

Kapitel 2

Zustandsbeschreibung linearer verteilt-parametrischer Systeme

In diesem Kapitel sind die wesentlichen *systemtheoretischen Grundlagen* zur Beschreibung von linearen verteilt-parametrischen Systemen im Zustandsraum zusammengestellt. Die Auswahl orientiert sich dabei an den im weiteren Verlauf des Buches vorgestellten Methoden zum Steuerungs- und Regelungsentwurf, weshalb kein Anspruch auf Vollständigkeit besteht. Eine umfassende Darstellung der Zustandsbeschreibung unendlich-dimensionaler Systeme findet man im Standardwerk [14], das in diesem Buch auch als Referenz für funktionalanalytische Grundlagen dient. Die Struktureigenschaften *Steuerbarkeit* und *Beobachtbarkeit* sind in dieser Zusammenfassung nicht aufgenommen, sondern werden erst in den nachfolgenden Kapiteln als Voraussetzungen für die Anwendung der Entwurfsverfahren eingeführt.

Zu Beginn des Kapitels wird zunächst die Problematik bei der Beschreibung verteilt-parametrischer Systeme im Zustandsraum anhand eines einfachen *Wärmeleiters* aufgezeigt. Diese Betrachtungen dienen als Motivation für die bei verteilt-parametrischen Systemen umfangreicheren Begriffsbildungen sowie für den mathematischen Aufwand, der nötig ist, um zu einer fundierten Systembeschreibung für den Steuerungs- und Regelungsentwurf zu kommen. Darüber hinaus wird im weiteren Verlauf des Buches dieses einfache Beispielsystem verwendet, um die eingeführten Entwurfsverfahren möglichst anschaulich darstellen zu können.

Der darauf folgende Abschnitt führt die *Riesz-Spektralsysteme* ein, mit denen sich viele lineare verteilt-parametrische Systeme im Zustandsraum beschreiben lassen. Diese Systeme zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass sich ihre Eigenschaften unter Verwendung von Eigenwerten und Eigenvektoren analysieren lassen. Da bei diesen Systemen ein verteilter Eingriff angenommen wird, stimmen ihre Zustandsgleichungen formal mit denen konzentriert-parametrischer Systeme überein. Dies ermöglicht eine Einführung der systemtheoretischen Grundlagen verteilt-parametrischer Systeme in naher Analogie zum konzentriert-parametrischen Fall, womit Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede in den Eigenschaften dieser Systemklassen deutlich dargestellt werden können. Im Gegensatz zu konzentriert-parametrischen

Systemen setzt die Wahl eines geeigneten Zustandsraums sowie die Einführung geeigneter Zustandsvariablen bei verteilt-parametrischen Systemen eine genaue Analyse des zugrundeliegenden Anfangs-Randwertproblems voraus, damit sich für den Steuerungs- und Regelungsentwurf ein geeignetes mathematisches Modell ergibt. Um diese Problematik aufzeigen zu können, wird die Zustandsbeschreibung eines *Euler-Bernoulli-Balkens* ausführlich hergeleitet. Bei diesem System ist nämlich die Wahl des Zustandsraums und der Zustandsgrößen nicht offensichtlich und bedarf einer genauen Untersuchung. Zudem eignet sich dieses System auch zur Veranschaulichung der in diesem Kapitel vorgestellten allgemeinen Aussagen, da es bei der Systemanalyse wesentlich schwieriger zu behandeln ist als der zu Beginn eingeführte Wärmeleiter. Anschließend wird die Lösung der Zustandsgleichungen in Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt. Dies erlaubt einen Einblick in die Möglichkeiten der Systembeeinflussung im verteilt-parametrischen Fall, wenn man bei der Regelung auf eine Eigenwert- und Eigenvektorgabe abzielt. Ausgehend von der Lösung der Zustandsgleichungen wird ein für die Betrachtungen in diesem Buch geeigneter Stabilitätsbegriff eingeführt. Für diese Stabilitätsdefinition lässt sich zeigen, dass damit die Stabilität von Riesz-Spektralsystemen anhand der Eigenwerte überprüfbar ist. Neben der Systembeschreibung im Zeitbereich wird auch die Beschreibung des Übertragungsverhaltens von Riesz-Spektralsystemen im Frequenzbereich durch die Übertragungsmatrix näher erläutert. Diese Systembeschreibung ist von besonderer Bedeutung, da sich viele in diesem Buch vorgestellte Steuerungen und Regelungen unter Verwendung der Übertragungsmatrix exakt angeben lassen. Weil dabei die Übertragungsmatrix nur an bestimmten Punkten ausgewertet werden muss, ist eine effiziente numerische Durchführung des Entwurfs dann immer möglich.

In diesem Buch werden ausschließlich verteilt-parametrische Systeme mit *verteiletem Eingriff* betrachtet, d.h. die Systembeeinflussung erfolgt im Inneren des physikalischen Prozesses. Allerdings tritt in praktischen Anwendungen häufig der Fall auf, dass der Stelleingriff am Rand des Systems erfolgt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird deshalb gezeigt, dass sich solche Systeme mit *Randeingriff* in den meisten Fällen als Riesz-Spektralsysteme mit verteiltem Eingriff formulieren lassen. Damit sind die in diesem Buch vorgestellten Methoden ebenfalls auf Systeme mit Randeingriff anwendbar und die Betrachtung von Systemen mit verteiltem Eingriff stellt somit keine allzu restriktive Einschränkung dar.

2.1 Einführendes Beispiel

Die Grundideen der Zustandsbeschreibung linearer verteilt-parametrischer Systeme sollen anhand eines typischen Beispiels dargestellt werden, nämlich mittels des örtlich eindimensionalen *Wärmeleiters*. Dieses mathemati-

sche Modell beschreibt die dynamische Entwicklung der über einen Leiter verteilten Temperatur durch Wärmeleitung unter dem Einfluss von Wärmequellen und -senken. Die gleiche Systembeschreibung erhält man auch bei anderen Ausgleichsprozessen wie z.B. Diffusionsvorgängen. Mit dem Wärmeleiter lassen sich auch zahlreiche industrielle Prozesse, wie z.B. Induktionsöfen, Durchlauf- und Stoßöfen oder Metall- und Glasvorherde modellieren.

