andererseits r zwar > 0 ist, aber „beliebig“ klein gewählt werden kann, und da $f(\xi)$ im Punkte z stetig ist, so liegt der Wert jenes Integrales zufolge seiner Bauart, absolut genommen, unterhalb einer positiven von 0 verschiedenen, beliebig klein gewählten Zahl δ . Das fragliche Integral kann also keinen von 0 verschiedenen Wert haben. Für die im Innern und auf dem Rande C des Bereiches $\mathbf{T}_1$ überall eindeutige und analytische Funktion

1) Es ist leicht zu sehen, daß, wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ in der Umgebung einer Stelle z_0 analytisch sind und $\varphi(z_0)$ von 0 verschieden ist, auch der Quotient $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ in der Umgebung von z_0 analytisch ist; vgl. Osgood, S. 225.

$f(z)$ gilt in jedem inneren Punkte z von $\mathbf{T}_1$ die „Cauchysche Integralformel“¹⁾:

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

wo das Integral im positiven Sinne über den Rand C auszudehnen ist.

Wie aus (2) hervorgeht, ist der Innenwert $f(z)$ unserer Funktion durch die längs C stattfindenden Randwerte $f(\xi)$ bereits eindeutig bestimmt. Wir können sagen: *Ist längs des Randes C eines $\mathbf{T}_1$ eine stetige Folge komplexer Werte $f(\xi)$ gegeben, so gibt es höchstens eine in $\mathbf{T}_1$, unter Einschluß des Randes, eindeutige analytische Funktion $f(z)$, welche die gegebenen Randwerte hat.*

Es sei jetzt z_0 ein fest gewählter Wert und $f(z)$ eine in der Umgebung von z_0 eindeutige analytische Funktion. Nach S. 1 besteht diese Umgebung aus den inneren Punkten einer Kreisfläche mit einem Radius $h > 0$ um den Mittelpunkt z_0 . Wir nehmen weiter an, daß auch noch für alle Punkte der Peripherie K des fraglichen Kreises $f(z)$ eindeutig und analytisch ist. Es sei z ein beliebig, aber fest gewählter innerer Punkt dieses Kreises, während ξ ein längs der Peripherie variabler Punkt sei; dann gilt:

$$(3) \quad 0 \leq \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = q < 1,$$

wo q eine Konstante ist. Es folgt:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^{\nu},$$

da die rechts stehende Reihe zufolge (3) konvergent ist.

Die Beträge $|f(\xi)|$ der längs K zutreffenden Funktionswerte $f(\xi)$ haben notwendig eine endliche und bestimmte obere Grenze M , so daß für alle Punkte von K :

$$|f(\xi)| \leq M$$

gilt²⁾. Multiplizieren wir demnach die letzte Gleichung mit $f(\xi)$, so wird die in:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z - z_0)^{\nu} \cdot \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}}$$

1) Osgood, S. 295.

2) Wäre eine solche Grenze nicht vorhanden, so würde man mittelst der in der Note S. 10 erwähnten „Methode fortgesetzter Halbierung“ oder „Einschachtelung kleinerer Intervalle“ (Osgood, S. 16 und 31) zur Existenz mindestens einer Stelle ξ_0 von der Art geführt werden, daß in jeder noch so klein gewählten Umgebung von ξ_0 Beträge $|f(\xi)|$ vorkommen würden, die eine beliebig groß gewählte Zahl übersteigen. Dann aber könnte, da $f(\xi_0)$ der Annahme gemäß ein bestimmter endlicher Wert ist, $f(\xi)$ im Punkte ξ_0 nicht stetig und also nicht analytisch sein.

rechts stehende Reihe längs K gleichmäßig konvergent sein; d. h. wenn wir:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{v=0}^{n-1} (z - z_0)^v \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{v+1}} + \Re_n(\xi)$$

schreiben, so wird sich nach Auswahl einer beliebig kleinen, positiven, von 0 verschiedenen Zahl δ stets ein endlicher Index m angeben lassen, so daß für alle Punkte ξ von K und für alle Indizes $n \geq m$:

$$|\Re_n(\xi)| < \delta$$

gilt. Durch Integration der letzten Gleichung längs K folgt:

$$\int_{(K)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{v=0}^{n-1} \left((z - z_0)^v \int_{(K)} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{v+1}} \right) + \int_{(K)} \Re_n(\xi) d\xi$$

mit der für alle $n \geq m$ zutreffenden Ungleichung:

$$\left| \int_{(K)} \Re_n(\xi) d\xi \right| < 2\pi h \cdot \delta.$$

Mit Rücksicht auf (2) und unter Benutzung der für alle Indizes n gültigen Abkürzung:

$$(4) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(K)} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = c_n$$

ergibt sich: *Der Funktionswert $f(z)$ ist der Summenwert der in:*

$$(5) \quad f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

rechts stehenden konvergenten Reihe.

Da z im Innern des Kreises K mit dem Radius $h > 0$ irgendwo wählbar war, so ist die Reihe (5) entweder beständig konvergent oder sie hat einen von 0 verschiedenen endlichen Konvergenzradius R . Im letzteren Falle ist notwendig:

$$h \leq R.$$

Da die Gleichung (5) mit den von z unabhängigen Koeffizienten c für jeden Punkt z der Umgebung von z_0 gilt, so können wir daselbst die Sätze des § 3 auf die Reihe und damit auf die Funktion $f(z)$ in Anwendung bringen. Die Schlußbetrachtung von § 3 zeigt: *Die Reihe (5) ist identisch mit der Taylorischen Reihe der Funktion $f(z)$; sie wird mit Rücksicht auf die neue Darstellung (4) ihrer Koeffizienten auch die „Cauchy-Taylorische Reihe“ der Funktion genannt.*

Durch Vergleich der beiderseitigen Darstellung von c_n folgt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{(K)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Unter Zuhilfenahme des Cauchyschen Integralsatzes (4) S. 6 und bei Fortlassung des unteren Index an z_0 folgern wir leicht die sich an (2) anschließende Gleichung:

$$(6) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

welche unter den Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel (2) für jedes n richtig ist.

Als Hauptergebnis ist anzumerken: *Eine in der Umgebung von z_0 überall eindeutige und analytische Funktion $f(z)$ ist ebenda in einer und nur einer Weise durch eine nach Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ darstellbar, deren Konvergenzkreis jene ganze Umgebung in sich enthält.* Man kann demnach an Stelle der S. 2 gewählten Erklärung einer „analytischen“ Funktion auch die folgende treten lassen: *Eine in der Umgebung von z_0 eindeutige Funktion heißt „analytisch“, wenn sie sich daselbst durch eine konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ darstellen läßt.*¹⁾

Als weitere Folgerung aus § 3 (S. 14) merken wir an: *Eine in der Umgebung von z_0 eindeutige analytische Funktion $f(z)$ hat für jede endliche Ordnung n eine eindeutige Ableitung $f^{(n)}(z)$, die ebenda wieder eine analytische Funktion ist.*

In der öfter genannten Umgebung legen wir durch z_0 ein reguläres Kurvenstück C_0 von nicht verschwindender aber beliebig kleiner Länge. Kennt man die Funktionswerte $f(z)$ längs C_0 , so sind damit auch die Werte von $f'(z)$ längs C_0 eindeutig bestimmt, und also gilt dasselbe von den Werten jeder Ableitung $f^{(n)}(z)$. Insbesondere sind also mit den Werten von $f(z)$ längs C_0 bereits die sämtlichen Koeffizienten der Taylorsche Reihe (12) S. 14 eindeutig bestimmt. Diese Reihe aber liefert die Funktionswerte $f(z)$ in der ganzen Umgebung: *Eine in der Umgebung von z_0 überall eindeutige und analytische Funktion $f(z)$ ist daselbst bereits eindeutig bestimmt, wenn ihre Werte nur erst längs eines durch z_0 hindurchziehenden regulären Kurvenstücks C_0 mit nicht verschwindender, aber beliebig kleiner Länge gegeben sind.*

Endlich nennen wir als Folgerung der gewonnenen Ergebnisse noch den Satz: *Ist in der Umgebung von z_0 durch eine Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ mit einem endlichen und von 0 verschiedenen Konvergenzradius R eine Funktion $f(z)$ gegeben, so kann es in einer Umgebung von z_0 mit $h > R$ keine daselbst überall eindeutige und analytische Funktion $f_1(z)$ geben, die im*

1) Man beachte, daß auch hier der Charakter einer Funktion, in der Umgebung von z_0 analytisch zu sein, nur erst für Funktionen $f(z)$ erklärt ist, die daselbst eindeutig sind. Eine spätere Ergänzung wird sich auf Punkte z_0 beziehen, in deren Umgebung $f(z)$ nicht mehr eindeutig ist.

Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z - z_0)$ mit $f(z)$ identisch wäre. Wenn wir nämlich für irgendein z , dessen Betrag $|z|$ dem Intervall $R < |z| < h$ angehört, die Cauchy-Taylorsche Reihe ansetzen, so erweist sich diese als mit $\mathfrak{P}(z - z_0)$ identisch, und also wäre entgegen der Annahmesicher $h \leq R$.

§ 5. Die analytische Fortsetzung und die durch dieselbe veranlaßten Ergänzungen der anschaulichen Hilfsmittel.

Der vorletzte Satz von § 4 kann in folgender Weise verallgemeinert werden: *Eine in einem Bereiche $\mathbf{T}$ überall eindeutige und analytische Funktion $f(z)$ ist im ganzen Bereiche bereits fest bestimmt, wenn ihre Werte nur erst längs eines im Bereiche gelegenen regulären Kurvenstücks C_0 mit nicht verschwindender, aber beliebig kleiner Länge gegeben sind.*

Ist nämlich z ein beliebiger innerer Punkt von $\mathbf{T}$, so können wir von einem auf C_0 gewählten Ausgangspunkte z_0 eine reguläre Kurve C nach z ziehen, die nur aus inneren Punkten von $\mathbf{T}$ besteht. Für die Entfernungen zwischen den Punkten von C und den Randpunkten von $\mathbf{T}$ wird es demnach eine bestimmte untere Grenze h geben, die > 0 ist. Nach dem Konvergenzsatz der Cauchy-Taylorschen Reihe muß also für irgendeinen Punkt z' von C eine Darstellung von $f(z)$ in Gestalt einer Reihe $\mathfrak{P}(z - z')$ gelten, deren Konvergenzradius $R \geq h$ ist.

Man teile nun die Kurve C von z_0 beginnend in lauter Bogenstücke, deren Längen $< h$, etwa alle gleich $\frac{1}{2}h$, sind oder doch nicht $< \frac{1}{2}h$ sein sollen. Die Teilpunkte, z_0 mitgerechnet, seien $z_0, z_1, z_2, \dots$. Da die Länge von C endlich ist, so werden wir nach einer *endlichen* Anzahl, etwa nach m Schritten die Kurve C in der Art erschöpft haben, daß der Restbogen von z_m bis zum Endpunkte z selbst $< h$ ausfällt. Aus den für C_0 vorgezeichneten Funktionswerten stellen wir die für die Umgebung von z_0 gültige Darstellung $f(z) = \mathfrak{P}_0(z - z_0)$ her. Da z_1 im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ gelegen ist, so sind die Funktionswerte längs eines kleinen durch z_1 ziehenden Kurvenstückchens C_1 durch $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ eindeutig bestimmt. Damit aber gewinnen wir nach dem vorletzten Satze von § 4 die Funktion $f(z)$ in der Umgebung von z_1 , eindeutig dargestellt durch eine Reihe $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$. Im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$ aber liegt z_2 , und wir gewinnen durch Wiederholung der gleichen Überlegung $\mathfrak{P}_2(z - z_2)$ usw. Die m -malige Ausübung dieses Verfahrens führt uns zu den kettenförmig zusammenhängenden $(m + 1)$ Potenzreihen:

$$(1) \quad \mathfrak{P}_0(z - z_0), \quad \mathfrak{P}_1(z - z_1), \quad \mathfrak{P}_2(z - z_2), \dots, \quad \mathfrak{P}_m(z - z_m),$$

deren letzte den Funktionswert $f(z)$ im gewählten Punkte z in der Tat eindeutig festlegt.

Das beschriebene Verfahren gewinnt dadurch eine weitergehende und grundsätzliche Bedeutung, daß wir mit Hilfe desselben die Frage behandeln können, ob es möglich ist, die Funktion $f(z)$ unter Wahrung ihres analytischen Charakters über den hier zunächst vorliegenden Bereich T fortzusetzen. Knüpfen wir sogleich an eine beliebige in der Umgebung von z_0 durch $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ gegebene Funktion $f(z)$ an, so mögen wir von z_0 aus nach irgendeinem Punkte z unserer z -Ebene eine Kurve C zeichnen. Wir wählen alsdann auf dem im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ verlaufenden Teile von C einen neuen Punkt z_1 und bilden wie oben die Reihe $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$. Für diejenigen Innenpunkte des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$, die zugleich innere Punkte des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ sind, liefert $\mathfrak{P}_1(z - z_0)$ wieder die Funktionswerte $f(z)$. Ragt indessen der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$ über den von $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ hinaus, so ist in diesem neu hinzukommenden Teile des ersteren Kreises bereits eine „analytische Fortsetzung“ der zunächst nur im Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ gegebenen Funktion $f(z)$ gewonnen. Können wir nun auf C nach dem gleichen Prinzip weitere Punkte $z_2, z_3, \dots$ markieren und an $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$ weitere Reihen $\mathfrak{P}_2(z - z_2), \mathfrak{P}_3(z - z_3), \dots$ kettenförmig wie oben aneinander binden, und gelingt es, nach endlich vielen Schritten zu einer Reihe $\mathfrak{P}_m(z - z_m)$ zu gelangen, in deren Konvergenzkreise der Kurvenendpunkt z liegt, so sagen wir, *die zunächst nur in der Umgebung von z_0 gegebene Funktion $f(z)$ sei längs der Kurve C bis zum Punkte z fortsetzbar.*¹⁾ Dieser Prozeß der „analytischen Fortsetzung“ längs einer Kurve ist dabei, wenn überhaupt, nur in einer Weise möglich, wie aus der am Anfang des vorliegenden Paragraphen dargelegten Betrachtung einleuchtend ist. Die einzelne Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$, an welche wir den Prozeß anknüpfen, nennen wir ein „Element“ der Funktion $f(z)$; natürlich würde $f(z)$ ebenso wohl vom „Elemente“ $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$ oder $\mathfrak{P}_2(z - z_2)$ usw. aus herstellbar sein.²⁾

Um das Prinzip der analytischen Fortsetzung im vollen Umfange verwerten zu können, sind die bisherigen geometrischen Vorstellungen nach zwei Richtungen zu ergänzen.

Bezeichnen wir mit $K_0, K_1, \dots, K_m$ die Flächen der Konvergenzkreise der Reihen (1), so wird $f(z)$ durch die Reihen (1) unmittelbar gegeben

1) Die Betrachtungen des Textes gelten zwar uneingeschränkt auch in dem besonders einfachen Falle, daß $\mathfrak{P}_0(z - z_0)$ und dann auch $\mathfrak{P}_1(z - z_1), \mathfrak{P}_2(z - z_2), \dots$, beständig konvergent sind. Da wir indessen in diesem Falle auch ohne das Prinzip der analytischen Fortsetzung alles Wesentliche über die Funktion $f(z)$ werden aussagen können, so dürfen wir zur Erläuterung der folgenden Sätze an Potenzreihen mit endlichen Konvergenzradien R anknüpfen.

2) Über das Auftreten des Prinzips der analytischen Fortsetzung bei Weierstraß, Riemann und anderen Autoren s. „Osgood“ S. 431 und 435.

sein in einem Bereiche $\mathbf{T}$, den wir erhalten, indem wir jede Kreisfläche mit der folgenden längs des gemeinsamen Flächenteiles zusammenkleben. Der so gewonnene Bereich kann nun sehr wohl noch über sich selbst hinübergreifen. Wenn wir z. B. eines der Integrale von § 2 (S. 4ff.), die im damaligen Bereiche $\mathbf{T}$ analytisch sind, von z_0 aus längs eines Periodenweges fortsetzen bis zum Punkt z_0 zurück¹⁾, so gelangen wir am Schlusse nicht wieder zu den Anfangswerten der analytischen Funktion. Wir werden nun (um zu unserem aus den $(m+1)$ Kreisscheiben zusammengeklebten Bereiche $\mathbf{T}$ zurückzukehren), sobald dieser Bereich sonst noch längs eines Flächenstücks (oder mehrerer) über sich selbst hinübergreift, die weitere Verklebung längs dieses Stückes stets, aber auch *nur* dann vornehmen, wenn in den aufeinander liegenden Teilen von $\mathbf{T}$ gleiche Funktionswerte stattfinden. Die grundsätzliche Erweiterung besteht also darin, daß wir gemäß der Natur einer „mehrdeutigen“ Funktion $f(z)$ fortan mit Bereichen $\mathbf{T}$ arbeiten wollen, welche sich über sich selbst hinüberziehen dürfen, und solchergestalt irgendwelche Teile der z -Ebene mehrfach bedecken. Es ist dann, wie wir sagen wollen, $f(z)$ ob- schon an sich mehrdeutig, doch eine „eindeutige Funktion der Stelle z im Bereiche $\mathbf{T}$ “. Überzieht $\mathbf{T}$ etwa die Umgebung von z_0 mehrfach, so wollen wir die hier übereinanderliegenden Teile von $\mathbf{T}$ als verschiedene „Blätter“ und (im Anschluß an § 2) die in diesen Blättern stattfindenden Funktionswerte als verschiedene „Zweige“ der Funktion $f(z)$ unterscheiden.

Die zweite Ergänzung besteht in der Zulassung der Möglichkeit, daß das Argument z der Funktion unendlich groß wird. In der z -Ebene sei ein Kreis um den Nullpunkt mit dem endlichen und von 0 verschiedenen Radius g gezogen. Eine vorgelegte Funktion $f(z)$ sei außerhalb dieses Kreises für alle *endlichen* z eindeutig und analytisch. Schreiben wir:

$$(2) \quad z' = \frac{1}{z},$$

so erscheinen die gesamten endlichen Punkte z mit $|z| > g$ umkehrbar eindeutig oder kurz „ein-eindeutig“ den gesamten Punkten der z' -Ebene mit $|z'| < R = g^{-1}$, abgesehen vom Nullpunkte $z' = 0$, zugeordnet. Nun folgt aus der Erklärung des analytischen Charakters leicht, daß die Funktion:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \bar{f}(z')$$

des Argumentes z' , soweit dieselbe überhaupt erklärt ist, auch wiederum analytisch ist. Erklärt aber ist $\bar{f}(z')$ für alle inneren Punkte des Kreises

1) Die zugehörige Periode ω gilt als von 0 verschieden.

vom Radius $R = g^{-1}$ um den Nullpunkt $z' = 0$, abgesehen von diesem Nullpunkte selber.

Wir nehmen nun an, daß $\bar{f}(z')$ bei Annäherung an den Nullpunkt $z' = 0$ einem endlichen Grenzwerte c_0 zustrebe, und daß, sofern wir als Funktionswert $\bar{f}(0)$ diesen Wert c_0 annehmen, $\bar{f}(z')$ dadurch auch im Nullpunkte zu einer eindeutigen analytischen Funktion werde. Dann wird eine Entwicklung gelten:

$$(3) \quad \bar{f}(z') = c_0 + c_1 z' + c_2 z'^2 + c_3 z'^3 + \dots,$$

welche entweder beständig konvergent ist oder einen endlichen Konvergenzradius R besitzt, mit dem wir die eben durch R bezeichnete Zahl g^{-1} als identisch ansehen können.

Indem wir durch die Transformation (2) zur z -Ebene zurückgehen, müssen wir, wenn durch die Hereinnahme des Nullpunktes $z' = 0$ die Eindeutigkeit zwischen z und z' erhalten bleiben soll, der z -Ebene als neues dem Punkte $z' = 0$ entsprechendes Element einen einzigen unendlich fernen Punkt $z = \infty$ zuerteilen. Sie wird hierdurch im Gegensatze zu ihrer ursprünglichen Erklärung (S. 1) zu einem abgeschlossenen Gebilde und soll in dieser Gestalt den weiteren Betrachtungen beständig zugrunde liegen. Trifft nun die durch (3) zum Ausdruck kommende Voraussetzung betreffs der Funktion $\bar{f}(z')$ zu, so sagen wir, $f(z)$ sei nach dem Punkte $z = \infty$ fortsetzbar und in diesem Punkte analytisch. Für die „Umgebung“ des Punktes $z = \infty$ gilt dann die Darstellung:

$$(4) \quad f(z) = c_0 + c_1 \frac{1}{z} + c_2 \frac{1}{z^2} + c_3 \frac{1}{z^3} + \dots,$$

welche außerhalb des Kreises vom Radius $g = R^{-1}$ um den Nullpunkt der z -Ebene als Mittelpunkt konvergent ist.¹⁾

Um den unendlich fernen Punkt der z -Ebene der Anschauung zugänglich zu machen, bedient man sich der „stereographischen Projektion“

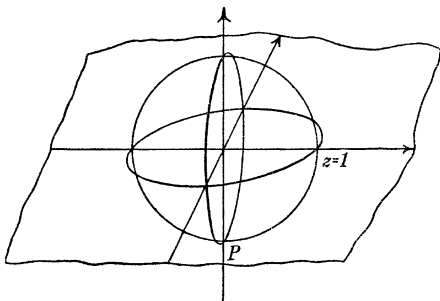


Fig. 5.

der z -Ebene auf die Oberfläche einer Kugel. Man denke die z -Ebene horizontal und lege im Raume um den Nullpunkt jener Ebene eine Kugel des Radius 1, wie Fig. 5 andeutet. Rechtwinklige Raumkoordinaten ξ, η, ζ werden so eingeführt, daß die positive ζ -Achse senkrecht nach oben weist und also die $\xi\eta$ -Ebene mit der Ebene der Va-

1) Die Größe g hat hier für die Koeffizienten der Reihe (4) unmittelbar die Bedeutung von S. 10, wobei auch der Fall $g = 0$ einbegriffen sein darf.

riabelen $z = x + iy$ zusammenfällt. In dieser Ebene soll dann einfach $\xi = x$, $\eta = y$ gelten, womit die Raumkoordinaten endgültig bestimmt sind. Als Projektionszentrum wählen wir den tiefsten Punkt P der Kugel (vgl. Fig. 5) und erzielen dadurch in der Tat ein umkehrbar eindeutiges Entsprechen der „ganzen“ z -Ebene und der Kugeloberfläche, wobei der Punkt ∞ der Ebene dem tiefsten Punkte P der Kugelfläche zugeordnet ist.

Es ist leicht, die hergestellte Beziehung durch Formeln auszudrücken. Wie eine elementare Betrachtung zeigt, liefert der Punkt (x, y) der z -Ebene den durch:

$$(5) \quad \xi = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad \xi = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$$

gegebenen Punkt der Kugelfläche, und umgekehrt ergibt der Punkt (ξ, η, ξ) dieser Fläche, für dessen Koordinaten also:

$$(6) \quad \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1$$

gilt, als zugeordneten Punkt der z -Ebene denjenigen der Koordinaten:

$$(7) \quad x = \frac{\xi}{1+\xi} \quad y = \frac{\eta}{1+\xi},$$

so daß der Punkt (ξ, η, ξ) der Kugeloberfläche als Träger des komplexen Wertes:

$$(8) \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1+\xi}$$

erscheint. Man wolle sich insbesondere mit Hilfe von Fig. 5 klarmachen, in welcher Weise die reelle z -Achse, die imaginäre z -Achse und der „Einheitskreis“ der z -Ebene¹⁾ auf der Kugeloberfläche drei zueinander orthogonale größte Kugelkreise liefern. So oft es erwünscht ist, die nur scheinbare Ausnahmestellung des unendlich fernen Punktes der z -Ebene auch anschaulich hinwegzuräumen, werden wir die Kugeloberfläche als Trägerin der Werte der komplexen Variablen z heranziehen und bezeichnen dieselbe dann kurz als die „ z -Kugel“.

Als eine Haupteigenschaft der besprochenen Beziehung notieren wir noch, daß die stereographische Projektion eine „konforme“ oder „winkel-treue Abbildung“ (im Sinne von § 7) der z -Ebene auf die z -Kugel darstellt.²⁾ Endlich nennen wir noch den Satz: Das System aller Kreise der z -Ebene, die Geraden als Kreise des Radius ∞ einbegriffen, gehen bei der Projektion gerade genau in das System aller Kreise der z -Kugel über. Das Abbild des durch die Gleichung:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

1) D. h. der Kreis des Radius 1 um den Nullpunkt als Mittelpunkt.

2) Siehe das Nähere bei Osgood, S. 235.

gegebenen Kreises wird nämlich infolge der Gleichungen (5) ff. auf der z -Kugel ausgeschnitten durch die „Ebene“:

$$B\xi + C\eta + (D - A)\xi + (D + A) = 0.$$

§ 6. Das Feld **F** einer analytischen Funktion und die singulären Punkte derselben.

In der Umgebung einer Stelle z_0 sei mittels eines „Funktionselementes“ $\mathfrak{P}(z - z_0)$ eine analytische Funktion $f(z)$ gegeben, welche von hieraus fortgesetzt werden soll. Dabei wird folgende Erklärung grundlegend: *Die gesamten Stellen z , welche bei dem eingeleiteten Prozeß der analytischen Fortsetzung in das Innere irgendeines dabei zur Verwendung kommenden Konvergenzkreises hineingezogen werden können, bilden einen zusammenhängenden Bereich, den wir als „Definitions-bereich“ oder „Existenz-bereich“ der analytischen Funktion $f(z)$ oder auch kurz als das „Feld“¹⁾ derselben benennen und im Anschluß an die letzte Benennung kurz mit **F** bezeichnen wollen.* Dieser Erklärung zufolge ist $f(z)$ über das Feld **F** hinaus nicht fortsetzbar und existiert in diesem Sinne nur im Felde **F**.²⁾ Dabei ist $f(z)$ eine eindeutige Funktion der Stelle z im Felde **F**, und es sind die gesamten Werte der Funktion $f(z)$ im Felde **F** bereits allein durch das Element $\mathfrak{P}(z - z_0)$ als „definiert“ anzusehen.

Man kann sich das Feld **F** durch Zusammenklebung der bei der analytischen Fortsetzung zur Verwendung kommenden Konvergenzkreise hergestellt denken. Dabei ist natürlich der etwaigen Mehrdeutigkeit der Funktion $f(z)$, wie in § 5 näher erörtert ist, Rechnung zu tragen: Sind in der Umgebung irgendeiner Stelle z durch Fortsetzung ν verschiedene „Zweige“ der Funktion erreichbar, so wird das Feld **F** diese Stelle mit ν „Blättern“ überdecken.

Eine erste Folgerung über das Feld **F** einer Funktion $f(z)$ ziehen wir aus dem Schlußsatze von § 4 (S. 18). Ist z_0 irgendeine Stelle in **F** und gilt für die Darstellung von $f(z)$ daselbst die Reihe $\mathfrak{P}(z - z_0)$ mit dem endlichen Konvergenzradius R , so ist es nach dem genannten Satze unmöglich, $f(z)$ über die Peripherie des fraglichen Konvergenzkreises in der Art fortzusetzen, daß auch noch ein Kreis mit einem Radius $h > R$ um den Mittelpunkt z_0 vollständig im Felde **F** läge. Es ergibt sich: *Auf der Peripherie des Konvergenzkreises jeder zur Dar-*

1) Diese wenn auch sonst mehrfach gebrauchte Benennung empfiehlt sich, weil sie kurz und bezeichnend ist.

2) Jeder Punkt des Feldes **F** ist der Erklärung gemäß ein „innerer“ Punkt desselben. Etwa auftretende Randpunkte (die wir unten betrachten) gelten also als nicht zu **F** gehörig. Doch nehmen wir späterhin gewisse, isoliert liegende Randpunkte, für welche ein Grenzwert $\lim f(z)$ existiert, zum Felde **F** hinzu.

stellung von $f(z)$ dienenden Potenzreihe findet sich mindestens eine Stelle, die dem Felde F nicht angehört.

Als zweiten Satz merken wir an: Ist $f(z)$ längs einer sich selbst nicht überkreuzenden Kurve C , welche von z_0 ausläuft und dort mündet, fortsetzbar, und gelangt man am Schlusse nicht wieder zu den Anfangswerten der Funktion zurück, so wird bei Herstellung des Feldes F in den von C umschlossenen Bereich hinein mindestens ein Punkt innerhalb C existieren, der F nicht angehört.

Der Beweis kann mit Hilfe der S. 10 und 16 (unter dem Texte) genannten „Methode der Einschachtelung“ geführt werden. Wir gehen hierbei von folgender Erwägung aus. In Fig. 6 sind C_1 und C_2 zwei geschlossene Kurven, welche ein zwischen z_1 und z_2 verlaufendes Stück gemein haben. Die Funktion $f(z)$ sei von z_0 aus über C_1 fortsetzbar und führe am Schlusse zu den Anfangswerten zurück. Ebenso sei $f(z)$, und zwar das eben bei z_1 erreichte „Element“, über C_2 fortsetzbar, und auch hier soll die Fortsetzung am Schlusse zu den bei z_1 schon gewonnenen Funktionswerten zurückführen. Stellen wir nun aus C_1 und C_2 unter Fortnahme des gemeinsamen Stückes eine neue Kurve C_3 her, so ist einleuchtend, daß $f(z)$ von z_0 aus auch über diese Kurve C_3 fortsetzbar ist, und daß die Fortsetzung zu den anfänglichen Funktionswerten zurückführt.

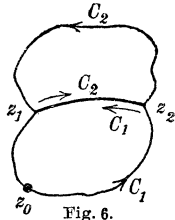


Fig. 6.

Wir überspannen nun den von der Kurve C umschlossenen Bereich mit einem Quadratnetz (vgl. Fig. 7), indem wir etwa alle in diesen Bereich fallenden Geraden der Gleichungen:

$$x = \frac{a}{10^\lambda}, \quad y = \frac{b}{10^\lambda}$$

ziehen, unter a und b ganze Zahlen und unter λ eine hinreichend groß gewählte positive ganze Zahl verstanden. Hierdurch wird jener Bereich in endlich viele Teilbereiche zerlegt. Wir beginnen jetzt mit dem

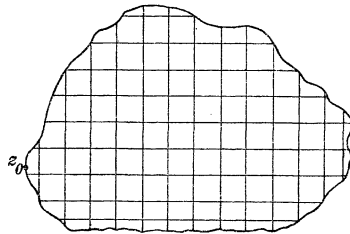


Fig. 7.

am Punkte z_0 anliegenden Teilbereiche oder, wenn es deren mehrere gibt, mit einem unter ihnen, fügen einen Nachbarbereich hinzu und behandeln die beiden Randkurven wie die Kurven C_1 und C_2 von Fig. 6. Dem vergrößerten Bereiche fügen wir einen weiteren an usw. Dann ist folgendes einleuchtend: Entweder kommen wir im Verlaufe des Prozesses zu einem Teilbereiche, über dessen Rand wir $f(z)$ nicht fortsetzen können — und dann ist der behauptete Punkt, der F nicht angehört, innerhalb C nachgewiesen —, oder wir müssen zu mindestens einem Teilbereiche kommen, bei welchem die Funktion, über den Rand

fortgesetzt, sich nicht reproduziert. Wenn nämlich kein solcher Bereich vorläge, so müßte $f(z)$, auch über C fortgesetzt, der Annahme zuwider zu den Anfangswerten zurückkehren.

Liegt der zweite Fall vor, so unterziehe man den als existierend erkannten Teilbereich einer erneuten Einteilung mittels der in ihm gelegenen Geraden:

$$x = \frac{a_1}{10^{\lambda+1}}, \quad y = \frac{b_1}{10^{\lambda+1}},$$

unter a_1 und b_1 wieder ganze Zahlen verstanden. Auf diese neue Einteilung wende man die gleiche Überlegung an und setze nötigenfalls den Prozeß in derselben Art fort. Entweder kommen wir nach endlich vielen Schritten zu einer Geraden

$$x = \frac{a_v}{10^{\lambda+v}} \quad \text{oder} \quad y = \frac{b_v}{10^{\lambda+v}},$$

auf der mindestens ein nicht zu $\mathbf{F}$ gehörender Punkt liegt, oder der Prozeß hat kein Ende. Dann gibt es eine und, da die Umfänge der ineinander geschachtelten Bereiche die Grenze 0 haben, auch nur eine Stelle z_1 , die in allen der Reihe nach herausgegriffenen Bereichen gelegen ist. Diese Stelle z_1 hat die Eigenschaft, daß wir um sie eine Kurve von *beliebiger* Kleinheit (nämlich einen Bereichrand) angeben können, die zur Fortsetzung der Funktion $f(z)$ benutzt, *nicht* zu den Anfangswerten der Funktion zurückführt. Der Punkt z_1 kann demnach nicht innerer Punkt eines bei der Fortsetzung von $f(z)$ auftretenden Konvergenzkreises sein.

Wir haben jetzt die Randpunkte, welche $\mathbf{F}$ haben kann, näher zu betrachten. Gilt von einem Punkte z , daß in *jeder* Umgebung desselben Stellen eines gewissen Blattes von $\mathbf{F}$ existieren, ohne daß z in diesem Blatte selber dem Felde $\mathbf{F}$ angehört, so heißt z ein „Randpunkt“ des Feldes $\mathbf{F}$ und wird ein „*singulärer Punkt*“ der Funktion $f(z)$ genannt.

Es soll erstlich z_0 ein isoliert liegender Randpunkt von $\mathbf{F}$ sein, in dessen Umgebung $f(z)$ übrigens allenthalben eindeutig ist. Bei Annäherung an z_0 soll $\lim f(z) = \infty$ gelten, und zwar in der Art, daß es eine bestimmte endliche ganze Zahl $m > 0$ gibt, für welche:

$$\lim_{z=z_0} (f(z) \cdot (z - z_0)^m) = c_{-m}$$

einen von 0 verschiedenen endlichen Wert darstellt. Die Funktion $f(z) \cdot (z - z_0)^m$, welche in der Umgebung von z_0 , zunächst von z_0 selbst abgesehen, eindeutig und analytisch ist, möge nun dadurch, daß wir ihr im Punkte z_0 den Wert c_{-m} erteilen, auch im Punkte z_0 analytisch bleiben und also in der Umgebung von z_0 , diesen Punkt nunmehr eingeschlossen, eine Darstellung gestatten:

$$f(z) \cdot (z - z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \dots$$

Für $f(z)$ selber folgt hieraus die Darstellung:

$$(1) \quad f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} \\ + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Einen Randpunkt dieser Art wollen wir hinfort dem Felde $\mathbf{F}$ hinzufügen, so daß $\mathbf{F}$ hieselbst geschlossen erscheint und den Funktionswert ∞ trägt; der singuläre Punkt z_0 heißt ein „Pol m^{ter} Ordnung“ der Funktion $f(z)$.

Da die in z_0 analytische Funktion $f(z) \cdot (z-z_0)^m$ daselbst nicht verschwindet, so ist der reziproke Wert von $f(z) \cdot (z-z_0)^m$ in der Umgebung von z_0 eine eindeutige analytische Funktion, die für z_0 selbst den von 0 verschiedenen Wert $c'_m = c_{-m}^{-1}$ hat und also eine Entwicklung:

$$c'_m + c'_{m+1}(z-z_0) + c'_{m+2}(z-z_0)^2 + \dots$$

gestattet. Hieraus ergibt sich weiter:

$$(2) \quad \frac{1}{f(z)} = c'_m(z-z_0)^m + c'_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + c'_{m+2}(z-z_0)^{m+2} + \dots$$

Man sagt nun, eine in der Umgebung von z_0 durch die Reihe $\mathfrak{P}(z-z_0)$ gegebene Funktion habe an der Stelle z_0 einen „Nullpunkt m^{ter} Ordnung“, wenn in $\mathfrak{P}(z-z_0)$ die m ersten Glieder durch Verschwinden der Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ ausfallen, aber c_m nicht gleich 0 ist. Nach (2) liefern somit die reziproken Werte von $f(z)$ eine Funktion, die an der Stelle z_0 einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung hat. Umgekehrt folgt aus einem Nullpunkt m^{ter} Ordnung einer Funktion an der gleichen Stelle ein Pol dieser Ordnung für die reziproken Werte der Funktion.

Die vorstehende Betrachtung bedarf einer nur formalen Ergänzung für den Fall, daß z_0 nicht endlich ist, d. h. den Punkt ∞ der z -Ebene bedeutet. Mittels der Transformation (2) S. 21 hat man alsdann diesen Punkt und seine Umgebung in den Nullpunkt der z' -Ebene und dessen Umgebung überzuführen. Für z' und $z'_0 = 0$ an Stelle von z und z_0 gelten dann die vorstehenden Rechnungen unmittelbar. Will man die Variable z beibehalten, so läuft dies darauf hinaus, daß in den Formeln (1) und (2) an Stelle der Potenzen von $(z-z_0)$ die gleichen Potenzen von $\frac{1}{z}$ auftreten. So wird z. B. die Funktion $f(z)$ im Punkte ∞ einen Pol m^{ter} Ordnung haben, wenn daselbst eine Entwicklung:

$$(3) \quad f(z) = c_{-m}z^m + c_{-m+1}z^{m-1} + \dots + c_{-1}z + c_0 + c_1\frac{1}{z} + c_2\frac{1}{z^2} + \dots$$

mit nicht verschwindendem c_{-m} gilt.

Es soll jetzt zweitens z_0 ein isoliert liegender Randpunkt des Feldes $\mathbf{F}$ von der Art sein, daß die Fortsetzung von $f(z)$ längs einer einmal den Punkt z_0 umlaufenden Kurve nicht zu den Anfangswerten

der Funktion zurückführt. Dagegen soll die Fortsetzung längs einer Kurve, welche ν Male um z_0 herumläuft, die ursprünglichen Funktionswerte reproduzieren; dabei sei ν eine endliche ganze Zahl, die größer als 1 ist, und es soll sich $f(z)$ nicht bereits nach einer geringeren Anzahl von Umläufen reproduzieren.

Ein Beispiel einer solchen Funktion ist $\sqrt[\nu]{z - z_0}$; wir schreiben dieselbe, unter Einführung der Polardarstellung $z - z_0 = r e^{j\vartheta}$ für die komplexen Werte z , in der Gestalt:

$$(4) \quad z' = \sqrt[\nu]{z - z_0} = \sqrt[\nu]{r} \cdot e^{\frac{1}{\nu} j\vartheta}.$$

Das Feld dieser Funktion hat in der Nähe von z_0 die bekannte Gestalt einer „ ν -blättrigen Windungsfläche“, wie dieselbe für $\nu = 2$ durch die Skizze der Fig. 8 dargestellt ist. Die Blätter der Windungsfläche gehen ineinander über, wie bei einer Schraubenfläche mit verschwindender Ganghöhe; doch dringt das oberste Blatt längs eines in z_0 mündenden „Verzweigungsschnittes“ durch die darunterliegenden Blätter hindurch und führt zum untersten Blatte zurück. Für den umlaufenden Punkt z gilt dabei das oberste Blatt im Verzweigungsschnitt als allein mit dem untersten zusammenhängend. Der Punkt z_0 (der einstweilendem Felde noch nicht angehört) heißt ein „ ν -blättriger Verzweigungspunkt“.

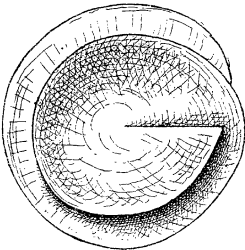


Fig. 8.

Grundlegend ist nunmehr, daß die Windungsfläche durch die Transformation (4) auf die einblättrige oder, wie wir sagen wollen, „schlichte“ Umgebung des Nullpunktes der z' -Ebene übertragen wird. In der Tat gilt ja, wenn wir $z' = r' e^{j\vartheta'}$ schreiben, offenbar $\vartheta' = \frac{\vartheta}{\nu}$, so daß ein einmaliger Umlauf um z_0 nur erst ein Wachstum von ϑ' um $\frac{2\pi}{\nu}$ zur Folge hat. Fügen wir dem gewonnenen Abbilde der Windungsfläche jetzt auch den Nullpunkt $z' = 0$ zu, so erscheint dasselbe hier geschlossen. Entsprechend können wir der Windungsfläche selbst den Verzweigungspunkt z_0 hinzufügen, in dem alsdann alle ν Blätter aneinander haften. Die Fläche schließt sich dann im Punkte z_0 , der fortan keinen isolierten Randpunkt der Windungsfläche mehr abgibt.

Die Windungsfläche ist nun, freilich erst ohne den Verzweigungspunkt z_0 selbst, ein Bestandteil des Feldes **F** unserer anfänglich vorgelegten Funktion $f(z)$. Es ist zu entscheiden, ob wir auch dem Felde **F** den isolierten Randpunkt z_0 zufügen und dasselbe so bei z_0 schließen dürfen. Wir gehen mittelst der Transformation (4) zur Funktion über:

$$f(z) = f(z_0 + z'^\nu) = \bar{f}(z')$$

und erkennen, daß $\bar{f}(z')$ in der Umgebung des Nullpunktes $z' = 0$, abgesehen zunächst von diesem selbst, eine eindeutige analytische Funktion ist. Hat sie im Nullpunkte einen Grenzwert, der auch ∞ sein kann, und wird durch Hinzunahme des Grenzwertes als Funktionswert $\bar{f}(0)$ die Funktion $\bar{f}(z')$ auch im Nullpunkte analytisch bzw. gewinnt sie daselbst einen Pol m^{ter} Ordnung, so wollen wir auch den Verzweigungspunkt z_0 dem Felde **F** der Funktion $f(z)$ hinzufügen und $f(z_0) = \bar{f}(0)$ als Funktionswert daselbst festsetzen. Wir nennen in diesem Falle die nun zum Felde **F** gehörige Stelle einen „ ν -blättrigen Verzweigungspunkt der Funktion $f(z)$ “. Somit wird, falls $f(z)$ im Verzweigungspunkte endlich bleibt, in der Umgebung desselben eine Darstellung:

$$(5) \quad f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} + c_2(z - z_0)^{\frac{2}{\nu}} + c_3(z - z_0)^{\frac{3}{\nu}} + \dots$$

gelten, die jedoch, sofern ein Pol m^{ter} Ordnung in z_0 vorliegt, durch die folgende zu ersetzen ist:

$$(6) \quad f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-\frac{m}{\nu}} + c_{-m+1}(z - z_0)^{-\frac{m-1}{\nu}} + \dots + c_0 + c_1(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} + \dots$$

Hinzuzusetzen ist hier nur noch, daß an Stelle eines endlichen Punktes z_0 auch der Punkt ∞ der z -Ebene oder z -Kugel treten kann. Die einzige Änderung ist dann (wie S. 27) wieder die, daß in den vorstehenden Potenzentwicklungen z^{-1} an Stelle von $(z - z_0)$ tritt.

Die endlichblättrigen Verzweigungspunkte und die Pole fassen wir unter der Benennung der „*außerwesentlich*“ *singulären Punkte* der Funktion $f(z)$ zusammen. Diese Punkte gelten, wie festgesetzt, fortan dem Felde **F** als zugehörig. *Das den Stellen von F eindeutig zugeordnete System aller Werte von $f(z)$ faßt man alsdann unter dem Namen eines „analytischen Gebildes“ zusammen.*

Jeder darüber hinaus etwa noch vorkommende singuläre Punkt von $f(z)$ (nicht zu **F** gehörender Randpunkt) heißt ein „*wesentlich*“ *singulärer Punkt*. In einem solchen Punkte erteilen wir der Funktion $f(z)$ im allgemeinen keinen Wert; doch soll damit keineswegs behauptet sein, daß nicht bei *speziell* gewählten Annäherungen an einen wesentlich singulären Punkt die Funktion einen bestimmten Grenzwert haben könne.

Die bisher bekannt gewordenen analytischen Gebilde haben zu einer großen Mannigfaltigkeit verschiedenartiger Gestalten der Felder **F** hingeführt. Zahlreiche Beispiele einfacher Art werden wir weiterhin kennen lernen. Auch einige nicht mehr elementare Fälle, von denen jedoch nur der erste unten wieder auftritt, seien hier beiläufig genannt. Die „*elliptischen Modulfunktionen*“ liefern Beispiele von analytischen Gebilden, bei

denen im Einzelfalle das Feld $\mathbf{F}$ aus den gesamten Innenpunkten einer schlichten (einblättrigen) Kreisfläche besteht. Die Peripherie dieses Kreises selber muß also überall dicht von wesentlich singulären Stellen besetzt sein; man bezeichnet sie dieserhalb als eine „natürliche Grenze“ der Funktion. Die elliptischen Modulfunktionen stellen eine besondere Art eindeutiger „automorpher Funktionen“ dar. Bei einer solchen Funktion ist das Feld $\mathbf{F}$ wieder ein schlichter Bereich der z -Ebene, der insbesondere (d. h. bei gewissen Arten automorpher Funktionen) wieder nur einen endlichen Teil der z -Ebene bedecken kann und dann als Rand die „natürliche Grenze“ der Funktion besitzt. Dabei zeigt die nähere Untersuchung, daß in einem solchen Falle das Feld $\mathbf{F}$ entweder einfach oder (wenn dieses nicht der Fall ist) sogleich ∞ -fach zusammenhängend ist. Was aber die Gestalt des einzelnen geschlossenen Randstückes angeht, so zeigt sich, daß dasselbe entweder ein Kreis ist oder aber (wenn dies nicht der Fall ist) ein zusammenhängendes Punktsystem von äußerst komplizierter Struktur darstellt, das jedenfalls nirgends den Charakter einer „regulären Kurve“ besitzt.¹⁾ Auch für Felder $\mathbf{F}$, welche die z -Kugel ∞ -fach überlagern, bietet die Theorie der automorphen Funktionen in den zu diesen Funktionen inversen sogenannten „polymorphen Funktionen“ interessante Beispiele.

§ 7. Von den durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen.

Es sei durch $w = f(z)$ ein analytisches Gebilde mit dem Felde $\mathbf{F}$ vorgelegt. Wie oben (S. 1 ff.) schreibe man unter Trennung des reellen und imaginären Bestandteiles $w = u + iv$ und lege für die Deutung der komplexen Werte $w = u + iv$ eine neue Ebene oder Kugel zugrunde. Der einzelnen Stelle z des Feldes $\mathbf{F}$ entspricht dann eindeutig ein Punkt w als „Bild“ jener Stelle z . Das hierbei eintretende „Abbild“ des gesamten Feldes $\mathbf{F}$ soll näher betrachtet werden. Es ist hierbei schrittweise vorzugehen: Zuvörderst ist der Charakter der fraglichen Abbildung im Unendlichkleinen festzustellen, sodann in der Umgebung einzelner Stellen z_0 , endlich aber das volle Abbild von $\mathbf{F}$ ins Auge zu fassen.

Es sei erstlich z_0 eine nicht-singuläre Stelle in $\mathbf{F}$, und es werde angenommen, daß die Ableitung $f'(z)$ im Punkte z_0 nicht verschwinde.²⁾ Setzen wir:

$$|f'(z_0)| = M, \quad f''(z_0) = M \cdot e^{\mu i},$$

1) Diese Gegenstände sind ausführlich erörtert in den „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“ von F. Klein und R. Fricke, 2 Bde. (Leipzig, 1897 und 1912).

2) Nach der ursprünglichen Erklärung würde $f(z)$ auch dann eine analytische Funktion sein, wenn $f(z)$ für alle z einen und denselben endlichen Wert c_0 hat;

so ist also $M > 0$ und endlich. Schreiben wir $dz = |dz| \cdot e^{ji}$, so entspricht dem Fortschritt von z_0 zu $(z_0 + dz)$ die Änderung des Funktionswertes $w_0 = f(z_0)$ um:

$$dw = f'(z_0)dz = M \cdot |dz| \cdot e^{(\mu + j\nu)i}.$$

Hieraus folgt, daß zwei Differentialen dz_1, dz_2 , die wir als Bogenelemente von z_0 aus gezeichnet denken können, stets von w_0 aus zwei Bogenelemente dw_1, dw_2 liefern, die ihren Beträgen nach den Beträgen von dz_1, dz_2 proportional sind, und die miteinander denselben Winkel bilden, wie dz_1 und dz_2 . Auch ist, wenn wir uns dz um z_0 sich drehend vorstellen, der Drehungssinn des Abbildes dw um w_0 der gleiche. Wir gelangen so zu dem bekannten Charakter der „konformen“ oder „winkeltreuen“ Abbildung: *Ist im nicht-singulären Punkt z_0 die Ableitung $f'(z_0)$ nicht gleich 0, so übertragen sich die Winkel des Scheitelpunktes z_0 auf Winkel gleicher Größe und gleichen Drehungssinnes mit dem Scheitelpunkte w_0 ; die durch z_0 gelegten Bogendifferentiale $|dz|$ liefern proportionale Differentiale $|dw| = M|dz|$, wobei $M = |f'(z_0)|$ als „Modul“ oder „Vergrößerungsverhältnis“ der Abbildung bezeichnet wird.* Als unmittelbare Folgerung (die sogleich zur Verwendung kommt) setzen wir hinzu: Eine durch z_0 ziehende reguläre Kurve überträgt sich auf eine Kurve der w -Ebene, die durch den Punkt w_0 hindurchläuft und dabei in w_0 eine bestimmte Tangente hat.

Gehen wir jetzt sogleich zur Untersuchung der Abbildung in der Umgebung der gedachten Stelle z_0 ! Es erleichtert die Rechnungen, ohne daß eine wesentliche Beschränkung in der Gültigkeit des Ergebnisses eintritt, wenn wir $z_0 = 0, w_0 = 0$ und $f'(z_0) = 1$ setzen.

Dann gilt:

$$(1) \quad w = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots = z \cdot \mathfrak{P}(z),$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes konvergiert und $\mathfrak{P}(0) = 1$ ist. Sind z_1, z_2 irgend zwei Punkte derselben Umgebung, so wird auch die unendliche Reihe:

$$(2) \quad \mathfrak{P}'(z_1, z_2) = 1 + c_2(z_1 + z_2) + c_3(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + \dots \\ \dots + c_{n+1}(z_1^n + z_1^{n-1} z_2 + z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + z_2^n) + \dots$$

$f'(z)$ hat dann überall den bestimmten Wert 0, die Reihendarstellung von $f(z)$ reduziert sich stets auf das Anfangsglied c_0 , das Feld $\mathbf{F}$ der Funktion ist die schlichte z -Kugel usw. Indessen verlieren viele von den vorangehenden Entwicklungen ihre Bedeutung für den fraglichen Fall, in dem Pole und Verzweigungspunkte nicht auftreten. Bei den jetzt anzustellenden Untersuchungen ist durch die in den einzelnen Teilen der Betrachtung zu formulierenden Voraussetzungen der Fall einer mit einer Konstanten identischen Funktion von vornherein ausgeschlossen.

gleichmäßig konvergent und damit ihr Summenwert $\mathfrak{P}'(z_1, z_2)$ stetig von z_1 und z_2 abhängig sein. Offenbar gilt:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \mathfrak{P}'(z, z), \quad \mathfrak{P}'(0, 0) = 1.$$

Wegen der letzten Gleichung und $\mathfrak{P}(0) = 1$, sowie mit Rücksicht auf die Stetigkeit von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ können wir eine durch $|z| < h$ näher bezeichnete Umgebung des Nullpunktes derart einführen, daß für jeden Punkt z und jedes Punktepaar z_1, z_2 dieser Umgebung die Ungleichungen gelten:

$$|1 - \mathfrak{P}(z)| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |1 - \mathfrak{P}'(z_1, z_2)| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(3) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < |\mathfrak{P}(z)| < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < |\mathfrak{P}'(z_1, z_2)| < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

sowie, wenn wir:

$$\mathfrak{P}(z) = \varrho e^{\eta i}$$

setzen, für $\mathfrak{P}(z)$ insbesondere:

$$(4) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \varrho < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \eta < +\frac{\pi}{4}.$$

Es gilt nun erstlich der Satz: *In der erklärten Umgebung des Nullpunktes können keine zwei verschiedenen Punkte z_1, z_2 den gleichen Funktionswert w liefern.* Es ist nämlich:

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) \cdot \mathfrak{P}'(z_1, z_2)$$

wegen (3) nur dann gleich 0, wenn $z_1 = z_2$ ist.

Wir denken jetzt, indem wir $z = re^{\vartheta i}$ setzen, um den Nullpunkt der z -Ebene alle konzentrischen Kreise K_r der Radien $r < h$ gelegt und wollen dieselben auf die w -Ebene abbilden. Das Abbild des Kreises K_r heiße C_r . Wir setzen:

$$w = Re^{\theta i}, \quad \text{wo also: } R = r\varrho, \quad \theta = \vartheta + \eta$$

zutrifft (s. Gleichung (1)). Längs der Kurve C_r gilt also zufolge (4):

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)r < R < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)r,$$

während andererseits θ beim Beschreiben der Kurve C_r (entsprechend dem Wachstum des Winkels ϑ von 0 bis 2π bei einem im Intervall (4) veränderlichen η) eine stetige Änderung um den Gesamtbetrag 2π erfährt. Selbstverständlich ist C_r wie das Original K_r eine geschlossene Kurve.

Aus diesen Darlegungen ergibt sich, daß die Kurve C_r um den Nullpunkt der w -Ebene herumläuft und dabei von diesem Punkte stets

eine Entfernung $> \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)r$ hat. Die Kurve C_r kann sich nicht selbst schneiden; denn wir würden in diesem Falle zwei verschiedene Punkte z_1, z_2 mit dem gleichen w finden. Auch zeigt der Charakter der Abbildung im Unendlichkleinen, daß C_r nirgends eine Spitze haben kann und überall eine eindeutig bestimmte Tangente besitzt, deren Richtung sich längs C_r stetig ändert; denn $f'(z)$ ist längs K_r eindeutig und stetig, und es gilt daselbst überall:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < |f'(z)| < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Das Abbild C_r des Kreises K_r ist somit eine den Punkt $w = 0$ als „inneren“ Punkt umlaufende, sich nicht selbst schneidende, spitzenfreie und „eckenfreie“ reguläre Kurve.

Man betrachte nun zwei Kreise $K_r, K_{r'}$, mit $r' > r$. Die beiden Abbilder C_r und $C_{r'}$ haben dann keinen Punkt gemein, da man ja sonst wieder zwei verschiedene z_1, z_2 mit dem gleichen w nachweisen würde. Auch umgibt $C_{r'}$ die Kurve C_r notwendig außerhalb, wie man durch Einführung der Geraden durch den Nullpunkt der z -Ebene und durch deren Übertragung auf die w -Ebene unter Rücksicht auf die bisherigen Ergebnisse leicht streng nachweist.

Man setze nun, unter n irgendeine fest gewählte positive ganze Zahl verstanden:

$$r_0 = 0, \quad r_1 = \frac{h}{n}, \quad r_2 = \frac{2h}{n}, \quad \dots, \quad r_{n-1} = \frac{(n-1)h}{n}$$

und denke die n zugehörigen Kurven C_r gezeichnet, wobei die erste sich auf den Nullpunkt zusammenziehende Kurve C_{r_0} als solche mitgezählt ist. Das einzelne Intervall von r_v bis r_{v+1} teile man demnächst wieder in n gleiche Teilintervalle und denke für die $(n-1)$ Teilpunkte r die zugehörigen Kurven C_r gezeichnet. Indem man so fortfährt, ist nur noch die Stetigkeit der Abbildung heranzuziehen, um zum Schlusse zu gelangen.

Wir dürfen an Stelle des Nullpunktes sogleich einen beliebigen, endlichen und nichtsingulären Punkt z_0 des Feldes $\mathbf{F}$ mit dem Funktionswerte $w_0 = f(z_0)$ heranziehen, sofern nur $f'(z_0)$ einen nichtverschwindenden Wert hat: *Die Umgebung einer endlichen, nichtsingulären Stelle z_0 von $\mathbf{F}$ mit dem Funktionswerte $w_0 = f(z_0)$ wird, falls die Ableitung daselbst einen nichtverschwindenden Wert $f'(z_0)$ besitzt, durch die analytische Funktion $w = f(z)$ konform auf einen den Bildpunkt w_0 als „inneren“ Punkt umgebenden „schlichten“ Bereich der w -Ebene abgebildet.*

Eine Folgerung, die jetzt zwar selbstverständlich ist, aber grundsätzliche Bedeutung besitzt, beruht auf der Erwägung, daß durch die

gewonnene Beziehung die Umgebung der Stelle w_0 eindeutig, stetig und konform auf einen den Punkt z_0 als inneren Punkt umgebenden Bereich der z -Ebene rückwärts übertragen wird. Bezeichnet man diese Zuordnung von Werten z zu den Werten w in der Umgebung von w_0 durch $z = \varphi(w)$, so ist hiermit eine Funktion $\varphi(w)$ gewonnen, welche in jedem Punkte w der fraglichen Umgebung eine eindeutig bestimmte, von der Richtung der Differentiation unabhängige Ableitung $\varphi'(w)$ besitzt; denn es ist $\varphi'(w) = (f'(z))^{-1}$, falls z die dem w zugeordnete Stelle ist: Ist z_0 eine im Endlichen gelegene, nichtsinguläre Stelle der Funktion $f(z)$ mit dem Funktionswerte w_0 , und ist $|f'(z_0)| > 0$, so ist für die Umgebung der Stelle z_0 die Inversion der Funktion $w = f(z)$ möglich und führt zu einer analytischen Funktion $z = \varphi(w)$, für welche der Punkt w_0 nicht singulär ist.

Es soll jetzt angenommen werden, daß in dem endlichen, nicht-singulären Punkte z_0 die ersten $(\nu - 1)$ Ableitungen der Funktion $f(z)$ verschwinden, während $f^{(\nu)}(z_0)$ den von Null verschiedenen endlichen Wert $c_\nu \cdot \nu!$ hat; natürlich soll $\nu > 1$ sein. Ist $f(z_0) = w_0$, so gilt in der Umgebung von z_0 eine Darstellung:

$$\begin{aligned} w - w_0 &= (z - z_0)^\nu (c_\nu + c_{\nu+1}(z - z_0) + c_{\nu+2}(z - z_0)^2 + \cdots) \\ &= (z - z_0)^\nu \mathfrak{P}(z - z_0). \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{P}(0) = c_\nu$ von 0 verschieden ist, so können wir im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z - z_0)$ eine Umgebung von z_0 eingrenzen, in der $\mathfrak{P}(z - z_0)$ überall von 0 verschieden und selbstverständlich endlich ist. Man wähle nun unter den ν Werten von $\sqrt[\nu]{c_\nu}$ einen einzelnen beliebig aus und nenne denselben c'_1 . Dann ist, wenn wir vorschreiben, daß $\sqrt[\nu]{\mathfrak{P}(z - z_0)}$ im Punkte z_0 den Wert c'_1 annehmen soll, durch diese Wurzel $\sqrt[\nu]{\mathfrak{P}(z - z_0)}$ eine im eingegrenzten Bereiche eindeutige analytische Funktion gegeben¹⁾, deren Reihendarstellung diese sei:

$$\sqrt[\nu]{\mathfrak{P}(z - z_0)} = c'_1 + c'_2(z - z_0) + c'_3(z - z_0)^2 + \cdots$$

Es ist hierdurch zugleich:

$$w' = (w - w_0)^{\frac{1}{\nu}} = (z - z_0)(c'_1 + c'_2(z - z_0) + c'_3(z - z_0)^2 + \cdots)$$

in der Umgebung von z_0 eindeutig erklärt.

Auf die hier vorliegende Gleichung ist nun die Überlegung anwendbar, welche oben an (1) S. 31 angeschlossen wurde. Die Umgebung von z_0 überträgt sich auf einen schlichten Bereich um den

1) Siehe hierzu die an Gleichung (4) S. 28 sowie die unten S. 76 ff. folgenden Entwicklungen.

Nullpunkt der w' -Ebene. Indem wir sodann aber auf die Darlegungen von S. 28 zurückgreifen, gewinnen wir den Satz: *Die Umgebung einer endlichen nichtsingulären Stelle z_0 , in welcher $f'(z)$, $f''(z)$, $\dots$, $f^{(v-1)}(z)$ verschwinden, während $|f^{(v)}(z_0)| > 0$ ist, wird durch die Funktion $w = f(z)$ auf eine ν -blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte w_0 abgebildet, wobei die Inversion unserer Funktion die für die Umgebung eines Verzweigungspunktes charakteristische Entwicklung (5) S. 29 liefert:*

$$(z - z_0) = c_1''(w - w_0)^{\frac{1}{\nu}} + c_2''(w - w_0)^{\frac{2}{\nu}} + c_3''(w - w_0)^{\frac{3}{\nu}} + \dots$$

Bei der vorstehenden Betrachtung wurde die Umgebung von z_0 auf einen den Nullpunkt der w' -Ebene umgebenden Bereich durchaus konform abgebildet. Die Entwicklungen von S. 28 zeigen aber, daß beim Fortgang von der w' -Ebene zur w -Ebene eine Unterbrechung der Winkeltreue der Abbildung in dem dem Nullpunkte $w' = 0$ entsprechenden Punkte w_0 eintritt. Indem wir sofort zur Beziehung zwischen z und w zurückkehren, haben wir den Satz zu notieren: *Im Punkte z_0 , dessen Umgebung bei der Abbildung durch $w = f(z)$ eine ν -blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte w_0 lieferte, ist die Konformität der Abbildung in der Art unterbrochen, daß sich Winkel des Scheitelpunktes z_0 auf Winkel ν -facher Größe des Scheitelpunktes w_0 übertragen.*

Für die singulären Punkte im Felde $\mathbf{F}$ und die Stelle ∞ ist die Betrachtung mit Hilfe der bisherigen Methoden leicht durchgeführt. In der Umgebung eines ν -blättrigen Verzweigungspunktes z_0 hat $\mathbf{F}$ die Gestalt einer ν -blättrigen Windungsfläche. Liegt z_0 im Endlichen und findet sich daselbst nicht zugleich ein Pol von $f(z)$, so gilt die Reihendarstellung (5) S. 29. Ist c_1 von 0 verschieden, so überträgt sich die ν -blättrige Umgebung von z_0 auf einen schlichten, den Punkt $w = c_0$ umgebenden Bereich der w -Ebene. Ist aber c_m mit $m > 1$ der erste nichtverschwindende unter den Koeffizienten $c_1, c_2, \dots$, so gewinnen wir als Abbild eine m -blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkt $w = c_0$. So oft $m \geq \nu$ ist, tritt im Punkte $w = c_0$ eine leicht näher angebbare Unterbrechung der Konformität der Abbildung ein. Ferner gilt der Satz: Hat $w = f(z)$ im endlichen Punkte z_0 einen Pol m^{ter} Ordnung, und ist z_0 nicht zugleich ein Verzweigungspunkt (vgl. Gleichung (1) S. 27), so wird die Umgebung von z_0 , falls $m = 1$ ist, auf einen schlichten Bereich um die Stelle ∞ der w -Kugel abgebildet, falls $m > 1$ ist, aber auf eine m -blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkt ∞ und mit Unterbrechung der Konformität daselbst. Auch den Zusammenfall eines Poles mit einem Verzweigungspunkte wird man leicht erledigen, ebenso die besondere Lage des Punktes z_0 als Punkt ∞ der z -Kugel, wo im einfachsten Falle, d. h. wenn die

Stelle ∞ weder Pol noch Verzweigungspunkt von $f(z)$ ist, die Entwicklung (4) S. 22 gilt.

Wir gelangen zum Schluß, indem wir noch einen Blick auf das Gesamtfeld $\mathbf{F}$ der Funktion $w = f(z)$ werfen: *Durch die Funktion $w = f(z)$ wird das Feld $\mathbf{F}$ derselben auf einen die w -Ebene oder w -Kugel überlagernden Bereich $\mathbf{F}'$ eindeutig abgebildet, welcher das Feld der zu $w = f(z)$ inversen analytischen Funktion $z = \varphi(w)$ ist. Die Abbildung ist im allgemeinen eine konforme; eine Unterbrechung der Konformität tritt nur ein in Verzweigungspunkten, wobei jedoch auch hier die Abbildung konform bleibt, wenn ein ν -blättriger Verzweigungspunkt des einen Feldes im andern wieder einen Verzweigungspunkt der gleichen Blätterzahl liefert.* Gegenüber diesen Angaben könnte nur noch das Bedenken geltend gemacht werden, ob nicht etwa die Funktion $z = \varphi(w)$ über das Abbild $\mathbf{F}'$ des Feldes $\mathbf{F}$ hinaus fortsetzbar sein möchte, so daß dann $\mathbf{F}'$ zwar ein Bestandteil des Feldes von $\varphi(w)$ wäre, aber dies Feld nicht völlig erschöpfte. Doch würde in diesem Falle die Abbildung des wahren Feldes von $\varphi(w)$ auf die z -Ebene ein notwendig über $\mathbf{F}$ hinausreichendes Feld von $f(z)$ liefern; das Bedenken ist also abzuweisen.

§ 8. Begriff des Residuums und Sätze über Residuen.

Um einen Punkt z_0 im Innern des Feldes der Funktion $f(z)$ beschreibe man *innerhalb* des Konvergenzkreises der zugehörigen Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ eine geschlossene Kurve C , die einmal um z_0 herumlaufen soll, wenn es sich um einen gewöhnlichen Punkt handelt, dagegen ν Male, falls z_0 ein ν -blättriger Verzweigungspunkt ist. Man berechne das zugehörige Integral:

$$(1) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} f(\xi) d\xi,$$

genommen über die Kurve C im positiven Umlaufsinn.¹⁾ Zufolge des Cauchyschen Integralsatzes (S. 4) ist der Integralwert (1) von der besonderen Auswahl der Kurve C innerhalb des Konvergenzkreises der Potenzreihe unabhängig.²⁾ Der Integralwert (1) ist somit für die

1) Man hat also nach S. 5 u. f. die Kurve C in der Richtung zu durchlaufen, bei welcher man den von C umschlossenen, z_0 enthaltenden Bereich zur linken Hand hat. Ist z_0 die Stelle ∞ , so wolle man sich die Verhältnisse auf der z -Kugel vorstellen.

2) Um im Falle eines ν -blättrigen Verzweigungspunktes den Cauchyschen Integralsatz in seiner ursprünglichen Gestalt (S. 4 ff.) anwenden zu können, wolle man die Betrachtung mittelst der Transformation (4) S. 28 in die z' -Ebene verlegen oder auf die unten (S. 38) folgende Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes für mehrblättrige Bereiche Bezug nehmen.

Funktion $f(z)$ und die Stelle z_0 eindeutig bestimmt und heißt das „Residuum“ der Funktion $f(z)$ im Punkte z_0 .

Aus der gliedweise integrierbaren Potenzreihenentwicklung kann man in jedem Falle das Residuum leicht berechnen.¹⁾ Es ergibt sich: Ist z_0 kein Verzweigungspunkt, so ist das Residuum für jeden endlichen, nicht-singulären Punkt gleich 0, für einen Pol gleich dem Koeffizienten c_{-1} der Potenz $(z - z_0)^{-1}$ in der betreffenden Entwicklung (1) S. 27 und schließlich für die Stelle ∞ gleich $-c_1$, wo c_1 der Koeffizient von z^{-1} in der zugehörigen Entwicklung (3) S. 27 ist. Weiter aber findet man: Ist z_0 ein ν -blättriger Verzweigungspunkt, so ist das Residuum von $f(z)$ wiederum 0, falls z_0 im Endlichen liegt und nicht zugleich ein Pol von $f(z)$ ist; ist aber die im Endlichen liegende Stelle z_0 zugleich ein Pol von $f(z)$, wo alsdann die Entwicklung (6) S. 29 gilt, so ist das Residuum gleich $\nu c_{-\nu}$; handelt es sich schließlich um die Stelle $z_0 = \infty$ mit der Reihendarstellung:

$$f(z) = c_{-m} z^{\frac{m}{\nu}} + c_{-m+1} z^{\frac{m-1}{\nu}} + \cdots + c_0 + c_1 z^{\frac{1}{\nu}} + c_2 z^{\frac{2}{\nu}} + \cdots,$$

welche die Möglichkeit eines Poles gleich mit umfaßt, so ist das Residuum von $f(z)$ gleich $-\nu c_{\nu}$. Von 0 verschiedene Residuen kommen der Funktion $f(z)$ hiernach allein für Pole im Endlichen und für die etwa im Felde **F** liegenden Stellen ∞ zu.

Es sei nun **T** irgendein in **F** gelegener Bereich, der sich auch über sich selbst hinüberziehen darf, aber allerdings die z -Ebene nirgends ∞ -fach bedecken soll. Der Rand C von **T** bestehe aus endlich vielen regulären Kurven, von denen keine durch einen Pol von $f(z)$ oder eine Stelle ∞ hindurchlaufen soll, und die, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, auch die etwaigen Verzweigungspunkte vermeiden mögen. Die nächsten Umgebungen der in **T** gelegenen Pole, Verzweigungspunkte und Stellen ∞ ²⁾ wollen wir mittelst kleiner, die betreffenden Punkte umlaufenden Kurven $C_1, C_2, \dots$ ausschneiden³⁾ und

1) Diese Rechnungen beruhen auf den Formeln:

$$\int_{(C)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2i\pi, \quad \int_{(C)} (\zeta - z_0)^n d\zeta = 0 \quad \text{für } n \geq 1,$$

welche man bei Gebrauch eines Kreises C um z_0 unter Einführung von Polarkoordinaten $\zeta - z_0 = r e^{i\theta}$ leicht beweist und auch für den Fall eines ν -blättrigen Verzweigungspunktes z_0 ohne Mühe verallgemeinert.

2) Die Sprechweise schließt sich an die Vorstellungen auf der z -Kugel an, Punkte ∞ können nur in endlicher Anzahl dem Bereiche **T** angehören, da dieser überhaupt keine Stelle z unendlich-blättrig bedecken sollte.

3) Man beachte, daß die Anzahl der singulären Punkte von $f(z)$ in **T** nur endlich sein kann. Würden sich z. B. in **T** unendlich viele Pole finden, so würden wir (auf der z -Kugel) in **T** nach der „Methode der Einschachtelung“ min-

dem Bereiche $\mathbf{T}$ fortnehmen; der Restbereich heiße $\mathbf{T}'$, er wird durch $C, C_1, C_2, \dots$ berandet.

Im so vorbereiteten, ganz im Endlichen gelegenen Bereiche $\mathbf{T}'$, unter Einschluß des Randes, ist nun $f(z)$ überall analytisch, so daß der Cauchysche Integralsatz (4) S. 6 die Gleichung ergibt:

$$(2) \quad \int_{(C)} f(\xi) d\xi + \int_{(C_1)} f(\xi) d\xi + \int_{(C_2)} f(\xi) d\xi + \dots = 0.$$

Der Integralsatz bezog sich oben allerdings nur erst auf Bereiche, die keinen Teil der z -Ebene mehrfach bedecken. Aber wir können $\mathbf{T}'$ durch eine Anzahl von Querschnitten immer in endlich viele Teilbereiche zerlegen, die einzeln genommen keinen Teil der z -Ebene mehrfach bedecken. Bei Addition der auf diese Teilbereiche bezogenen Formeln (4) S. 6 werden sich dann die jeweils längs der beiden Ufer des einzelnen Querschnittes erstreckten Integrale aufheben, so daß die eben angegebene Gleichung (2) für $\mathbf{T}'$ als richtig erkannt wird.

Mit Rücksicht auf die jetzt vorliegende Durchlaufungsrichtung der Kurven $C_1, C_2, \dots$ erkennen wir in den betreffenden Integralen in (2) die mit $-2i\pi$ multiplizierten zugehörigen Residuen von $f(z)$. Indem wir diese Glieder der Gleichung (2) transponieren, entspringt der Satz: *Das über den Rand C des Bereiches $\mathbf{T}$ im positiven Umlaufungssinne genommene Integral:*

$$(3) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} f(\xi) d\xi$$

ist gleich der Summe der Residuen von $f(z)$ für alle in $\mathbf{T}$ gelegenen Pole und Stellen ∞ .

Im Anschluß an die S. 27 eingeführte Sprechweise sagt man, die Funktion $f(z)$ habe in einem ν -blättrigen Verzweigungspunkte z_0 , der zunächst im Endlichen liege, einen „Nullpunkt m^{ter} Ordnung“, wenn in der zugehörigen Entwicklung (5) S. 29 das Absolutglied c_0 verschwindet und der erste nicht-verschwindende Koeffizient c_m ist. Liegt ein Pol und damit die Entwicklung (6) S. 29 vor, in der c_{-m} nicht gleich 0 sein soll, so hat $f(z)$ im Verzweigungspunkte einen „Pol m^{ter} Ordnung“. Für einen in einer Stelle ∞ gelegenen Verzweigungspunkt überträgt man diese Ausdrucksweise leicht; z. B. wird $f(z)$ hier einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung haben, falls das erste wirklich auftretende Glied der zugehörigen Reihenentwicklung $c_m z^{-\frac{m}{\nu}}$ mit $m > 0$ ist.

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: Als „logarithmisches Residuum“ einer Stelle z_0 bezeichnet man die Zahl $\frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} f(z) dz$, die man erhält, wenn man die Entwicklung von $f(z)$ in der Umgebung von z_0 in der Form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ entwickelt und die Summe der Residuen von $f(z)$ in den Bereichen $\mathbf{T}'$ berechnet. Diese Stelle müßte aber für $f(z)$ wesentlich singulär sein (s. S. 31 ff.), was innerhalb $\mathbf{F}$ ausgeschlossen ist.

siduum“ der Funktion $f(z)$ im Punkte z_0 bezeichnet man den Wert des Integrals:

$$(4) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} d \log f(\xi),$$

wo die Integrationsbahn wieder die in (1) benutzte, den Punkt z_0 umlaufende kleine Kurve C sein soll. Doch soll, wie wir hier hinzusetzen müssen, C so klein gewählt werden, daß $f(z)$ weder auf C noch in dem von C umschlossenen Bereiche, abgesehen nur etwa vom Punkte z_0 selber, einen Nullpunkt besitzen soll.¹⁾

Die Ausrechnung des Integrales (4) in den einzelnen Fällen liefert nun ein höchst einfaches Ergebnis, das ohne Ausnahme für alle Innenpunkte des Feldes $\mathbf{F}$ gilt: Das logarithmische Residuum von $f(z)$ ist in jedem Punkte z_0 , in welchem $f(z)$ weder einen Nullpunkt noch einen Pol hat, gleich 0; dasselbe ist für einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung von $f(z)$ gleich m und für einen Pol m^{ter} Ordnung unserer Funktion gleich $-m$.

Wir gehen jetzt auf den oben bereits erklärten Bereich $\mathbf{T}$ im Felde $\mathbf{F}$ zurück und wollen betreffs des Randes C von $\mathbf{T}$ über die oben schon gegebenen Bestimmungen hinaus noch festsetzen, daß C jedenfalls auch durch keinen Nullpunkt von $f(z)$ hindurchlaufen soll. Aus dem oben schon bewiesenen Residuensatz ergibt sich dann betreffs der logarithmischen Residuen von $f(z)$ sofort der weitere Satz: Das über den Rand C des Bereiches $\mathbf{T}$ im positiven Umlaufssinne genommene Integral:

$$(5) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} d \log f(\xi)$$

ist gleich der Summe der Ordnungen aller in $\mathbf{T}$ gelegenen Nullpunkte von $f(z)$, vermindert um die Summe der Ordnungen aller daselbst befindlichen Pole der Funktion $f(z)$.

§ 9. Die Reihe und der Satz von Laurent. Folgerungen über eindeutige Funktionen.