Betrachtet wird ein beheizter Stab der normierten Länge 1, wie er in Abbildung 2.1 skizziert ist. Er wird als hinreichend dünn angenommen, so dass die Temperatur über dem Querschnitt nahezu konstant ist, was eine eindimensionale Modellierung der Ausgleichsvorgänge ermöglicht. Die orts- und zeitabhängige Temperatur auf dem Stab ist durch das Temperaturprofil $x(z, t)$ gegeben. Zur Einstellung einer gewünschten Temperaturverteilung wird angenommen, dass zwei Wärmequellen zur Verfügung stehen, die das Temperaturprofil durch die *Quellenfunktion* $u_{\Omega}(z, t) = b_1(z)u_1(t) + b_2(z)u_2(t)$ beeinflussen. Die *Ortscharakteristiken* $b_1(z)$ und $b_2(z)$ der Eingänge u_1 und u_2 sind durch

$$b_1(z) = \begin{cases} 1 & : 0.5 \leq z \leq 0.6 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.1)$$

und

$$b_2(z) = \begin{cases} 0.5 & : 0.15 \leq z \leq 0.25 \\ 0.5 & : 0.75 \leq z \leq 0.85 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

definiert und geben an, wie sich die Heizleistungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ der Wärmequellen auf den Stab im Inneren des *Ortsbereichs* $0 \leq z \leq 1$ verteilen. Durch Aufstellung einer Bilanzgleichung für die Wärme (siehe hierzu z.B. Kapitel 2.2 in [28]) und Einführung des Vektors

$$b^T(z) = [b_1(z) \ b_2(z)] \quad (2.3)$$

ergibt sich die *parabolische partielle Differentialgleichung (PDgl.)*

$$\partial_t x(z, t) = \partial_z^2 x(z, t) + b^T(z)u(t), \quad t > 0, \quad z \in (0, 1) \quad (2.4)$$

für das Temperaturprofil $x(z, t)$. Hierbei werden zur Vereinfachung der Darstellung alle Größen als dimensionslos und normiert angenommen. In (2.4) sind die *partiellen Differentialoperatoren* ∂_t und ∂_z^2 durch

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \partial_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

definiert. Diese abkürzende Schreibweise für partielle Differentialoperatoren wird im Buch durchgehend verwendet. Die PDgl. (2.4) beschreibt die dynamische Entwicklung der Temperaturverteilung $x(z, t)$ im Intervall $0 < z < 1$. Da der Wärmeleiter nur einen *verteilten Energiespeicher* besitzt, tritt in (2.4)

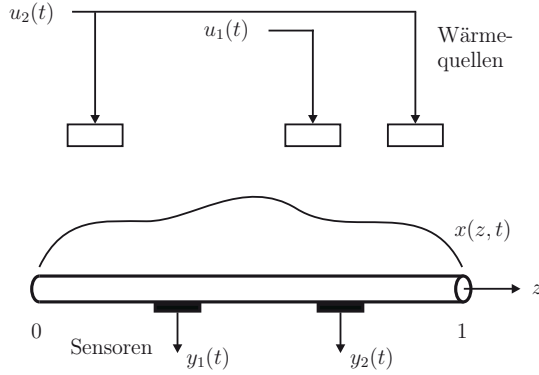


Abb. 2.1: Wärmeleiter mit der Temperatur $x(z, t)$, den Eingängen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ sowie den Regelgrößen $y_1(t)$ und $y_2(t)$

nur die erste zeitliche Ableitung auf. Bei Systemen mit zwei verteilten Energiespeichern, wie z.B. Balken oder schwingende Saiten, können auch zweite Zeitableitungen sowie gemischte Zeit- und Ortsableitungen vorkommen. Da die Stellgrößen in einem Bereich innerhalb des Intervalls $0 < z < 1$ und nicht am Rand eingreifen, liegt ein verteilt-parametrisches System mit *verteilttem Eingriff* vor. Zur vollständigen Charakterisierung des Problems müssen noch die Rand- und Anfangsbedingungen gegeben sein. Die *Randbedingungen* beschreiben, wie das verteilt-parametrische System mit seiner Umgebung wechselwirkt. Im Unterschied zu den Anfangsbedingungen legen die Randbedingungen damit wesentliche Eigenschaften des verteilt-parametrischen Systems fest. Im vorliegenden Beispiel wird der Stab an den Rändern $z = 0$ und $z = 1$ auf einer konstanten Temperatur $x(0, t) = x(1, t) = 0$ gehalten, was sog. *Dirichletschen Randbedingungen* entspricht. Die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ ist durch die *Anfangsbedingung* $x(z, 0) = x_0(z)$ vorgegeben. Die Regelgrößen y_1 und y_2 sind Temperaturen, welche über endliche Ortsintervalle gemittelt werden. Diese Intervalle sind durch die *Ortscharakteristiken*

$$c_1(z) = \begin{cases} 1 & : 0.37 \leq z \leq 0.43 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6)$$

und

$$c_2(z) = \begin{cases} 1 & : 0.67 \leq z \leq 0.73 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

der Ausgänge y_1 und y_2 mit

$$c(z) = \begin{bmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

beschrieben. Damit wird entsprechend zum Eingriff eine *verteilte Messung* vorgenommen, wenn man die Regelgrößen als messbar voraussetzt. Insgesamt ergibt sich für den Wärmeleiter die Beschreibung durch das *Anfangs-Randwertproblem*

$$\partial_t x(z, t) = \partial_z^2 x(z, t) + b^T(z)u(t), \quad t > 0, \quad z \in (0, 1) \quad (2.9)$$

$$x(0, t) = x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.10)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in [0, 1] \quad (2.11)$$

$$y(t) = \int_0^1 c(z)x(z, t)dz, \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

mit zwei Eingangsgrößen zusammengefasst im Vektor u und zwei Ausgangsgrößen als Elemente des Vektors y . Hierbei wird angenommen, dass der Anfangswert x_0 in (2.11) mit den Randbedingungen (2.10) *konsistent* ist, d.h. $x_0(0) = x_0(1) = 0$ gilt. Aufgrund der zwei Ein- und Ausgänge handelt es sich beim Wärmeleiter um ein *lineares verteilt-parametrisches Mehrgrößensystem*.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie sich eine Zustandsbeschreibung des Wärmeleiters in Form des (*abstrakten*) *Anfangswertproblems*

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in H \quad (2.13)$$

$$y(t) = \mathcal{C}x(t), \quad t \geq 0 \quad (2.14)$$

eingeführen lässt. Wie man sofort erkennt, stimmt (2.13)–(2.14) formal mit der Zustandsdarstellung konzentriert-parametrischer Systeme überein (siehe z.B. [27]). Im Unterschied zu solchen Systemen ist der zugehörige Zustandsraum jedoch nicht von vorneherein festgelegt. Vielmehr gehört die Wahl des Zustandsraums bei verteilt-parametrischen System mit zur Modellbildung. Gesichtspunkte für die Bestimmung des Zustandsraums und i.Allg. auch der Zustandsgrößen sind Aussagen über die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung von (2.13). Im vorliegenden Beispiel wählt man als Zustandsgröße die Temperatur des Wärmeleiters, d.h. man führt den (skalaren) *Zustand* $x(\cdot, t) = \{x(z, t), z \in [0, 1]\}$ ein. Besitzt das verteilt-parametrische System mehr als einen verteilten Energiespeicher, dann ist $x(t)$ ein Vektor und die Wahl des Zustands kann nicht mehr so offensichtlich sein wie hier (siehe Beispiel 2.4 und z.B. Kapitel 7.2 in [29]). Als *Zustandsraum* H wählt man den Funktionenraum $L_2(0, 1)$ der im Intervall $[0, 1]$ absolut quadratisch Lebesgue-integrierbaren und komplexwertigen Funktionen, d.h.