Durch zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 des Mittelpunktes $z = 0$ und der Radien r_1 und r_2 , die endlich und von 0 verschieden seien und die Bedingung $r_1 > r_2$ befriedigen sollen, sei ein zweifach zusammenhängender Bereich $\mathbf{T}_2$ von der Gestalt eines Kreises ein-

1) Man beachte, daß in der Umgebung eines inneren Feldpunktes z_0 stets nur endlich viele Nullpunkte von $f(z)$ auftreten können (vgl. Note 3 S. 37), so daß man also die Umgebung auch stets so klein wählen kann, daß höchstens z_0 Nullpunkt von $f(z)$ ist.

gegrenzt. Die Funktion $f(z)$ soll in T_2 unter Einschluß der beiden Randkurven eindeutig und überall analytisch sein.

Ist alsdann z irgendein fest gewählter innerer Punkt von T_2 , für welchen also:

$$(1) \quad r_2 < |z| < r_1$$

zutrifft, so gilt zufolge des Cauchyschen Integralsatzes¹⁾:

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(K_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_{(K_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

wo beide Kreise in denjenigen Richtungen zu durchlaufen sind, welche für die inneren, den Nullpunkt enthaltenden, Kreisscheiben den positiven Umlaufssinn liefern.

Da die Integrationsvariable ξ längs K_1 den konstanten Betrag $|\xi| = r_1$ hat und z in Übereinstimmung mit (1) fest gewählt ist, so können wir die S. 16 gegebene Entwicklung (indem wir den damaligen Wert z_0 durch 0 ersetzen) wiederholen und finden:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(K_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

wo rechts eine für den ausgewählten Wert z konvergente Reihe steht, deren Koeffizienten durch:

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(K_1)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

gegeben sind. Aber eine entsprechende Entwicklung kann man auch für das zweite Integral in (2) rechter Hand durchführen. Da nämlich für einen längs K_2 variablen Punkt ξ

$$\left| \frac{\xi}{z} \right| = \frac{r_2}{|z|} < 1$$

und nach oben geschehener Wahl von z konstant ist, so gilt:

$$-\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \cdot f(\xi) \xi^{n-1},$$

und man findet wie oben (S. 16 u. f.), daß die hier rechts stehende Reihe längs K_2 gleichmäßig konvergiert. Daraufhin gewinnt man:

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{(K_2)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = c_{-1} \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + c_{-3} \frac{1}{z^3} + \dots$$

1) Die Gleichung (2) entspricht der „Cauchyschen Integralformel“ (2) S. 16 und ergibt sich in derselben Weise wie diese Formel aus dem Cauchyschen Integralsatze.

als Darstellung des links stehenden Integrales mittelst einer im Punkte z konvergenten Reihe, deren Koeffizienten erklärt sind durch:

$$c_{-n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(K_2)} f(\xi) \xi^{n-1} d\xi.$$

Durch Addition der beiden für die Integrale in (2) rechter Hand gewonnenen Reihenentwicklungen ergibt sich der Satz: *Der in einem inneren Punkte z des ringförmigen Bereiches $\mathbf{T}_2$ eintretende Funktionswert $f(z)$ ist der Summenwert der nach beiden Seiten hin unendlichen, im Punkte z konvergenten, sogenannten „Laurentschen Reihe“¹⁾:*

$$(3) \quad f(z) = \cdots + c_{-3} \frac{1}{z^3} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

deren von der Auswahl der Stelle z unabhängige Koeffizienten durch die angegebenen bestimmten Integrale geliefert werden.

Man setze nun:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots, \\ f_2(z) &= c_{-1} \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + c_{-3} \frac{1}{z^3} + \cdots \end{aligned}$$

und nenne die Konvergenzradien dieser Reihen R_1 und R_2 , wobei natürlich die zweite Reihe für $|z| > R_2$ konvergiert. Wir wollen hierbei den extremen Fall, daß die erste Reihe für alle endlichen z konvergiert, gleich mit einbegreifen, indem wir dann $R_1 = \infty$ nehmen; ebenso lassen wir die Möglichkeit $R_2 = 0$ zu. Da die Laurentsche Reihe (3) für jeden Innenpunkt des Bereiches $\mathbf{T}_2$ konvergiert, so ist jedenfalls $R_1 \geq r_1$ und $R_2 \leq r_2$. Indessen ist leicht zu sehen, daß hier die Gleichheitszeichen nicht gelten können. Für die inneren Punkte von $\mathbf{T}_2$ gilt nämlich zufolge (3) als Darstellung von $f(z)$:

$$(4) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Es ist aber klar, daß durch die gleichzeitige analytische Fortsetzung von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auf Grund von (4) diejenige von $f(z)$ mitgegeben ist. Nun war zufolge der Voraussetzung $f(z)$ auch noch für alle Punkte von K_1 eindeutig und analytisch, und dasselbe gilt von der durch ihre Potenzreihe erklärten Funktion $f_2(z)$. Demnach ist auch $f_1(z) = f(z) - f_2(z)$ längs K_1 noch überall analytisch (frei von singulären Punkten), so daß K_1 innerhalb des Kreises vom Radius R_1 liegt. Ebenso zeigt man, daß notwendig $R_2 < r_2$ sein muß.

Die vorstehende Betrachtung zeigt zugleich, daß der Gültigkeitsbereich der Gleichung (3) über den Bereich $\mathbf{T}_2$ hinausreicht. Es gilt

1) Über das Auftreten der Laurentschen Reihe und des gleich zu nennenden Laurentschen Satzes sehe man die Literaturnachweise bei Osgood, S. 346.

nämlich der Satz: *In jedem Bereiche $\mathbf{T}$, dessen sämtliche Punkte z die Bedingung:*

$$R_1 > |z| > R_2$$

befriedigen, ist die Laurentsche Reihe (3) gleichmäßig konvergent und liefert als Summenwerte die Funktionswerte $f(z)$, welche der anfänglich vorgelegten Funktion oder ihrer Fortsetzung in $\mathbf{T}$ zukommen.

Weiter ist der Satz anzumerken: *Die im Bereiche $\mathbf{T}_2$ eindeutige und daselbst überall analytische Funktion $f(z)$ läßt sich in diesem Bereiche nur auf eine einzige Art in eine Laurentsche Reihe entwickeln.* Gilt nämlich in $\mathbf{T}_2$ die Darstellung:

$$f(z) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c'_v z^v,$$

so wird diese Reihe längs eines Kreises K , der mit K_1 und K_2 konzentrisch ist und im Innern des Ringes $\mathbf{T}_2$ verläuft, sicher gleichmäßig konvergent sein. Verstehen wir nun unter n irgendeine ganze Zahl¹⁾, so ist in:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(K)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{(K)} \left(\sum_{v=-\infty}^{+\infty} c'_v \xi^{v-n-1} \right) d\xi,$$

wo die Integrale über K in dem für den umschlossenen Bereich positiven Umlaufsinne geführt sein sollen, die rechts stehende Reihe wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz gliedweise integrierbar:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(K)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \left(c'_v \int_{(K)} \xi^{v-n-1} d\xi \right).$$

Von den hier rechts auftretenden Integralen ist aber nur das eine für $v = n$ von 0 verschieden und gleich $2i\pi$, während alle übrigen verschwinden. Es ist demnach:

$$c'_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(K)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi,$$

womit wir (zufolge des Cauchyschen Integralsatzes) auf die obige Koeffizientenbestimmung der Reihe (3) zurückkommen. Die soeben angesetzte Laurentsche Reihe für $f(z)$ ist also notwendig mit der Reihe (3) identisch, womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Als „Laurentschen Satz“ bezeichnet man das durch die bisherigen Entwicklungen festgestellte Ergebnis: *Eine in dem durch die Ungleichungen (1) festgelegten Bereiche $\mathbf{T}_2$ eindeutige und analytische Funktion $f(z)$ ist in einer und nur einer Art als Summe:*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

1) Siehe die Anmerkung S. 9.

zweier Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ darstellbar, von denen die erste innerhalb des Kreises K_1 überall eindeutig und analytisch ist, während die zweite außerhalb des Kreises K_2 , unter Einschluß der Stelle ∞ , überall eindeutig und analytisch ist und im Punkt ∞ verschwindet.

Einige besondere Folgerungen beziehen sich auf die Fälle, daß $f(z)$ auch innerhalb K_2 oder auch außerhalb K_1 oder endlich in beiden Bereichen zugleich eindeutig bleibt. Es gelte erstlich die Voraussetzung, daß $f(z)$ auch innerhalb K_2 eindeutig sei und, höchstens vom Nullpunkte $z = 0$ selbst abgesehen, sich daselbst überall analytisch verhalte. Da $f_1(z)$ innerhalb K_2 überall eindeutig und analytisch ist, so wird ein etwa im Nullpunkte auftretender singulärer Punkt von $f(z)$, der (wegen der Eindeutigkeit von $f(z)$) entweder wesentlich ist oder einen Pol m^{ter} Ordnung darstellt, notwendig von der Funktion $f_2(z) = f(z) - f_1(z)$ aufgenommen, die indessen für alle von 0 verschiedenen z eindeutig und analytisch sein wird.

Nimmt man nun erstlich an, daß $f(z)$ auch im Nullpunkt analytisch bleibt, so gilt (vgl. S. 17) für alle z mit $|z| < R_1$ und also insbesondere auch in T_2 eine Darstellung:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

und da dies notwendig die Laurentsche Reihe ist, so muß im vorliegenden Falle $f_2(z)$ mit 0 identisch sein. Liegt im Nullpunkte ein Pol m^{ter} Ordnung von $f(z)$, so findet man in derselben Art als in T_2 gültig:

$$f(z) = c_{-m} \frac{1}{z^m} + c_{-m+1} \frac{1}{z^{m-1}} + \dots + c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \dots;$$

und da dies wiederum die Laurentsche Reihe sein muß, so gilt:

$$(5) \quad f_2(z) = c_{-1} \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots + c_{-m} \frac{1}{z^m}.$$

Trifft keiner dieser beiden Fälle zu, so ist der Nullpunkt für $f(z)$ und damit für $f_2(z)$ wesentlich singulär: Ist $f(z)$ auch innerhalb K_2 , höchstens vom Nullpunkt abgesehen, eindeutig und analytisch, so ist $f_2(z)$ identisch 0 oder die rationale Funktion (5) oder durch eine für alle von 0 verschiedenen z konvergente unendliche Reihe darstellbar, je nachdem $f(z)$ auch im Nullpunkt analytisch ist oder daselbst einen Pol m^{ter} Ordnung oder endlich einen wesentlich singulären Punkt hat. Offenbar ist auch die Umkehrung dieses Satzes richtig.

Entsprechende Betrachtungen gelten, falls $f(z)$ auch außerhalb K_1 eindeutig und, höchstens abgesehen von der Stelle ∞ , analytisch ist. Wir merken den Satz an: Ist $f(z)$ außerhalb K_1 , höchstens von dem

Punkte ∞ abgesehen, eindeutig und analytisch, so ist $f_1(z)$ mit einer Konstanten c_0 identisch¹⁾ oder eine rationale ganze Funktion m^{ten} Grades:

$$(6) \quad f_1(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m$$

oder durch eine „beständig konvergente“ unendliche Reihe $\mathfrak{P}(z)$ darstellbar, je nachdem $f(z)$ auch im Punkte ∞ analytisch ist oder daselbst einen Pol m^{ter} Ordnung oder einen wesentlich singulären Punkt hat. Auch hier gilt offenbar die Umkehrung des Satzes.

Diese drei Fälle wollen wir noch mit dem Falle einer identisch verschwindenden Funktion $f_2(z)$ kombinieren: Ist $f(z)$ auf der ganzen z -Kugel, höchstens vom Punkte $z = \infty$ abgesehen, eindeutig und analytisch, so ist $f(z)$ mit einer Konstanten c_0 identisch oder eine rationale ganze Funktion (6) vom m^{ten} Grade oder darstellbar durch eine „beständig konvergente“ unendliche Reihe $\mathfrak{P}(z)$, je nachdem $f(z)$ auch im Punkte ∞ analytisch bleibt oder daselbst einen Pol m^{ter} Ordnung oder einen wesentlich singulären Punkt hat. Auch die Umkehrung des Satzes trifft zu.

§ 10. Die ganzen rationalen Funktionen und ihre inversen Funktionen.

Die vorstehenden allgemeinen Entwicklungen über analytische Funktionen sollen nun an einzelnen Funktionsarten, insoweit dies für unsere späteren Zwecke wünschenswert ist, erläutert und weiter entwickelt werden. Folgende Erklärung schließt sich an den letzten Satz von § 9 an: Eine Funktion, deren Feld $\mathbf{F}$ die schlichte (einblättrige) und vollständige z -Kugel ist und die den Punkt $z = \infty$ als einzigen singulären Punkt hat, heißt eine „ganze rationale“ Funktion und werde mit der besonderen Bezeichnung $g(z)$ belegt.²⁾ Der singuläre Punkt ist, als dem Felde $\mathbf{F}$ angehörig, außerwesentlich und also, da $g(z)$ in der Umgebung desselben eindeutig ist, notwendig ein Pol. Ist die positive ganze Zahl m die Ordnung desselben, so heißt $g(z)$ eine „ganze rationale Funktion m^{ten} Grades“ und ist durch einen Ausdruck (6) S. 44 für alle Werte von z gegeben.

1) Siehe die Anmerkung 2 S. 30.

2) Wir erklären die Funktionen $f(z)$ hier und in der Folge zumeist aus ihren wesentlichen Eigenschaften, d. h. etwa durch Angabe ihres Feldes $\mathbf{F}$ und der Art und Lage ihrer singulären Punkte. Dieser Standpunkt ist derjenige Riemanns, worüber man insbesondere den Art. 20 seiner 1851 erschienenen Dissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe“ (Gesammelte mathematische Werke, Leipzig 1876, S. 1 ff.) vergleiche. Die Darstellung einer Funktion, etwa mittels einer Potenzreihe oder eines sonstigen analytischen Ausdrucks, ist dann immer erst eine Folge der unabhängig hiervon gegebenen Erklärung der Funktion.

Über die etwaigen Nullpunkte von $g(z)$ gibt das am Schlusse von § 8 (S. 39) aufgestellte Theorem Aufschluß. Da $g(z)$ nicht mit 0 identisch ist, so können wir in der endlichen z -Ebene eine geschlossene, sich nicht selbst schneidende, reguläre Kurve C der Art wählen, daß in dem von C umschlossenen endlichen Bereiche, den Rand C selbst mit einbegriffen, kein Nullpunkt von $g(z)$ gelegen ist. Natürlich findet sich in diesem Bereiche auch kein Pol, so daß nach dem genannten Theoreme die fragliche Kurve C als Integrationsbahn:

$$(1) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} d \log g(\xi) = 0$$

liefert. Nun aber wird die z -Kugel durch die Kurve C in zwei Bereiche zerlegt, einmal den eben ins Auge gefaßten Bereich, sodann den ganzen Rest der z -Kugel, welcher den Pol m^{ter} Ordnung und alle etwaigen Nullpunkte von $g(z)$ enthält. Indem wir C als Rand dieses zweiten Bereiches auffassen und auf ihn das fragliche Theorem anwenden, folgt aus (1) sofort: *Die ganze rationale Funktion m^{ten} Grades $g(z)$ hat einen oder mehrere Nullpunkte, und es ist die Summe der Ordnungen aller ihrer Nullpunkte gleich m .*

Ist bei der durch $z = s$ zu bezeichnenden Stelle ein Nullpunkt der Ordnung α von $g(z)$ gelegen, so ist nach S. 27 hierselbst $g(z) \cdot (z-s)^{-\alpha}$ von 0 verschieden und analytisch. Die sonst etwa vorkommenden Nullpunkte von $g(z)$ besitzt $g(z) \cdot (z-s)^{-\alpha}$ in den gleichen Ordnungen, ohne darüber hinaus noch weitere Nullpunkte aufzuweisen. Im übrigen hat $g(z) \cdot (z-s)^{-\alpha}$ wieder dasselbe Feld $\mathbf{F}$ wie $g(z)$ und ist im Endlichen polfrei.

Diese Betrachtung kann man durch Hinzunahme der weiteren etwa noch auftretenden Nullpunkte von $g(z)$ fortsetzen. Seien die unterschiedenen Nullpunkte von $g(z)$ bei $s_1, s_2, \dots, s_k$ gelegen und seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ihre Ordnungen, so gilt für die positiven ganzen Zahlen α nach dem zuletzt gewonnenen Satze:

$$(2) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = m,$$

so daß insbesondere ihre Anzahl k der Bedingung $0 < k \leq m$ genügt. Dann erkennt man in:

$$g(z) \cdot (z-s_1)^{-\alpha_1} (z-s_2)^{-\alpha_2} \dots (z-s_k)^{-\alpha_k}$$

eine Funktion des bisherigen Feldes $\mathbf{F}$, die für alle endlichen z analytisch und frei von Nullpunkten ist. Nach dem zuletzt ausgesprochenen Satze kann sie demnach auch keinen Pol bei $z = \infty$ mehr besitzen und ist also nach dem Schlußtheorem von § 9 mit einer Konstanten identisch. Den Wert der letzteren bestimmen wir mittelst des Ausdruckes

(6) S. 44 leicht zu c_m und kleiden das gewonnene Ergebnis in den Satz: *Die ganze rationale Funktion $g(z)$ vom m^{ten} Grade gestattet die „Linearfaktorenzerlegung“:*

$$(3) \quad g(z) = c_m (z - s_1)^{\alpha_1} (z - s_2)^{\alpha_2} \dots (z - s_k)^{\alpha_k},$$

wobei die ganzen positiven Exponenten α an die Bedingung (2) gebunden sind. Hierin ist eine bekannte Ausdrucksform für das „Fundamentaltheorem der Algebra“ gewonnen.

Mit Rücksicht auf die Fortsetzung der Untersuchung wollen wir unter der Annahme, daß der Grad $m > 1$ sei¹⁾, sogleich für die erste Ableitung $g'(z)$, welche eine ganze rationale Funktion $(m - 1)^{\text{ten}}$ Grades ist, die Linearfaktorenzerlegung in der Gestalt:

$$(4) \quad g'(z) = m c_m (z - t_1)^{\lambda_1} (z - t_2)^{\lambda_2} \dots (z - t_l)^{\lambda_l}$$

angeben, wobei die positiven ganzen Zahlen λ an die Bedingung:

$$(5) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l = m - 1$$

gebunden sind. Die Werte der Funktion $g(z)$ in den l Punkten $t_1, t_2, \dots, t_l$ mögen $e_1, e_2, \dots, e_l$ sein; dieselben sind alle endlich, aber brauchen natürlich keineswegs durchweg voneinander verschieden zu sein.

Ist jetzt w_0 irgendein endlicher komplexer Wert, der fest gewählt ist, so ist auch $(g(z) - w_0)$ eine ganze rationale Funktion m^{ten} Grades. Hat dieselbe bei z_0 einen Nullpunkt von einer Ordnung $\mu > 1$, so hat daselbst $g'(z)$ einen Nullpunkt $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so daß z_0 einer der l Werte $t_1, t_2, \dots, t_l$ ist und (da für diesen Wert $g(z)$ offenbar gleich w_0 wird) w_0 zu den Werten $e_1, e_2, \dots, e_l$ gehört. Nehmen wir demnach w_0 zunächst als von diesen Werten e verschieden an, so wird $(g(z) - w_0)$ nur Nullpunkte erster Ordnung aufweisen und also an genau m verschiedenen Stellen des Feldes $\mathbf{F}$ verschwinden: *Die rationale ganze Funktion $g(z)$ vom m^{ten} Grade nimmt einen beliebigen, von den $e_1, e_2, \dots, e_l$ verschiedenen, endlichen komplexen Wert w_0 in genau m verschiedenen Punkten des Feldes $\mathbf{F}$ an und soll dieserhalb als eine m -wertige Funktion im Felde $\mathbf{F}$ bezeichnet werden.*

Dieses Ergebnis wird in seiner vollen Bedeutung erst überblickt, wenn wir auf die allgemeinen Abbildungssätze von § 7 (S. 30 ff.) eingehen. Aus ihnen folgt: Die Umgebung einer beliebigen endlichen von den $t_1, t_2, \dots, t_l$ verschiedenen Stelle z_0 wird durch die Funktion $w = g(z)$ auf einen schlichten Bereich um den Bildpunkt w_0 der w -Ebene konform abgebildet. Es treten aber folgende Unterbrechungen der Konformität der Abbildung auf: Erstlich wird die schlichte Um-

1) Im Falle $m = 1$ wird man die aufzustellenden Sätze leicht direkt bestätigen; übrigens kommen wir auf diesen Fall unten noch ausführlich zurück.

gebung der Stelle $z = \infty$ auf eine m -blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte $w = \infty$ abgebildet, so daß die Winkel des Scheitelpunktes $z = \infty$ sich auf m -fach vergrößerte Winkel übertragen. Zweitens aber beachte man, daß im einzelnen Punkte t die Ableitung $g'(z)$ verschwindet, und daß $g^{(1+\lambda)}(z)$ die erste dortselbst nicht verschwindende Ableitung ist: Die schlichte Umgebung der einzelnen Stelle t wird durch die Funktion $w = g(z)$ auf eine Windungsfläche mit $\nu = 1 + \lambda$ Blättern und dem Verzweigungspunkte $e = g(t)$ abgebildet, so daß die Winkel des Scheitelpunktes t im Abbilde ν -fach vergrößert erscheinen.

Die ν Blätter der Windungsfläche hängen im Verzweigungspunkte e , der der Stelle t der z -Ebene entspricht, zusammen. Während demnach ein dicht bei e gelegener Wert w_0 noch ν getrennte übereinander liegende Punkte der Windungsfläche liefert und also in ν dicht bei t nebeneinander liegenden Punkten z als Funktionswert eintritt, werden diese ν Punkte z , sobald wir w_0 gleich e werden lassen, an der Stelle t zum Zusammenfall kommen. Wir sagen demnach, daß an der Stelle t der z -Ebene ν dem Funktionswerte e entsprechende Punkte z zusammenfallen. Übertragen wir diese Sprechweise auch auf den Punkt $z = \infty$ und den zugehörigen m -blättrigen Verzweigungspunkt $w = \infty$, so gilt der Satz, daß irgendein komplexer Wert w_0 in genau m Punkten der z -Kugel von der Funktion $g(z)$ angenommen wird, ausnahmslos.

Das durch die Funktion $w = g(z)$ gelieferte Abbild des gesamten Feldes $\mathbf{F}$ und damit das Feld $\mathbf{F}'$ der inversen Funktion $z = \varphi(w)$ ist in seiner Gestaltung nun zu überblicken. Dieses Feld $\mathbf{F}'$ bedeckt die w -Kugel überall m -blättrig, wobei jedoch an der Stelle ∞ alle m Blätter in dem daselbst gelegenen Verzweigungspunkte zusammenhängen und nach Art der Blätter einer Windungsfläche beim Umlauf um $z = \infty$ ineinander übergehen, während in entsprechender Weise im einzelnen der l im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt e_i gewisse $\nu_i = 1 + \lambda_i$ Blätter zusammenhängen und beim Umlauf von e_i ineinander übergehen. Mehrblättrige zusammenhängende Bereiche dieser Art hat Riemann¹⁾ allgemein zum Studium der algebraischen Funktionen (vgl. § 16) eingeführt. Man benennt dieserhalb den Bereich $\mathbf{F}'$ als eine „*Riemannsche Fläche*“ und spricht in unserem Falle genauer von einer „*geschlossenen m -blättrigen Riemannschen Fläche mit $(l + 1)$ Verzweigungspunkten*“; die Fläche möge, damit in der Bezeichnung sogleich die Blätteranzahl m mit zum Ausdruck kommt, fortan durch das Symbol $\mathbf{F}_m$ bezeichnet werden.

1) In Abteilung I, Artikel 1 der Abhandlung „Theorie der Abelschen Funktionen“, Journ. f. Math., Bd. 54 (1857) oder Riemanns Werke, S. 95.

Es ist nun sehr wichtig, daß wir die Riemannsche Fläche F_m auch synthetisch aufbauen können. Man denke auf der z -Kugel die Stellen e und den Punkt ∞ markiert. Da die Werte $e_1, e_2, \dots, e_l$ nicht voneinander verschieden sein müssen und übrigens $l \geq 1$ gilt, so handelt es sich mindestens um 2, höchstens um $(l + 1)$ markierte Punkte. Man ziehe nun etwa von e_1 aus durch die sämtlichen markierten Stellen e bis zum Punkte ∞ eine sich selbst nicht überkreuzende, reguläre Kurve und durchschneide die w -Kugel längs dieser Kurve. Die beiden Schnittränder unterscheiden wir mit Rücksicht auf die Durchlaufungsrichtung der Kurve von e_1 nach ∞ als rechtes und linkes Ufer des Schnittes. Die zwischen den einzelnen, aufeinanderfolgenden markierten Punkten verlaufenden Teile des Schnittes wollen wir der Reihe nach $S_1, S_2, \dots$ nennen und jeden von ihnen als einen „Verzweigungsschnitt“ bezeichnen. Die zerschnittene w -Kugel stellt einen „einfach zusammenhängenden“ Bereich dar, der eine einzige von den beiden Schnittufern gelieferte Randkurve besitzt.

Von der so vorbereiteten w -Kugel wollen wir jetzt m Exemplare übereinander geschichtet denken, die also zunächst außer Zusammenhang sind. Es sei alsdann w_0 irgendein komplexer Wert, der jedoch weder einen Verzweigungspunkt noch einen sonstigen Punkt eines Verzweigungsschnittes liefert. Zu w_0 gehören m verschiedene Werte $z_1, z_2, \dots, z_m$ unserer m -deutigen Funktion $z = \varphi(w)$, die wir uns in irgendeiner Reihenfolge auf die m Exemplare der w -Kugel bei w_0 verteilt und aufgetragen denken. Jetzt vollziehe man in jedem der m Blätter die analytische Fortsetzung unserer Funktion, beginnend mit dem aufgetragenen Werte $z_i = \varphi(w_0)$. Die m berandeten und je einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellenden Blätter tragen dann Funktionswerte, die wir durch die Bezeichnungen $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \dots, \varphi_m(w)$, den $z_1, z_2, \dots, z_m$ entsprechend, unterscheiden. Dabei ist $\varphi_i(w)$ in ihrem Bereiche eine eindeutige Funktion; denn im Innern dieses Bereiches kommt kein singulärer Punkt der Funktion vor, und also muß die Fortsetzung über jede im Bereiche geschlossene Kurve nach einem S. 25 bewiesenen Satze zu den Anfangswerten der Funktion zurückführen.

Man fasse nun die Randwerte des ersten Funktionszweiges $\varphi_1(w)$ längs des rechten Ufers vom ersten Verzweigungsschnitte S_1 ins Auge, welche sich den Innenwerten stetig anschließen. In der unzerschnittenen w -Ebene setzen sich diese Funktionswerte über die „Kurve“ S_1 hinweg stetig fort. Die Folge ist, daß die am rechten Ufer von S_1 stattfindenden Randwerte von $\varphi_1(w)$ auf dem gegenüberliegenden linken Ufer durch einen bestimmten unter den m Zweigen $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \dots, \varphi_m(w)$

erreicht werden müssen. Handelt es sich dabei um den Funktionszweig $\varphi_i(w)$, so wollen wir nunmehr das rechte Ufer von S_1 im ersten Blatte mit dem linken Ufer von S_1 im i^{ten} Blatte zusammenheften.

In derselben Weise fortfahrend heften wir auch die rechten Ufer von S_1 in den übrigen $(m - 1)$ Blättern je an bestimmte linke Ufer von S_1 an und nehmen die gleiche Operation für alle übrigen Verzweigungsschnitte $S_2, S_3, \dots$ vor. So entsteht am Ende wieder unsere geschlossene m -blättrige Riemannsche Fläche F_m , in welcher die zunächst m -deutige Funktion $z = \varphi(w)$ nunmehr eine „eindeutige Funktion des Ortes“ geworden ist.

Die Riemannsche Fläche F_m ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung des Verlaufs der Funktion $\varphi(w)$ und des Zusammenhangs ihrer verschiedenen Zweige. Allerdings ist ein unmittelbares anschauliches Erfassen der gesamten Fläche nur bei besonders einfach gebauten Flächen möglich. In dieser Hinsicht ist nun sehr wichtig, daß wir im vorliegenden Falle den Zusammenhang der m Blätter von F_m dadurch einer zeichnerischen Darstellung noch unmittelbarer zugänglich machen können, daß wir F_m rückwärts auf die z -Ebene abbilden. Die m „über“einander liegenden Blätter von F_m liefern dabei m „neben“einander gereihte je einfach zusammenhängende Bereiche, welche in ihrer Gesamtheit die z -Kugel überall schlicht und ohne Lücke überspannen. Die Randkurven dieser Bereiche entsprechen den Ufern der Verzweigungsschnitte; der einzelne Punkt $z = t_i$ ist rings von $2\nu_i$ oder (falls er von c_1 herrührt) von ν_i Bereichen umgeben, der Punkt $z = \infty$ von allen m Bereichen. Die Brauchbarkeit dieses Bildes für die Darstellung des Blätterzusammenhangs würde hier an einem Beispiele zu erläutern sein. Doch kommen wir auf den gleichen Gegenstand bei Besprechung der rationalen Funktionen zurück und werden dort ein für spätere Entwicklungen wichtiges Beispiel betrachten.

§ 11. Die ganzen transzendenten Funktionen. Exponentialfunktion und Logarithmus.

Einer weiteren Klasse ganzer Funktionen legen wir die folgende Erklärung zugrunde: Eine Funktion, deren Feld die schlichte z -Ebene, abgesehen vom einen Punkte $z = \infty$, ist, und die im Endlichen überall analytisch ist, heißt eine „ganze transzendente“ Funktion und soll wieder durch $w = g(z)$ bezeichnet werden. Der einzige Randpunkt $z = \infty$ des Feldes F ist ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion (vgl. S. 44), die in ihrem Felde durch eine beständig konvergente unendliche Reihe:

$$(1) \quad g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

darstellbar ist.

Die Beschaffenheit der Funktion in der Umgebung ihres wesentlich singulären Punktes wird durch folgende Betrachtung festgestellt. Ist M ein „beliebig“ groß gewählter positiver Betrag, so ist in jeder Umgebung des Punktes $z = \infty$ eine Stelle nachweisbar, in der der absolute Betrag $|g(z)|$ die Zahl M übertrifft. Gäbe es nämlich einen Kreis mit dem Radius r um den Nullpunkt $z = 0$ der Art, daß für alle endlichen z mit $|z| > r$ die Ungleichung:

$$(2) \quad |g(z)| \leq M$$

zutrifft, so würde dieselbe insbesondere längs jedes Kreises K mit einem Radius R , der größer als r ist, zutreffen. Ist nun n irgendeine der Zahlen $1, 2, 3, \dots$, so findet man, indem man die längs K gleichmäßig konvergente Reihe (1) für $g(\xi)$ durch ξ^{n+1} teilt und über K als Integrationsbahn gliedweise integriert (vgl. Note 1 S. 37):

$$\int_{(K)} \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = 2i\pi c_n.$$

Hiernach gilt mit Rücksicht auf die längs K gültige Ungleichung (2) offenbar:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{(K)} \frac{M}{R^{n+1}} \cdot |d\xi| = \frac{M}{R^n}.$$

Da M ausgewählt ist, aber R oberhalb des Betrages r noch beliebig wählbar ist, während c_n einen von der Auswahl des R unabhängigen konstanten Wert bedeutet, so kann zufolge der letzten Ungleichung c_n keinen von 0 verschiedenen Wert haben. Es würde also $g(z)$ mit der Konstanten c_0 identisch sein, womit sich unsere Behauptung bestätigt hat.

Nun gilt aber weiter: Ist δ eine positive, von 0 verschiedene, aber beliebig klein gewählte Zahl, so kann man in jeder Umgebung der Stelle ∞ einen Punkt z angeben, in dem:

$$|g(z)| < \delta$$

zutrifft. Beim Beweise dieser Behauptung müssen wir drei Fälle unterscheiden. Hat erstlich $g(z)$ unendlich viele Nullpunkte, so haben diese Nullpunkte auf der z -Kugel mindestens eine Häufungsstelle.¹⁾ Eine solche Häufungsstelle kann aber im Endlichen nirgends auftreten, da in ihr $g(z)$ sich nicht analytisch verhalten könnte. Mithin ist der Punkt ∞ die einzige Häufungsstelle der Nullpunkte, so daß in jeder Umgebung von ∞ ein Punkt angebbar ist, in welchem $g(z)$ gleich 0

1) Siehe das in der Note 2 S. 10 erwähnte und S. 25 ausgeübte Beweisverfahren nach der „Methode der Einschachtelung“.

und also kleiner als δ ist. Hat zweitens $g(z)$ überhaupt keine Nullpunkte, so erkennt man in:

$$g_1(z) = \frac{1}{g(z)}$$

sofort wieder eine ganze transzendente Funktion. Für diese ist in jeder Umgebung von ∞ ein Punkt z nachweisbar, in dem $|g_1(z)| > \delta^{-1}$ und also $|g(z)| < \delta$ zutrifft. Hat drittens $g(z)$ endlich viele Nullpunkte $z_1, z_2, \dots, z_n$ der Ordnungen $m_1, m_2, \dots, m_n$, so hat $(g(z))^{-1}$ ebendort Pole dieser Ordnungen und verhält sich übrigens im Endlichen allenthalben analytisch. Gilt für die Umgebung des Poles z_i die Entwicklung:

$$\frac{1}{g(z)} = c_{-m_i}^{(i)}(z - z_i)^{-m_i} + c_{-m_i+1}^{(i)}(z - z_i)^{-m_i+1} + \dots + c_{-1}^{(i)}(z - z_i)^{-1} + c_0^{(i)} + \dots,$$

so erkennt man jetzt in:

$$g_1(z) = \frac{1}{g(z)} - \sum_{i=1}^n [c_{-m_i}^{(i)}(z - z_i)^{-m_i} + c_{-m_i+1}^{(i)}(z - z_i)^{-m_i+1} + \dots + c_{-1}^{(i)}(z - z_i)^{-1}]$$

leicht eine ganze transzendente Funktion. Schreiben wir die hier rechts auftretende Summe in Abhängigkeit von z kurz $\sum(z)$, so gilt:

$$\frac{1}{g(z)} = g_1(z) + \sum(z),$$

woraus sich ergibt:

$$\left| \frac{1}{g(z)} \right| \geq |g_1(z)| - \left| \sum(z) \right|.$$

Nun hat $\sum(z)$ im Punkte ∞ den Grenzwert 0, so daß wir eine Umgebung von ∞ eingrenzen können, in welcher überall $|\sum(z)| < 1$ gilt. Dasselbst kann man dann noch eine Stelle nachweisen, für welche $|g_1(z)| > 1 + \delta^{-1}$, also $|g(z)^{-1}| > \delta^{-1}$ und damit $|g(z)| < \delta$ wird.

Den beiden aufgestellten Sätzen kann man leicht noch eine etwas erweiterte Fassung geben. Hat man beim ersten Satze in einer Umgebung von ∞ eine Stelle z' nachgewiesen, für welche $|g(z')| > M$ zutrifft, so kann man durch $|z| > z'$ einen Bestandteil jener Umgebung erklären, in dem dann wiederum ein Punkt z'' nachweisbar ist, für welchen $|g(z'')| > M$ gleichfalls zutrifft. Indem wir so fortfahren, erkennen wir: *In jeder Umgebung von ∞ sind unbegrenzt viele Punkte nachweisbar, in denen $|g(z)| > M$ gilt, und ebenso natürlich unbegrenzt viele Punkte, in denen $|g(z)| < \delta$ zutrifft.*

Ist jetzt w_0 ein beliebiger endlicher komplexer Wert, der fest gewählt ist, so ist $(g(z) - w_0)$ wieder eine ganze transzendente Funktion. Es folgt sofort: *In jeder Umgebung des wesentlich singulären Punktes ∞ sind unbegrenzt viele Stellen z nachweisbar, in denen:*

$$|g(z) - w_0| < \delta$$

zutrifft, in denen also, wie man sagen kann, die Funktion $g(z)$ dem willkürlich ausgewählten Werte w_0 „beliebig“ nahe kommt. Der Satz gilt, wie wir schon wissen, in sinngemäßer Übertragung auch für den Wert $w_0 = \infty$.

Das eigentümliche hiermit festgestellte Verhalten einer ganzen transzendenten Funktion in der Umgebung ihrer wesentlich singulären Stelle soll nun an dem bekannten Beispiele der im Endlichen nirgends verschwindenden Funktion:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

erläutert werden. Schreiben wir $w = u + iv$, so ergibt sich die durch die Exponentialfunktion e^z vermittelte konforme Abbildung sehr leicht aus:

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Man zeichne in der z -Ebene die unendlich vielen, zur reellen Achse parallelen, äquidistanten Geraden der Gleichungen:

$$y = 0, \quad y = \pm 2\pi, \quad y = \pm 4\pi, \quad y = \pm 6\pi, \dots$$

Sie zerlegen die z -Ebene in unendlich viele Bereiche, welche die Gestalt von Parallelstreifen haben; wir wollen dabei von den beiden berandenden Geraden immer nur die untere (die zu kleinerem y gehörende) als dem Bereiche zugehörig ansehen. Ist z_0 irgendein endlicher Wert, so haben wir in jedem unserer Streifen einen und nur einen mit z_0 „homologen“ Punkt. Wir gelangen zur Punktreihe:

$$z_0, \quad z_0 \pm 2i\pi, \quad z_0 \pm 4i\pi, \quad z_0 \pm 6i\pi, \dots$$

und erkennen, daß alle diese Punkte einen und denselben Funktionswert w_0 tragen. Alle Werte, welche unsere Funktion $w = e^z$ überhaupt im Endlichen annimmt, treten demnach auch bereits in einem ersten Streifen, etwa dem durch $0 \leq y < 2\pi$ charakterisierten, auf. Ist andererseits $w_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$, wo $0 \leq \vartheta_0 < 2\pi$ gelte, irgendein von 0 und ∞ verschiedener komplexer Wert, so finden wir, daß dieser Funktionswert an der Stelle:

$$z_0 = x_0 + iy_0 = \log r_0 + i\vartheta_0$$

jenes ersten Streifens, aber auch nur an dieser Stelle, wirklich eintritt. Dem wesentlich singulären Punkte $z = \infty$ können wir uns im Streifen sowohl nach links wie nach rechts hin annähern: *Die Funktion w hat bei diesen Annäherungen bestimmte Grenzwerte, nämlich 0 und ∞ .*¹⁾ Wir haben damit folgenden Satz festgestellt: *Der gesamte „endliche“ Parallel-*

1) Wir merken noch an: Nähern wir uns der wesentlich singulären Stelle $z = \infty$ mittels einer nicht zur y -Achse parallelen Geraden an, so tritt stets ein Grenzwert w ein, nämlich entweder 0 oder ∞ . Bei Annäherung parallel zur y -Achse aber hat unsere Funktion keinen Grenzwert.

streifen wird durch die Funktion $w = e^z$ konform auf die schlichte w -Ebene, abgesehen von den beiden Punkten $w = 0$ und $w = \infty$, abgebildet; diese beiden Punkte sind für die inverse Funktion $z = \log w$ wesentlich singulär. Man mache sich die Beschaffenheit dieser Abbildung im einzelnen anschaulich, indem man die Parallelen zur x -Achse auf die Geraden, welche von $w = 0$ ausstrahlen, und die den Streifen durchziehenden Parallelen zur y -Achse auf die konzentrischen Kreise um $w = 0$ überträgt.

Die Abbildung der gesamten endlichen z -Ebene, d. i. des Feldes F unserer Funktion, auf die w -Ebene ist nun unmittelbar ersichtlich: Das Feld der inversen Funktion $z = \log w$ ist eine unendlich-blättrige Riemannsche Fläche F_∞ mit den beiden ∞ -blättrigen Verzweigungspunkten $w = 0$ und $w = \infty$, die als wesentlich singuläre Stellen von $\log w$ dem Felde F_∞ nicht zugehören. Beim synthetischen Aufbau dieser F_∞ hat man die w -Ebene im Anschluß an die obige Streifenteilung der z -Ebene längs der positiven reellen w -Achse mit einem von 0 nach ∞ ziehenden „Verzweigungsschnitt“ S zu versehen und Exemplare der so vorbereiteten w -Ebene sowohl nach oben als unten hin in unendlicher Zahl übereinander zu schichten. Sodann hat man jedes rechte Schnittufer an das linke des nächst darüber folgenden Blattes zu heften, wodurch die F_∞ gewonnen wird.

Der Zusammenhang der Blätter wird auch hier, wie bei der am Schluß von § 10 (S. 49) betrachteten Fläche, am übersichtlichsten durch die Übertragung der F_∞ auf die schlichte, endliche z -Ebene dargestellt, wo ja jeder einzelne Parallelstreifen das konforme Abbild eines bestimmten Blattes der F_∞ ist.

Insbesondere aber können wir mittelst dieses Abbildes der F_∞ das Verhalten der Funktion $w = e^z$ in der Umgebung des wesentlich singulären Punktes ∞ veranschaulichen. Es ist zu diesem Zwecke entweder die z -Kugel heranzuziehen, auf welcher die den Geraden $y = 2n\pi$ entsprechenden Kreise nach (7) S. 23 durch die Ebenen der Gleichungen:

$$\eta = 0 \quad \text{und} \quad \xi - \frac{1}{2n\pi} \eta + 1 = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

ausgeschnitten werden, oder man muß mittelst der Transformation (2) S. 21 die Umgebung von $z = \infty$ auf diejenige von $z' = 0$ in einer neuen z' -Ebene abbilden. Benutzen wir etwa die letzte Methode, so übertragen sich die Geraden $y = 2n\pi$ auf die Kreise:

$$y' = 0 \quad \text{und} \quad x'^2 + y'^2 + \frac{1}{2n\pi} y' = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Die Einteilung der z' -Ebene durch diese Kreise ist in Fig. 9 (S. 54) angedeutet. Unter ihnen findet sich insbesondere die x' -Achse, und alle

übrigen Kreise berühren die x' -Achse im Nullpunkte, wobei der Nullpunkt in der Art eine Häufungsstelle der Kreise ist, daß sich in jeder Umgebung desselben sowohl oberhalb als unterhalb der x' -Achse unendlich viele Kreise finden.

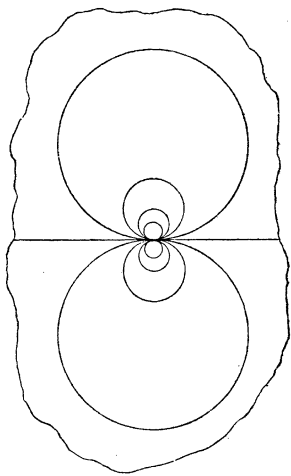


Fig. 9.

Je zwei benachbarte Kreise schließen nun einen sichelförmig gestalteten Bereich ein, der sich an den wesentlich singulären Punkt $z' = 0$ mit zwei Spitzen tangential zur x' -Achse beiderseits heranzieht. Die Spitzen, d. i. der Punkt $z' = 0$, sollen der Sichel nicht zugerechnet werden; auch sehen wir nur den einen berandenden Kreis als zur Sichel gehörig an. Dann ist die Sichel gerade genau ein eindeutiges Abbild der gesamten w -Ebene, abgesehen von den beiden Punkten $w = 0$ und $w = \infty$. Die Häufung der Sichel gegen den Punkt $z' = 0$ hin veranschaulicht nun unmittelbar folgenden Satz:

Ist w_0 ein beliebiger von 0 und ∞ verschiedener komplexer Wert, so gibt es in jeder Umgebung von $z' = 0$ noch unendlich viele Punkte, in denen unsere Funktion w den Wert w_0 annimmt. Die Werte 0 und ∞ sind die Grenzwerte von w in den beiden Spitzen der einzelnen Sichel. Da $z' = 0$ einen nicht zur Sichel gehörenden Punkt darstellt, so können wir zwar in jeder Umgebung von $z' = 0$ in der Sichel Punkte nachweisen, in denen w dem Werte 0 bzw. ∞ beliebig nahe kommt; aber allerdings wird keiner dieser beiden Werte innerhalb der Sichel wirklich erreicht.¹⁾

Wir schließen noch folgende gleich zur Anwendung kommende Betrachtung hier an: In der endlichen z -Ebene sei eine im Punkte z_0 beginnende und ebenda endigende, also geschlossene Kurve C gezeichnet, die sich übrigens sehr wohl auch beliebig oft selbst überkreuzen darf. Ihr entspricht in der endlichen w -Ebene eine von $w_0 = e^{z_0}$ ausziehende gleichfalls geschlossene Kurve C' , die „nicht“ durch den Nullpunkt $w = 0$ hindurchzieht. Wir können C stetig und ohne Zerreißen in der endlichen z -Ebene unter Festhaltung des Punktes z_0 auf diesen Punkt zusammenziehen. Dem steht eine entsprechende Zusammenziehung von C' auf den Punkt w_0 gegenüber, ohne daß bei dieser Zusammenziehung C' über

1) Eine ganze transzendente Funktion $g(z)$ nimmt in keinem Punkte ihres Feldes F den Wert ∞ an. Nach einem von E. Picard entdeckten Satze kann es höchstens noch *einen* weiteren Wert w_0 geben, der von $g(z)$ in keinem Punkte des Feldes angenommen wird. Bei der Exponentialfunktion liegt in der Tat ein solcher Wert vor, nämlich $w_0 = 0$. Siehe übrigens betreffs des Picardschen Satzes „Osgood“, S. 707.

den Nullpunkt $w = 0$ hinweggeschoben würde oder auch nur den Nullpunkt erreichte.

Zeichnet man andererseits in der endlichen w -Ebene von einer von 0 verschiedenen Stelle w_0 aus irgendeine geschlossene, also in w_0 endigende Kurve C' , welche durch den Nullpunkt $w = 0$ nicht hindurchläuft, und wählen wir unter den unendlich vielen korrespondierenden Punkten $z_0 = \log w_0$ irgendeinen bestimmten aus, so überträgt sich C' auf eine in der endlichen z -Ebene liegende Kurve C , welche in z_0 beginnt und einem homologen Punkte $(z_0 + 2n\pi)$ endigt. Ist nun C' unter Festhaltung von w_0 auf diesen Punkt zusammenziehbar¹⁾, ohne dabei über den Nullpunkt hinweggezogen zu werden, oder auch nur diesen Punkt zu erreichen, so entspricht dem eine in der endlichen z -Ebene vor sich gehende stetige Abänderung von C bei Festbleiben des Anfangs- und des Endpunktes von C in der Art, daß C schließlich gleichfalls auf einen Punkt, nämlich z_0 zusammenschrumpft: Also ist der Endpunkt $(z_0 + 2n\pi)$ mit dem Anfangspunkte identisch, d. h. auch C ist eine „geschlossene“ Kurve.

Mit Hilfe dieser Betrachtung gelingt es leicht folgenden Satz zu zeigen: Ist $g(z)$ irgendeine (nicht mit einer Konstanten identische) rationale oder transzendente ganze Funktion, so ist:

$$(3) \quad g_0(z) = e^{g(z)}$$

eine ganze transzendente Funktion ohne Nullpunkte, und umgekehrt ist jede ganze transzendente Funktion $g_0(z)$ „ohne Nullpunkte“ in der Gestalt (3) mittelst einer ganzen Funktion $g(z)$ darstellbar.

Der erste Teil dieses Satzes ist einleuchtend, da $g_0(z)$ für alle endlichen z eindeutig und analytisch ist, nicht mit einer Konstanten identisch ist und für kein endliches z verschwindet. Um die Umkehrung zu zeigen, bilde man von der Funktion $w = g_0(z)$ den Logarithmus:

$$z' = \log w = \log g_0(z)$$

und ordne irgendeinem ersten z_0 , dem $w_0 = g_0(z_0)$ als von 0 verschiedener endlicher Wert eindeutig zugehört, unter den unendlich vielen entsprechenden Werten z' irgendeinen bestimmten z'_0 zu. Eine beliebige von z_0 ausziehende geschlossene Kurve C in der endlichen z -Ebene liefert in der w -Ebene von w_0 aus eine gleichfalls geschlossene Kurve C' , die nicht durch $w = 0$ hindurchläuft. Zieht man C auf den Punkt z_0 zusammen, so schrumpft entsprechend C' auf den Punkt w_0 zusammen, ohne daß hierbei C' über den Nullpunkt $w = 0$ hinweggeschoben würde oder auch nur diesen Punkt erreichte; denn kein endliches z liefert den Funktionswert $w = 0$. Z zufolge der vorausgeschickten Betrachtung über-

1) Solche Deformationen von Kurven sollen, ohne daß dies jedes Mal hervorgehoben wird, immer stetig und ohne Zerreißen ausgeführt werden.

trägt sich demnach C' auf eine von z'_0 ausziehende „geschlossene“ Kurve der Ebene von z' . Bei Fortsetzung längs irgendeines geschlossenen Weges C in der endlichen z -Ebene wird demnach die im Punkte z_0 eindeutig erklärte Funktion $z' = \log g_0(z)$ stets wieder zum Anfangswerte zurückkehren. Die Fortsetzung liefert demnach eine in der ganzen endlichen z -Ebene *eindeutige* und selbstverständlich analytische Funktion, d. h. eine Funktion $g(z)$, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 12. Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen.

Die in Gleichung (3) S. 46 bewerkstelligte Produktzerlegung einer ganzen rationalen Funktion ist auf Grund einer von Weierstrass¹⁾ ausgebildeten Theorie auf ganze transzendente Funktionen $g(z)$ übertragbar.

Hat erstlich $g(z)$ im Nullpunkte $z = 0$ selber einen Nullpunkt der Ordnung κ , so soll dieser vorweg besonders behandelt werden. Man erkennt in diesem Falle in $z^{-\kappa} \cdot g(z)$ sofort eine ganze transzendente Funktion, die für $z = 0$ nicht verschwindet, im übrigen aber alle Nullpunkte mit $g(z)$ gemein hat. Man betrachte demnach weiter die nicht bei $z = 0$ gelegenen Nullpunkte von $g(z)$, sofern solche vorkommen.

Ist z_1 irgendein von 0 verschiedener endlicher Wert, so ist in:

$$(1) \quad \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdot e^{g_1(z)},$$

wobei $g_1(z)$ irgendeine ganze (rationale oder transzendente) Funktion ist, eine ganze Funktion dargestellt, die nur einen, bei z_1 gelegenen, Nullpunkt erster Ordnung hat; und zugleich ist nach dem Schlußtheorem von § 11 jede ganze (rationale oder transzendente) Funktion, welche z_1 als einzigen Nullpunkt, und zwar von der ersten Ordnung, hat, in der Gestalt (1) darstellbar. Eine solche Funktion (1) heißt nach Weierstrass eine „*Primfunktion*“.

Es erledigt sich nun zunächst der Fall, daß $g(z)$ nur endlich viele Nullstellen hat, sehr leicht. Die nicht bei $z = 0$ gelegenen Nullpunkte seien $z_1, z_2, \dots, z_n$, wobei wir (was für die Schreibweise der Formeln eine Erleichterung sein wird) in dieser Reihe jeden Nullpunkt höherer Ordnung so oft hintereinander aufführen wollen, als seine Ordnung angibt. Ist $z = 0$ ein Nullpunkt der Ordnung κ von $g(z)$, so wird $z^{-\kappa} \cdot g(z)$ in derselben Weise wie das Primfunktionenprodukt:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot e^{g_k(z)}$$

1) in der Arbeit „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen“ Abh. der Berl. Akad. von 1876 oder Weierstrass' Werke, Bd. 2, S. 77. S. auch „Osgood“, S. 535.

verschwinden, so daß der Quotient von $z^{-\alpha} \cdot g(z)$ und diesem Produkte eine ganze Funktion ohne Nullpunkte darstellt, die sich nach § 11 als Exponentialfunktion einer ganzen Funktion $g_0(z)$ ausdrücken läßt. Jede ganze Funktion $g(z)$ mit endlich vielen Nullstellen ist hiernach als Produkt:

$$(2) \quad g(z) = e^{g_0(z)} z^{\alpha} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_k(z)}$$

darstellbar.¹⁾ Für die ganzen rationalen Funktionen ordnet sich dieser Gleichung die Darstellung (3) S. 46 unter.

Eine Hauptleistung von Weierstrass besteht nun in der Übertragung der Darstellung (2) auf den Fall, daß $g(z)$ unendlich viele Nullpunkte hat, wobei die ganzen Funktionen $g_k(z)$ derart auszuwählen sein würden, daß das entsprechend für $n = \infty$ gebildete Produkt (2) konvergiert. Dies erreicht man in gewissen, noch näher zu bezeichnenden Fällen dadurch, daß man $g_k(z)$ mit folgender ganzen rationalen Funktion gleichsetzt:

$$g_k(z) = \frac{z}{z_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{z_k}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{h} \left(\frac{z}{z_k}\right)^h,$$

deren Grad h eine bestimmte endliche von k unabhängige Zahl sein soll. Wir wollen hierbei die Möglichkeit, daß $g_k(z)$ identisch verschwindet, mit $h = 0$ eingeschlossen denken. Die außerhalb $z = 0$ gelegenen Nullpunkte bilden jetzt eine unendliche Reihe $z_1, z_2, z_3, \dots$, in der wir wieder jeden Nullpunkt in einer seiner Ordnung entsprechenden Anzahl von Malen aufgeführt denken. Setzen wir $|z_k| = r_k$, so dürfen wir die Anordnung so getroffen annehmen, daß stets:

$$r_k \geq r_{k-1}$$

gilt. Die Nullpunkte haben als einzige Häufungsstelle den wesentlich singulären Punkt ∞ unserer Funktion $g(z)$, d. h. es ist:

$$\lim_{k=\infty} r_k = \infty.$$

Ist demnach r irgendeine bestimmte endliche positive Zahl, so gibt es einen zugehörigen endlichen Index m derart, daß:

$$(3) \quad r_k > r \quad \text{für alle } k \geq m$$

zutrifft.

Es sei nun $\mathbf{T}$ irgendein endlicher Bereich der schlichten z -Ebene. Man wähle dann eine endliche Zahl r so, daß der Kreis des Radius r um den Nullpunkt der z -Ebene den Bereich $\mathbf{T}$ einschließt und seinem Rande nirgends nahekommt. Es wird demnach eine bestimmte zwischen

1) Der Fall, daß $g(z)$ im Nullpunkte nicht verschwindet, ist natürlich mit $\alpha = 0$ eingeschlossen.

0 und 1 gelegene Zahl q angegeben werden können, so daß für alle Punkte z des Bereiches $\mathbf{T}$ die Bedingung:

$$\frac{|z|}{r} < q < 1$$

und also um so mehr:

$$\frac{|z|}{r_k} < q < 1 \quad \text{für alle } k \geq m$$

gilt, unter m den schon in (3) benutzten Index verstanden.

Es wird nun zunächst der Ausdruck:

$$(4) \quad z^n \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot e^{g_k(z)},$$

der sicher eine ganze Funktion darstellt, alle innerhalb und auf der Peripherie des Kreises vom Radius r um den Nullpunkt $z = 0$ gelegenen Nullpunkte der vorgelegten ganzen Funktion $g(z)$ erschöpfen.

Für jeden endlichen Index $n > m$ gilt andererseits:

$$(5) \quad \prod_{k=m}^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_k(z)} = e^{\sum_{k=m}^n \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + g_k(z)\right)},$$

wobei die rechts im Exponenten auftretende Funktion $\log \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$ für jedes $k \geq m$ zufolge (3) eine in $\mathbf{T}$ eindeutige Funktion von z ist, welche wir als Summe der in $\mathbf{T}$ konvergenten Reihe:

$$\log \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) = -\frac{z}{z_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_k}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{z_k}\right)^3 - \dots$$

erklären können. Die Frage ist nun, ob in (5) auch $n = \infty$ werden darf, ohne daß dieser Ausdruck aufhört, in $\mathbf{T}$ eine analytische Funktion von z darzustellen.

Um hierüber zu entscheiden, schätze man das einzelne Glied der in (5) rechter Hand im Exponenten stehenden Reihe auf seinen absoluten Betrag ab. Aus der für $g_k(z)$ vorgeschriebenen Gestalt folgt:

$$\log \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + g_k(z) = -\sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{z}{z_k}\right)^l = -\left(\frac{z}{z_k}\right)^{h+1} \sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{z}{z_k}\right)^{l-h-1}$$

und also, da $l \geq 1$ ist, mit Rücksicht auf die oben für $|z|$ und r_k vorausgesandten Ungleichungen:

$$\left| \log \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + g_k(z) \right| < \frac{r^{h+1}}{1-q} \cdot \left(\frac{1}{r_k}\right)^{h+1}.$$

Wenn demnach die absoluten Beträge r_k der Nullstellen z_k die Bedingung erfüllen, daß die unendliche Reihe:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{r_k}\right)^{h+1}$$

oder (was auf dasselbe hinauskommt) die Reihe:

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_k}\right)^{h+1}$$

konvergiert, so wird die in (5) rechts im Exponenten stehende Reihe für $n = \infty$ absolut und also unbedingt (d. i. unabhängig von der Anordnung der Glieder) sowie gleichmäßig (nämlich für alle in $\mathbf{T}$ gelegenen z) konvergieren.

Differenzieren wir nun die Reihe:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) + g_k(z) \right)$$

gliedweise, so folgt als „abgeleitete Reihe“:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \cdots + \frac{z^{h-1}}{z_k^h} \right).$$

Auch diese Reihe konvergiert, wie mittels desselben Abschätzungsverfahrens bewiesen wird, in $\mathbf{T}$ unbedingt und gleichmäßig. Also zeigt die schon S. 13 ff. benutzte Schlußweise, daß durch die letzte Reihe in $\mathbf{T}$ die Ableitung der durch die vorletzte Reihe daselbst dargestellten stetigen Funktion geliefert wird. Diese Reihe und demnach auch ihre Exponentialfunktion, d. i. das unendliche Produkt:

$$\prod_{k=m}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{g_k(z)}$$

stellen hiernach *unter Voraussetzung der Konvergenz der unendlichen Reihe* (6) eine in $\mathbf{T}$ überall analytische Funktion dar.

Indem wir dieselbe mit dem Produkte (4) multiplizieren, ergibt sich weiter, daß das *unendliche Produkt*:

$$z^{\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{g_k(z)}$$

unabhängig von der Anordnung der Faktoren eine im Bereiche $\mathbf{T}$, d. h. also in jedem endlichen Bereiche der z -Ebene, eindeutige und daselbst überall analytische Funktion von z darstellt.

Wir haben damit eine ganze transzendente Funktion gewonnen, welche genau dieselben Nullpunkte wie $g(z)$ hat. Nach dem Schlußtheorem von § 11 unterscheiden sich demnach diese beiden Funktionen nur um einen Exponentialfaktor $e^{g_0(z)}$. Wir haben also folgenden grundlegenden Satz gewonnen: *Kann man eine endliche, nicht-negative ganze Zahl h angeben, so daß die absoluten Beträge r_k der unendlich vielen*

Nullpunkte $z_1, z_2, \dots$ der ganzen Funktion $g(z)$ eine „konvergente“ Reihe (6) liefern, so gestattet die Funktion $g(z)$ die Darstellung in Gestalt des unendlichen Produktes:

$$(7) \quad g(z) = e^{g_0(z)} z^{\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{p_k(z)},$$

welches in jedem endlichen Bereiche der z -Ebene unabhängig von der Anordnung der Faktoren konvergiert und den Funktionswert $g(z)$ liefert.

Die (für die künftige Verwendung statthafte) Beschränkung liegt hiernach darin, daß wir die Existenz einer bestimmten endlichen ganzen Zahl h voraussetzen, für welche die Reihe (6) konvergiert. Im übrigen werden wir h so klein als möglich wählen, d. h. falls $h > 0$ ist, soll nicht schon für die um eine Einheit verkleinerte Zahl h die Konvergenz der Reihe (6) zutreffen. Die so bestimmte ganze Zahl h nennt man die „Höhe“ der ganzen transzendenten Funktion $g(z)$, vorausgesetzt, daß $g_0(z)$ eine „rationale“ ganze Funktion ist, deren Grad h' die Zahl h nicht übertrifft. Ist $g_0(z)$ zwar rational, aber von einem Grade $h' > h$, so nennt man h' die „Höhe“ von $g(z)$.

Die Funktion $\log g(z)$ ist unendlich vieldeutig und hat in jedem Nullpunkte von $g(z)$ einen wesentlich singulären Punkt. Dagegen ist die Ableitung von $\log g(z)$ wieder eindeutig und abgesehen von unendlich vielen in den Nullpunkten von $g(z)$ liegenden Polen erster Ordnung im Endlichen überall analytisch. Es gilt die folgende Darstellung:

$$(8) \quad \frac{d \log g(z)}{dz} = g'_0(z) + \frac{\alpha}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \dots + \frac{z^{h-1}}{z_k^h} \right)$$

als „Partialbruchentwicklung“ der links stehenden Funktion, wobei die unendliche Reihe, abgesehen davon, daß in den Punkten $z_1, z_2, \dots$ jeweils einzelne Glieder der Reihe Pole besitzen, in jedem endlichen Bereiche der z -Ebene unbedingt und gleichmäßig konvergiert. Dies ist bereits durch die obige Konvergenzbetrachtung mit bewiesen. Übrigens sind dieselben Hilfsmittel mit dem gleichen Erfolge auch beim Beweise der nachfolgenden weiteren Darstellungen anwendbar:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \log g(z)}{dz^2} &= g''_0(z) - \frac{\alpha}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z - z_k)^2} - \frac{1}{z_k^2} - \frac{2z}{z_k^3} - \dots - \frac{(h-1)z^{h-2}}{z_k^h} \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Dabei gilt, um es nochmals zu betonen, die Konvergenz der Reihe (6) stets als Voraussetzung.

§ 13. Die rationalen Funktionen und ihre inversen Funktionen.

Die ganzen rationalen Funktionen gehören als eine besondere Art der Klasse der „rationalen Funktionen“ an, welche wir in folgender Art zu erklären haben: *Eine Funktion, deren Feld die schlichte und vollständige z -Kugel ist, heißt eine „rationale Funktion“ und werde mit der besonderen Bezeichnung $R(z)$ belegt.*

Eine solche Funktion $R(z)$ hat an singulären Punkten nur Pole, und zwar kann $R(z)$ nur endlich viele Pole haben, da ja sonst mindestens eine Häufungsstelle der Pole eintreten würde, in der $R(z)$ entgegen der Annahme sich nicht analytisch verhalten könnte. Mögen im Endlichen insgesamt n Pole auftreten, nämlich bei $z = s_1, s_2, \dots, s_n$; dabei sei m_i die Ordnung des Poles s_i . Die Funktion $R(z)$ gestattet dann in der Umgebung von s_i die Darstellung:

$$R(z) = \frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i}} + \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(i)}}{z - s_i} + c_0^{(i)} + c_1^{(i)}(z - s_i) + \dots$$

Hieraus geht hervor, daß die Differenz:

$$R(z) - \frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i}} - \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i-1}} - \dots - \frac{c_{-1}^{(i)}}{z - s_i}$$

im Punkte s_i endlich und analytisch bleibt; dabei stellt sie wieder eine rationale Funktion dar, welche die übrigen Pole von $R(z)$ in den bisherigen Ordnungen, aber keine weiteren Pole besitzt. Indem man entsprechende Aggregate für die übrigen im Endlichen liegenden Pole abzieht, gewinnt man schließlich in:

$$R(z) - \sum_{i=1}^n \left[\frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i}} + \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(i)}}{z - s_i} \right]$$

eine Funktion, die im Endlichen keine singulären Punkte mehr hat, mithin eine *ganze* rationale Funktion (vgl. S. 44) darstellt. Wir wollen den Grad dieser ganzen Funktion m_0 nennen, wobei wir auch die Möglichkeit $m_0 = 0$ zulassen, wenn nämlich die ganze Funktion mit einer Konstanten identisch ist, wenn also $R(z)$ bei $z = \infty$ keinen Pol hat. Setzen wir für die ganze Funktion ihren Ausdruck (6) S. 44 an, so ergibt sich für die rationale Funktion $R(z)$ eine Darstellung in Gestalt der „Partialbruchentwicklung“:

$$(1) \quad R(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m_0} z^{m_0} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i}} + \frac{c_{-m_i+1}^{(i)}}{(z - s_i)^{m_i-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(i)}}{z - s_i} \right].$$

Verstehen wir unter $g_1(z)$ die nachfolgende ganze Funktion:

$$g_1(z) = (z - s_1)^{m_1} (z - s_2)^{m_2} \dots (z - s_n)^{m_n},$$

so wird das Produkt $R(z) \cdot g_1(z)$ eine rationale *ganze* Funktion, die durch $g_0(z)$ bezeichnet werde. Es folgt hieraus für die rationale Funktion $R(z)$ eine *Darstellung als Quotient zweier „ganzer“ rationaler Funktionen*:

$$(2) \quad R(z) = \frac{g_0(z)}{g_1(z)}.$$

Die Summe der Ordnungen aller Pole von $R(z)$ heiße m :

$$m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m$$

und werde der „Grad“ der rationalen Funktion $R(z)$ genannt. Da das Feld der Funktion $R(z)$ die schlichte und vollständige z -Kugel ist, so können wir den Schlußsatz von § 8, S. 39, wieder genau in derselben Art auf $R(z)$ anwenden, wie dies bei den ganzen rationalen Funktionen S. 45 geschah. Die Summe der Ordnungen aller Nullpunkte von $R(z)$ ist wieder gleich m . Ist aber w_0 ein beliebiger endlicher Wert, so hat $(R(z) - w_0)$ als rationale Funktion dieselben Pole wie $R(z)$ in den gleichen Ordnungen. Also ist auch die Summe der Ordnungen der Nullpunkte von $(R(z) - w_0)$ wieder gleich m . Wir können dies Ergebnis genau wie bei den ganzen Funktionen in die Gestalt kleiden: *Die rationale Funktion $R(z)$ vom m^{ten} Grade heißt auf der z -Kugel m -wertig, insofern sie irgendeinen komplexen Wert w_0 , den Wert ∞ nicht ausgeschlossen, stets in m Punkten der z -Kugel annimmt, auch hier unter dem Vorbehalte, daß diese m Punkte keineswegs durchweg voneinander verschieden zu sein brauchen.*

Was die letztere Möglichkeit von Koinzidenzen unter den m Punkten mit gegebenem w_0 angeht, so gelangen wir hier wieder zu ähnlichen Ergebnissen wie bei den ganzen rationalen Funktionen.¹⁾ Ist w_0 zunächst ein beliebiger *endlicher* komplexer Wert, der in einem ersten, gleichfalls endlichen Punkte z_0 stattfindet, so wird, falls $R'(z_0)$ nicht verschwindet, die Umgebung von z_0 durch unsere Funktion $w = R(z)$ auf einen schlichten Bereich um w_0 abgebildet. Ist indessen $R'(z_0) = 0$, und ist, wie wir gleich annehmen, $R^{(v)}(z_0)$ die Ableitung niederster Ordnung, welche in z_0 nicht verschwindet, so wird die schlichte Umgebung von z_0 auf eine ν -blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte w_0 abgebildet. Genau wie S. 47 erkennen wir, daß von den m Stellen der z -Kugel, welche den Funktionswert w_0 tragen, ν Stellen bei z_0 koinzidieren.

Die erste Ableitung $R'(z)$ hat im zuletzt betrachteten Falle bei z_0

1) Die nächstfolgende Betrachtung setzt wieder $m > 1$ voraus; jedoch wird man im niedersten Falle $m = 1$ den aufzustellenden Satz über die Abbildung der z -Kugel mittelst der Funktion $w = R(z)$ leicht direkt bestätigen. Übrigens kommen wir auf den Fall $m = 1$ im § 14 ausführlich zurück.

einen Nullpunkt der Ordnung $(\nu - 1)$. Da $g_1(z_0)$ nicht verschwindet¹⁾, so folgt auf Grund der Darstellung (2) unserer Funktion, daß z_0 eine $(\nu - 1)$ -fache Wurzel der Gleichung:

$$(3) \quad g_1(z)g_0'(z) - g_1'(z)g_0(z) = 0$$

ist. Auch umgekehrt liefert eine $(\nu - 1)$ -fache Wurzel z_0 dieser algebraischen Gleichung, welche von den besonderen Werten $s_1, s_2, \dots, s_n$ verschieden ist, immer eine Stelle z_0 betrachteter Art, deren schlichte Umgebung sich also auf eine Windungsfläche um $w_0 = R(z_0)$ überträgt.

Aber auch die n Pole s_i ordnen sich hier leicht ein. Ist nämlich die Ordnung m_i des einzelnen Poles s_i gleich 1, so ist s_i keine Lösung der Gleichung (3), und es wird die schlichte Umgebung von s_i auf einen gleichfalls schlichten Bereich um den Bildpunkt ∞ übertragen. Ist aber $m_i > 1$, so wird die Umgebung von s_i auf eine $(m_i - 1)$ -blättrige Windungsfläche mit dem Verzweigungspunkte ∞ abgebildet, und hierfür ist eben wieder charakteristisch, daß die Gleichung (3) die $(m_i - 1)$ -fache Wurzel s_i hat.

Schließlich wird auch die Stelle $z = \infty$ leicht erledigt. Liegt hier selbst ein Pol der Ordnung $m_0 = 1$ oder ist $R(\infty)$ gleich dem endlichen Werte c_0 , jedoch so, daß $(R(z) - c_0)$ bei $z = \infty$ einen *einfachen* Nullpunkt hat, so liefert die Umgebung von $z = \infty$ ein schlichtes Abbild um den Bildpunkt. Im ersten Falle ist $g_0(z)$ vom Grade m und $g_1(z)$ vom Grade $(m - 1)$; im zweiten Falle aber ist $(g_0(z) - c_0g_1(z))$ vom Grade $(m - 1)$ und $g_1(z)$ vom Grade m . Für beide Fälle ist charakteristisch, daß die Gleichung (3) den Grad $(2m - 2)$ aufweist. Liegt aber bei $z = \infty$ ein Pol der Ordnung $\nu = m_0 > 1$, oder hat daselbst $(R(z) - c_0)$ einen Nullpunkt der Ordnung $\nu > 1$, so gewinnen wir als Abbild der schlichten Umgebung von $z = \infty$ eine ν -blättrige Windungsfläche. In beiden Fällen aber stellt man leicht $(2m - \nu - 1)$ als Grad der Gleichung (3) fest. *Der Gleichmäßigkeit wegen werden wir sie auch in diesem Falle als eine Gleichung $(2m - 2)$ ten Grades auffassen, welche neben $(2m - \nu - 1)$ endlichen Lösungen noch die $(\nu - 1)$ -fache Lösung ∞ hat.*

Hiermit sind zugleich alle Vorbereitungen getroffen, um das Gesamtbild der z -Kugel über der w -Kugel und damit das Feld der zu $w = R(z)$ inversen Funktion $z = \varphi(w)$ zu übersehen. Werden wieder (wie S. 46) die unterschiedenen Lösungen der Gleichung $(2m - 2)$ ten Grades (3) mit $t_1, t_2, \dots, t_l$ bezeichnet und ist t_i eine λ_i -fache Wurzel, so bildet sich die schlichte Umgebung von t_i auf eine Windungsfläche mit der Blätteranzahl $\nu_i = \lambda_i + 1$ und dem Verzweigungspunkt

1) Der Wert w_0 war als *endlich* vorausgesetzt.

$e_i = R(t_i)$ ab. Die Umgebung jedes anderen Punktes z_0 aber liefert wieder ein schlichtes Abbild um den Bildpunkt w_0 . Wir gelangen also zu dem Ergebnisse: *Das durch die Funktion $w = R(z)$ gelieferte Abbild der z -Kugel und damit das Feld der inversen Funktion $z = \varphi(w)$ ist eine zusammenhängende, geschlossene, m -blättrige Riemannsche Fläche F_m über der w -Kugel mit den l Verzweigungspunkten $e_1, e_2, \dots, e_l$; im Verzweigungspunkte e_i hängen dabei $v_i = \lambda_i + 1$ Blätter zusammen und gehen beim Umlauf um diesen Punkt, wie es die zugehörige Windungsfläche zeigt, ineinander über. Die Abbildung ist im allgemeinen eine konforme; nur tritt eine Unterbrechung der Konformität in bekannter Weise (vgl. S. 35) in jedem der Verzweigungspunkte ein. Da $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l$ gleich dem Grade $(2m - 2)$ der algebraischen Gleichung (3) ist, so besteht zwischen der Gesamtzahl m der Blätter und den Anzahlen ν der in den einzelnen Verzweigungspunkten zusammenhängenden Blätter die Relation:*

$$(4) \quad 0 = -m + 1 + \sum_{i=1}^l \frac{\nu_i - 1}{2}$$

Auch hier ist ein synthetischer Aufbau der Riemannschen Fläche F_m genau in derselben Weise durchführbar, wie derselbe S. 48 ausführlich für den Fall einer ganzen rationalen Funktion beschrieben wurde. Ebenso ist die Anordnung und der Zusammenhang der Blätter wieder in besonders anschaulicher Weise dadurch darstellbar, daß man F_m rückwärts auf die z -Kugel abbildet, wo die m übereinander geordneten Blätter m nebeneinander gelagerte Bereiche ergeben, die die z -Kugel gerade schlicht und vollständig bedecken.

Wir erläutern diese Maßregel an der späterhin noch näher zu betrachtenden Funktion sechsten Grades:

$$w = \frac{4(z^2 - z + 1)^3}{27z^2(1 - z)^2},$$

die wir auch durch die Proportion geben können:

$$(5) \quad w : (w - 1) : 1 = 4(z^2 - z + 1)^3 : (2z^3 - 3z^2 - 3z + 2)^2 : 27z^2(1 - z)^2.$$

Die zugehörige Gleichung (3) hat, wie man leicht ausrechnet, je eine Doppelwurzel an den beiden Stellen $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, die beide $w = 0$ liefern, je eine einfache Wurzel an den drei Stellen $z = -1, \frac{1}{2}, 2$, die übereinstimmend $w = 1$ ergeben, und endlich je eine einfache Wurzel an den drei Stellen $z = 0, 1, \infty$, die wieder ein und denselben Wert w , nämlich ∞ liefern. *Die zur sechsdeutigen Funktion $z = \varphi(w)$ gehörende Fläche F_6 hat demnach zwei je dreiblättrige Verzweigungspunkte, die bei $w = 0$ übereinanderliegen, drei zweiblättrige Verzweigungspunkte bei $w = 1$ und ebenfalls drei zweiblättrige Verzweigungspunkte bei $w = \infty$.*

Beim synthetischen Aufbau dieser F_6 wollen wir (unter geringfügiger Abweichung von der S. 48 befolgten Maßregel) die w -Ebene längs der *ganzen* durch die drei Verzweigungspunkte $w = 0, 1, \infty$ ziehenden reellen Achse durchschneiden. Ohne indessen die zwölf „Halbblätter“ dann unmittelbar längs der „Verzweigungsschnitte“ S zusammenzuheften, wollen wir sogleich ihre zwölf konformen Abbilder in der schlichten z -Ebene aufsuchen. Um die Zeichnungen anschaulich zu gestalten, wollen wir dasjenige Halbblatt der w -Ebene, welches die komplexen Werte w mit „positiven“ imaginären Bestandteilen trägt, und das wir dieserhalb als das „positive“ Halbblatt oder die „positive“ Halbebene bezeichnen, mit einer Schraffierung versehen (vgl. Fig. 10), während das „negative“ Halbblatt frei bleiben soll. Indem wir die sechs Abbilder der positiven Halbblätter in der z -Ebene gleichfalls schraffieren, entspringt die Bereicheinteilung der z -Ebene, wie sie in Fig. 11 dargestellt ist. *Es sind also zwölf von Kreisen und Geraden begrenzte dreieckige Bereiche, welche die zwölf Halbblätter der F_6 konform abbilden und in ihrer Nebeneinanderordnung den Zusammenhang der Blätter von F_6 zur Anschauung bringen.* Die in Fig. 11 in Klammern angegebenen Zahlen sind die

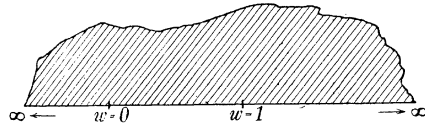


Fig. 10.