$$L_2(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |f(z)|^2 dz < \infty\}, \quad (2.15)$$

und führt dort das *Skalarprodukt*

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(z)\overline{y(z)}dz \quad (2.16)$$

ein, worin $\overline{y}$ die zu y konjugiert komplexe Größe bezeichnet. Man kann zeigen, dass der Raum $L_2(0, 1)$ zusammen mit dem Skalarprodukt (2.16) ein *Hilbertraum* ist. Solche Vektorräume sind *vollständig* (d.h. jede *Cauchy-Folge* ist in diesem Raum konvergent) und *normiert*, wobei die *Norm* durch das im Raum eingeführte Skalarprodukt induziert wird, d.h. $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Der Zustand $x(t)$ ist eine *abstrakte Funktion*, d.h. für jeden festen Zeitpunkt $t \geq 0$ ist die Ortsfunktion $x(z, t)$ im Intervall $[0, 1]$ Element des Hilbertraums H . Da hierbei nur die Zeit t als Ordnungsparameter auftritt, wird in (2.13)–(2.14) die Ortsabhängigkeit weggelassen. Auf dem Zustandsraum H lässt sich nun der *Systemoperator* $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ mit dem *Definitionsbereich* $D(\mathcal{A})$ gemäß

$$\mathcal{A}h = \frac{d^2}{dz^2}h \quad (2.17)$$

$$h \in D(\mathcal{A}) = \{h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{d}{dz}h \text{ absolut stetig,} \\ \frac{d^2}{dz^2}h \in L_2(0, 1) \text{ und } h(0) = h(1) = 0\} \quad (2.18)$$

definieren (für Details siehe Anhang B.1). Anhand von (2.18) erkennt man, dass die in (2.10) geforderten Randbedingungen bei der Formulierung (2.13) im Definitionsbereich von $\mathcal{A}$ berücksichtigt werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Randbedingungen homogen sein müssen. Diese Forderung macht Probleme, wenn z.B. am Rand des Wärmeleiters eine Störung eingreift. Dies würde bedeuten, dass sich der Definitionsbereich von $\mathcal{A}$ nicht mehr unabhängig von dieser Anregung einführen lässt. Deshalb muss man in diesem Fall die Randbedingungen erst homogenisieren, bevor man solche Systeme im Zustandsraum darstellen kann (für weitere Details siehe Abschnitt 2.3). Beim Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ in (2.18) ist zu beachten, dass $\frac{d}{dz}h$ und $\frac{d^2}{dz^2}h$ *schwache Ableitungen* von h sind (siehe Anhang B.1), welche auch für nicht klassisch differenzierbare Funktionen h existieren. Der zweite in (2.13) auftretende Operator ist der *Eingangsoperator* $\mathcal{B}$, der durch

$$\mathcal{B}u(t) = b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) \quad (2.19)$$

gegeben ist (siehe (2.3) sowie (2.9)). In der Ausgangsgleichung (2.14) tritt der *Ausgangsoperator* $\mathcal{C}$ auf, der sich mit Hilfe des Skalarprodukts (2.16) gemäß

$$\mathcal{C}x(t) = \begin{bmatrix} \langle x(t), c_1 \rangle \\ \langle x(t), c_2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

eingeführen lässt (siehe (2.8) und (2.12)). Wie man anhand von (2.1)–(2.2) und (2.6)–(2.7) erkennt, sind die Ortscharakteristiken Element des Zustandsraums $H = L_2(0, 1)$. Dies ist wichtig, weil sich für die modale Analyse von verteilt-parametrischen Systemen diese Kenngrößen im Zustandsraum entwickeln lassen müssen. Hätte man für H einen klassischen Funktionenraum, wie z.B. den Raum der zweifach stetig differenzierbaren Funktionen gewählt,

dann würde sich der Wärmeleiter nicht mit den im Folgenden dargestellten Methoden behandeln lassen, da die Ortscharakteristiken unstetig sind.

In Beispiel 2.3 wird gezeigt, dass durch Wahl des Zustandsraums H und des Definitionsbereichs $D(\mathcal{A})$ der Operator $\mathcal{A}$ ein *infinitesimaler Generator einer C_0 -Halbgruppe* ist (für Details siehe Anhang A.1). Dies bedeutet, dass die *milde Lösung* der homogenen Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in H \quad (2.21)$$

(siehe (2.13)) in der Form

$$x(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)x_0 \quad (2.22)$$

dargestellt werden kann, worin die durch t parametrisierte Familie $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ von Operatoren eine C_0 -Halbgruppe ist. Diese Aussage erinnert formal an die bei linearen konzentriert-parametrischen Systemen bekannte Lösung der homogenen Zustandsgleichungen mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion. In der Tat kann man die C_0 -Halbgruppe als Verallgemeinerung der Matrixexponentialfunktion auf verteilt-parametrische Systeme ansehen. Diese Betrachtungsweise hat den Vorzug, dass man aufgrund des Zusammenhangs des Generators $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ Aussagen über $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ und damit über das System machen kann, ohne dazu $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)$ explizit berechnen zu müssen. Die *milde Lösung* der inhomogenen Zustandsgleichung (2.13) ist analog zum konzentriert-parametrischen Fall durch

$$x(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(t-\tau)\mathcal{B}u(\tau)d\tau \quad (2.23)$$

gegeben. An dieser Stelle kann man sich fragen, wie die Lösung des abstrakten Anfangswertproblems (2.13) mit der Lösung des Anfangs-Randwertproblems (2.9)–(2.11) zusammenhängt. Hierzu wird in [14] gezeigt, dass die milde Lösung (2.23) des abstrakten Anfangswertproblems (2.13) mit der *schwachen Lösung* des Anfangs-Randwertproblems (2.9)–(2.11) übereinstimmt. Die schwache Lösung stellt einen allgemeineren Lösungsbegriff dar als die *klassische Lösung*. Letztere besitzt die durch die Differentialgleichung (2.9) geforderte Differenzierbarkeitseigenschaft. In vielen Fällen wird das Verhalten technischer Systeme aber durch Lösungen beschrieben, die nicht die nötigen Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen. Man denke beispielsweise bei linearen konzentriert-parametrischen Systemen an die sprunghafte Anregung eines Integrierers, welche auf eine nicht differenzierbare Systemantwort führt. Diese Sprungantwort ist dann eine schwache Lösung der zugehörigen Differentialgleichung. In manchen Fällen ist es sogar so, dass die physikalische Modellbildung gar nicht die Differenzierbarkeitseigenschaften fordert. Erst durch den Übergang zur Beschreibung mittels einer Differentialgleichung kommt diese Forderung hinzu. Dies wird auch bei der Wahl des Definitionsbereichs $D(\mathcal{A})$ in (2.18) berücksichtigt, da dort nur die Existenz der schwachen Ortsableitungen gefordert wird, die beispielsweise auch für Funktionen mit „Knicken“ definiert sind. Damit sind auch nicht (klassisch) differenzierbare Temperaturprofile zulässig, die beispielsweise Knicke in der ersten Ableitung