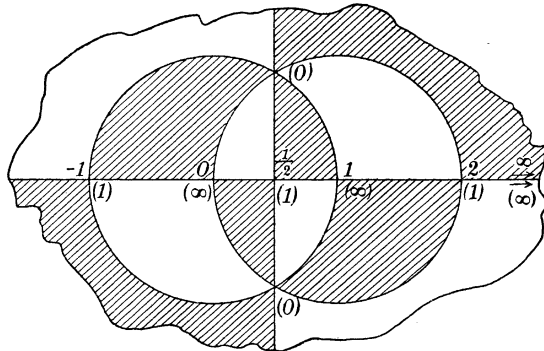


Fig. 11.

Funktionswerte w , die den Argumenten $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $-1, \frac{1}{2}, 2, 0, 1, \infty$ entsprechen und also von den Verzweigungspunkten herrühren.

Die wahre Bedeutung dieser Figur wird uns später in anderem Zusammenhange beschäftigen. Die Richtigkeit der Angaben wolle man hier zunächst auf elementarem Wege bestätigen, indem man z. B. für $z = \frac{1}{2} + iy$ die Funktion w in die Gestalt setzt:

$$w = \frac{(3 - 4y^2)^3}{27(1 + 4y^2)^2}$$

oder für $z = e^{j\vartheta}$ in die Form:

$$w = \frac{2(1 - 2\cos\vartheta)^3}{27(1 - \cos\vartheta)}$$

oder die Funktion für reelle z berechnet usw.

§ 14. Die linearen Substitutionen und der Begriff der Kreisverwandtschaft.

Einige besondere Ausführungen haben wir an die Entwicklungen von § 13 für den niedersten Fall anzuschließen, daß nämlich die Blätteranzahl der daselbst mit F_m bezeichneten Riemannsche Fläche insbesondere $m = 1$ ist. F_1 ist die schlichte und vollständige w -Kugel, welche, da Verzweigungspunkte jetzt ausgeschlossen sind, ohne Ausnahme konform auf die z -Kugel bezogen ist. *Eine Funktion, welche die schlichte und vollständige z -Kugel ausnahmslos konform auf die schlichte und gleichfalls vollständige w -Kugel abbildet, ist eine rationale Funktion ersten Grades oder kurz eine „lineare“ Funktion und hat die Gestalt:*

$$(1) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Aus der Gestalt der Ableitung:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

oder auch durch direkte Betrachtung von (1) folgt, daß der Ausdruck $(ad - bc)$, den man als „Determinante“ der linearen Funktion (1) bezeichnet, von 0 verschieden sein muß:

$$(2) \quad ad - bc \neq 0.$$

Gewöhnlich deutet man die komplexen Werte w gleich auf der z -Kugel selber, schreibt dann z' an Stelle von w und:

$$(3) \quad z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

anstatt der Gleichung (1). Man sagt im Anschluß hieran, die z -Kugel werde mittelst der „linearen Substitution“ (3) in sich selbst transformiert.

Eine solche Transformation hat nun neben ihren Eigenschaften der Eindeutigkeit und Winkeltreue die dritte grundlegende Eigenschaft, daß sie die Kreise der z -Kugel stets wieder in Kreise überführt. Man sagt, das System aller Kreise der z -Kugel sei gegenüber der Transformation mittelst einer linearen Substitution (3) invariant. Operieren wir mit der z -Ebene, so müssen wir, entsprechend dem Schlußsatze von § 5, S. 23, die gesamten Geraden der z -Ebene als Kreise mit dem Radius ∞ den Kreisen zurechnen; auf der z -Kugel werden diese besonderen Kreise einfach diejenigen durch den Punkt $z = \infty$.

Eine umkehrbar eindeutige Beziehung einer Ebene auf eine zweite oder auch einer Ebene auf sich selbst, bei der Kreisen immer wieder Kreise entsprechen, nennt man nach Moebius¹⁾ eine „Kreisverwandtschaft“.

1) „Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung“, Abh. der Leipz. Ges. d. Wiss., Bd. 2 (1855), S. 529 oder Moebius, Ges. Werke, Bd. 2, S. 243.

schaft“. Eine solche Kreisverwandtschaft liegt also, wie wir behaupten, bei jeder Transformation (3) unserer z -Kugel in sich vor.

Der Beweis dieser Behauptung werde zunächst für den Fall geführt, daß $c = 0$ ist und also eine „ganze“ lineare Funktion:

$$z' = az + b$$

vorliegt. Hier ist zufolge (2) sicher a von 0 verschieden. Wir schreiben $a = |a|e^{ai}$ und können den Übergang von z zu z' durch Vermittlung zweier Variablen z'', z''' so vollziehen:

$$z'' = e^{ai}z, \quad z''' = |a|z'', \quad z' = z''' + b.$$

Die vorgelegte „ganze“ lineare Substitution können wir demnach erzeugen, indem wir nacheinander die drei noch spezieller gebauten Substitutionen:

$$(4) \quad z'' = e^{ai}z, \quad z''' = |a|z'', \quad z' = z''' + b$$

ausüben.

Daß nun jede dieser Substitutionen eine Kreisverwandtschaft liefert, macht man sich leicht mittelst einer geometrischen Deutung der Substitutionen klar. In der Tat wollen wir geradezu eine mechanische Deformation der z -Ebene oder z -Kugel in sich vornehmen, bei welcher der einzelne Punkt z nach seinem durch die Substitution zugeordneten Punkte z' in geeigneter Weise hingeführt wird.

Die erste Substitution (4) wird einfach mittelst einer Drehung der z -Ebene um ihren Nullpunkt durch den Winkel α vollzogen. Die einzelnen Punkte z wandern hierbei über konzentrische Kreise um den Nullpunkt; diese Kreise sollen demnach die „Bahnkurven“ der Substitution heißen. Die vom Nullpunkte ausziehenden geradlinigen Strahlen, welche die Bahnkurven senkrecht schneiden, heißen die „Niveaukurven“ der Substitution; die auf gemeinsamer Niveaukurve liegenden Punkte werden bei der fortschreitenden Bewegung stets auf einer solchen Kurve verbleiben.

Auf der z -Kugel beschreibt man die Verhältnisse am einfachsten unter Gebrauch einer geographischen Sprechweise. Nach den Formeln (5) ff. S. 23 entspricht dem Nullpunkt $z = 0$ der „Nordpol“, dem Punkte ∞ der „Südpol“ der Kugel. Die eben gewonnenen Bahnkurven der ersten Substitution (4) liefern die „Parallelkreise“, die Niveaukurven aber ergeben die „Meridianhalbkreise“. Hier ist nun die Substitution einfach mittelst der Drehung der Kugel um ihre „Achse“ durch den Winkel α zu vollziehen, wobei die beiden festbleibenden Pole als die „Fixpunkte“ der Substitution bezeichnet werden. Daß bei der Drehung der Kugel die Kreise immer wieder in Kreise übergehen, ist unmittelbar einleuchtend.

Bei der zweiten Substitution (4) entspricht dem einzelnen Punkte $z = re^{\vartheta i}$ ein Punkt desselben ϑ und des zu r proportionalen Radiusvektor $r' = |a| r$. Bei der mechanischen Deformation müssen wir uns die z -Ebene oder z -Kugel als eine elastische Membran denken. Der einzelne Punkt wird dann, wenn wir sogleich die z -Kugel benutzen, über seinen Meridianhalbkreis hingeführt, und zwar in der Richtung auf den Südpol oder Nordpol, je nachdem $|a| > 1$ oder < 1 ist.¹⁾ Die Meridianhalbkreise sind also jetzt die „Bahnkurven“, und wir dürfen uns die Bewegung derart vollzogen denken, daß die Parallelkreise als „Niveaukurven“ dienen. Auch bei dieser Bewegung bleiben die beiden Pole fest, stellen also wieder „Fixpunkte“ der Substitution dar. In der z -Ebene sind wir hier einfach zu einer „Ähnlichkeitstransformation“ gelangt, so benannt, weil jede Figur in eine ihr ähnliche übergeht, also insbesondere ein Kreis stets wieder in einen Kreis.

Ehe wir die dritte Substitution (4) erledigen, wollen wir aus den beiden ersten die Substitution:

$$z' = az = |a| e^{\alpha i} z$$

zusammensetzen und haben dabei, um nicht zu den bisherigen Fällen zurückzukommen, $|a| \geq 1$ und α als im Innern des Intervalles $0 < \alpha < 2\pi$ gelegen anzunehmen. Natürlich könnten wir hier zwei Deformationen der bisher besprochenen Arten hintereinander ausüben, wobei insbesondere die beiden Pole der Kugeloberfläche sich wieder als „Fixpunkte“ der Substitution erweisen. Es ist aber auch möglich, die Substitution $z' = az$ unter dem Bilde einer einzigen Deformation vorzustellen. Zu diesem Zwecke überdecken wir die z -Ebene einfach und lückenlos mit einer Schar kongruenter „logarithmischer Spiralen“, die gegeben sind durch die Gleichung:

$$(5) \quad r = C_1 \cdot e^{\frac{\vartheta \log |a|}{\alpha}},$$

unter C_1 den Parameter verstanden. Auf der z -Kugel liefern die Spiralen eine Schar kongruenter „Loxodromen“, deren einzelne jeden der beiden Pole unendlich oft spiralig umläuft, und die man gewöhnlich als „isogonale Trajektorien“ der Meridianhalbkreise einzuführen pflegt. Da nun zwei einander entsprechende Punkte z und $z' = az$ stets auf ein und derselben Loxodrome liegen, so können wir die Schar (5) der Loxodromen als die „Bahnkurven“ bei der mechanischen Ausführung der Substitution benutzen. Die zu (5) orthogonale Schar:

$$(6) \quad r = C_2 \cdot e^{-\frac{\vartheta \alpha}{\log |a|}}$$

1) Den Fall $|a| = 1$ der sogenannten „identischen“ Substitution, bei der jeder Punkt z an seiner Stelle bleibt, dürfen wir außer acht lassen.

liefert wieder kongruente logarithmische Spiralen bzw. Loxodromen. Diese werden durch unsere Substitution ineinander übergeführt, und zwar die vom Parameter C_2 in die des Parameters:

$$C'_2 = C_2 \cdot |a| e^{\frac{\alpha^2}{\log|a|}}.$$

Bei der mechanischen Überführung der z -Kugel aus der Anfangslage in die Endlagen mögen demnach die Loxodromen (6) die Niveaukurven abgeben. Fig. 12 erläutere diese Vorstellungen an einem der z -Ebene angehörenden Bilde.

Die letzte Substitution (4) hat wieder elementaren Charakter, insofern sie durch eine „Parallelverschiebung“ oder „Translation“ der z -Ebene in sich vollzogen wird, bei der insbesondere der Nullpunkt auf geradliniger Strecke zum Punkte b hingeführt wird. Die Schar der zu dieser Strecke parallelen Geraden liefert die „Bahnkurven“, die orthogonale Geradenschar die „Niveaukurven“. Auf der z -Kugel liefern die Bahnkurven eine Schar von Kreisen, die sich im „Südpol“ berühren, die Niveaukurven ergeben die zugehörige orthogonale Kreisschar. Der „Südpol“ $z = \infty$ ist jetzt der einzige sich selbst entsprechende Punkt oder „Fixpunkt“ der Substitutionen. Daß wir hier mit einer Kreisverwandtschaft zu tun haben, ist wieder einleuchtend.

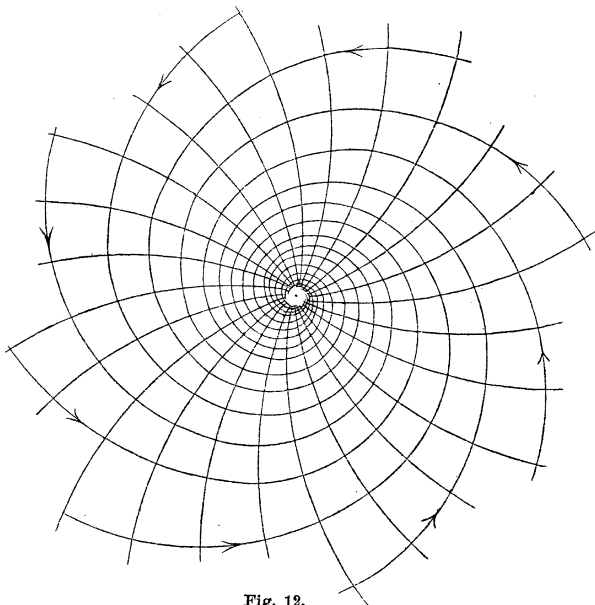


Fig. 12.

Liegt jetzt zweitens eine Substitution (3) mit nicht verschwindendem c vor, so können wir schreiben:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{-(ad - bc)}{c^2 z + cd} + \frac{a}{c}.$$

Benutzen wir somit die Abkürzungen:

$$\frac{-c^2}{ad - bc} = a', \quad \frac{-cd}{ad - bc} = b', \quad \frac{a}{c} = b'',$$

so können wir die vorgelegte Substitution durch Vermittlung zweier Variablen z'' und z''' so auflösen:

$$z'' = a'z + b', \quad z''' = \frac{1}{z''}, \quad z' = z''' + b''.$$

Jede Substitution mit nicht verschwindendem c läßt sich demnach durch drei aufeinanderfolgende Substitutionen erzeugen, von denen die erste und dritte der schon erledigten Art $z' = az + b$ angehören, während als neu die zweite Substitution von der Gestalt:

$$z' = \frac{1}{z}$$

hinzukommt. Daß aber auch diese eine Kreisverwandtschaft darstellt, ist wieder sofort einleuchtend; denn es entspricht bei ihr dem Kreise:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

der Kreis von der Gleichung:

$$D(x'^2 + y'^2) + Bx' - Cy' + A = 0.$$

Der ausgesprochene Charakter unserer linearen Substitutionen (3) ist damit allgemein als zutreffend erkannt. *

Die geometrisch-mechanischen Ausführungen über die Substitutionen (4) überträgt man leicht auch auf alle Substitutionen (3) mit nicht verschwindendem c . Man stelle erstlich fest, daß eine solche Substitution immer zwei „Fixpunkte“ hat. Soll nämlich durch (3) der Punkt z sich selbst zugeordnet sein, so ist $z' = z$, und also genügt z der quadratischen Gleichung:

$$(7) \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Sind erstlich die Lösungen dieser Gleichung voneinander verschieden, so wollen wir sie z_1 und z_2 nennen.¹⁾ Die Substitution (3) muß sich dann umrechnen lassen auf die Gestalt:

$$(8) \quad \frac{z' - z_1}{z' - z_2} = m \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

wo der konstante Faktor m als „Multiplikator“ der Substitution bezeichnet wird. Es ist nämlich der links stehende Ausdruck selbst wieder eine lineare Funktion von z , welche die rechts stehende Gestalt haben muß, da ihr Nullpunkt in z_1 und ihr Pol in z_2 gelegen ist. Führen wir an Stelle von z die Variable:

$$(9) \quad Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

ein, so rechnet sich unsere Substitution (8) auf die neue Gestalt um:

$$Z' = mZ = |m| e^{i\alpha} Z,$$

1) Da c als von 0 verschieden gilt, so sind z_1 und z_2 endlich.

auf welche unmittelbar die für die beiden ersten Substitutionen (4) gegebenen Ausführungen übertragen werden können. Das Bild der Z -Kugel mit ihren Parallelkreisen, Meridianhalbkreisen und Loxodromen hat man dann durch die Transformation (9), welche ja selber wieder eine Kreisverwandtschaft liefert, auf die z -Kugel zu übertragen, wobei die Meridiankreise in die Schar der Kreise durch die beiden Punkte z_1 , z_2 übergeht, die Parallelkreise in die zur eben gewonnenen orthogonalen Kreisschar, während die Loxodromen auf der z -Kugel Doppelspiralen liefern, welche jede der eben genannten Kreisscharen isogonal durchsetzen.

Ist erstlich $|m| = 1$, so heißt die Substitution „*elliptisch*“.¹⁾ Die Kreise durch z_1 und z_2 liefern die Niveaufurven, die orthogonale Kreisschar stellt die Bahnkurven; die Substitution hat den Charakter einer Drehung der z -Ebene um z_1 und z_2 . Ist $\mu = 0$, so heißt die Substitution „*hyperbolisch*“. Nun sind die z_1 und z_2 verbindenden Kreise die Bahnkurven, und die zu ihnen orthogonalen Kreise liefern die Niveaufurven. Es findet eine Deformation der Ebene vom einen Fixpunkte in der Richtung auf den anderen längs der Bahnkurven statt, wie man sich die an Fig. 13 (die auch zur Erläuterung des elliptischen Falles dienen kann) deutlich mache. Ist weder $|m| = 1$ noch $\mu = 0$, so heißt die Substitution „*loxodromisch*“; ihr entspricht eine schraubenartige Deformation der z -Kugel in sich.

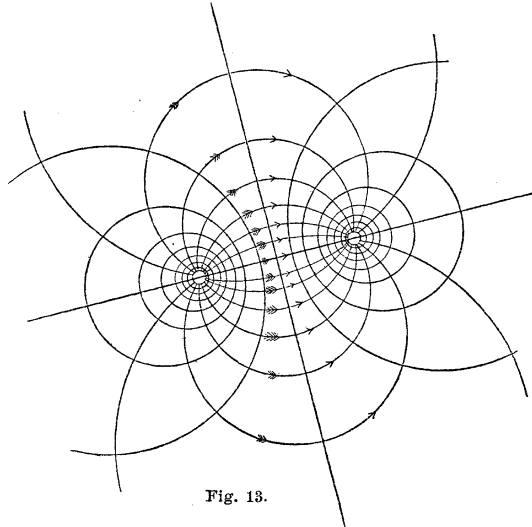


Fig. 13.

Sind zweitens die Lösungen der Gleichung (7) einander gleich und gleich z_0 , so muß sich die Substitution umrechnen lassen auf:

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + b'.$$

Wir müssen nämlich bei Einführung der neuen Veränderlichen:

$$(10) \quad Z = \frac{1}{z - z_0}$$

1) Der Fall $m = 1$ kann in Gleichung (8) nicht vorliegen, da er zur „identischen“ Substitution $z' = z$ und damit zu $c = 0$ führen würde.

zu einer in Z geschriebenen Substitution der dritten unter (4) genannten Art gelangen, da der „Südpol“ $Z = \infty$ der Z -Kugel der einzige sich selbst entsprechende Punkt ist. Übrigens werden wir diesen Punkt als Koinzidenzpunkt *zweier* Fixpunkte fassen, damit der Satz, eine Substitution (3) habe stets *zwei* Fixpunkte, allgemein gilt. Eine Substitution der jetzt vorliegenden Art heißt „*parabolisch*“. In der Z -Ebene hatten wir zwei einander orthogonale Scharen paralleler Geraden, welche die Bahn- und Niveaukurven lieferten. Ihre durch (10) gelieferten kreisverwandten Abbilder in der z -Ebene ergeben zwei zueinander ortho-

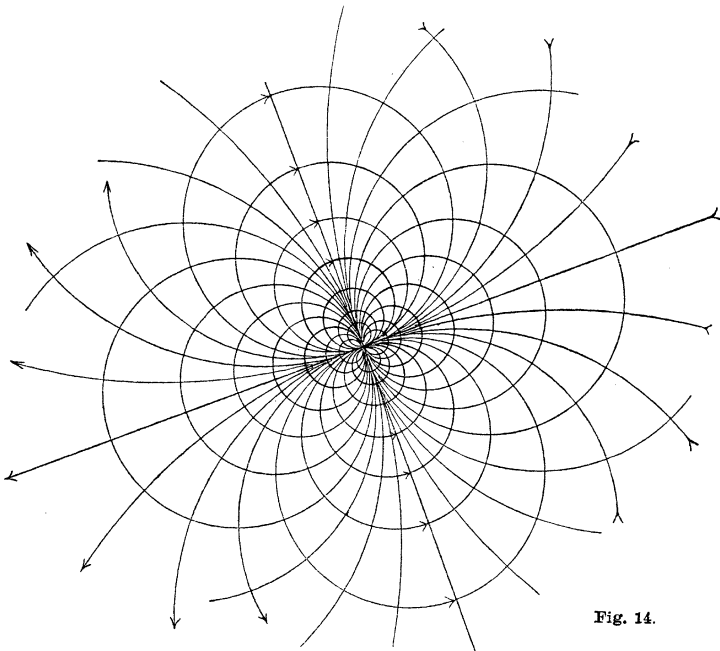


Fig. 14.

gonale Scharen von Kreisen des in Fig. 14 dargestellten Typus; jetzt also besteht die einzelne Schar aus lauter sich im Fixpunkte z_0 berührenden Kreisen.¹⁾

Es bedarf kaum der Hervorhebung, daß wir die Benennungen „elliptisch“, „hyperbolisch“ und „parabolisch“ auch auf die Substitutionen (4) anwenden, sowie daß wir $z' = |a| e^{aiz}$ mit $|a| \geq 1$ und

1) Die Benennungen „elliptisch“, „hyperbolisch“ usw. für die verschiedenen Arten der Substitutionen (3) sind von Klein eingeführt. Eine ausführliche Behandlung der linearen Substitutionen auf Grundlage ihrer Beziehung zur projektiven Geometrie findet man in den „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“ von F. Klein und R. Fricke (Leipzig, 1897), Bd. 1, Einleitung. Man findet hier auch die Originalliteratur nachgewiesen. Übrigens vergleiche man auch Osgood, S. 258 ff.

$0 < \alpha < 2\pi$ „loxodromisch“ nennen. Übrigens werden uns späterhin vornehmlich elliptische, hyperbolische und parabolische Substitutionen begeben.

§ 15. Die linearen Substitutionen zweiter Art und die indirekten Kreisverwandtschaften.

Mit $\bar{z}$ bezeichnen wir den zu $z = x + iy$ konjugiert komplexen Wert $x - iy$. Der Übergang von z zu $z' = \bar{z}$, bei dem also jedem Werte z sein konjugierter zugeordnet ist, wird als „Spiegelung“ der z -Ebene an der reellen Achse bezeichnet. Diese Transformation stellt eine eindeutige und auch wieder konforme Abbildung der z -Ebene auf sich selbst dar; doch besteht ein Unterschied gegen die bisherigen konformen Abbildungen darin, daß im Abbild eines Winkels die Schenkel desselben vertauscht oder umgelegt erscheinen. Wir sprechen in diesem Sinne von einer konformen Abbildung „mit Umlegung der Winkel“. Übrigens werden die Kreise der z -Ebene durch $z' = \bar{z}$ wieder in Kreise übergeführt.

Man wolle jetzt auf die durch $z' = \bar{z}$ transformierte z -Ebene gleich noch irgendeine lineare Substitution (3) S. 66 mit nicht verschwindender Determinante ausüben. Man gelangt so zu der durch:

$$(1) \quad z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

dargestellten Transformation des Punktes z in den Punkt z' . Wir bezeichnen (1) als eine lineare Substitution „zweiter Art“ und ihr gegenüber eine Substitution (3) S. 66 genauer als eine solche der „ersten Art.“ *Jede lineare Substitution zweiter Art stellt eine eindeutige konforme Abbildung der z -Ebene auf sich selbst mit Umlegung der Winkel dar, bei der Kreise immer wieder in Kreise übergehen.* Die hier vorliegenden Kreisverwandtschaften mit Umlegung der Winkel bezeichnet man als „indirekte“ und nennt diejenigen des § 14 demgegenüber „direkte“ Kreisverwandtschaften.

Unter den Substitutionen (1) wollen wir nur eine einzige Art besonders betrachten, nämlich die gleich näher zu erklärenden „Spiegelungen“ oder „Inversionen“ an Kreisen; man nennt sie auch „Transformationen durch reziproke Radien“ an Kreisen. In dem besonderen Falle, daß der Kreis, an dem die Spiegelung vorgenommen werden soll, und der allgemein der „Symmetriekreis“ der Spiegelung heißen soll, eine Gerade ist, haben wir mit einer elementaren Spiegelung zu tun, wie wir sie anfangs durch $z' = \bar{z}$ für die reelle Achse als „Symmetriekreis“ darstellten.

Den Charakter der Spiegelungen mit Symmetriekreisen endlicher Radien erläutern wir durch das Beispiel:

$$(2) \quad z' = \frac{b}{c\bar{z}},$$

wo der Quotient $\frac{b}{c}$ einen reellen positiven Wert haben soll. Schreiben wir ϱ^2 für diesen Wert, so wird durch unsere Substitution der Punkt $z = re^{\vartheta i}$ oder, wie wir sagen dürfen, der Punkt der Polarkoordinaten (r, ϑ) in den Punkt $\left(\frac{\varrho^2}{r}, \vartheta\right)$ übergeführt. Der Symmetriekreis ist hier der Kreis des Radius ϱ um den Nullpunkt; jeder Punkt dieses Kreises, ist durch die Substitution (2) sich selbst zugeordnet. Weiter vertauscht die Substitution das Äußere mit dem Inneren dieses Kreises und zwar in der Art, daß einander zugeordnete Punkte gleiche Amplituden ϑ haben und Radienvektoren r und r' , welche durch die Relation $rr' = \varrho^2$ verbunden erscheinen. Die obengenannten Namen der Substitution (2) finden in diesem geometrischen Charakter derselben ihre Begründung.

Da die Substitution (2) sich dem Ansatz (1) einordnet, so liefert die eben beschriebene „Transformation durch reziproke Radien“ am Kreise des Radius ϱ um den Nullpunkt eine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel und insbesondere eine indirekte Kreisverwandtschaft. Dieser Charakter unserer Transformation bleibt natürlich gewahrt, falls an Stelle des Kreises vom Radius ϱ um den Nullpunkt irgendein beliebiger Kreis der z -Ebene mit endlichem Radius als Symmetriekreis der Spiegelung tritt. Andererseits ist aber auch leicht zu sehen, daß die Spiegelung an diesem neuen Symmetriekreise gleichfalls unter den Substitutionen (1) enthalten ist. Wenn wir nämlich zuvor die Transformation $z' = \bar{z}$ und dann erst die Spiegelung an dem neuen Symmetriekreise vornehmen, gelangen wir zu einer ausnahmslos konformen Beziehung der z -Ebene auf sich selbst ohne Umlegung der Winkel und damit zu einer Substitution (3) S. 66, woraus für die Spiegelung die Gestalt (1) entspringt.

Auch die Spiegelung an irgendeiner Geraden der z -Ebene, welche denselben elementaren Charakter hat wie die oben betrachtete Spiegelung $z' = \bar{z}$ an der reellen Achse, findet sich unter den Substitutionen (1), wie man wieder durch Kombinierung mit der besonderen Spiegelung $z' = \bar{z}$ und Benutzung der dadurch zu erzeugenden Substitution erster Art zeigt.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir diese besondere Klasse der Spiegelungen unter den Substitutionen (1) auch direkt dadurch charakterisieren, daß wir die ihnen eigentümlichen Koeffizienten

a, b, c, d angeben. Bei den zu diesem Ende anzustellenden Rechnungen schreibt man die Substitutionen (1) zweckmäßig so, daß die Determinante gleich 1 ist:

$$(3) \quad ad - bc = 1.$$

Dies ist immer erreichbar, da man die Koeffizienten a, b, c, d , ohne die Substitution wesentlich zu ändern, noch mit einem gemeinsamen Faktor versehen kann und dieser dann eben so wählbar ist, daß die multiplizierten Koeffizienten die Determinante 1 haben. Durch die Forderung (3) ist übrigens die Schreibweise der Substitution noch nicht eindeutig bestimmt, da man ohne die Substitution und die Gleichung (3) zu ändern noch einen gleichzeitigen Zeichenwechsel von a, b, c, d vornehmen kann. Doch ist es nicht erforderlich, diese Zweideutigkeit noch irgendwie zu heben.

Eine einzelne Spiegelung stellt nun ein *umkehrbares Entsprechen* von Punkten z und z' dar. Nennt man bei irgendeiner unserer Substitutionen (erster oder zweiter Art), welche z in z' überführt, diejenige Substitution, welche umgekehrt z' wieder nach z zurückführt, zur ersteren „*invers*“, so ist eine Spiegelung offenbar sich selbst *invers*. Nun ist, wenn $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ die zu a, b, c, d konjugierten Zahlwerte sind, zur Substitution (1) die folgende *invers*:

$$z' = \frac{\bar{d}\bar{z} - \bar{b}}{-\bar{c}\bar{z} + \bar{a}},$$

wie man durch Auflösung der Gleichung (1) nach z unter Austausch der Bezeichnungen z und z' findet. Da im Falle einer Spiegelung die eben angeschriebene Substitution wieder mit (1) identisch sein muß, so gilt für eine Spiegelung:

$$\bar{d} = \sigma a, \quad \bar{b} = -\sigma b, \quad \bar{c} = -\sigma c, \quad \bar{a} = \sigma d,$$

unter σ einen Proportionalitätsfaktor verstanden. Die Bedingung (3) ergibt dann, daß dieser Faktor σ entweder gleich $+1$ oder -1 sein muß.

Wir behaupten nun, daß der Fall $\sigma = +1$ uns gerade bereits alle unsere Spiegelungen liefert. Hier ist d konjugiert komplex zu a , während b und c rein imaginär sind; wir schreiben also:

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = ib_2, \quad c = ic_2, \quad d = a_1 - ia_2,$$

wo a_1, a_2, b_2, c_2 reelle Zahlen sind, die zufolge (3) die Bedingung:

$$(4) \quad a_1^2 + a_2^2 + b_2c_2 = 1$$

erfüllen. Die sich selbst entsprechenden Punkte (Fixpunkte) der Substitution finden wir, indem wir in die Substitution $z' = z$ und also $z' = x + iy, \bar{z} = x - iy$ eintragen. Es gilt der Satz: *Unter den ge-*

mäß (3) geschriebenen Substitutionen (1) sind die Spiegelungen durch die besondere Gestalt:

$$(5) \quad z' = \frac{(a_1 + ia_2)\bar{z} + ib_2}{ic_2\bar{z} + (a_1 - ia_2)}$$

ausgezeichnet, wo a_1, a_2, b_2, c_2 vier reelle die Relation (4) befriedigende Zahlen sind. Der Symmetriekreis der Spiegelung (5) hat die Gleichung:

$$(6) \quad c_2(x^2 + y^2) - 2a_2x + 2a_1y - b_2 = 0;$$

derselbe hat zufolge (4) einen von 0 verschiedenen reellen Radius, der insbesondere für $c_2 = 0$ unendlich groß ist.

Zum Beweise dieser Behauptung beachte man, daß die auch für $\sigma = -1$ leicht durchführbare Rechnung zwar gleichfalls auf sich selbst inverse Substitutionen zweiter Art führt, daß jedoch diesen letzteren Substitutionen keine Symmetriekreise mit reellen Radien zugehören. Die Substitutionen (5) müssen also unsere gesamten Spiegelungen bereits erschöpfen; und in der Tat können wir auch durch zweckmäßige Auswahl von a_1, a_2, b_2, c_2 den Kreis (6) mit jedem beliebigen Kreise bzw. mit jeder beliebigen Geraden der z -Ebene identifizieren.¹⁾

§ 16. Allgemeine Angaben über algebraische Funktionen und Gebilde.

Bei Gelegenheit der Inversion der rationalen Funktionen gelangten wir zur Vorstellung der m -blättrigen Riemannschen Flächen F_m mit l Verzweigungspunkten, für welche wir auch einen synthetischen Aufbau besprachen (vgl. S. 48). Wir wollen jetzt an eine beliebige Fläche dieser Art anknüpfen, die wir uns wie oben in folgender Weise synthetisch herstellen. Auf der z -Kugel markieren wir irgend l verschiedene Stellen $e_1, e_2, \dots, e_l$, wobei die ganze Zahl $l > 1$ und endlich sei. Wir ziehen eine reguläre Kurve, die sich nicht selbst schneidet, von e_1 über e_2, e_3 bis e_l und bezeichnen die durch die Punkte e begrenzten Teile der Kurve mit $S_1, S_2, \dots, S_{l-1}$. Längs jedes dieser Kurvenstücke durchschneiden wir die z -Kugel, nennen die $S_1, S_2, \dots, S_{l-1}$ wieder „Ver-

1) Über die Behandlung der Substitutionen zweiter Art auf Grundlage projektiver Vorstellungen im Raume der z -Kugel (s. S. 22) vergleiche man wieder die in der Note S. 72 genannten Vorlesungen, Bd. 1, Einleitung. Dabei erweisen sich die sich selbst inversen Substitutionen (1) als „Perspektivitäten“, welche die z -Kugel in sich überführen. Liegt das Perspektivitätszentrum außerhalb der Kugel, so haben wir mit einer unserer Spiegelungen zu tun, wobei die Polarebene jenes Zentrums den Symmetriekreis auf der z -Kugel ausschneidet. Die im Texte nicht behandelten Substitutionen mit $\sigma = -1$ haben Perspektivitätszentren innerhalb der Kugel; man hat im Einzelfall eine sogenannte „Diametralsymmetrie“, d. h. eine Transformation, bei der je zwei bezüglich des Perspektivitätszentrums diametrale Punkte der z -Kugel ineinander übergehen.

zweigungsschnitte“ und unterscheiden beim einzelnen ein rechtes und ein linkes Ufer.

Wir lagern nun eine endliche Anzahl $m^1)$ von Exemplaren der so vorbereiteten z -Kugel übereinander und beginnen damit, die m linken Schnittufer S_1 in irgendeiner Anordnung den m rechten Ufern zuzuordnen und je zwei einander zugeordnete Ufer (wie S. 48 u. f.) aneinander zu heften. Demnächst verfahren wir gerade so längs $S_2, S_3, \dots, S_{l-1}$.

So entspringt eine geschlossene m -blättrige Fläche F_m , welche jedenfalls an keinen anderen Stellen als den $e_1, e_2, \dots, e_l$ Verzweigungspunkte aufweist. Beim einzelnen Punkte e_i kommen wir von einem ersten Blatte spätestens nach m Umläufen in dieses Blatt zurück; kommen wir nach ν_i Umläufen zum ersten Male wieder in das Ausgangsblatt zurück, so haben wir bei e_i einen ν_i -blättrigen Verzweigungspunkt. Übrigens kann auch die Uferzuordnung eine solche sein, daß man bei einmaligem Umlauf um einen einzelnen Punkt e_k von jedem Blatte aus sogleich zu diesem zurückgeführt wird; dann hätten wir jedoch nicht nötig gehabt, diese Stelle e_k zu markieren. Auch können an einer Stelle e , wie schon das Beispiel von S. 64 lehrt, sehr wohl mehrere Verzweigungspunkte übereinander liegen. Die wirkliche Anzahl der Verzweigungspunkte kann demnach auch $< l$ oder $> l$ sein. Wir wollen fortan *unter l die wirkliche Anzahl der Verzweigungspunkte* verstehen; halten wir auch an der Bezeichnung fest, daß dieselben bei $z = e_1, e_2, \dots, e_l$ liegen, so brauchen diese l Werte jetzt nicht mehr voneinander durchweg verschieden zu sein. Übrigens möge e_i ein ν_i -blättriger Verzweigungspunkt sein.

Hierüber hinaus wollen wir noch die wesentliche Forderung stellen, daß es möglich sein soll, von einem ersten Blatte durch geeignete Wege in der Fläche F_m zu jedem anderen Blatte hinzugelangen. Wäre dies nicht möglich, so würde die Fläche in mindestens zwei getrennte Stücke zerfallen, deren jedes für sich geschlossen in gewisser Blätteranzahl die z -Kugel überdeckte, und wir könnten das einzelne dieser Stücke der weiteren Betrachtung zugrunde legen.

Wir stellen nun folgende Erklärung auf: *Eine Funktion, deren Feld eine zusammenhängende geschlossene Riemannsche Fläche F_m mit l Verzweigungspunkten ist, heißt eine „algebraische“ Funktion von z und möge im Anschluß an die bereits S. 48 benutzte Schreibweise durch $w = \varphi(z)$ bezeichnet werden. Die Annahme, F_m sei das Feld von $\varphi(z)$, ist so zu verstehen, daß, wenn wir die Funktion $w = \varphi(z)$ etwa in der Umgebung*

1) Damit wir Verzweigungspunkte anbringen können und nicht zum einfachen Falle der rationalen Funktionen zurückgeführt werden, muß natürlich $m > 1$ sein.

einer von jedem e_i verschiedenen Stelle z_0 durch ein „Funktionselement“ (vgl. S. 20) geben, die analytische Fortsetzung von hier aus als Feld der Funktion w gerade unsere Riemannsche Fläche F_m liefere.

Hieraus geht sofort hervor, daß die m Blätter der Fläche m Zweige unserer Funktion tragen, von denen keine zwei identisch sein können. Indem wir die Blätter der Fläche numeriert denken, wollen wir diese m Zweige entsprechend durch die Bezeichnungen $w_1 = \varphi_1(z)$, $w_2 = \varphi_2(z)$, $\dots$, $w_m = \varphi_m(z)$ voneinander unterscheiden.

Im Anschluß hieran erklärt nun folgende einfache Betrachtung den für die Funktion $w = \varphi(z)$ eingeführten Namen. Wir wollen in der *schlichten* z -Ebene von einer Stelle z_0 aus, die mit keinem der Werte e_i zusammenfalle, eine beliebige geschlossene Kurve C nach z_0 zurück beschreiben, die jedoch auch, um *eindeutige* Fortsetzbarkeit der Funktion zu sichern, durch keine der l Stellen e_i hindurchlaufen soll. Bei z_0 geben wir die m Zweige $w_1 = \varphi_1(z)$, $\dots$, $w_m = \varphi_m(z)$ etwa durch „Funktionselemente“ und setzen zugleich alle m Funktionen $\varphi_1(z)$, $\dots$, $\varphi_m(z)$ über C fort. Am Schlusse erhalten wir alle m Anfangszweige wieder, aber im allgemeinen in einer abgeänderten Reihenfolge; denn auf der Riemannschen Fläche F_m entsprechen dem Umlaufe C offenbar m Kurven, deren einzelne bei z_0 in einem gewissen Blatte beginnt und wieder bei z_0 , jedoch in irgendeinem Blatte, endigt.

Bilden wir nun aber eine symmetrische Funktion der $w_1, \dots, w_m$, etwa die Potenzsumme:

$$(1) \quad w_1^s + w_2^s + \dots + w_m^s,$$

so ist klar, daß diese in der schlichten z -Ebene eine Funktion darstellt, die, über die geschlossene Kurve C fortgesetzt, notwendig zu ihren Anfangswerten zurückkehrt. Auch die Verzweigungspunkte selbst bilden keine Schwierigkeit. In der Umgebung eines einzelnen solchen Punktes e werden zwar die v in Betracht kommenden Glieder der Summe (1) Ent-

wicklungen nach Potenzen von $(z - e)^{\frac{1}{v}}$ mit ganzzahligen Exponenten besitzen¹⁾; aber die Summe (1) muß wieder, insofern sie sich beim Umlauf um e als daselbst eindeutig erweist, eine Entwicklung nach Potenzen von $(z - e)$ mit ausschließlich *ganzzahligen* Exponenten aufweisen. Somit wird die Summe (1) eine eindeutige Funktion von z darstellen, deren Feld die schlichte und vollständige z -Ebene ist; wir haben also in (1) *eine rationale Funktion von z* gewonnen, und dasselbe gilt demnach nach bekannten Sätzen der Algebra von allen rationalen symmetrischen Funktionen der $w_1, w_2, \dots, w_m$.

1) Ist $e = \infty$, so hat man $(z - e)$ durch z^{-1} zu ersetzen.

Verstehen wir in der Umgebung von z_0 unter w irgendeinen Zweig unserer Funktion, so ist daselbst die Gleichung:

$$(2) \quad (w - w_1)(w - w_2) \dots (w - w_m) = 0$$

identisch erfüllt, da ein bestimmter Faktor mit 0 identisch ist. Multiplizieren wir aber die linke Seite dieser Gleichung aus und ordnen nach abfallenden Potenzen von w , so werden die Koeffizienten von $w^{m-1}, w^{m-2}, \dots$ rationale symmetrische Funktionen der $w_1, w_2, \dots, w_m$ und also rationale Funktionen von z , die wir $R_1(z), R_2(z), \dots, R_m(z)$ nennen wollen. Wir gelangen zu dem Ergebnis: *Es gibt m rationale Funktionen $R_1(z), \dots, R_m(z)$ von der Art, daß die „algebraische“ Gleichung m^{ten} Grades für w :*

$$(3) \quad w^m + R_1(z)w^{m-1} + R_2(z)w^{m-2} + \dots + R_m(z) = 0$$

durch unsere algebraische Funktion $w = \varphi(z)$ auf der ganzen Riemannschen Fläche $\mathbf{F}_m$ erfüllt ist. Da nämlich der in (3) links stehende Ausdruck in irgendeinem ersten Blatte der Fläche $\mathbf{F}_m$ in der Umgebung von z_0 eine mit 0 identische Funktion von z liefert, so muß sich dieser Ausdruck bei analytischer Fortsetzung über das ganze Feld der Funktion w hin als mit 0 identisch erweisen.

Stellen wir jede der in (3) auftretenden rationalen Funktionen $R(z)$ als Quotienten zweier ganzer Funktionen dar (S. 62) und zerlegen die Nennerfunktionen in ihre Linearfaktoren (S. 46), so möge die ganze Funktion $g_0(z)$ der Generalnenner der m Quotienten sein.¹⁾ Multiplizieren wir die Gleichung (3) mit $g_0(z)$, so geht sie in die Gestalt über:

$$(4) \quad g_0(z)w^m + g_1(z)w^{m-1} + g_2(z)w^{m-2} + \dots + g_m(z) = 0,$$

wo jetzt die $g(z)$ ganze rationale Funktionen ohne einen allen gemeinsamen Linearfaktor sind. In dieser Gestalt wollen wir die algebraische Gleichung für w kurz durch das Symbol:

$$(5) \quad G(w, z) = 0$$

bezeichnen, wo also der links stehende Ausdruck ein „Polynom“ (eine rationale ganze Funktion) in w und z darstellt.

Das Polynom $G(w, z)$ hat als eine besonders wichtige Eigenschaft diejenige der „Irreduzibilität“, welche besagt, daß $G(w, z)$ nicht in das Produkt zweier Polynome zerlegbar sei. Daß kein von w unabhängiger

1) Es ist nicht ausgeschlossen, daß von den m Funktionen $R(z)$ einige identisch verschwinden. Jedoch kann dies nicht von allen m Funktionen $R(z)$ zugleich gelten, da sonst w selbst mit 0 identisch wäre. Die im Texte vorgeschriebene Zerlegung bezieht sich natürlich nur auf die nicht identisch verschwindenden $R(z)$.

Faktor absonderungsfähig ist, wurde bereits im Anschluß an (4) hervorgehoben. Ist also überhaupt eine Zerlegung:

$$G(w, z) = G_1(w, z) \cdot G_2(w, z)$$

möglich, so müssen beide Faktoren w in Graden m_1 und m_2 enthalten, die > 0 , in Summa gleich m und also einzeln $< m$ sind. Mindestens einer der Faktoren, etwa $G_1(w, z)$, muß für unsere Funktion w identisch verschwinden.¹⁾ Dann besteht aber, wie die analytische Fortsetzung zeigt, die Gleichung $G_1(w, z) = 0$ auf der ganzen F_m , so daß diese Gleichung beim einzelnen z durch die m im allgemeinen verschiedenen Werte $w_1, w_2, \dots, w_m$ befriedigt wird und also der Annahme zuwider den Grad m erreichen müßte.

Ein analytisches Gebilde der vorliegenden Art, das man geradezu auch durch die irreduzible algebraische Relation (5) als erklärt ansehen kann, heißt insbesondere ein „*algebraisches Gebilde*“. Es bezieht sich diese Benennung auf die einzelne algebraische Funktion w , der die voraufgehende Betrachtung gewidmet ist. Alle sonstigen algebraischen Funktionen von z , welche unsere Fläche F_m zum Felde haben, mögen als „zu dem algebraischen Gebilde gehörig“ bezeichnet werden. Wir wollen hierbei sogar noch einen Schritt weiter gehen und *alle auf der Fläche F_m eindeutigen Funktionen, die in den Verzweigungspunkten das erforderliche Verhalten zeigen (vgl. S. 28 ff.), und die bis auf endliche viele Pole²⁾ überall analytisch sind, als „zum algebraischen Gebilde gehörig“ bezeichnen.*³⁾

Es ist nun zunächst einleuchtend, daß jeder rationale Ausdruck $R(w, z)$ von w und z zu unserem Gebilde gehört.⁴⁾ Aber es gilt auch umgekehrt der Satz, daß jede im Sinne unserer Erklärung zum algebraischen Gebilde gehörende Funktion W in w und z rational darstellbar ist:

$$(6) \quad W = R(w, z).$$

1) Da das Produkt in jeder Umgebung einer Stelle z_0 identisch verschwindet, so hat ebendort mindestens einer der Faktoren unendlich viele Nullpunkte, woraus das identische Verschwinden dieses Faktors folgt.

2) Die *Endlichkeit* der Anzahl der Pole nehmen wir hier in die Erklärung auf. Bei der algebraischen Funktion w folgt diese Endlichkeit aus der Geschlossenheit des Feldes auf Grund einer schon öfter durchgeführten Überlegung.

3) Hierin liegt tatsächlich eine Erweiterung, wie denn z. B. jetzt auch alle rationalen Funktionen $R(z)$ von z allein zum Gebilde gehören, obwohl bei ihnen das Feld die schlichte z -Ebene ist.

4) Dabei soll nur der Fall, daß $R(w, z)$ mit ∞ identisch ist, ausgeschlossen sein, insofern hier die im Texte gegebenen Erklärungen nicht passen würden.

Man nenne nämlich $W_1, W_2, \dots, W_m$ die den m Blättern von $\mathbf{F}_m$ entsprechenden Zweige der Funktion W und bilde die m Summen:

$$W_1 w_1^s + W_2 w_2^s + \dots + W_m w_m^s \quad \text{für } s = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Wir erkennen wie oben bei (1) in ihnen m rationale Funktionen von z und gelangen zu m Gleichungen:

$$W_1 w_1^s + W_2 w_2^s + \dots + W_m w_m^s = R^{(s)}(z).$$

Da keine zwei unter den Zweigen $w_1, w_2, \dots, w_m$ identisch sind, so ist die Determinante dieses Systems eine nicht identisch verschwindende Funktion, deren Quadrat in z rational ist und die Diskriminante der Gleichung m^{ten} Grades (3) liefert.¹⁾ Stellen wir demnach die Lösung W_1 unseres Systems als Determinantenquotient dar, so erweist sich W_1 rational in $z, w_1, w_2, \dots, w_m$ und dabei insbesondere symmetrisch in $w_2, w_3, \dots, w_m$. Nun sind aber $w_2, w_3, \dots, w_m$ die Wurzeln derjenigen Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren linke Seite wir mittelst Division der linken Seite von (3) durch $(w-w_1)$ gewinnen. Die rationalen symmetrischen Funktionen der $w_2, w_3, \dots, w_m$ sind demnach in den Koeffizienten dieser Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, d. h. also in z und w_1 rational darstellbar. Also erhalten wir auch eine Darstellung:

$$W_1 = R(w_1, z).$$

Von hieraus gelangen wir am einfachsten mittelst der analytischen Fortsetzung zu der auf alle Blätter der $\mathbf{F}_m$ bezogenen Gleichung (6).

Das System aller Funktionen $R(w, z)$ hat die Eigenschaft, daß sowohl die Summe wie die Differenz, das Produkt und der Quotient²⁾ zweier Funktionen des Systems wieder eine Funktion eben dieses Systems liefern. Einer von R. Dedekind³⁾ innerhalb der Zahlentheorie eingeführten Sprechweise folgend bezeichnet man, um die aus der Reproduktion gegenüber Addition usw. hervorgehende Zusammengehörigkeit der Funktionen unseres Systems zu kennzeichnen, dieses System als einen „Körper“ von Funktionen oder „*Funktionenkörper*“. Genauer spricht man zum Unterschiede von etwaigen sonstigen zum Gebilde gehörenden analytischen Funktionen von dem *zum algebraischen Gebilde (5) gehörenden Körper der „algebraischen“ Funktionen*.

1) S. etwa H. Weber, „Lehrbuch der Algebra“ (Braunschweig, 1898), Bd. 1, S. 167.

2) Nur hat man die mit 0 identische Funktion, welche dem Systeme angehören muß, niemals als Divisor zuzulassen, da wir die mit ∞ identische Funktion $R(w, z)$ oben ausgeschlossen haben.

3) Vgl. P. G. Lejeune Dirichlet „Vorlesungen über Zahlentheorie“, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind, 4. Aufl. (Braunschweig 1894), S. 452.

Für gewöhnlich definiert man das einzelne algebraische Gebilde durch Angabe einer irreduziblen algebraischen Gleichung (5) und hat dann hinterher die diesem Gebilde zugehörige Riemannsche Fläche F_m zu konstruieren.¹⁾ Wenn wir oben, der Methode Riemanns folgend, die algebraische Funktion $w = \varphi(z)$ durch Angabe ihres Feldes F_m erklärten, so tritt dann freilich die Frage auf, ob auch für jede beliebig gewählte Riemannsche Fläche F_m eine zugehörige Funktion existiert, welche diese F_m zum Felde hat. Riemann²⁾ selbst hat diese Frage bejahend beantwortet, wenn auch seine Beweismethode sich als nicht einwurfsfrei erwies. Da das fragliche Existenztheorem Riemanns in der Folge keine grundsätzliche Rolle spielt, so gehen wir auf die späterhin gefundenen Beweismethoden sowie auf die gleichfalls gewonnene Verbesserung des ursprünglichen Riemannschen Beweisverfahrens nicht ein.³⁾ Wir begnügen uns mit der Angabe des Satzes, *daß in der Tat zu jeder Riemannschen Fläche F_m eine Funktion $w = \varphi(z)$, die F_m zum Felde hat, existiert; damit gibt es dann zugleich einen ganzen Körper zugehöriger algebraischer Funktionen, der durch F_m als eindeutig definiert anzusehen ist.* Die ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes gehört in die allgemeine Theorie der algebraischen und der Abelschen Funktionen.

§ 17. Der Grad des Zusammenhangs einer Riemannschen Fläche F_m .

Neben den algebraischen Funktionen $R(w, z)$ sind jetzt weiter als zum betrachteten algebraischen Gebilde gehörende analytische Funktionen die Integrale der algebraischen Funktionen:

$$(1) \quad \int_{z_0}^z R(w, z) dz$$

zu nennen, welche man als die „*algebraischen*“ oder „*Abelschen*“ *Integrale des Gebildes* bezeichnet. Unter z_0 und z hat man dabei Stellen in der Fläche F_m zu verstehen und als Integrationsbahn irgendeine in F_m von z_0 nach z ziehende reguläre Kurve zu denken. Für die Untersuchung dieser Integrale und insbesondere ihrer Vieldeutigkeit sind die in § 2, S. 4 ff., allgemein entwickelten Sätze maßgeblich.

1) Man vgl. hierüber „Osgood“, S. 400.

2) „Theorie der Abelschen Funktionen“, Journ. f. Math., Bd. 54 (1857), Art. 3 der Einleitung; siehe auch Riemanns Werke, S. 89 ff. der ersten Aufl.

3) S. hierüber H. Weyl, „Die Idee der Riemannschen Fläche“ (Leipzig und Berlin, 1913), S. 91 ff., wo auch die in Betracht kommende Literatur zusammengestellt ist (S. 93).

Als erste hierbei grundsätzliche Frage tritt diejenige nach dem Grade des „Zusammenhangs“ der Fläche F_m auf. Die besonderen bei der Inversion der rationalen Funktionen S. 64ff. gewonnenen Flächen F_m konnten in jedem Falle eindeutig und stetig¹⁾ auf eine schlichte und vollständige Kugelfläche abgebildet werden. *Flächen F_m , die eindeutig und stetig auf eine schlichte und vollständige Kugelfläche abbildbar sind, besitzen demnach den „Zusammenhang der Kugelfläche“, und wir nennen sie dieserhalb „einfach zusammenhängend“.* Es liegt hier freilich gegenüber den S. 3 betrachteten Bereichen T_1 mit einer Randkurve insofern ein Unterschied vor, als die Kugelfläche ein geschlossener Bereich ist, der keinen einzigen Randpunkt besitzt.²⁾ Einen „Querschnitt“ im damaligen Sinne können wir demnach auf der Kugelfläche nicht anbringen, wohl aber einen in sich zurücklaufenden und sich selbst nicht kreuzenden Schnitt, einen sogenannten „Rückkehrschnitt“. Dabei ist es das Kennzeichen des „einfachen“ Zusammenhanges der Kugelfläche, daß jeder Rückkehrschnitt diese Fläche in zwei getrennte Stücke zerlegt.

Aus funktionentheoretischen Erwägungen leiteten wir bei einer Fläche F_m der fraglichen Art die Relation (4) S. 64 für die Gesamtblätteranzahl m und die den l Verzweigungspunkten zukommenden Blätteranzahlen $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$ ab. Wir behaupten jetzt, daß diese Relation für alle Flächen F_m vom Zusammenhang der Kugelfläche charakteristisch ist. In der Tat ist diese Relation nichts weiter als ein Ausdruck des „Eulerschen Polyedersatzes“, den wir in der bekannten Gestalt:

$$(2) \quad E + F = K + 2$$

darstellen, unter E, F, K die Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten des Polyeders verstanden.

Um dies einzusehen, wolle man die Riemannsche Fläche F_m mit einem „geschlossenen“, sich selbst nicht überkreuzenden, überall stetig gekrümmten Schnitte S versehen, der vom ersten Verzweigungspunkt e_1 durch alle übrigen hin und bis zum ersten zurückläuft. Die zwischen e_1 und e_2 , e_2 und e_3 usw. verlaufenden Teile von S denken wir als Verzweigungsschnitte $S_1, S_2, \dots$ benutzt. Nun sollte F_m eindeutig und stetig (nicht notwendig konform) auf eine Kugeloberfläche beziehbar sein. Vollziehen wir die Übertragung, so wird jedes Blatt infolge seiner Durchschneidung längs S zwei einfach zusammenhängende Bildbereiche liefern und die ganze Kugelfläche erscheint schlicht und vollständig bedeckt durch $2m$ solche Bereiche. Die Ecken der vorliegenden Kugel-

1) ja sogar konform, was jedoch jetzt zunächst unwesentlich ist.

2) Dieser Unterschied wird später dadurch aufgehoben, daß wir einen einzelnen Punkt auf der Fläche markieren und als „Randpunkt“ ansehen.

teilung entsprechen den l Verzweigungspunkten. Von jeder Ecke laufen $2\nu_i$ Kanten aus, so daß die Kantenanzahl $\sum_{i=1}^l \nu_i$ ist.

Für die gewonnene Einteilung der Kugelfläche gilt der Eulersche Satz (2), und zwar haben wir, wie gerade festgestellt, zu setzen:

$$E = l, \quad F = 2m, \quad K = \sum_{i=1}^l \nu_i.$$

Schreiben wir noch:

$$-l + \sum_{i=1}^l \nu_i = \sum_{i=1}^l (\nu_i - 1),$$

so folgt durch Eintragung der angegebenen Werte in (2) nach Division mit 2:

$$0 = -m + 1 + \sum_{i=1}^l \frac{\nu_i - 1}{2},$$

womit die Relation (4) S. 64 in der Tat wiedergewonnen ist.

Zur Erläuterung der allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Flächen F_m betrachten wir jetzt zunächst ein Beispiel, das alsbald in den Mittelpunkt unserer Untersuchung rücken wird, nämlich eine *zweiblättrige Riemannsche Fläche F_2 mit vier Verzweigungspunkten*. Bei der Herstellung dieser Fläche haben wir längs des ersten von e_1 nach e_2 laufenden Schnittes S_1 das linke Ufer des oberen Blattes an das rechte des unteren Blattes zu heften und weiter natürlich das linke untere Ufer an das rechte obere. Damit dann aber bei e_2 auch wirklich ein Verzweigungspunkt auftritt, ist längs S_2 das einzelne linke Ufer mit dem rechten des gleichen Blattes zu verbinden. Längs S_3 sind die Blätter wieder wie längs S_1 über Kreuz aneinander zu heften. Wir wollen die Sachlage durch Fig. 15 zur Anschauung bringen, in der wir diejenigen Teile S_1 und S_3 der übrigens punktierten Kurve S , in denen die beiden Blätter über Kreuz zusammenhängen, stärker markiert haben.

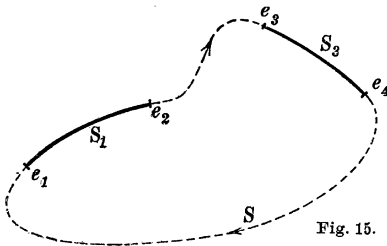


Fig. 15.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß die hier vorliegende Fläche den „Zusammenhang eines Kreisringes“ besitzt. Wir können sie geradezu, indem wir die Blätter der Fläche als elastische Membranen denken, durch stetige Gestaltsänderung in einen Kreisring überführen. Wir nehmen zunächst eine stetige Deformation derart vor, daß alle vier Verzweigungspunkte auf eine Gerade rücken, auf der sie in der Anordnung e_1, e_2, e_3, e_4

aufeinanderfolgen: S_1 und S_3 seien dann die geradlinigen Strecken von e_1 nach e_3 bzw. e_3 nach e_4 . Bei den Blättern der Fläche F_2 denken wir zunächst die oberen Seiten als Trägerinnen der Werte des Argumentes z und etwaiger Funktionen. Es erweist sich indessen als zweckmäßig, daß wir bei einem, etwa dem oberen Blatte, die untere Seite zu dieser Trägerin machen. Wir können dies dadurch erreichen, daß wir den Zusammenhang beider Blätter längs S_1 und S_3 vorübergehend nochmals aufheben, das obere Blatt um die durch die Punkte e laufende Gerade umklappen, so daß die bisher obere Seite nun die untere ist, und endlich die Zusammenheftung der Blätter wiederherstellen. Dabei gehören jetzt sowohl längs S_1 als S_3 das linke untere mit dem „linken“ oberen Ufer und das rechte untere mit dem „rechten“ oberen Ufer zusammen.

Die jetzt gewonnene Gestalt der Fläche wird noch etwas anschaulicher, wenn wir das obere Blatt unter Rücksicht auf die Elastizität der Membranen ein wenig heben. Dabei wird die Fläche die in Fig. 16 skizzierte Gestalt darbieten, wo an Stelle der bisherigen Verzweigungsschnitte S_1 und S_3 zwei langgezogene Löcher auftreten und übrigenfalls jedes der beiden Blätter über den in der Figur gezeichneten Rand hinaus ins Unendliche fortzusetzen ist. Die einander zugekehrten Seiten der Blätter sind die Trägerinnen der Werte z bzw. etwaiger Funktionswerte.

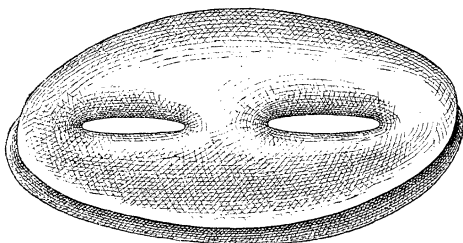


Fig. 16.

Um die Geschlossenheit des einzelnen Blattes im Unendlichen der Anschauung zugänglich zu machen, wollen wir, einer schon bisher vielfach benutzten Maßregel folgend, das obere Blatt nach oben hin, das untere aber nach unten hin kugelförmig in das Endliche ziehen. Unsere Fläche gewinnt dabei die in Fig. 17 angegebene Gestalt, wobei die Außen-seite die Trägerin der z -Werte ist. Jetzt ist es nur noch ein Schritt, um durch eine weitere stetige Gestaltsänderung den „Kreisring“ der Fig. 18 (S. 86) zu gewinnen.

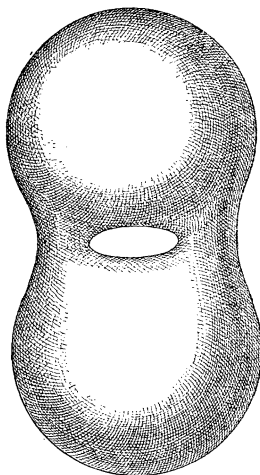


Fig. 17.

Klein¹⁾ benutzt an Stelle des Kreisringes auch eine mit einem Henkel versehene Kugel, wie

1) „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale“ (Leipzig, 1882), S. 27.

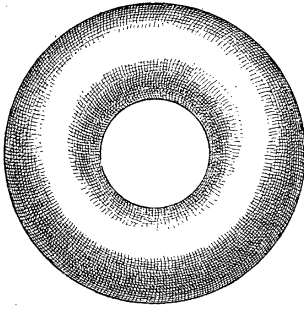


Fig. 18.

dieselbe in Fig. 19 dargestellt ist und aus dem Kreisring leicht durch stetige Deformation hergestellt werden kann. Diese Vorstellung macht die Verallgemeinerung besonders anschaulich, indem wir uns leicht das Bild einer mit einer gewissen Anzahl, sagen wir, mit p Henkeln versehenen Kugelfläche bilden können (vgl. Fig. 20, wo $p = 3$ ist).

Gehen wir von einer zweiblättrigen Fläche F_2 mit $(2p + 2)$ Verzweigungspunkten $e_1, e_2, \dots, e_{2p+2}$ aus, deren Blätter (analog den oben beschriebenen Verhältnissen) längs $S_1, S_3, \dots, S_{2p+1}$ über Kreuz zusammenhängen, so führt die Wiederholung der an der obigen F_2 vollzogenen Umgestaltung hier, wie man leicht übersieht, zu einer mit p Henkeln versehenen Kugel. *Aber auch jede andere Riemannsche Fläche F_m kann in eine mit einer gewissen Anzahl von Henkeln versehene Kugelfläche stetig umgestaltet werden¹⁾, so daß wir im Bilde dieser Fläche zugleich den Grad des Zusammenhanges der ursprünglichen F_m anschaulich zu erfassen imstande sind.*

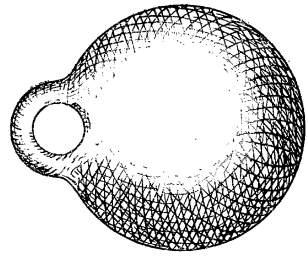


Fig. 19.

1) Es geht dies aus Untersuchungen von J. Lüroth und A. Clebsch über die Gestalt der Riemannschen Flächen hervor; siehe Lüroth „Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemannschen Fläche“, Math. Ann., Bd. 4 (1871), S. 181 und Clebsch „Zur Theorie der Riemannschen Flächen“, Math. Ann., Bd. 6 (1872), S. 216. Man hat zunächst jeden Verzweigungspunkt mit ν Blättern, sofern $\nu > 2$ ist, in $(\nu - 1)$ zweiblättrige Verzweigungspunkte aufzulösen. Sodann zeigt sich, daß man den Schnitt S durch die Verzweigungspunkte derart auswählen kann, daß folgende Gestalt der Fläche vorliegt. Die beiden untersten Blätter bilden für sich genommen eine F_2 mit $(2p + 2)$ Verzweigungspunkten, wie wir sie schon im Texte betrachteten; jedes folgende Blatt ist dann nach unten hin nur an das unmittelbar darunterliegende mit *zwei* Verzweigungspunkten in einem

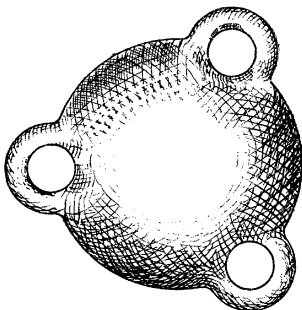


Fig. 20.

zwischen ihnen verlaufenden Verzweigungsschnitte geheftet. Eine F_2 mit *zwei* Verzweigungspunkten verwandelt man nun mittelst einer Operation, wie wir sie im Texte an der F_2 mit vier Punkten e ausübten, leicht stetig in eine schlichte Ebene um. Beziehen wir diese Umwandlung auf die beiden obersten Blätter der F_m , so ergibt sich eine F_{m-1} von gleicher Bauart. Die mehrfache Wiederholung des gleichen Verfahrens führt schließlich zu einer F_2 mit $(2p + 2)$ Verzweigungspunkten, welche wir bereits in eine Kugelfläche mit p Henkeln umwandeln.

Wir haben diese allgemeine Angabe ohne ausführlichen Beweis gemacht, da sich unsere späteren Entwicklungen allein auf die F_2 mit vier Verzweigungspunkten beziehen. Um aber die Stellung dieser F_2 in der allgemeinen Theorie der algebraischen Funktionen zu kennzeichnen mögen auch noch folgende Ausführungen über eine beliebige F_m Platz finden.

Es ist zunächst unzweifelhaft, daß die Anzahl p der Henkel ein wichtiges Attribut der Riemannschen Fläche F_m ist. Man faßt alle Flächen mit dem gleichen p zu einem „Geschlechte“ von Flächen zusammen und spricht in diesem Sinne von „einer Riemannschen Fläche F_m des Geschlechtes p “. Es wird erwünscht sein, eine Regel zu besitzen, nach der wir unmittelbar für die gegebene Fläche F_m das Geschlecht p bestimmen können. Diese Regel liefert uns der auf unsere Henkelfläche übertragene Eulersche Polyedersatz. Da dieser Satz gewöhnlich nur für einfach zusammenhängende Flächen aufgestellt wird, so werden einige Andeutungen über die verallgemeinerte Formel am Platze sein.

Die F_m durchschneiden wir wieder längs einer alle Verzweigungspunkte durchlaufenden, stetig gekrümmten Kurve S , welche sich nicht überkreuzt, aber in sich zurückläuft. Das eindeutige stetige Abbild des Schnittes S auf der Henkelfläche liefert dann wieder eine polyederartige Einteilung dieser Fläche mit:

$$(3) \quad E = l, \quad F = 2m, \quad K = \sum_{i=1}^l v_i.$$

An jedem der p Henkel wollen wir weiter einen Rückkehrschnitt Q ausführen in der Art, wie in der unten folgenden Fig. 23 die Querschnitte Q_1 , Q'_1 , Q''_1 gelegt sind. Dabei möge der Einfachheit halber Q durch keine der E Ecken unserer polyedrischen Teilung hindurchlaufen. Den Schnitt Q wollen wir der polyedrischen Teilung zufügen und überlegen, wie dieselbe dadurch geändert wird.

Jedenfalls ist Q eine sich nicht überkreuzende geschlossene Linie, welche die Henkelfläche nicht „zerstückt“ (nicht in getrennte Stücke zerlegt). Daraus folgt, daß Q nicht im Innern einer einzigen unter den $2m$ „Flächen“ verläuft; denn diese ist einfach zusammenhängend, so daß eine in ihrem Innern geschlossene Linie notwendig ein getrenntes Stück abschneidet. Q wird demnach mehrere „Flächen“ durchziehen und damit durch die „Kanten“ der Einteilung in mehrere, sagen wir in t Segmente zerlegt. Jedes dieser Segmente erhöht die Flächenzahl um eine Einheit; der gemeinsame Endpunkt zweier Segmente liefert eine neue Ecke und vermöge der Teilung der von Q in dieser Ecke zerschnittenen Kante der anfänglichen Teilung die Erhöhung der Kantenanzahl gleichfalls

um *eine* Einheit. Außerdem kommen die t Segmente selbst als neue Kanten hinzu, so daß unsere Anzahlen nach Zusatz des einzelnen Schnittes Q die folgenden sind:

$$E + t, \quad F + t, \quad K + 2t.$$

Man wolle nun weiter die beiden mittelst des Schnittes Q getrennten Henkelstücke auseinanderbiegen und die Löcher durch zwei neue, Flächen decken. Dann liefert jede der t neuen Ecken ein Eckenpaar, es sind weiter zwei Flächen hinzugekommen, und jedes der t Segmente von Q liefert ein Kantenpaar, so daß unsere Anzahlen die folgenden sind:

$$E + 2t, \quad F + 2 + t, \quad K + 3t.$$

Jetzt vollziehe man die gleiche Operation an allen p Henkeln nenne die entsprechenden Zahlen t genauer $t_1, t_2, \dots, t_p$ und gelangt schließlich zu einer Einteilung mit folgenden Anzahlen:

$$E_1 = E + 2 \sum t_i, \quad F_1 = F + 2p + \sum t_i, \quad K_1 = K + 3 \sum t_i.$$

Aber die so gewonnene Fläche hat wieder den Zusammenhang der Kugelfläche, und also gilt $E_1 + F_1 = K_1 + 2$, was als verallgemeinerte Eulersche Polyederformel liefert:

$$E + F + 2p = K + 2.$$

Tragen wir hier die Werte (3) ein, so ergibt sich der Satz: *Eine m -blättrige Riemannsche Fläche F_m mit l Verzweigungspunkten, in denen bzw. $v_1, v_2, \dots, v_l$ Blätter zusammenhängen, hat das Geschlecht:*

$$(4) \quad p = -m + 1 + \sum_{i=1}^l \frac{v_i - 1}{2}.$$

Eine Riemannsche Fläche des Geschlechtes p bezeichnen wir nun im Anschluß an die Sprechweise S. 3 (jedoch unter Vorbehalt einer gleich noch zu erörternden Ergänzung) als „ $(2p + 1)$ -fach zusammenhängend“ und begründen diese Ausdrucksweise damit, daß es möglich ist, die Fläche durch $2p$ Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden von den Schnittufern berandeten Bereich zu zerlegen.

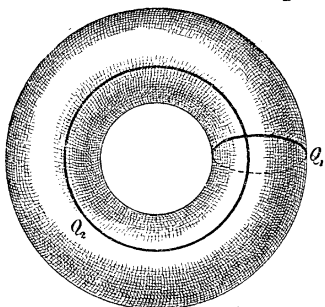


Fig. 21.

Im Falle $p = 1$ können wir den Kreisring der Fig. 18 benutzen. Wir ziehen, wie Fig. 21 andeutet, zunächst den Rückkehrschnitt Q_1 . Derselbe „zerstückt“ die Fläche nicht; denn es ist möglich, wie Fig. 21 gleichfalls darlegt, einen Schnitt Q_2 von einem Uferpunkte des Schnittes Q_1 zum gegenüberliegenden Uferpunkte zu führen,

ohne Q_1 zu überschreiten. Auf dem unzerschnittenen Ringe würde auch Q_2 ein Rückkehrschnitt sein; man bezeichnet zwei in dieser Art zusammengehörige Schnitte als ein Paar „konjugierter“ Rückkehrschnitte. Nach Durchschneidung längs Q_1 können wir den Ring auseinanderbiegen und in die Gestalt des Zylinders der Fig. 22 überführen. Schneiden wir den Zylinder jetzt längs Q_2 auf, so ist die Abwicklung desselben auf das in Fig. 22 gleich mit angegebene Viereck möglich: *Durch die Schnitte Q_1 und Q_2 wird hiernach der Kreisring in einen einfach zusammenhängenden Bereich T_1 mit einem in sich zurücklaufenden, aus den vier Schnittufern bestehenden Rande verwandelt.*

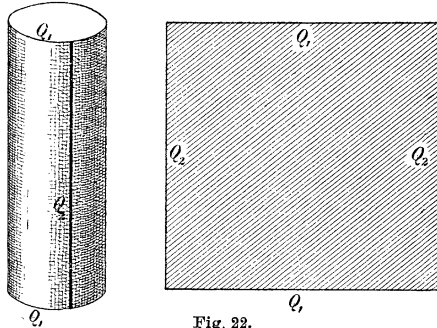


Fig. 22.

Haben wir nun eine Fläche mit p Henkeln, so können wir an jedem Henkel ein Paar „konjugierter Rückkehrschnitte“ $Q_1, Q_2; Q'_1, Q'_2; \dots; Q_1^{(p-1)}, Q_2^{(p-1)}$ anbringen (vgl. Fig. 23 für $p=3$) und verwandeln

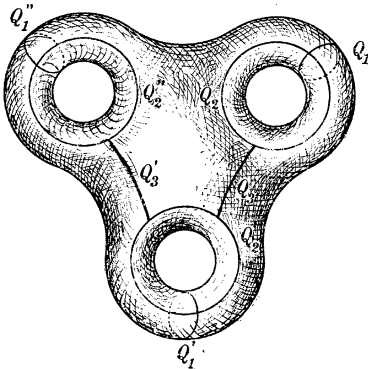


Fig. 23.

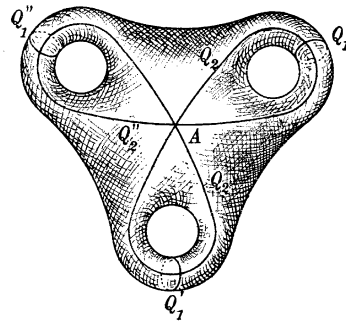


Fig. 24.

unsere Fläche hierdurch in einen p -fach zusammenhängenden Bereich T_p , welcher p getrennte, aus je vier Schnittufern bestehende Randkurven aufweist. Indem wir jetzt noch $(p-1)$ eigentliche Querschnitte $Q_3, Q'_3, \dots, Q_3^{(p-2)}$, wie Fig. 23 darlegt, zwischen den bisherigen Randkurven anbringen, gelangen wir zu einem einfach zusammenhängenden Bereiche.

Diese an sich anschauliche Maßregel ist nun aber, um zum Schlusse zu führen, noch zu modifizieren. Wir wollen die Schnitte $Q_3, Q'_3, \dots, Q_3^{(p-2)}$ unter Dehnung der Schnitte $Q_2, Q'_2, \dots, Q_2^{(p-1)}$ auf Punkte zusammenziehen und sodann (wie Fig. 24 wieder für $p=3$ erläutert)

die $Q_2, Q'_2, \dots, Q_2^{(p-1)}$ noch weiter derart über die Fläche hinziehen, daß sie alle von einem gemeinsamen Ausgangspunkte A auslaufen und zu ihm zurückkehren. Wir wollen geradezu (und dies ist die noch vorbehaltene Ergänzung) diesen Ausgangspunkt A zu Anfang auf der Fläche markiert denken und (bevor irgendein Schnitt vollzogen ist) als einzigen Randpunkt der Fläche auffassen. Dann bekommt jeder unserer Schnitte $Q_2, Q'_2, \dots, Q_2^{(p-1)}$ den Charakter eines eigentlichen „Querschnittes“; und dasselbe gilt natürlich auch von den demnächst noch anzubringenden Schnitten $Q_1, Q'_1, \dots, Q_1^{(p-1)}$, insofern der einzelne von ihnen zwei schon vorhandene Randpunkte (Uferpunkte des bereits gezogenen Schnittes $Q_2^{(i)}$) verbindet. Unsere obige Behauptung, die Henkelfläche und damit die Riemannsche Fläche F_m (auf der wir uns natürlich auch den „Randpunkt“ A markiert denken müssen) können durch $2p$ „Querschnitte“ in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt werden, ist damit erwiesen.¹⁾

§ 18. Weiteres über algebraische Funktionen speziell bei $p = 0$ und $p = 1$. Grundproblem der Theorie der elliptischen Funktionen.