besitzen. Ein weiterer Grund, warum man bei der Betrachtung von PDgln. immer erst von der schwachen Lösung ausgeht, besteht darin, dass sich dann die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung mit den Methoden der Funktionalanalysis systematisch untersuchen lässt, was für klassische Lösungen nicht so einfach möglich ist. Falls eine schwache Lösung existiert, kann man sie nachträglich auf ihre klassische Differenzierbarkeit untersuchen. Allerdings sind die Methoden zur Untersuchung der klassischen Differenzierbarkeit der Lösung von der jeweiligen PDgl. abhängig und können deshalb nicht für eine große Klasse von PDgln. allgemein angegeben werden. Damit lässt sich eine systematische Zustandsraummethodik für eine große Klasse von verteilt-parametrischen Systemen nur ausgehend von der schwachen bzw. milden Lösung formulieren.

Diese Betrachtungen zeigen, dass man ein Anfangs-Randwertproblem als abstraktes Anfangswertproblem (2.13) im Zustandsraum darstellen kann, indem ein geeigneter Zustandsraum H eingeführt wird und man den örtlichen Differentialoperator auf diesem Zustandsraum als Operator $\mathcal{A}$ mit homogenen Randbedingungen und geeignetem Definitionsbereich interpretiert. Die Systembeeinflussung durch den Eingang u und die Messung von Systemgrößen y lässt sich dann durch die Operatoren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ beschreiben. Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des abstrakten Anfangswertproblems sowie deren stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten sicherzustellen, ist vom Operator $\mathcal{A}$ nachzuweisen, dass er ein infinitesimaler Generator einer C_0 -Halbgruppe ist. Zur Überprüfung dieser Eigenschaft von $\mathcal{A}$ kann man auf Ergebnisse der Funktionalanalysis zurückgreifen, die z.B. in [14] zu finden sind.

Weitere besondere Vorteile der Beschreibung von linearen verteilt-parametrischen Systemen durch die Zustandsgleichungen (2.13)–(2.14) sind:

- Mit den Zustandsgleichungen (2.13)–(2.14) kann formal nahezu wie mit der Zustandsbeschreibung linearer konzentriert-parametrischer Systeme gearbeitet werden, womit Vorgehensweisen beim Reglerentwurf für konzentriert-parametrische Systeme auf verteilt-parametrische Systeme übertragbar sind.
- Bei der Regelung von verteilt-parametrischen Systemen treten neben partiellen Differentialgleichungen auch partielle Integro-Differentialgleichungen (z.B. bei der Zustandsregelung in Abschnitt 4.1) oder Kombinationen aus gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (siehe z.B. die Führungs- und Störgrößenaufschaltung in Kapitel 4.2) auf. All diese Beschreibungsformen lassen sich im Rahmen der Zustandsgleichungen (2.13)–(2.14) einheitlich darstellen und analysieren.
- Die Zustandsbeschreibung (2.13)–(2.14) umfasst neben den verteilt-parametrischen Systemen nicht nur die konzentriert-parametrischen Systeme als Spezialfall, sondern auch lineare Totzeitsysteme (siehe Kapitel 6 und [14]). Damit können Entwurfsmethoden für die Zustandsbeschreibung (2.13)–(2.14) auf mehrere Klassen linearer Systeme angewendet werden.

Diese Betrachtungen machen deutlich, dass die Zustandsbeschreibung als Grundlage für die systematische Analyse und Synthese von verteilt-parametrischen Systemen dienen kann.

2.2 Riesz-Spektralsysteme

Im Abschnitt 2.1 wurde eine Zustandsbeschreibung für den Wärmeleiter exemplarisch eingeführt. In den folgenden Abschnitten 2.2.1–2.2.3 wird diese Zeitbereichsbeschreibung von linearen verteilt-parametrischen Systemen allgemein betrachtet und die damit verbundenen systemtheoretischen Grundlagen dargestellt. Damit die Ergebnisse für eine große Klasse von verteilt-parametrischen Systemen anwendbar sind, ist die Zustandsbeschreibung von sog. *Riesz-Spektralsystemen* Ausgangspunkt der Betrachtungen, bei welcher der Systemoperator ein Riesz-Spektraloperator ist und die Ein- und Ausgangsoperatoren beschränkte lineare Operatoren darstellen. Im letzten Abschnitt 2.2.4 wird auf die Frequenzbereichsbeschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens von Riesz-Spektralsystemen eingegangen.

2.2.1 Systembeschreibung durch Zustandsgleichungen

Eine große Klasse linearer verteilt-parametrischer Systeme mit verteiltem Eingriff kann durch die Zustandsbeschreibung

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in H \quad (2.24)$$

$$y(t) = \mathcal{C}x(t), \quad t \geq 0 \quad (2.25)$$

dargestellt werden, worin $u(t) \in \mathbb{R}^p$ der Vektor der Eingangsgrößen und $y(t) \in \mathbb{R}^m$ der Vektor der Ausgangsgrößen ist. Der *Zustand* $x(t)$ hat die Form

$$x(\cdot, t) = \{x(z, t), z \in \Omega\}. \quad (2.26)$$

Darin ist $\Omega \subset \mathbb{R}^l$, $l \in \{1, 2, 3\}$, der Abschluss eines Gebiets, den man als *Ortsbereich* des verteilt-parametrischen Systems bezeichnet. Bei verteilt-parametrischen Systemen mit einem *verteilten Energiespeicher* — wie z.B. beim Wärmeleiter — ist $x(t)$ skalar. Besitzt das verteilt-parametrische System jedoch $n > 1$ verteilte Energiespeicher, dann ist $x(t)$ ein n -dimensionaler Vektor und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sowie $\mathcal{C}$ sind Matrizen mit Operatoren als Elemente. Dies ist für den in Beispiel 2.4 vorgestellten Balken der Fall, der zwei Energiespeicher hat. Der Zustandsraum des Systems ist ein unendlich-dimensionaler und komplexer *Hilbertraum*, d.h. $x(t) \in H$, $\forall t \geq 0$, in dem das *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eingeführt ist.

Der beschränkte lineare *Eingangoperator* $\mathcal{B}$ in (2.24) hat die allgemeine Darstellung

$$\mathcal{B}u(t) = \sum_{i=1}^p b_i u_i(t) \quad \text{für } b_i \in H, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.27)$$

worin b_i die *Ortscharakteristiken der Eingänge* sind. Dabei ist $\mathcal{B}$ ein *beschränkter linearer Operator*, wenn es eine reelle Zahl α gibt, so dass

$$\|\mathcal{B}h\| \leq \alpha \|h\|_{\mathbb{C}^p}, \quad \forall h \in \mathbb{C}^p \quad (2.28)$$

erfüllt ist. Der Operator $\mathcal{B}$ beschreibt wie der Stelleingriff u im Inneren des Ortsbereichs Ω , d.h. in $\Omega \setminus \partial\Omega$, auf das System einwirkt. Es handelt sich also um einen *verteilten Eingriff*. Man beachte, dass der Operator $\mathcal{B}$ den komplexwertigen Vektorraum $\mathbb{C}^p$ als Definitionsbereich hat und auch der Bildbereich ein komplexwertiger Hilbertraum H ist, d.h. $\mathcal{B} : \mathbb{C}^p \rightarrow H$ (siehe auch Abschnitt 2.2.2). Der beschränkte lineare *Ausgangoperator* $\mathcal{C} : H \rightarrow \mathbb{C}^m$ (siehe (2.25)) ist durch den Operator

$$\mathcal{C}x(t) = \begin{bmatrix} \langle x(t), c_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), c_m \rangle \end{bmatrix} \quad \text{für } c_i \in H, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.29)$$

mit den *Ortscharakteristiken der Ausgänge* c_i gegeben, der die *verteilte Messung* $y(t)$ charakterisiert. Mit Hilfe des *Rieszschen Darstellungssatzes* lässt sich nachweisen, dass sich jede Messung $y(t)$ eindeutig in der Form (2.29) beschreiben lässt (siehe Satz 4.1), sofern man die Elemente von $\mathcal{C}$ als *beschränkte lineare Funktionale* ansetzt. Dies sind lineare Operatoren f , die von H nach $\mathbb{C}$ abbilden und beschränkt sind, d.h. es gilt $f : D(f) \subseteq H \rightarrow \mathbb{C}$ sowie

$$|f(h)| \leq \alpha \|h\|, \quad \forall h \in D(f) \subseteq H \quad (2.30)$$

für eine reelle Zahl α . Damit stellt der in (2.29) definierte Operator in diesem Sinn keine Einschränkung der Allgemeinheit dar.

Die Systembeschreibung (2.24)–(2.25) schließt den Fall von *punktförmigem Eingriff*

$$u_\Omega(z, t) = \sum_{i=1}^p \delta(z - z_i) u_i(t), \quad z_i \in \Omega \setminus \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.31)$$

in (2.24) und *punktförmiger Messung*

$$y(t) = \begin{bmatrix} x(\bar{z}_1, t) \\ \vdots \\ x(\bar{z}_m, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x(t), \delta(z - \bar{z}_1) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \delta(z - \bar{z}_m) \rangle \end{bmatrix}, \quad \bar{z}_i \in \Omega \setminus \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.32)$$

aus, wobei $\delta(z - z_0)$ den *örtlichen Dirac-Impuls* bei $z = z_0$ bezeichnet. Dies liegt daran, dass die Ortscharakteristiken $b_i(z) = \delta(z - z_i)$ in (2.31) sowie $c_i(z) = \delta(z - \bar{z}_i)$ in (2.32) nicht Element des Hilbertraums H sind, da dieser Raum Dirac-Impulse nicht enthält. Dies macht auch deutlich, dass wegen $b_i \in H$ in (2.27) und $c_i \in H$ in (2.29) der Operator $\mathcal{B}$ einen verteilten Eingriff und $\mathcal{C}$ eine verteilte Messung beschreiben. Jedoch können die Betrachtungen durch Einbettung des Zustandsraums in einen erweiterten Raum, der auch Distributionen umfasst, verallgemeinert werden (für Details siehe Kapitel 8 in [12]). Allerdings setzt dies voraus, dass die von $\mathcal{A}$ generierte C_0 -Halbgruppe (siehe Abschnitt A.1) eine „glättende“ Wirkung besitzt. Dies ist beispielsweise für parabolische Systeme der Fall, zu denen auch der bereits vorgestellte Wärmeleiter gehört. Ein allgemeineres Konzept zur Zustandsdarstellung von verteilt-parametrischen Systemen mit punktförmiger Messung und Eingriff sind die „*linear regular systems*“ (siehe [13, 69]). Diese Systembeschreibung ist allgemein genug, um viele Regelungsprobleme auch für solche verteilt-parametrische Systeme zu lösen. Im Rahmen der in diesem Buch vorgestellten Methoden lassen sich punktförmige Eingriffe oder Messungen stets durch Annäherung mittels Rechteckimpulse wie z.B. in (2.1) oder (2.6) behandeln. Darüber hinaus wird in Abschnitt 2.3 gezeigt, wie sich verteilt-parametrische Systeme mit Randeingriff in der Form (2.24)–(2.25) darstellen lassen. Damit sind die in diesem Buch beschriebenen Entwurfsverfahren auf viele in Anwendungen auftretende Systeme mit verteilten Parametern anwendbar.

Ist der *Systemoperator* $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ ein *Riesz-Spektraloperator*, zu denen auch der Operator in (2.17)–(2.18) und die Systemoperatoren vieler Anwendungsbeispiele gehören, dann ist das System (2.24)–(2.25) mit dem beschränkten Eingangoperator $\mathcal{B}$ in (2.27) und dem beschränkten Ausgangsoperator $\mathcal{C}$ in (2.32) ein *Riesz-Spektralsystem* (siehe auch Definition 4.1.1 in [14]).

Um Riesz-Spektraloperatoren genauer zu charakterisieren, betrachtet man das *Eigenwertproblem*

$$\mathcal{A}\phi_i = \lambda_i\phi_i, \quad i \geq 1 \quad (2.33)$$

für den Operator $\mathcal{A}$ mit den *Eigenvektoren* (oder auch *Eigenfunktionen*) ϕ_i und den *Eigenwerten* λ_i , die bei Riesz-Spektraloperatoren immer abzählbar sind. In (2.33) ist zu beachten, dass die Eigenvektoren ϕ_i nur bei verteilt-parametrischen Systemen mit mehr als einem Energiespeicher vektorwertig sind. Diese (abstrakte) Darstellung des Eigenwertproblems wird im folgenden Beispiel für den im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Wärmeleiter veranschaulicht.