Bei den nächsten Betrachtungen, welche sich auf die geometrischen Vorstellungen von § 17 gründen, sollen die mit Konstanten identischen Funktionen ausdrücklich ausgeschlossen werden. Wir hatten die mit endlichen Konstanten identischen Funktionen oben mit Rücksicht auf den Körperbegriff den Funktionen des Körpers zugerechnet. Soweit die aufzustellenden Sätze auch für solche Funktionen gelten, sind sie trivial.²⁾

Man wolle zunächst den am Schlusse von § 8, S. 39 aufgestellten zweiten Residuensatz etwa auf denjenigen einfach zusammenhängenden Bereich anwenden, in den eine vorgelegte F_m nach Art von Fig. 23 durch p Paare konjugierter Rückkehrschnitte $Q_1, Q_2; \dots; Q_1^{(p-1)}, Q_2^{(p-1)}$ nebst zwischengefügten $(p-1)$ Schnitten $Q_3, Q'_3, \dots, Q_3^{(p-2)}$ zerlegt wird. Bei Durchlaufung des Randes dieses Bereiches werden die beiden Ufer jedes einzelnen Schnittes in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Bilden wir demnach das auf den gesamten Rand des fraglichen Bereiches bezogene Integral (5) S. 39 für irgendeine Funktion $f(z)$ des durch F_m erklärten Körpers (wobei wir annehmen dürfen, daß die Schnitte Q nicht gerade durch Nullpunkte oder Pole von $f(z)$ hin-

1) Der Zusatz des „Randpunktes“ ist zur strengen Erfüllung unseres Satzes natürlich auch in dem zunächst besonders besprochenen Falle $p = 1$ nötig.

2) Der sogleich zu erklärende Begriff der „Wertigkeit“ verliert bei einer mit einer Konstanten identischen Funktion überhaupt seine Bedeutung. Wird demnach weiterhin von einer n -wertigen Funktion des Körpers gesprochen, so ist damit implizite bereits gesagt, daß die Funktion nicht mit einer Konstanten identisch ist.

durchlaufen), so heben sich je die beiden Bestandteile des Integrales, welche sich auf die Ufer des einzelnen Querschnittes beziehen, als entgegengesetzt gleich auf, und das Gesamtintegral bekommt den Wert 0: *Für jede nicht mit einer Konstanten identische Funktion des Körpers ist die Summe der Ordnungen aller auf F_m eintretenden Pole der Funktion gleich der Summe der Ordnungen aller Nullpunkte.*¹⁾ Unter Aufnahme einer für die rationalen Funktionen S. 62 besprochenen Denkweise können wir auch sagen: *Eine nicht mit einer Konstanten identische Funktion des Körpers hat auf der Riemannschen Fläche genau so viele Pole erster Ordnung als Nullpunkte erster Ordnung; ist diese Anzahl gleich n , so nimmt die Funktion jeden beliebig vorgeschriebenen komplexen Wert wieder genau in n Punkten der F_m an, und sie möge dementsprechend fortan als eine „ n -wertige“ Funktion des Körpers bezeichnet werden.* Der zweite Teil des Satzes folgt aus dem ersten wieder durch die schon bei den rationalen Funktionen angewandte Schlußweise (vgl. S. 46 und 62). Natürlich dürfen bei den n Punkten, in denen die Funktion einen vorgeschriebenen Wert annimmt, irgendwelche Koinzidenzen eintreten; z. B. liefern k zusammenfallende Nullpunkte dann eben einen Nullpunkt k^{ter} Ordnung.²⁾

Für irgendeine Funktion W des Körpers können wir die Darstellung (6) S. 80 in z und der damaligen Funktion w zugrunde legen, aus welcher unter Rücksicht auf (5) S. 79 folgt:

$$(1) \quad \frac{dW}{dz} = \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dz} = \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial w} \cdot \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)}.$$

1) Für die Abschätzung der Ordnung eines etwa in einem Verzweigungspunkte liegenden Nullpunktes oder Poles gelten natürlich die schon S. 38 angegebenen Regeln.

2) Nach der S. 39 gegebenen allgemeinen Fassung des benutzten Residuensatzes wäre es übrigens gar nicht nötig gewesen, die F_m vorab durch Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich zu verwandeln. Wir hätten in einem Blatte der F_m um eine Stelle z_0 , in der die Funktion weder einen Nullpunkt noch Pol hat, eine Kurve herumlegen können und hätten dann wie S. 62 bei den rationalen Funktionen verfahren. Andererseits mag auch noch folgende besonders elementare Auffassung Erwähnung finden, bei welcher wir die $2m$ „Flächen“ der polyedrischen Einteilung auf der „Henkelfläche“ zugrunde legen; die „Kanten“ dieser Einteilung denken wir nötigenfalls so abgeändert, daß sie nirgends durch einen Nullpunkt oder Pol der Funktion laufen. Das auf den Rand der einzelnen „Fläche“ bezogene Integral (5) S. 39 gibt die Summe der Ordnungen der Nullpunkte in dieser „Fläche“, vermindert um die Summe der Ordnungen der daselbst gelegenen Pole. Die Summe aller $2m$ Integrale ist aber wieder gleich 0, da die beiden „Ufer“ jeder Kante bei der Integration in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden. Aus dem Verschwinden der Integralsumme aber folgt wieder das Ergebnis des Textes.

Ist nun W eine n -wertige Funktion des Körpers, so wird die Fläche $\mathbf{F}_m$ durch W konform auf eine n -blättrige Riemannsche Fläche $\mathbf{F}_n$ über der W -Ebene abgebildet. Die Umgebung einer endlichen, von einem Verzweigungspunkte e_i verschiedenen Stelle z_0 in einem Blatte der $\mathbf{F}_m$ liefert dabei ein schlichtes Abbild, falls die Ableitung (1), welche zufolge der rechten Seite von (1) selber wieder eine Funktion des Körpers ist, im Punkte z_0 endlich und von 0 verschieden ist. Hat die Funktion (1) im Punkte z_0 aber einen Nullpunkt der Ordnung λ , so überträgt sich die Umgebung von z_0 auf eine Windungsfläche von $\nu = \lambda + 1$ Blättern. Bei einer eingehenden Untersuchung würden wir die Verzweigungspunkte von $\mathbf{F}_m$, die Pole von W usw. noch besonders zu untersuchen haben. Doch führt uns dies wieder zu weit in die allgemeine Theorie der algebraischen Funktionen ab. Jedenfalls haben wir den Satz gewonnen, daß die $\mathbf{F}_m$ mittels der n -wertigen Funktion W des Körpers eindeutig, stetig und konform auf eine n -blättrige Riemannsche Fläche $\mathbf{F}_n$ übertragen wird, die selbstverständlich wieder dem gleichen Geschlechte p angehört.

Ist nun z. B. die in Gleichung (5) S. 79 vorliegende Funktion w eine n -wertige Funktion, so wird jetzt umgekehrt auf der n -blättrigen Fläche $\mathbf{F}_n$ über der w -Ebene das bisherige z in Abhängigkeit von w eine n -deutige algebraische Funktion, welche man übrigens direkt wieder durch die Gleichung (5) S. 79 gegeben denken kann. Diese Gleichung wird in z eben auf den n^{ten} Grad ansteigen, ein Umstand, den wir gelegentlich durch die Schreibweise:

$$(2) \quad G\left(\overset{m}{w}, \overset{n}{z}\right) = 0$$

der Gleichung zwischen w und z hervorheben. Dabei ist natürlich diese Funktion z von w auf der $\mathbf{F}_n$ m -wertig.

Wir können nun aber gleich noch einen Schritt weiter gehen und betreffs der Funktionen $R(w, z)$ folgenden einleuchtenden Satz aussprechen: *Die gesamten Funktionen des bisherigen Körpers bilden, in Abhängigkeit von w betrachtet, gerade genau den durch die Riemannsche Fläche $\mathbf{F}_n$ zu definierenden Körper algebraischer Funktionen von w .¹⁾*

Zu dem gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir an Stelle von w irgendeine nicht mit einer Konstanten identische Funktion W des ersten Körpers zugrunde legen. Um aber gegenüber diesen unendlich vielen Riemannschen Flächen zu einer Auffassung, die keine Fläche bevorzugt, zu gelangen, könnten wir sie etwa durch unsere Henkelfläche ersetzen, die wir $\mathbf{F}$ nennen wollen, und auf die alle jene Flächen

1) Hier sind die mit endlichen Konstanten identischen Funktionen natürlich mit einbegriffen.

eindeutig und stetig bezogen sind. Jeder Funktion entspricht dann eine *eindeutige Belegung von $\mathbf{F}$ mit Werten*, und wir werden die Belegung wieder „*m-wertig*“ nennen, wenn eine beliebig gewählte komplexe Zahl immer an m Stellen von $\mathbf{F}$ aufgetragen ist. Den bisherigen Körpern algebraischer Funktionen entspricht dann ein sie alle liefernder „*Körper von Belegungen*“ der Fläche $\mathbf{F}$ von folgender Eigenschaft: *Ist irgendeine m-wertige Belegung mit Zahlen z und irgendeine zweite n-wertige Belegung mit Zahlen w herausgegriffen, so gilt für die durch die Punkte von $\mathbf{F}$ einander zugeordneten Zahlen w und z eine algebraische Relation (2) vom Grade m in w und vom Grade n in z identisch, d. h. über die ganze Fläche $\mathbf{F}$ hin. Ist diese Gleichung irreduzibel¹⁾, so ist „jede“ Belegung des Körpers der vorliegenden Belegungen von $\mathbf{F}$ in der Gestalt $W = R(w, z)$ darstellbar, wie auch umgekehrt jeder nicht mit ∞ identische rationale Ausdruck $R(w, z)$ eine unserer Belegungen liefert.*

Der entwickelten allgemeinen Auffassung entsprechend haben wir die unterschiedenen Riemannschen Flächen $\mathbf{F}_m, \mathbf{F}_n, \dots$, welche den einzelnen Belegungen von $\mathbf{F}$ zugehören, als nicht wesentlich verschieden anzusehen, und ebensowenig können die ihnen zugehörigen Körper algebraischer Funktionen als wesentlich verschieden gelten. Die Sachlage läßt sich auch noch in folgender Art analytisch einkleiden. Es sei von zwei Belegungen z, Z aus eine Fläche $\mathbf{F}_m$ über der z -Ebene und eine $\mathbf{F}_n$ über der Z -Ebene hergestellt. Ist w mit z durch eine irreduzible Gleichung (2) verknüpft, so ist durch w und z gewissermaßen ein Koordinatensystem auf $\mathbf{F}_m$ gegeben, welches die Punkte von $\mathbf{F}_m$ eindeutig zu bestimmen gestattet. Dasselbe möge durch W und Z auf $\mathbf{F}_n$ geleistet werden. Nun entspricht aber jedem Punkte von $\mathbf{F}_m$ eindeutig ein solcher von $\mathbf{F}_n$, und zwar ist diese Beziehung darstellbar durch ein Gleichungenpaar:

$$(3) \quad W = R_1(w, z), \quad Z = R_2(w, z).$$

Aber auch umgekehrt entspricht einem Punkte von $\mathbf{F}_n$ stets ein und nur ein Punkt von $\mathbf{F}_m$, geliefert durch:

$$(4) \quad w = R_3(W, Z), \quad z = R_4(W, Z).$$

1) Die Fälle der Reduzibilität der Gleichung (2) können wir wieder nicht allgemein verfolgen. Wir weisen nur auf das Beispiel hin, daß wir neben der schon gewählten m -wertigen Belegung z eine zweite Belegung w als rationale Funktion l^{ten} Grades $w = R(z)$ von z aussuchen, deren Wertigkeit dann $n = l \cdot m$ ist. Spalten wir $R(z)$ in den Quotienten $g_1(z) : g_0(z)$ zweier ganzen Funktionen, so schreibt sich die Gleichung (2) vom Grade m in w und n in z so:

$$(g_0(z)w - g_1(z))^m = 0.$$

Ihre linke Seite stellt die m^{te} Potenz eines Polynoms dar. Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangt man übrigens in allen Fällen der Reduzibilität.

Die ein-eindeutige Beziehung der beiden Flächen aufeinander ist demnach durch eine umkehrbar rationale Transformation vollziehbar. Umgekehrt ist wieder einleuchtend, daß, wenn diese Beziehung zwischen zwei Flächen vorliegt, sie in unserem Sinne als nicht wesentlich verschieden zu gelten haben.

Gegenüber diesen allgemeinen Auffassungen ist für die ausführliche Untersuchung eines einzelnen Funktionenkörpers die Auffindung einer Funktion von möglichst kleiner Wertigkeit m und damit die Gewinnung einer Riemannschen Fläche von möglichst kleiner Blätterzahl m von grundlegender Bedeutung. Bei den S. 48 und 64 besprochenen Flächen des Geschlechtes $p = 0$ gab es stets *einwertige* Funktionen. Diese Flächen erhielten wir bei Inversion der rationalen Funktionen $w = R(z)$; auf der einzelnen solchen Fläche über der w -Ebene ist dann eben z eine einwertige Funktion, welche die Fläche auf eine F_1 , nämlich die schlichte z -Ebene abbildet.

Beim Beweise des am Schlusse von § 16 (S. 82) angegebenen Riemannschen Existenztheorems findet man nun, daß auf jeder Riemannschen Fläche des Geschlechtes $p = 0$ eine „*einwertige*“ Funktion konstruiert werden kann.¹⁾ Bezeichnen wir die Werte derselben mit z , so ist offenbar auch jede lineare Funktion von z :

$$(5) \quad z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

eine einwertige Funktion des zur gegebenen Riemannschen Fläche gehörenden Körpers; und umgekehrt können wir, wie leicht zu sehen ist, jede einwertige Funktion dieses Körpers in einer unter ihnen, die z heiße, in der Gestalt (5) darstellen. Da hierbei nur zu fordern ist, daß die Determinante $(ad - bc)$ der linearen Funktion (5) von 0 verschieden ist (vgl. S. 66), und übrigens für die Funktion z' nur die „Verhältnisse“ der Koeffizienten a, b, c, d maßgeblich sind, so haben wir die Auswahl unter *dreifach unendlich vielen einwertigen Funktionen* unsrer Fläche.

In dem ausgewählten z stellen sich nun die gesamten Funktionen des Körpers in der Gestalt $R(z)$ dar. Es folgt: *Im Falle $p = 0$ haben wir im wesentlichen nur einen einzigen Funktionenkörper, denjenigen der „rationalen Funktionen einer komplexen Variablen“.* Auch die dem Körper zugehörigen *Integrale* erledigen sich sofort durch die bekannte Formel:

$$\int R(z) dz = R_1(z) + \sum_{i=1}^n C_i \log(z - s_i),$$

welche sich den Bezeichnungen von S. 61 anschließt.

1) Man vgl. etwa die Behandlung des Riemannschen Existenzsatzes in den „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen“ von F. Klein und R. Fricke (Leipzig, 1890 und 1892), Bd. 1, S. 493 ff. Dieses weiterhin oft zu nennende Buch soll fortan durch „Modulfunktionen“ zitiert werden.

Ist zweitens $p = 1$, so ist die Existenz einer einwertigen Funktion ausgeschlossen, da man einen Kreisring (vgl. Fig. 18, S. 86) nicht eindeutig und stetig auf eine schlichte Kugelfläche abbilden kann. Eine zweiblättrige Fläche F_2 mit vier Verzweigungspunkten hatte uns oben (S. 84) ein erstes Beispiel für eine Fläche des Geschlechtes $p = 1$ geliefert. *Beim Beweise des Riemannschen Existenztheorems gelingt es, für irgendeine Fläche des Geschlechtes $p = 1$ eine zweiwertige Funktion zu konstruieren, welche noch dazu an zwei willkürlich wählbaren Stellen der Fläche ihre beiden Pole erster Ordnung hat.*¹⁾ Bezeichnet man die Werte dieser zweiwertigen Funktion wieder mit z , so ist zugleich:

$$(6) \quad z' = az + b$$

die allgemeinste zweiwertige Funktion der Fläche, welche an den beiden vorgeschriebenen Stellen ihre Pole hat; dabei sind a, b willkürliche endliche Konstante, nur muß a von 0 verschieden sein.

Die zweiwertige Funktion z bildet nun die anfänglich vorgelegte Fläche konform auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche F_2 ab, die als zum Geschlechte $p = 1$ gehörig vier getrennt liegende Verzweigungspunkte hat (vgl. Formel (4) S. 88). Mindestens drei von den vier Verzweigungspunkten liegen im Endlichen, etwa wieder bei e_1, e_2, e_3 . Der vierte Verzweigungspunkt ist entweder auch endlich, etwa bei e_4 gelegen, oder er liegt bei $z = \infty$; letzteres tritt stets und nur dann ein, wenn die beiden für z vorgeschriebenen Pole zusammenfallen und dadurch einen einzigen Pol zweiter Ordnung liefern.

Wir können die beiden eben unterschiedenen Fälle in einen Ausdruck zusammenziehen. Wir setzen im ersten Falle, unter a eine nichtverschwindende komplexe Konstante verstanden:

$$a(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4) = g(z)$$

und wollen bei Anordnung dieser ganzen Funktion vierten Grades $g(z)$ nach abfallenden Potenzen von z die Schreibweise:

$$(7) \quad g(z) = az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e$$

gebrauchen, wo die Koeffizienten $a, b, \dots$ natürlich nichts mit denen in (5) und (6) zu tun haben. Wir fassen dann die beiden fraglichen Fälle einfach dadurch zusammen, daß wir von der ganzen Funktion $g(z)$ nur das Getrenntliegen der „vier“ Nullpunkte fordern, aber ein Verschwinden des höchsten Koeffizienten a zulassen; wird $a = 0$, so rückt dann eben einer der vier Nullpunkte nach $z = \infty$.

Umgekehrt können wir für jede ganze Funktion (7), welche die eben ausgesprochene Forderung erfüllt, eine Fläche F_2 konstruieren,

1) Vgl. etwa wieder „Modulfunktionen“, Bd. 1, S. 540 ff.

deren Verzweigungspunkte die „vier“ Nullpunkte von $g(z)$ sind, und deren Geschlecht dann wieder $p = 1$ ist.

Nun erkennt man sofort in:

$$w = \sqrt{g(z)} = \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e}$$

eine zur $\mathbf{F}_2$ gehörende algebraische Funktion. Dieselbe erscheint mit z verbunden durch die Gleichung:

$$(8) \quad w^2 - (az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e) = 0,$$

welche irreduzibel ist, da $g(z)$ nicht das Quadrat einer ganzen Funktion ist. Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis: *Alle beim Geschlechte $p = 1$ existierenden Körper algebraischer Funktionen werden uns geliefert von den durch (8) gegebenen algebraischen Gebilden, wo die in Klammern stehende ganze Funktion getrennt liegende Nullpunkte haben soll. Beim einzelnen Gebilde sind die gesamten Funktionen des zugehörigen Körpers gegeben durch:*

$$(9) \quad R(z, \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e}),$$

die zugehörigen Integrale aber durch:

$$(10) \quad \int R(z, \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e}) dz.$$

Die Eigenschaften dieser Integrale näher festzustellen, ergibt sich hier als nächstes Problem. Aber indem wir dieses Problem aufgreifen und zur Durchführung bringen, tritt eine neue und grundsätzliche Wendung in unseren Entwicklungen ein: *Wir werden erkennen, daß die gesamten Funktionen des Körpers, in Abhängigkeit von einem bestimmten unter den Integralen (10) betrachtet, zu eindeutigen Funktionen werden.* Diese fundamentale Tatsache der „Eindeutigkeit“ wird uns daraufhin veranlassen, die Größen (9) als Funktionen jenes Integrales ausführlich zu untersuchen. Wir werden sie als solche mit dem Namen der „*elliptischen Funktionen*“ belegen und unseren bisherigen Körper algebraischer Funktionen des Geschlechtes 1 in einen „*Körper elliptischer Funktionen*“ umwandeln.

Daneben tritt dann noch eine zweite Frage auf (welche sich beim Geschlechte $p = 0$ unmittelbar erledigte), *nämlich wie man beim Geschlechte $p = 1$ einen Überblick über die gesamten wesentlich verschiedenen Körper algebraischer Funktionen verschaffen kann.* Auch für diese Aufgabe wird uns jenes eben genannte Integral die geeignetsten Hilfsmittel zur Lösung an die Hand geben.

Die beiden hiermit genannten Aufgaben, *nämlich den einzelnen „Körper elliptischer Funktionen“ ausführlich zu untersuchen und zweitens den Überblick über das „System aller wesentlich verschiedenen Körper elliptischer Funktionen“ zu gewinnen*, setzen das „Grundproblem“ unserer

folgenden Untersuchungen zusammen. Ehe wir an die Behandlung desselben gehen, sind indessen unsere vorbereitenden Entwicklungen noch nach einer anderen Seite hin zu ergänzen.

§ 19. Lösung linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Einige Grundsätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung kommen weiterhin für den Fall $n = 2$ zur Verwendung und sollen hier sogleich für diese Ordnung entwickelt werden.¹⁾ Eine lineare homogene Differentialgleichung dieser Ordnung sei in der Gestalt:

$$(1) \quad \frac{d^2 \xi}{dz^2} = f_1(z) \frac{d\xi}{dz} + f_2(z) \xi$$

vorgelegt, wo $f_1(z)$ und $f_2(z)$ analytische Funktionen sein sollen. Ist z_0 irgendeine Stelle, in deren Umgebung $f_1(z)$ und $f_2(z)$ analytisch sind, so soll zunächst gefragt werden, ob sich ebenda eine analytische Lösung ξ von (1) angeben läßt, und welches die allgemeinste Lösung dieser Art ist.

Die Reihenentwicklungen von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in der Umgebung von z_0 seien:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \\ f_2(z) &= b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots. \end{aligned}$$

Hat mindestens eine dieser Reihen einen endlichen Konvergenzradius, so bezeichnen wir den kleineren unter den Konvergenzradien oder, falls beide gleich sind, den gemeinsamen Radius mit R ; handelt es sich um zwei beständig konvergente Reihen, so sei R als positive Größe beliebig gewählt. Die Lösung ξ möge, falls sie existiert, als analytische Funktion von z die Entwicklung haben:

$$\xi = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Innerhalb des Konvergenzkreises dieser Reihe ergeben sich, indem wir rechts gliedweise differenzieren, sofort die Reihenentwicklungen für $\frac{d\xi}{dz}$ und $\frac{d^2\xi}{dz^2}$. Die letztere Entwicklung muß (vgl. S. 14) identisch sein mit derjenigen Entwicklung, welche man aus der rechten Seite von (1) durch Eintragen der Reihen und Umordnung nach ansteigenden Po-

1) Siehe L. Fuchs, „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“, Journ. f. Math., Bd. 66 (1866) und Bd. 68 (1868). Eine umfassende Darstellung der Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung gab L. Schlesinger, „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen“, zwei Bände (Leipzig 1895 und 1898).

tenzen von $(z - z_0)$ gewinnt. Dies ist aber stets und nur dann der Fall, wenn die Gleichung:

$$(2) \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} = c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \cdots + c_n b_0 \\ + c_1 a_n + 2c_2 a_{n-1} + 3c_3 a_{n-2} + \cdots + (n+1)c_{n+1} a_0$$

für alle Indizes $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt. Während demnach c_0 und c_1 unbestimmt bleiben, berechnen sich aus der Rekursionsformel (2) alle weiteren Koeffizienten $c_2, c_3, \dots$ in der Gestalt:

$$(3) \quad c_n = c'_n c_0 + c''_n c_1,$$

wo die c'_n und c''_n bestimmte rationale ganze Ausdrücke in den Koeffizienten a_k und b_k sind; dabei sind, was man beachten wolle, in diesen ganzen rationalen Ausdrücken nur Pluszeichen enthalten.

Um nun die Konvergenz der für ξ angesetzten Reihe zu erörtern, wähle man z beliebig, aber fest im Innern des Kreises vom Radius R um z_0 und bestimme ferner eine positive Zahl r aus dem Intervall:

$$(4) \quad |z - z_0| < r < R.$$

Dann können wir (vgl. S. 16) eine bestimmte endliche Zahl M angeben, so daß längs der Peripherie des Kreises vom Radius r um z_0 die Ungleichungen $|f_1(z)| < M$ und $|f_2(z)| < M$ zutreffen. M soll außerdem jedenfalls der Bedingung:

$$(5) \quad Mr > 2$$

genügen. Wie S. 50 ergibt sich für die absoluten Beträge der Koeffizienten in den für $f_1(z)$ und $f_2(z)$ angegebenen Reihen:

$$|a_k| < \frac{M}{r^k}, \quad |b_k| < \frac{M}{r^k}.$$

Wenn wir demnach die sämtlichen Koeffizienten a_k und b_k durch Mr^{-k} ersetzen, außerdem aber $|c_0|$ und $|c_1|$ an Stelle von c_0 und c_1 treten lassen, so wird zufolge der angegebenen Bauart der c'_n, c''_n in den a_k, b_k jedenfalls $|c_n|$ vergrößert. Ist die Reihe für ξ auch nach dieser Vergrößerung der Beträge $|c_n|$ konvergent, so konvergiert sicher auch die ursprüngliche Reihe $c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$ im ausgewählten Punkte z .

Nun kommt aber der vollzogene Ersatz der a_k, b_k einfach darauf hinaus, daß wir die bisherigen $f_1(z), f_2(z)$ zugleich durch die Funktion:

$$\frac{M}{1 - \frac{z - z_0}{r}}$$

ersetzen, oder daß wir an Stelle der Differentialgleichung (1) die folgende treten lassen:

$$\left(1 - \frac{z - z_0}{r}\right) \frac{d^2 \xi}{dz^2} = M \left(\frac{d\xi}{dz} + \xi\right).$$

Hier kann man entweder aus den dieser Gleichung zugehörigen Relationen (2) oder auch durch direktes Operieren mit dieser Differentialgleichung die Rekursionsformel in die einfachere Gestalt kleiden:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)n \frac{c_{n+1}}{r} = M((n+1)c_{n+1} + c_n),$$

aus welcher sich weiter ergibt:

$$c_{n+2}r^2 = c_{n+1}r \frac{n+Mr}{n+2} + c_n \frac{Mr^2}{(n+2)(n+1)}.$$

Die im vorliegenden Falle für $n \geq 2$ eintretenden c'_n und c''_n sind durchweg reell und positiv. Ersetzen wir somit die noch frei wählbaren c_0, c_1 durch ihre absoluten Beträge, so werden zufolge (3) die Beträge $|c_n|$ nicht verkleinert. Es ist also ausreichend, wenn wir für positive c_0, c_1 die Konvergenz zeigen. Dann aber werden alle c_n positiv, und es ergibt sich aus der letzten Gleichung mit Rücksicht auf (5) für alle $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$c_{n+2}r^2 > c_{n+1}r.$$

Somit ist auch $c_{n+1}r > c_n$ für alle $n = 1, 2, 3, \dots$, so daß wir wieder aus der letzten Gleichung für $n = 1, 2, 3, \dots$ die Folgerung ziehen:

$$c_n \cdot 2r^2 < c_{n+1}r \left(\frac{n+Mr}{n+2} + \frac{Mr^2}{(n+2)(n+1)} \right).$$

Man schreibe diese Ungleichung um in die Gestalt:

$$\left| \frac{c_{n+2}(z-z_0)^{n+2}}{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}} \right| < \frac{|z-z_0|}{r} \left(\frac{n+Mr}{n+2} + \frac{Mr^2}{(n+2)(n+1)} \right)$$

und beachte, daß der Klammerausdruck rechter Hand sich für $\lim n = \infty$ dem Grenzwerte 1 nähert. Der links stehende Quotient zweier aufeinander folgender Reihenglieder nähert sich somit für $\lim n = \infty$ zufolge (4), absolut genommen, einem unterhalb 1 gelegenen Grenzwerte, womit die Konvergenz der für ξ angesetzten Reihe im Punkte z bewiesen ist.

Es ist hiermit bewiesen, daß die für die Lösung ξ der Differentialgleichung (1) angesetzte Reihe in der Umgebung von z_0 mindestens ebensoweit konvergiert, als die für $f_1(z)$ und $f_2(z)$ geltenden Reihen zugleich konvergent sind. Wir erhalten also in ξ , und zwar für jede Auswahl von c_0 und c_1 , eine Lösung von (1); und andererseits ist hiermit jede analytische Lösung von (1) in der Umgebung von z_0 gewonnen, da ja für jede Reihe $c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$, welche die Gleichung (1) identisch befriedigt, die Relation (3) gilt.

Den besonderen Auswahlen $c_0 = 1, c_1 = 0$ und sodann $c_0 = 0, c_1 = 1$ entsprechen zwei partikuläre Lösungen:

$$(6) \quad \begin{cases} \xi_1 = 1 + * + c'_2(z-z_0)^2 + c'_3(z-z_0)^3 + \dots, \\ \xi_2 = * + (z-z_0) + c''_2(z-z_0)^2 + \dots, \end{cases}$$

wobei in der ersten Reihe das lineare Glied und in der zweiten das Absolutglied fehlt, was beide Male durch einen Stern angedeutet ist. Schreiben wir statt der bisherigen c_0, c_1 fortan a und b , so ist folgender Satz gewonnen: *Die Differentialgleichung (1) besitzt in der Umgebung¹⁾ jeder Stelle z_0 , in der $f_1(z)$ und $f_2(z)$ überall analytisch sind, Lösungen ξ , welche ebenda gleichfalls überall analytisch sind; dabei läßt sich jede dieser Lösungen in den beiden partikulären Lösungen (6) mittels zweier Konstanten a, b in der Gestalt:*

$$(7) \quad \xi = a\xi_1 + b\xi_2$$

darstellen, wie auch umgekehrt für jede Auswahl endlicher Konstanten a, b in (7) eine Lösung vorliegt.

Soll die Summe $(a\xi_1 + b\xi_2)$ als Funktion von z mit 0 identisch sein, so muß in der Reihenentwicklung derselben der Koeffizient jedes Gliedes gleich 0 sein, so daß zufolge (6) insbesondere $a = 0, b = 0$ zutreffen muß. Die Lösungen ξ_1, ξ_2 sollen in dem Sinne voneinander „linear-unabhängig“ heißen, als hiernach eine Gleichung $a\xi_1 + b\xi_2 = 0$ mit nicht zugleich verschwindenden a, b nicht identisch bestehen kann. Greifen wir nun (immer in der Umgebung von z_0) irgend zwei Lösungen:

$$(8) \quad \xi'_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \quad \xi'_2 = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2$$

auf, so gilt identisch:

$$a'\xi'_1 + b'\xi'_2 = (a'\alpha + b'\gamma)\xi_1 + (a'\beta + b'\delta)\xi_2.$$

Man folgert hieraus leicht: *Ist die Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ der Koeffizienten in (8) von 0 verschieden, so sind ξ'_1, ξ'_2 linear-unabhängig; und wenn ξ'_1, ξ'_2 linear-unabhängig sind, so ist umgekehrt $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ von 0 verschieden.* In diesem Falle kann man die Gleichungen (8) nach ξ_1, ξ_2 lösen und also ξ_1, ξ_2 linear und homogen in ξ'_1, ξ'_2 darstellen. Diese Darstellungen können wir dann auch in (7) eintragen, so daß wir in der Umgebung von z_0 zur Darstellung aller Lösungen in der Gestalt (7) an Stelle der obigen ξ_1, ξ_2 irgend zwei linear-unabhängige Lösungen zugrunde legen können.

Indem wir jetzt über die Umgebung von z_0 hinausgehen, hat es zunächst keine Schwierigkeit, auf Grund der Überlegungen von S. 24 ff. ein „Feld“ $\mathbf{F}$ des Funktionenpaares $f_1(z), f_2(z)$ zu erklären. Man hat hierbei einfach den Prozeß der analytischen Fortsetzung gleichzeitig auf $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auszuüben und bei dem einzelnen Paare von Funktionselementen, sofern die beiden Konvergenzkreise verschieden sind, nur den

1) Eine „Umgebung“ von z_0 sollte nach S. 1 stets als „Kreisfläche“ des Mittelpunktes z_0 gewählt werden.

kleineren Kreis zuzulassen. Auch hat man natürlich, falls das System der aneinander geklebten Konvergenzkreise um singuläre Punkte herum über sich selbst hinübergreift, die übereinander liegenden Teile der Kreise nur dann zu verkleben, falls sowohl $f_1(z)$ als $f_2(z)$ bei dem betreffenden Umlaufe zu den anfänglichen Funktionswerten zurückkehren.

Wir wollen zunächst außer den „singulären“ Punkten (Polen, endlich-blättrigen Verzweigungspunkten¹⁾, wesentlich singulären Punkten) für mindestens eine der Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ auch alle Stellen ∞ , welche dem Felde $\mathbf{F}$ etwa angehören, als „Randpunkte“ von $\mathbf{F}$ auffassen. Dann ist sofort einleuchtend: *In der Umgebung jedes „Innenpunktes“ z_0 von $\mathbf{F}$ gelten über die Natur der Lösungen ξ von (1) die obigen Sätze; irgendeine bei einer speziellen Stelle z_0 aufgegriffene Lösung $\xi(z)$ von (1) ist im Innern von $\mathbf{F}$ unbegrenzt fortsetzbar, erweist sich daselbst überall als analytisch und stellt beständig eine Lösung von (1) dar.* Man hat nur zu beachten, daß in der Umgebung von z_0 der Ausdruck:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} - f_1(z) \frac{d\xi}{dz} - f_2(z) \xi$$

als Funktion von z identisch verschwindet und also auch bei Fortsetzung beständig mit 0 identisch bleiben muß. Die bei Fortsetzung auftretenden Funktionswerte ξ stellen demnach immer wieder eine Lösung von (1) dar, müssen also die oben gewonnenen Gesetze der Lösungen befriedigen.

Die endlich-blättrigen Verzweigungspunkte und die Stellen ∞ machen übrigens keine Schwierigkeiten. Haben wir einen ν -blättrigen Verzweigungspunkt bei z_0 oder eine Stelle $z = \infty^2)$, so führen wir als neue Variable bzw.:

$$z' = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{1}{z}$$

ein und rechnen in beiden Fällen³⁾ die Gleichung (1) in die Gestalt:

$$\frac{d^2\xi}{dz'^2} = \bar{f}_1(z') \frac{d\xi}{dz'} + \bar{f}_2(z') \xi$$

um, wo $\bar{f}_1(z')$, $\bar{f}_2(z')$ in der Umgebung von $z' = 0$ eindeutig sind. Hier ist dann einfach zu prüfen, ob $\bar{f}_1(z')$ und $\bar{f}_2(z')$ bei $z' = 0$ beide analytisch sind, oder ob mindestens eine dieser Funktionen daselbst einen

1) Findet man bei der analytischen Fortsetzung Koinzidenz eines ν_1 -blättrigen Verzweigungspunktes von $f_1(z)$ mit einem ν_2 -blättrigen von $f_2(z)$, so hat $\mathbf{F}$ daselbst einen ν -blättrigen Verzweigungspunkt, unter ν das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von ν_1 und ν_2 verstanden.

2) Letztere Stelle nach der eben gegebenen Bestimmung als isolierten Randpunkt von $\mathbf{F}$.

3) Natürlich darf auch wieder ein ν -blättriger Verzweigungspunkt bei $z = \infty$ liegen, wo man dann $(z - z_0)$ durch z^{-1} zu ersetzen hat.

Pol oder, was im Falle eines Punktes $z = \infty$ ja zunächst nicht ausgeschlossen ist, einen wesentlich singulären Punkt hat. Im zweiten und dritten Falle rechnen wir die betrachtete Stelle den Polen bzw. wesentlich singulären Stellen des Funktionenpaares $f_1(z)$, $f_2(z)$ zu und erklären nunmehr als „singuläre Stellen“ der Differentialgleichung (1) die gesamten Pole und wesentlich singulären Punkte des Funktionenpaares $f_1(z)$, $f_2(z)$.

Ehe wir auf die Untersuchung dieser singulären Stellen näher eingehen, ist über die Vieldeutigkeit der Lösungen ξ im Felde $\mathbf{F}$ eine grundlegende Betrachtung auszuführen. In der Umgebung einer nicht-singulären Stelle seien ξ_1 , ξ_2 zwei linear-unabhängige Lösungen und ξ irgendeine Lösung von (1). Man beschreibe von z_0 eine im Felde $\mathbf{F}$ geschlossene Bahn C bis z_0 zurück und setze ξ über C fort. Ist es möglich, C stetig und ohne Zerreißen auf einen Punkt zusammenzuziehen, ohne daß die Bahn C hierbei über eine singuläre Stelle von (1) hinweggezogen wird, so kehrt ξ längs C notwendig zu seinen Anfangswerten zurück. Ist diese Zusammenziehung von C nicht möglich, so können wir nur folgern, daß die Fortsetzung von ξ über C hin am Schlusse wieder zu einer Lösung ξ' von (1) für die Umgebung von z_0 hinführt, wo sich alsdann ξ' wieder linear und homogen in den ξ_1 , ξ_2 darstellt.

Wenden wir dieses Ergebnis insbesondere auf ξ_1 und ξ_2 selbst an, so mögen wir am Schlusse zu:

$$(9) \quad \xi'_1 = \alpha \xi_1 + \beta \xi_2, \quad \xi'_2 = \gamma \xi_1 + \delta \xi_2$$

gelangen. Diese Lösungen ξ'_1 , ξ'_2 müssen dann wieder linear-unabhängig sein, da eine am Schlusse identisch bestehende Gleichung $a\xi'_1 + b\xi'_2 = 0$ auch schon zu Anfang bestehen müßte. Wir gelangen demnach zu folgendem grundlegenden, die Vieldeutigkeit der Lösungen ξ im Felde $\mathbf{F}$ regelnden Satze: *Ein System linear-unabhängiger Lösungen ξ_1 , ξ_2 geht bei Fortsetzung über einen im Felde $\mathbf{F}$ geschlossenen Weg C in ein System der Gestalt (9) mit $|\alpha\delta - \beta\gamma| > 0$ über, so daß sich das System ξ_1 , ξ_2 bei Fortsetzung über C , wie man sagt, linear mit nicht-verschwindender Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ substituiert; so oft C , ohne über singuläre Punkte von (1) hinweggeschoben zu werden, stetig und ohne Zerreißen in $\mathbf{F}$ auf einen Punkt zusammenziehbar ist, liegt die „identische Substitution“ (vgl. S. 68) d. h. diejenige mit $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, vor.*

Dieses Ergebnis eröffnet uns zugleich die Möglichkeit, Darstellungen der Lösungen ξ von (1) in der Umgebung eines isoliert liegenden singulären Punktes z_0 dieser Differentialgleichung zu machen, wobei man, falls z_0 ein Verzweigungspunkt oder eine Stelle ∞ ist, zuvor die Transformation auf die oben genannte Variable z' vornehme. C umlaufe z_0

im positiven Sinne und sei so gewählt, daß kein weiterer singulärer Punkt in oder auf C liegt. Dem Umlauf entspreche die Substitution (9) eines ausgewählten Systems linear-unabhängiger Lösungen ξ_1, ξ_2 .