Beispiel 2.1. Eigenwerte und Eigenvektoren des Wärmeleiters mit Dirichletschen Randbedingungen

Für den im Abschnitt 2.1 betrachteten Wärmeleiter sollen die Eigenwerte λ_i und die zugehörigen Eigenvektoren ϕ_i von $\mathcal{A}$ bestimmt werden. Wegen (2.33) müssen die Eigenvektoren ϕ_i in dem durch (2.18) beschriebenen Definitionsbereich von $\mathcal{A}$ enthalten sein, d.h. es gilt $\phi_i \in D(\mathcal{A})$. Hieraus folgen für die Eigenvektoren die Randbedingungen $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$. Zusammen mit der Definitionsgleichung (2.17) des Operators $\mathcal{A}$ handelt es sich somit beim Eigenwertproblem (2.33) um das *Randwertproblem*

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi_i(z) = \lambda_i\phi_i(z), \quad z \in (0, 1), \quad i \geq 1 \quad (2.34)$$

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0, \quad (2.35)$$

bei dem der Parameter λ_i zunächst unbestimmt ist. Jede nichtverschwindende Lösung ϕ_i dieses Randwertproblems, die sich für einen bestimmten Wert $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ergibt, ist ein *Eigenvektor* zum *Eigenwert* λ_i von $\mathcal{A}$. Um dieses Randwertproblem zu lösen, bestimmt man zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.34). Die charakteristische Gleichung von (2.34) lautet

$$p^2 - \lambda_i = 0 \quad (2.36)$$

und besitzt die Nullstellen

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_i}. \quad (2.37)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt. D.h. es werden nur reelle Eigenwerte bestimmt, was sich später noch als ausreichend herausstellt. Da man leicht nachweisen kann, dass es für $\lambda_i > 0$ keine Eigenvektoren gibt, wird zunächst der Fall $\lambda_i = 0$ untersucht. Für diesen Fall wird aus (2.34) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2}\phi_i(z) = 0 \quad (2.38)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\phi_i(z) = A_i z + B_i. \quad (2.39)$$

Einsetzen von (2.39) in die Randbedingungen (2.35) führt auf

$$\phi_i(0) = B_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.40)$$

$$\phi_i(1) = A_i \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.41)$$

womit sich die triviale Lösung $\phi_i = 0$ ergibt. Folglich ist Null kein Eigenwert von $\mathcal{A}$. Für den noch verbleibenden Fall $\lambda_i < 0$ lautet die allgemeine Lösung von (2.34)

$$\phi_i(z) = A_i \sin(\sqrt{|\lambda_i|}z) + B_i \cos(\sqrt{|\lambda_i|}z), \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}. \quad (2.42)$$

Weil (2.42) die Randbedingungen (2.35) erfüllen muss, folgt

$$\phi_i(0) = B_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.43)$$

$$\phi_i(1) = A_i \sin \sqrt{|\lambda_i|} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.44)$$

Wegen (2.43) ergibt sich für $A_i = 0$ gerade die triviale Lösung $\phi_i = 0$ (siehe (2.42)). Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, folgt deshalb aus (2.44) die transzendente *charakteristische Gleichung*

$$\sin \sqrt{|\lambda_i|} = 0 \quad (2.45)$$

von $\mathcal{A}$. Sie besitzt die Lösungen

$$\sqrt{|\lambda_i|} = i\pi, \quad i = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.46)$$

womit

$$|\lambda_i| = i^2 \pi^2 \quad (2.47)$$

bzw. mit $\lambda_i < 0$

$$\lambda_i = -i^2 \pi^2 \quad (2.48)$$

gilt. Hierbei wird der Fall $i = 0$ ausgeschlossen, da — wie bereits gezeigt — Null kein Eigenwert von $\mathcal{A}$ ist. Insgesamt ergeben sich somit die Eigenwerte

$$\lambda_i = -i^2 \pi^2, \quad i \geq 1 \quad (2.49)$$

und mit (2.42)–(2.43) die Eigenvektoren

$$\phi_i(z) = A_i \sin(i\pi z), \quad i \geq 1, \quad A_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.50)$$

Diese Vorgehensweise zur Lösung des Eigenwertproblems geht von einer *klassischen Lösung* des Randwertproblems (2.34)–(2.35) aus. Aufgrund des Definitionsbereichs $D(\mathcal{A})$ in (2.18) werden wegen $\phi_i \in D(\mathcal{A})$ und (2.33) aber die bei der klassischen Lösung vorausgesetzten Differenzierbarkeitseigenschaften gar nicht gefordert. Es könnten deshalb noch Lösungen der schwachen Formulierung von (2.34)–(2.35) existieren. Da es sich bei $-\mathcal{A}$ jedoch um einen *Sturm-Liouville-Operator* handelt (siehe Anhang A.3), ist aus der Literatur bekannt, dass es keine weiteren Lösungen von (2.34)–(2.35) bzw. Eigenvektoren mehr gibt. Wie man anhand von (2.49) erkennt, sind die Eigenwerte einfach und isoliert. Dies bedeutet, dass das *Punktspektrum* von $\mathcal{A}$ (d.h. die Menge aller Eigenwerte) *diskret* ist. Im allgemeinen Fall setzt sich das *Spektrum* eines Operators jedoch aus dem Punktspektrum, dem *kontinuierlichen Spektrum* und dem *Restspektrum* zusammen. Die Bezeichnung „kontinuierliches Spektrum“ kommt daher, dass Spektralpunkte aus diesem Anteil des Spektrums möglicherweise kontinuierlich verteilt sind, d.h. beispielsweise ein ganzes reelles Intervall einnehmen können. Solche Spektralanteile treten bei parabolischen Systemen mit einem halb-unendlichen Ortsbereich auf

(siehe [50]). In Beispiel A.1 im Anhang A.2 wird für den Operator $\mathcal{A}$ in (2.17)–(2.18) nachgewiesen, dass sein Spektrum nur aus dem eben berechneten reellen diskreten Punktspektrum besteht. Damit besitzt $\mathcal{A}$ ein *diskretes Spektrum*, das aber i.Allg. auch isolierte reelle wie konjugiert komplexe Eigenwerte mit endlicher algebraischer Vielfachheit haben darf. Man beachte, dass bei verteilt-parametrischen Systemen die Stabilitätseigenschaften nicht nur von den Eigenwerten allein, sondern von allen *Spektralpunkten*, d.h. allen Elementen des Spektrums, abhängen. Dies erklärt, warum im Gegensatz zu konzentriert-parametrischen Systemen der Begriff des Spektrums im verteilt-parametrischen Fall allgemeiner eingeführt werden muss. Aufgrund der *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_0^1 \sin(i\pi z) \sin(j\pi z) dz = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (2.51)$$

gilt mit dem in H eingeführten Skalarprodukt (2.16) für die Eigenvektoren

$$\begin{aligned} \langle \phi_i, \phi_j \rangle &= \int_0^1 A_i \sin(i\pi z) A_j \sin(j\pi z) dz \\ &= \frac{1}{2} A_i A_j \delta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} A_i A_j & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

worin δ_{ij} das *Kronecker-Delta* bezeichnet. Damit sind die Eigenvektoren paarweise zueinander *orthogonal*. Die in (2.50) auftretende multiplikative Konstante A_i kann genutzt werden, um die Eigenvektoren zu orthonormieren. Hierzu muss die *Orthonormalitätsrelation*

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^1 A_i \sin(i\pi z) A_j \sin(j\pi z) dz \stackrel{!}{=} \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \quad (2.53)$$

gelten, die wegen (2.52) für $A_i = \sqrt{2}$, $i \geq 1$, erfüllt ist. Damit lauten die orthonormierten Eigenvektoren von $\mathcal{A}$

$$\phi_i(z) = \sqrt{2} \sin(i\pi z), \quad i \geq 1. \quad (2.54)$$

Da dieses Funktionensystem sogar eine orthonormale Basis in H bildet (siehe Beispiel A.1 in Anhang A.2) und damit ein vollständiges Funktionensystem ist, lässt sich jedes Element von H nach den Eigenvektoren von $\mathcal{A}$ eindeutig entwickeln. ◀

Bei vielen Analyse- und Syntheseverfahren für verteilt-parametrische Systeme werden Elemente des Zustandsraums nach den Eigenvektoren von $\mathcal{A}$ entwickelt. Dazu müssen die Eigenvektoren eine Basis im Zustandsraum bilden. Bei einer großen Klasse verteilt-parametrischer Systeme, den sog. *Sturm-Liouville-Systemen* (siehe Anhang A.3), bilden die Eigenvektoren nach geeigneter Normierung eine orthonormale Basis im Zustandsraum, was eine Reihenentwicklung nach den Eigenvektoren ermöglicht. In Anwendungen treten

aber auch Systeme auf, die nicht zu dieser Klasse gehören. Darüber hinaus ergibt sich meistens als geregeltes System kein Sturm-Liouville-System, auch wenn dies für die Strecke zutrifft. Aus diesen Gründen muss man auch Operatoren betrachten, deren Eigenvektoren keine Orthonormalbasis im Zustandsraum bilden, aber dennoch eine eindeutige Entwicklung nach ihren Eigenvektoren erlauben. Dies ist eine der wesentlichen Eigenschaften der *Riesz-Spektraloperatoren*, die wie folgt definiert sind (siehe auch Definition 2.3.4 in [14]).

Definition 2.1 (Riesz-Spektraloperator). Sei $\mathcal{A}$ ein linearer Operator im Hilbertraum H und es gelte

1. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen,
2. die (isolierten) Eigenwerte $\{\lambda_i, i \geq 1\}$ von $\mathcal{A}$ sind einfach,
3. die Eigenvektoren $\{\phi_i, i \geq 1\}$ von $\mathcal{A}$ bilden eine Riesz-Basis für H ,
4. der Abschluss $\overline{\{\lambda_i, i \geq 1\}}$ der Eigenwerte von $\mathcal{A}$ ist *vollständig unzusammenhängend*. Dies bedeutet, dass es keine zwei Punkte $a, b \in \overline{\{\lambda_i, i \geq 1\}}$ gibt, die durch eine vollständig in $\overline{\{\lambda_i, i \geq 1\}}$ liegende stetige Kurve verbunden werden können.

Dann ist $\mathcal{A}$ ein *Riesz-Spektraloperator*.

Diese Klasse von Riesz-Spektraloperatoren wurde erstmals in [14] definiert. Die wesentliche Erweiterung gegenüber der bereits früher eingeführten Klasse der *diskreten Spektraloperatoren* (siehe [22]), deren Spektrum sich aus isolierten Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit zusammensetzt, besteht darin, dass zusätzlich auch Häufungspunkte der Eigenwerte im Spektrum zugelassen werden. Es lässt sich nämlich zeigen, dass das Spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ der in Definition 2.1 eingeführten Riesz-Spektraloperatoren $\mathcal{A}$ gleich dem *Abschluss* der Eigenwerte $\{\lambda_i, i \geq 1\}$ ist, d.h. es gilt

$$\sigma(\mathcal{A}) = \overline{\{\lambda_i, i \geq 1\}} \quad (2.55)$$

(siehe Theorem 2.3.5 in [14]). Diese Menge setzt sich aus den Eigenwerten und deren Grenzwerten zusammen, wobei die Grenzwerte auch stets *Häufungspunkte* sind. Solche Häufungspunkte treten beispielsweise bei Balkenmodellen mit Kelvin-Voigt-Dämpfungstermen auf (siehe z.B. [33]), weshalb mit dieser Erweiterung eine größere Klasse von Anwendungsbeispielen behandelbar ist. Die erste Bedingung der Definition ist eine grundlegende Eigenschaft von Systemoperatoren, denn nur abgeschlossene Operatoren können infinitesimale Generatoren von C_0 -Halbgruppen sein. In diesem Buch wird gemäß Bedingung 2 meistens von Operatoren $\mathcal{A}$ mit einfachen Eigenwerten ausgegangen. Es können aber auch Riesz-Spektraloperatoren mit mehrfachen Eigenwerten und *verallgemeinerten Eigenvektoren* eingeführt werden (siehe Abschnitt 4.2.2 und [33]). Um eine möglichst einfache sowie anschauliche Darstellung der Steuerung und Regelung linearer verteilt-parametrischer Systeme zu ermöglichen, wird die Definition 2.1 für Riesz-Spektraloperatoren in diesem

Buch zugrundegelegt, falls dies möglich ist. Die Ergebnisse in diesem Buch lassen sich jedoch auch auf den allgemeineren Fall erweitern. Die letzte Bedingung von Definition 2.1 wird im Zusammenhang mit der geometrischen Methode für verteilt-parametrische Systeme wie auch bei der Herleitung eines Steuerbarkeitskriteriums benötigt (für Details siehe [14]). Sie ist beispielsweise erfüllt, wenn die Eigenwerte von $\mathcal{A}$ nur endlich viele Häufungspunkte besitzen.

Wie die Bedingung 3 in der Definition 2.1 zeigt, bilden die Eigenvektoren $\{\phi_i, i \geq 1\}$ von $\mathcal{A}$ eine *Riesz-Basis* im Zustandsraum H . Solche Basen sind durch die folgende Definition charakterisiert (siehe Definition 2.3.4 in [14]).

Definition 2.2 (Riesz-Basis). Eine Folge von Elementen $\{\phi_i, i \geq 1\}$ in einem Hilbertraum H bildet eine *Riesz-Basis* für H , falls:

1. $\overline{\text{span}_{i \geq 1}\{\phi_i\}} = H$,
2. positive Konstanten M_1 und M_2 existieren, so dass für beliebige $N \in \mathbb{N}$ und beliebige Skalare $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N$,

$$M_1 \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right\|^2 \leq M_2 \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \quad (2.56)$$

gilt.