Wir fragen nun, ob es eine nicht identisch verschwindende Lösung

$$Z = A\xi_1 + B\xi_2$$

geben kann, welche beim Umlauf C in sich selbst multipliziert mit einem konstanten Faktor μ übergeht, so daß die Gleichung $Z' = \mu Z$ bestehen würde. Dann müßte:

$$A(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) + B(\gamma\xi_1 + \delta\xi_2) = \mu A\xi_1 + \mu B\xi_2$$

identisch gelten, woraus wir, da ξ_1, ξ_2 linear-unabhängig sind:

$$(10) \quad A(\alpha - \mu) + B\gamma = 0, \quad A\beta + B(\delta - \mu) = 0$$

folgern. Zwei nicht zugleich verschwindende Konstante A, B , welche die Gleichungen (10) befriedigen, liefern auch umgekehrt eine gewünschte Lösung Z .

Damit nun die Gleichungen (10) durch zwei nicht zugleich verschwindende A, B befriedigt werden können, muß ihre Determinante verschwinden:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \alpha - \mu & \gamma \\ \beta & \delta - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (\alpha + \delta)\mu + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Es gibt demnach für unseren singulären Punkt z_0 höchstens zwei Faktoren μ_1, μ_2 oder gar nur einen μ , in dem Falle nämlich, daß die Gleichung (11) zusammenfallende Wurzeln hat.¹⁾ Man beachte noch, daß die Faktoren μ als Lösungen von (11) sicher endlich und von 0 verschieden sind.

Tragen wir nun einen aus (11) berechneten Faktor μ in (10) ein, so können zwei Fälle eintreten. Entweder sind die linearen Gleichungen (10) für die gesuchten A, B identisch erfüllt, oder es gibt, abgesehen von einem gemeinsamen Faktor, den wir den A, B zusetzen dürfen, nur ein System nicht zugleich verschwindender Lösungen A, B von (10). Im ersten Falle ist $\alpha = \delta = \mu$, $\beta = \gamma = 0$, und es sind die A, B willkürlich wählbar: In der Tat nehmen jetzt bereits die beiden linear-unabhängigen Lösungen ξ_1, ξ_2 bei einem Umlauf um den singulären Punkt z_0 den Faktor μ an, und dasselbe gilt also für jede Lösung. Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es, abgesehen von einem konstanten Faktor, den wir der Lösung zusetzen mögen, eine und nur eine Lösung Z , welche bei Umlauf um z_0 den aus (11) berechneten Faktor μ annimmt.

1) Aus der Bestimmtheit der Faktoren μ folgt zugleich ihre Unabhängigkeit von der Auswahl des Systems ξ_1, ξ_2 , die man auch leicht durch direkte Rechnung beweisen kann.

Für die in Rede stehende Lösung Z können wir nun leicht in der Umgebung von z_0 eine Darstellung angeben. Setzen wir:

$$(12) \quad \varrho = \frac{\log \mu}{2i\pi},$$

so ist ϱ bis auf eine additive ganze Zahl bestimmt; wir behalten uns eine spezielle Auswahl von ϱ vor und denken zunächst eine beliebige Wahl getroffen. Dann ist:

$$e^{\varrho \log(z-z_0)} = (z-z_0)^\varrho$$

eine in der Umgebung von z_0 , abgesehen von diesem Punkte selbst, überall analytische Funktion, die bei dem Umlaufe um z_0 gleichfalls den Faktor μ annimmt. Somit ist $Z \cdot (z-z_0)^{-\varrho}$ ebendasselbst überall analytisch und kehrt beim Umlaufe um z_0 zu seinen Anfangswerten zurück. Für dieses Produkt gilt demnach (vgl. S. 41) eine Laurentsche Entwicklung nach Potenzen von $(z-z_0)$, die durch $\mathfrak{L}(z-z_0)$ bezeichnet werde:

$$Z \cdot (z-z_0)^{-\varrho} = \mathfrak{L}(z-z_0),$$

und die in der Umgebung von z_0 , abgesehen vielleicht¹⁾ von diesem Punkte selbst, konvergiert.

Hat jetzt die Gleichung (11) verschiedene Wurzeln μ_1, μ_2 , so mögen ihnen die bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmten Lösungen Z_1, Z_2 von (1) zugehören, welche man leicht als linear-unabhängig erkennt.²⁾ Wählen wir zwei zugehörige ϱ_1, ϱ_2 , so folgt: *Sind die beiden Wurzeln μ_1, μ_2 von (11) verschieden, so gibt es zwei bis auf konstante Faktoren bestimmte, linear-unabhängige Lösungen Z_1, Z_2 mit den Darstellungen:*

$$(13) \quad Z_1 = (z-z_0)^{\varrho_1} \cdot \mathfrak{L}_1(z-z_0), \quad Z_2 = (z-z_0)^{\varrho_2} \cdot \mathfrak{L}_2(z-z_0).$$

Sind die beiden Wurzeln μ von (11) einander gleich, so setzen wir eine erste Lösung Z_1 mit der Darstellung:

$$Z_1 = (z-z_0)^\varrho \cdot \mathfrak{L}_1(z-z_0)$$

an. Ist Z_2 eine von Z_1 linear-unabhängige Lösung, so tritt jetzt bei dem Umlaufe um z_0 an Stelle von (9):

$$Z'_1 = aZ_1, \quad Z'_2 = \gamma Z_1 + \delta Z_2,$$

1) Es kann ja der besondere Fall eintreten, daß $\mathfrak{L}(z-z_0)$ überhaupt keine Glieder mit negativen Potenzexponenten aufweist.

2) Besteht nämlich $aZ_1 + bZ_2 = 0$ identisch, so folgt durch Ausführung des Umlaufs um z_0 als wieder identisch gültig $a\mu_1 Z_1 + b\mu_2 Z_2 = 0$. Durch Kombination beider Gleichungen folgt leicht $a = 0, b = 0$.

wo natürlich $\alpha = \mu$ ist. Da aber die zugehörige Gleichung (11) auch als zweite Lösung wieder μ haben muß, so ist auch $\delta = \mu$, und also gilt:

$$Z'_1 = \mu Z_1, \quad Z'_2 = \gamma Z_1 + \mu Z_2.$$

Ist nun erstlich $\gamma = 0$, so haben wir den schon vorhin erwähnten Fall, daß alle Lösungen beim Umlauf um z_0 den Faktor μ annehmen, wo dann also Darstellungen gelten:

$$(14) \quad Z_1 = (z - z_0)^q \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0), \quad Z_2 = (z - z_0)^q \cdot \mathfrak{L}_2(z - z_0),$$

Ist zweitens $|\gamma| > 0$, so beachte man, daß die Lösung Z_1 bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, da jetzt der eben erledigte Fall nicht vorliegt. Nach bestimmter Auswahl von Z_1 möge an Stelle der zuerst aufgegriffenen Lösung Z_2 die folgende:

$$\bar{Z}_2 = 2i\pi\mu\gamma^{-1}Z_2$$

treten, die hernach gleich selbst wieder Z_2 heiße. Offenbar gilt dann für den Umlauf um z_0 :

$$Z'_1 = \mu Z_1, \quad Z'_2 = 2i\pi\mu Z_1 + \mu Z_2.$$

Hieraus aber folgert man ohne Mühe, daß die Funktion:

$$Z_2 - \log(z - z_0) \cdot Z_1,$$

welche in der Umgebung von z_0 , abgesehen von z_0 selbst, überall analytisch ist, gegenüber dem Umlauf um z_0 einfach wieder den Faktor μ annimmt und also eine Darstellung $(z - z_0)^q \cdot \mathfrak{L}_2(z - z_0)$ gestattet. Jetzt existieren zwei linear-unabhängige Lösungen mit den Darstellungen:

$$(15) \quad Z_1 = (z - z_0)^q \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0), \quad Z_2 = (z - z_0)^q (\mathfrak{L}_2(z - z_0) + \log(z - z_0) \cdot \mathfrak{L}_1(z - z_0)),$$

wo Z_1 bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist und Z_2 nach Auswahl von Z_1 insoweit unbestimmt bleibt, daß Z_2 durch irgendeine Lösung ($Z_2 + aZ_1$) ersetzbar ist.

Alle in (13) ff. zur Benutzung kommenden Laurentschen Reihen konvergieren in der Umgebung des singulären Punktes z_0 , abgesehen vielleicht von diesem Punkte selbst.

§ 20. Ausführungen über die hypergeometrische Differentialgleichung.

Die vorstehenden Ausführungen werden späterhin insbesondere im Falle der „hypergeometrischen“ Differentialgleichung:

$$(1) \quad z(z-1) \frac{d^2\xi}{dz^2} + [(\alpha + \beta + 1)z - \gamma] \frac{d\xi}{dz} + \alpha\beta\xi = 0$$

zur Verwendung kommen. Wir wollen hierbei unter α, β, γ reelle Größen verstehen, die weiterhin noch gewissen Beschränkungen unterworfen werden sollen.

Die bisher mit $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bezeichneten Funktionen sind für die Differentialgleichung (1) rational und haben Pole bei $z = 0$ und $z = 1$. *Das Feld $\mathbf{F}$ des Funktionenpaares ist die schlichte z -Kugel; singuläre Punkte der Differentialgleichung sind im Endlichen nur die Punkte $z = 0$ und $z = 1$, denen wir nötigenfalls als dritten singulären Punkt den noch näher zu untersuchenden Punkt $z = \infty$ hinzuzufügen haben.*

Um diese Untersuchung sogleich durchzuführen, setzen wir $z = \frac{1}{z'}$ und rechnen (1) auf die Gestalt um:

$$z'(\zeta' - 1) \frac{d^2 \zeta}{dz'^2} + [(2 - \gamma)z' - (1 - \alpha - \beta)] \frac{d\zeta}{dz'} - \frac{\alpha\beta}{z'} \zeta = 0.$$

Hieraus geht zunächst hervor, daß $z' = 0$ und also $z = \infty$ ein singulärer Punkt unserer Differentialgleichung ist. Andererseits gewinnen wir aus der letzten Gleichung die Kenntnis einer grundlegenden Eigenschaft der Gleichung (1) auf folgende Art. Die auf z' transformierte Gleichung hat zwar nicht unmittelbar die Gestalt (1) einer hypergeometrischen Differentialgleichung, kann aber durch die Transformation $\xi = z'^q \zeta'$ wieder auf diese Gestalt gebracht werden. Man wird nämlich durch diese Transformation zu der Gleichung:

$$z'(\zeta' - 1) \frac{d^2 \xi}{dz'^2} + [(2q - \gamma + 2)z' - (2q - \alpha - \beta + 1)] \frac{d\xi}{dz'} + [q(q - \gamma + 1) - \frac{(q - \alpha)(q - \beta)}{z'}] \xi = 0$$

geführt und erkennt sofort, daß hier wieder eine Gleichung (1) vorliegt, falls q entweder $= \alpha$ oder $= \beta$ gesetzt wird. Im ersten Falle treten an Stelle der α, β, γ die Größen:

$$(2) \quad \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \alpha - \gamma + 1, \quad \gamma' = \alpha - \beta + 1,$$

im zweiten Falle aber:

$$(3) \quad \alpha' = \beta - \gamma + 1, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = -\alpha + \beta + 1.$$

Das gewonnene Ergebnis läßt sich noch in eine wesentlich einfachere Gestalt kleiden, wenn wir statt der α, β, γ drei neue Größen λ, μ, ν einführen, welche mit den α, β, γ durch:

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda = 1 - \gamma, & \mu = \gamma - \alpha - \beta, & \nu = \beta - \alpha, \\ \alpha = \frac{1}{2}(1 - \lambda - \mu - \nu), & \beta = \frac{1}{2}(1 - \lambda - \mu + \nu), & \gamma = 1 - \lambda \end{cases}$$

zusammenhängen. Die Transformationen (2) und (3) der α, β, γ nehmen nämlich, auf λ, μ, ν umgerechnet, die einfachen Gestalten an:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \nu, & \mu' &= \mu, & \nu' &= \lambda, \\ \lambda' &= -\nu, & \mu' &= \mu, & \nu' &= -\lambda. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die linke Seite der Differentialgleichung (1) durch das Symbol $D(\xi, z; \lambda, \mu, \nu)$, so erweist sich dieser Ausdruck D als invariant gegenüber jeder der beiden Transformationen:

$$(5) \quad \xi' = z^\alpha \xi, \quad z' = z^{-1}, \quad \lambda' = \nu, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = \lambda,$$

$$(6) \quad \xi' = z^\beta \xi, \quad z' = z^{-1}, \quad \lambda' = -\nu, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = -\lambda,$$

da $D' = D(\xi', z'; \lambda', \mu', \nu')$ bis auf die Faktoren $z^{\alpha-2}$ bzw. $z^{\beta-2}$ gleich D ist:

$$D' = z^{\alpha-2} D \quad \text{bzw.} \quad D' = z^{\beta-2} D.$$

Setzt man ferner $\xi = \xi'$, $z = 1 - z'$ in (1) ein, so folgt:

$$z' (z' - 1) \frac{d^2 \xi'}{dz'^2} + [(\alpha + \beta + 1)z' - (\alpha + \beta - \gamma + 1)] \frac{d \xi'}{dz'} + \alpha \beta \xi' = 0,$$

womit wieder eine Gleichung (1), nämlich diejenige mit:

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \alpha + \beta - \gamma + 1$$

gewonnen ist. Für die λ, μ, ν liefern diese Gleichungen: $\lambda' = \mu$, $\mu' = \lambda$, $\nu' = \nu$, so daß D invariant ist auch gegenüber der Transformation:

$$(7) \quad \xi' = \xi, \quad z' = 1 - z, \quad \lambda' = \mu, \quad \mu' = \lambda, \quad \nu' = \nu.$$

Es ist nun ein einfacher, aber wichtiger Grundsatz, daß, wenn man zwei Transformationen, die beide D (von Faktoren abgesehen) in sich überführen, hintereinander ausübt, hierdurch eine aus jenen zusammengesetzte dritte Transformation entsteht, gegenüber der D in gleichem Sinne invariant sein muß. Wir wenden dies Prinzip zunächst nur auf die Transformationen (5) und (7) an, kombinieren die entspringenden Transformationen aber sowohl unter sich als auch wieder mit (5) und (7). Es zeigt sich, daß wir von (5) und (7) aus auf diese Weise insgesamt nur zu sechs verschiedenen Transformationen, die „identische“ Transformation $\xi' = \xi$, $z' = z$, $\lambda' = \lambda$, ... mitgerechnet, hingelangen, die wir in leicht verständlicher Weise tabellarisch zusammenstellen:

ξ	z	λ	μ	ν
ξ	$1 - z$	μ	λ	ν
$z^\alpha \xi$	$\frac{1}{z}$	ν	μ	λ
$z^\alpha \xi$	$\frac{z-1}{z}$	μ	ν	λ
$(1-z)^\alpha \xi$	$\frac{1}{1-z}$	ν	λ	μ
$(1-z)^\alpha \xi$	$\frac{z}{z-1}$	λ	ν	μ

Hier ist an erster Stelle die identische Transformation genannt, an zweiter die Transformation (7) und an dritter Stelle die Transformation (5). Die vierte Transformation entsteht, wenn wir zunächst die dritte und auf die transformierten Größen sodann die zweite Transformation ausüben. Beginnen wir mit der zweiten Transformation und üben sodann die dritte aus, so folgt die fünfte. Endlich ergibt sich die sechste Transformation etwa durch Kombination der fünften und der zweiten. Man überzeugt sich leicht durch direkte Rechnung, daß irgend zwei unter den sechs Transformationen kombiniert immer wieder eine unter diesen Transformationen liefern. Man sagt, um dieses Sachverhältnis zum Ausdruck zu bringen, *sie bilden eine „Gruppe“ von sechs zusammengehörigen Transformationen, nennt die Anzahl sechs der Transformationen die „Ordnung“ der Gruppe und bezeichnet diese durch das Symbol G_6* . Kehren wir die einzelne Transformation um, so entsteht die zur ihr „inverse“ Transformation. Man stellt ohne Mühe fest, daß (außer der identischen) die zweite, dritte und sechste Transformation je sich selbst invers sind, daß aber die vierte und fünfte zueinander invers sind. Man sagt auch, die zweite, dritte und sechste Transformation *seien von der Periode zwei*, insofern zweimalige Ausführung einer dieser Transformationen die identische Transformation erzeugt. Die vierte und fünfte Transformation haben im gleichen Sinne *die Periode drei*.¹⁾

Kombinieren wir nunmehr die Transformationen (5) und (6), so ergibt sich als neue Transformation, gegenüber welcher D wieder invariant ist:

$$(8) \quad \xi' = z^{-\lambda} \xi, \quad z' = z, \quad \lambda' = -\lambda, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = -\nu.$$

Demnächst wolle man die zweite Transformation der G_6 , hierauf (8) und dann nochmals die zweite Transformation der G_6 ausüben, wodurch man erhält:

$$\xi' = (1 - z)^{-\mu} \xi, \quad z' = z, \quad \lambda' = \lambda, \quad \mu' = -\mu, \quad \nu' = -\nu.$$

Endlich kombiniere man diese Transformation mit (8). Wir stellen die

1) Die G_6 des Textes ist, wie man sieht, vom Standpunkte der abstrakten Gruppentheorie (die nur auf die „Struktur“ der Gruppen achtet und die besondere Darstellungsform derselben als unwesentlich betrachtet) einfach mit der Gruppe der sechs Permutationen von drei Dingen (hier entweder die drei Größen λ, μ, ν oder, wenn man will, die drei singulären Punkte $z = 0, 1, \infty$) identisch. Faßt man die G_6 in der Gestalt der sechs linearen Substitutionen:

$$z' = z, \quad z' = 1 - z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{z-1}{z}, \quad z' = \frac{1}{1-z}, \quad z' = \frac{z}{z-1},$$

so gelangt man zu der in der „Theorie der regulären Körper“ oder in der „Theorie der Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen“ wohlbekannten „*Diedergruppe*“ G_6 ; siehe darüber Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder“, (Leipzig, 1884) S. 9 und 36 oder „Modulfunktionen“ Bd. 1 S. 15. Übrigens kommen wir im nächsten Kapitel (S. 126 ff.) auf die fraglichen Gruppen ausführlich zurück.

drei so gewonnenen Transformationen, unter Hinzunahme der identischen Transformation, wieder tabellarisch zusammen:

ξ	z	λ	μ	ν
$z^{-\lambda} \xi$	z	$-\lambda$	μ	$-\nu$
$(1-z)^{-\mu} \xi$	z	λ	$-\mu$	$-\nu$
$z^{-\lambda}(1-z)^{-\mu} \xi$	z	$-\lambda$	$-\mu$	ν

Diese vier Transformationen bilden für sich eine „Gruppe“ G_4 der Ordnung vier, wie man leicht zeigt.¹⁾

Man kombiniere schließlich die vier Transformationen der G_4 einzeln mit den sechs der G_6 und gelangt so zu 24 verschiedenen Transformationen mit einem (wenigstens was die z, λ, μ, ν angeht) unmittelbar übersehbaren Bildungsgesetze. Diese 24 Transformationen bilden wiederum eine Gruppe G_{24} der Ordnung 24, welche die besonderen Transformationen (5), (6) und (7) enthält; von diesen letzteren aus gelangen wir also insgesamt zu 24 verschiedenen Transformationen, welche die linke Seite der hypergeometrischen Differentialgleichung (1) bis auf einen Faktor in sich überführen.²⁾

Die vorstehenden Betrachtungen sind für die Lösungen der Differentialgleichung (1) in den Umgebungen der singulären Stellen wichtig. Die hierbei eintretenden Entwicklungen gründen sich auf folgende Tatsache: Man kann zunächst für die Umgebung des singulären Punktes $z = 0$, falls γ weder gleich 0 noch gleich einer negativen ganzen Zahl ist, eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung (1) angeben, welche auch im singulären Punkt $z = 0$ selbst analytisch bleibt. Trägt man nämlich

$$\xi = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

in die Gleichung (1) ein, so ist für das identische Bestehen dieser Gleichung in z , die Konvergenz der Reihe vorausgesetzt, die für alle Indizes $n = 0, 1, 2, \dots$ gültige Gleichung:

$$(9) \quad c_{n+1} = c_n \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)}$$

1) Es handelt sich hier im Sinne der abstrakten Gruppentheorie um dieselbe Gruppe, welche in der „Theorie der Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen“, als „Viererguppe“ auftritt; vgl. die Nachweise der letzten Note.

2) Diese G_{24} ist im Sinne der abstrakten Gruppentheorie identisch mit der Gruppe der 24 Permutationen von vier Dingen; in der „Theorie der regulären Körper“ tritt die G_{24} als „Oktaedergruppe“ auf (vgl. vorletzte Note).

hinreichend und notwendig. Dies führt auf:

$$\xi = c_0 \left(1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} z^3 + \dots \right),$$

wo in der Klammer die wohlbekannte Gestalt der „hypergeometrischen“ Reihe gewonnen ist, nach welcher auch die Differentialgleichung (1) ihren Namen trägt. Für diese Reihe hat Gauß¹⁾ die abkürzende Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ eingeführt; wir wollen entsprechend dieser Schreibweise α, β, γ, z als „erstes“, „zweites“ usw. „Argument“ von F bezeichnen. Das dritte Argument γ darf, wie schon bemerkt, weder gleich 0, noch gleich einer negativen ganzen Zahl sein, da ja sonst in den Koeffizienten unserer Reihe von einer gewissen Stelle an der Faktor 0 im Nenner auftreten würde.²⁾ Da übrigens aus (9) offenbar

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$ folgt, so ist die Reihe für $|z| < 1$ konvergent und für $|z| > 1$ divergent, sofern sie nicht dadurch, daß eine der Größen α, β mit einer unterhalb 1 gelegenen ganzen Zahl gleich ist, bei einem gewissen endlichen Gliede abbricht³⁾: *Die unter der genannten beschränkten Voraussetzung betreffs des dritten Argumentes γ anzusetzende hypergeometrische Reihe:*

$$(10) \quad F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots$$

hat, falls sie überhaupt eine „unendliche“ Reihe ist, den Konvergenzradius $R = 1$.

Setzt man $c_0 = 1$, so ist:

$$(11) \quad \xi = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$$

eine erste Lösung der Differentialgleichung (1) in der Umgebung der singulären Stelle $z = 0$, aus welcher die allgemeinste in diesem Punkte

1) In der für die hypergeometrische Reihe und Differentialgleichung grundlegenden Arbeit „Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots$ “, Göttinger Abhandl. von 1813 oder Gauß' Werke, Bd. 3, S. 123.

2) Man muß in diesem Falle (worauf wir unten zurückkommen werden) die Anfangskoeffizienten $c_0, c_1, \dots$ bis $c_{-\gamma}$ gleich 0 setzen, $c_{1-\gamma}$ aber gleich 1 wählen. Die sich ergebende Lösung ist wieder im singulären Punkte $z = 0$ analytisch und besitzt dortselbst einen Nullpunkt der Ordnung $1 - \gamma$.

3) Ist etwa α eine negative ganze Zahl, so ist offenbar $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ eine ganze rationale Funktion des Grades $-\alpha$. Der Fall $\alpha = 0$ ist elementar, insofern man in diesem Falle als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) findet:

$$\xi = A \int z^{-\gamma} (1-z)^{-\beta+\gamma-1} dz + B,$$

unter A und B Konstante verstanden.

analytisch bleibende Lösung durch Zusatz eines Faktors c_0 herstellbar ist.

Man gehe nun auf die obigen 24 Transformationen unserer Differentialgleichung (1) zurück. Die einzelne derselben hat, was ξ anlangt, die Gestalt $\xi' = z^m(1-z)^n\xi$. Ist die Gleichung $D=0$ für ξ identisch erfüllt, so wird, da D' bis auf einen Faktor gleich D ist, ξ' eine Lösung der transformierten Gleichung $D'=0$ sein; und umgekehrt ergibt jede Lösung ξ' dieser Gleichung in $\xi = z^{-m}(1-z)^{-n}\xi'$ eine solche der ursprünglichen. *Indem wir nun nach (11) für ξ' die Lösung $F(\alpha', \beta', \gamma'; z')$ eintragen, gewinnen wir für die Differentialgleichung (1) einen Ansatz von 24 zunächst formal verschiedenen Lösungen:*

$$(12) \quad \xi = z^{-m}(1-z)^{-n} \cdot F(\alpha', \beta', \gamma'; z'),$$

wobei die Lösung (11) selbst, der identischen Transformation der G_{24} entsprechend, mitgezählt ist.

Was die Konvergenz der einzelnen dieser Reihen angeht, sofern dieselbe eine unendliche Reihe ist und auch nicht etwa dadurch, daß eine der Gleichungen $\gamma'=0, -1, -2, \dots$ zutrifft, unbrauchbar wird, so ist das Innere des Konvergenzkreises stets durch $|z'| < 1$ gegeben. Je nachdem

$$z' = z, \quad z' = 1 - z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{z-1}{z}, \quad z' = \frac{1}{1-z}, \quad z' = \frac{z}{z-1}$$

ist, wird man in jedem Falle den Konvergenzkreis in der z -Ebene leicht feststellen. Der einzelne singuläre Punkt liegt dabei je in zweien unter diesen sechs Konvergenzkreisen, so daß von den 24 in Ansatz gebrachten Lösungen (12) sich je 8 auf die Umgebung des einzelnen unter den drei singulären Punkten beziehen. Z. B. erhalten wir für die Umgebung von $z=0$ vier Reihen nach Potenzen von z und vier solche nach Potenzen von $\frac{z}{z-1}$, wobei das Innere des „Konvergenzkreises“ für die letzten vier Reihen von allen den Werten z geliefert wird, die einen reellen Bestandteil $< \frac{1}{2}$ besitzen.

Da die drei singulären Punkte bei den Transformationen der Gleichung (1) in sich ausgetauscht werden, so übertragen sich die für einen einzelnen unter den drei Punkten gemachten Ausführungen eben durch jene Transformationen auf die beiden anderen Punkte. Es ist demnach ausreichend, wenn wir ausführlich nur etwa den Punkt $z=0$ betrachten. Die acht zum singulären Punkte $z=0$ gehörenden Ansätze (12) sind die folgenden:

$$\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \gamma; z), \\ &z^{1-\gamma} F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; z), \\ &(1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma} F(-\alpha + \gamma, -\beta + \gamma, \gamma; z), \\ &z^{1-\gamma}(1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma} F(-\beta + 1, -\alpha + 1, 2 - \gamma; z), \end{aligned}$$

$$(1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, -\beta+\gamma, \gamma; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$(1-z)^{-\beta} F\left(-\alpha+\gamma, \beta, \gamma; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$z^{1-\gamma}(1-z)^{-\alpha+\gamma-1} F\left(-\beta+1, \alpha-\gamma+1, 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right),$$

$$z^{1-\gamma}(1-z)^{-\beta+\gamma-1} F\left(\beta-\gamma+1, -\alpha+1, 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right).$$

Diese acht Ansätze sind aber nur formal alle voneinander verschieden. Da nämlich der dritte, ebenso wie der fünfte und sechste Ansatz, zu einer Potenzreihe mit dem Anfangsgliede 1 führt, so ergeben diese drei Ansätze einfach $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ wieder, was man auch leicht durch Ausrechnung einiger Reihenglieder bestätigt findet. Ebenso führen die vier restierenden Ansätze (sofern dieselben brauchbar sind) zu einer und derselben Lösung. Wir kommen somit auf die beiden nunmehr durch:

$$(13) \quad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; z), \\ Z_2 = z^{1-\gamma} F(\beta-\gamma+1, \alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z) \end{cases}$$

zu bezeichnenden Lösungen zurück.

Ist nun erstlich γ keine ganze Zahl, so haben wir in Z_1, Z_2 die beiden Lösungen (13) S. 104 der allgemeinen Theorie gewonnen: *Ist γ nicht ganzzahlig, so liefern die in (13) dargestellten Z_1, Z_2 für die Umgebung des singulären Punktes $z=0$ zwei linear-unabhängige Lösungen, die übrigens durch ihre Eigenschaften, daß die Anfangsglieder der Potenzreihen 1 bzw. $z^{1-\gamma}$ sind, eindeutig bestimmt sind.*

Ist zweitens γ ganzzahlig, so haben wir zu unterscheiden, ob $\gamma < 1$, $= 1$ oder > 1 ist. Im ersten Falle bleibt nur die Lösung Z_2 brauchbar und zeigt, daß wir in diesem oben ausgeschlossenen Falle¹⁾ eine im Punkte $z=0$ analytisch bleibende Lösung mit einem daselbst gelegenen Nullpunkte der Ordnung $(1-\gamma)$ haben. Ist $\gamma = 1$, so liefern die beiden Reihen (13) ein und dieselbe Lösung, da $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ im ersten und zweiten Argumente symmetrisch ist. Im dritten Falle, $\gamma > 1$, wird die zweite Reihe (13) unbrauchbar, und es verbleibt nur die Lösung $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$.

In allen diesen Fällen kann man sich eine zweite Lösung vermittelst einer Methode verschaffen, nach der man bei jeder linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung aus einer ersten partikulären Lösung mittelst zweier Quadraturen die allgemeine Lösung fin-

1) Siehe jedoch die zweite Note S. 110.

det. Ist nämlich Z_1 eine erste partikuläre Lösung der Gleichung (1) S. 97 und ξ irgendeine Lösung derselben, so gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi}{dz^2} &= f_1(z) \frac{d\xi}{dz} + f_2(z) \xi, \\ \frac{d^2 Z_1}{dz^2} &= f_1(z) \frac{dZ_1}{dz} + f_2(z) Z_1.\end{aligned}$$

Durch Elimination von $f_2(z)$ folgt:

$$\frac{d}{dz} \left(Z_1 \frac{d\xi}{dz} - \xi \frac{dZ_1}{dz} \right) = f_1(z) \left(Z_1 \frac{d\xi}{dz} - \xi \frac{dZ_1}{dz} \right),$$

so daß es gelingt, den hier links und rechts in der Klammer auftretenden Ausdruck durch eine erste Quadratur zu berechnen; man findet:

$$Z_1 \frac{d\xi}{dz} - \xi \frac{dZ_1}{dz} = A e^{\int f_1(z) dz},$$

unter A eine Konstante verstanden. Aus dieser Gleichung aber folgt sofort weiter:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\xi}{Z_1} \right) = A Z_1^{-2} e^{\int f_1(z) dz},$$

so daß wir mittelst einer zweiten Quadratur die allgemeine Lösung ξ in der Gestalt gewinnen:

$$\xi = A Z_1 \int \left(Z_1^{-2} e^{\int f_1(z) dz} \right) dz + B Z_1,$$

unter B eine zweite Konstante verstanden.

Im Falle der hypergeometrischen Differentialgleichung liefert diese Methode die allgemeine Lösung:

$$\xi = A Z_1 \int (z^{-\gamma} (1-z)^{-\alpha-\beta+\gamma-1} Z_1^{-2}) dz + B Z_1.$$

Wir wollen diese Gleichung in dem unten allein in Betracht kommenden Falle $\gamma = 1$ noch weiter verfolgen, indem wir unter Z_1 die Lösung $F(\alpha, \beta, 1; z)$ verstehen; auch wollen wir $A = 1$, $B = 0$ setzen, was die besondere Lösung:

$$Z_2 = Z_1 \int (z^{-1} (1-z)^{-\alpha-\beta} Z_1^{-2}) dz$$

liefert. Der Ausdruck in der Klammer gestattet eine Reihenentwicklung, deren erstes Glied z^{-1} ist und die übrigens jedenfalls in der Umgebung von $z = 0$ konvergiert, da Z_1 hier analytisch ist und den Wert 1 hat. Die Integration und Multiplikation des Integrales mit $Z_1 = F(\alpha, \beta, 1; z)$ ergibt für Z_2 eine Darstellung der Gestalt:

$$Z_2 = \mathfrak{P}_2(z) + \log z \cdot \mathfrak{P}_1(z),$$

wo $\mathfrak{P}_1(z)$ einfach unsere hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, 1; z)$ ist und die Reihe $P_2(z)$, insofern wir die Konstante $B = 0$ setzen wollten, das

Absolutglied 0 hat. Die hiermit gewonnene Darstellung von Z_2 ordnet sich dem allgemeinen Ansatz (15) S. 105 unter, so daß die damaligen Aussagen für die hier betrachtete Lösung gelten. Insbesondere wird auch $\mathfrak{P}_2(z)$ für $|z| < 1$ konvergent sein; im übrigen sind die hier vorliegenden $\mathfrak{P}_1(z)$, $\mathfrak{P}_2(z)$ eindeutig bestimmt, $\mathfrak{P}_1(z)$ als hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, 1; z)$ und $\mathfrak{P}_2(z)$ durch die Forderung des verschwindenden Absolutgliedes.

Übrigens ist es nicht schwer, die Reihe $\mathfrak{P}_2(z)$ explizite anzugeben. Schreiben wir:

$$\mathfrak{P}_1(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad \mathfrak{P}_2(z) = c_0' + c_1' z + c_2' z^2 + \dots,$$

so ist $c_0 = 1$, $c_0' = 0$ und die erste Reihe ist die hypergeometrische mit $\gamma = 1$, so daß sich aus (9):

$$(14) \quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n^2}$$

ergibt. Trägt man nun in die Gleichung (1) die Lösung Z_2 ein, entwickelt nach Potenzen von z und setzt den Koeffizienten von z^n gleich 0, so ergibt sich eine Rekursionsformel zur Berechnung der c_n' , welche man unter Benutzung von (14) leicht auf die Gestalt bringt:

$$\frac{c_n'}{c_n} = \frac{c_{n-1}'}{c_{n-1}} + \frac{1}{\alpha + n - 1} + \frac{1}{\beta + n - 1} - \frac{2}{n},$$

gültig für $n = 1, 2, 3, \dots$ ¹⁾ Auf Grund der bekannten Ausdrücke für die Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \dots$ sowie der Festsetzung $c_0' = 0$ bestimmen sich jetzt leicht alle weiteren Koeffizienten $c_1', c_2', \dots$, und man wird für $\mathfrak{P}_2(z)$ auf folgende, fortan durch das Symbol $F_1(\alpha, \beta; z)$ zu bezeichnende Reihe geführt:

$$(15) \quad F_1(\alpha, \beta; z) = \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot 1} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{2}{1} \right) z \\ + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \right) z^2 \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} \right. \\ \left. - \frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) z^3 + \dots,$$

1) Wenn eine der Größen α, β , etwa die erste, ganzzahlig und < 0 ist und damit $F(\alpha, \beta, 1; z)$ eine rationale ganze Funktion des Grades $-\alpha$ darstellt, so ist die Rekursionsformel des Textes nur für die Indizes $n \leq -\alpha$ zu benutzen. Für $n = 1 - \alpha$ und $n > 1 - \alpha$ sind alsdann die folgenden Rekursionsformeln zu benutzen:

$$(1 - \alpha)^2 c_{1-\alpha}' = (\beta - \alpha) c_{-\alpha}, \quad c_n' = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n^2} c_{n-1}'.$$

Die im Texte sogleich anzugebende Reihe $F_1(\alpha, \beta; z)$ verliert in diesem Falle, wie man leicht nachweisen wird, ihre Gültigkeit nicht.

die, wie schon hervorgehoben wurde, für $|z| < 1$ konvergiert. Wir merken als Ergebnis an: *Ist $\gamma = 1$, so besitzen wir in:*

$$(16) \quad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, 1; z), \\ Z_2 = F_1(\alpha, \beta; z) + \log z \cdot F(\alpha, \beta, 1; z) \end{cases}$$

ein System linear-unabhängiger Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung (1).

Zur Vorbereitung der späteren Anwendungen wollen wir für jeden der beiden anderen singulären Punkte ein Paar von Lösungen der Differentialgleichung (1) zusammenstellen, die sich jetzt unmittelbar durch je zwei geeignet ausgewählte unter unseren 24 Transformationen ergeben. *Für $z = 1$ nehmen wir an, daß das hierbei in Betracht kommende dritte Argument $\gamma' = \alpha + \beta - \gamma + 1$ nicht ganzzahlig sei, und haben dann für die Umgebung des singulären Punktes $z = 1$ als linear-unabhängige Lösungen:*

$$(17) \quad \begin{cases} Z_1 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \\ Z_2 = (1 - z)^{-\alpha - \beta + \gamma} F(-\alpha + \gamma, -\beta + \gamma, -\alpha - \beta + \gamma + 1; 1 - z), \end{cases}$$

wo übrigens, wie wir doch noch hinzusetzen wollen, die hier mit Z_1, Z_2 bezeichneten Lösungen keineswegs die Fortsetzungen der oben bei $z = 0$ so bezeichneten Lösungen zu sein brauchen. Für den dritten singulären Punkt $z = \infty$ kommt unten gerade der Fall in Betracht, daß nach Ausführung der Transformation das dritte Argument $\gamma' = \alpha - \beta + 1$ gleich 1 ist, was $\beta = \alpha$ zur Folge hat. Für die transformierte Gleichung müssen wir jetzt ein Lösungssystem in der Gestalt (16) ansetzen. Die einfache Zwischenrechnung liefert das Ergebnis: *Ist $\beta = \alpha$, so hat man für die Umgebung des singulären Punktes $z = \infty$ ein System linear-unabhängiger Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung in der Gestalt:*

$$(18) \quad \begin{cases} Z_1 = z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, 1; \frac{1}{z}\right), \\ Z_2 = z^{-\alpha} \left(F_1\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \frac{1}{z}\right) - \log z \cdot F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, 1; \frac{1}{z}\right) \right). \end{cases}$$

Hiermit sind alle Vorbereitungen getroffen, deren wir zur Behandlung der Theorie der elliptischen Funktionen bedürfen.

Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen
Erster Teil: Die funktionentheoretischen und
analytischen Grundlagen

Fricke, R.

2012, XVIII, 500 S. 83 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-19556-3