In der ersten Bedingung bedeutet $\overline{\text{span}_{i \geq 1}\{\phi_i\}} = H$, dass der Abschluss der Menge aller endlicher Linearkombinationen $\text{span}_{i \geq 1}\{\phi_i\}$ der Elemente ϕ_i den Raum H aufspannt. Dann gibt es für jedes Element ζ aus H eine endliche Linearkombination der Elemente ϕ_i , so dass die Abweichung zwischen ζ und $\text{span}_{i \geq 1}\{\phi_i\}$ beliebig klein aber nicht notwendigerweise Null wird. Im Grenzübergang allerdings lässt sich dann jedes Element ζ aus H durch eine i.Allg. unendliche Linearkombination von Elementen ϕ_i darstellen. Hieraus folgt, dass die Folge $\{\phi_i, i \geq 1\}$ in H ein *vollständiges Funktionensystem* bildet. Die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten einer eindeutigen Reihenentwicklung können mittels einer *Biorthonormalfolge* bestimmt werden. Wenn die Elemente ϕ_i die Eigenvektoren von $\mathcal{A}$ sind, dann erhält man die Biorthonormalfolge durch Bestimmung der Eigenvektoren ψ_i der *adjungierten Operators* $\mathcal{A}^*$ zum Eigenwert $\overline{\lambda_i}$ nach geeigneter Skalierung (siehe Anhang A.2), so dass die *Biorthonormalitätsrelation*

$$\langle \phi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \quad (2.57)$$

gilt (siehe Lemma 2.3.2 in [14]). Dies bedeutet, dass die Elemente ϕ_i und $\psi_i, i \geq 1$, zueinander *biorthonormal* sind. Dann bilden die Eigenvektoren ϕ_i und ψ_i eine Biorthonormalfolge und die eindeutige Reihenentwicklung eines Elements ζ aus H hat die Form

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \psi_i \rangle \phi_i. \quad (2.58)$$

Alternativ zu dieser Reihendarstellung kann man auch die Entwicklung

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \phi_i \rangle \psi_i \quad (2.59)$$

nach den Eigenvektoren ψ_i von $\mathcal{A}^*$ angeben, da die Folge $\{\psi_i, i \geq 1\}$ ebenfalls eine Riesz-Basis darstellt (siehe Corollary 2.3.3 in [14]). Die zweite Bedingung in Definition 2.2 stellt sicher, dass

$$M_1 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \zeta, \psi_i \rangle|^2 \leq \|\zeta\|^2 \leq M_2 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \zeta, \psi_i \rangle|^2 \quad (2.60)$$

mit den Konstanten aus Definition 2.2 erfüllt ist. Aufgrund der linken Seite von (2.60) sind die Entwicklungskoeffizienten $\langle \zeta, \psi_i \rangle$ in (2.58) wegen $\|\zeta\|^2 < \infty$ für $\zeta \in H$ absolut quadratisch summierbar, womit sie nicht unbeschränkt anwachsen können. Darüber hinaus müssen die Eigenvektoren ϕ_i wegen der linken Ungleichung in (2.60) linear unabhängig sein. Um dies zu erkennen, nimmt man beispielsweise die lineare Abhängigkeit der Eigenvektoren ϕ_1 und ϕ_2 an, d.h. es gilt

$$\zeta = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0 \quad (2.61)$$

und setzt dies in (2.60) ein. Dann ergibt sich mit (2.57) für die linke Seite von (2.60) der Ausdruck $M_1(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2) \neq 0$, während $\|\zeta\|^2 = 0$ gilt. Da dies im Widerspruch zur bei Riesz-Basen gültigen Ungleichung (2.60) steht, müssen die Eigenvektoren linear unabhängig sein, wenn sie eine Riesz-Basis bilden. Da die Eigenvektoren von $\mathcal{A}$ zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind (siehe z.B. Theorem 7.4-3 in [46]), muss diese Bedingung für die Riesz-Spektraloperatoren gemäß Definition 2.1 nicht gesondert überprüft werden, weil diese Operatoren nur einfache Eigenwerte besitzen dürfen. Die Doppelungleichung (2.60) macht auch eine Aussage über die Normen der Eigenvektoren $\{\phi_i, i \geq 1\}$. Setzt man nämlich ϕ_i in (2.60) ein, so folgt

$$M_1 \leq \|\phi_i\|^2 \leq M_2, \quad i \geq 1 \quad (2.62)$$

wegen (2.57). Damit kann die Norm der Eigenvektoren ϕ_i nicht verschwinden und auch nicht beliebig anwachsen. Deshalb bilden die Eigenvektoren ϕ_i eines Riesz-Spektraloperators erst nach einer geeigneten Normierung eine Riesz-Basis. Von dieser Normierung hängen dann auch die Konstanten M_1 und M_2 in (2.62) ab. Wie in Corollary 2.3.3 in [14] nachgewiesen wird, gelten dieselben Aussagen auch für die Eigenvektoren ψ_i in (2.59). Alternativ

lassen sich Riesz-Basen auch mittels der in Exercise 2.21 in [14] angegebenen Definition charakterisieren.

Definition 2.3 (Riesz-Basis und orthonormale Basis). Eine Folge von Elementen $\{\phi_i, i \geq 1\}$ in einem Hilbertraum H bildet genau dann eine *Riesz-Basis* für H , wenn es einen beschränkten linearen Operator $\mathcal{S}$ gibt, so dass

- $\mathcal{S}^{-1}$ ein beschränkter linearer Operator ist und
- die Folge $\{\mathcal{S}\phi_i, i \geq 1\}$ eine orthonormale Basis für H aufspannt.

Diese Definition einer Riesz-Basis macht deutlich, dass es immer eine Koordinatentransformation $\mathcal{S}$ derart gibt, dass Riesz-Basen in den neuen Koordinaten orthonormale Basen sind.

Um die Riesz-Spektraleigenschaft eines Operators zu veranschaulichen, wird im folgenden Beispiel untersucht, unter welchen Voraussetzungen eine Matrix ein Riesz-Spektraloperator ist.

Beispiel 2.2. Riesz-Spektraleigenschaft einer Matrix

Gegeben sei eine Matrix $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ im Vektorraum $\mathbb{C}^n$, der mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x^T \bar{y} \quad (2.63)$$

ein endlich-dimensionaler Hilbertraum H ist. Gemäß Definition 2.1 muss die Matrix A ein abgeschlossener Operator sein. Da endlich-dimensionale Matrizen A mit endlichen Elementen immer *beschränkt* sind, d.h. es gibt eine reelle Zahl c , so dass

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad (2.64)$$

mit der *induzierten Vektornorm* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ gilt, sind solche Matrizen auch stetige Operatoren. Dies folgt aus der Tatsache, dass beschränkte lineare Operatoren auch immer stetig sind (siehe z.B. Theorem A.3.10 in [14]). Aus der Stetigkeit eines linearen Operators folgt auch seine Abgeschlossenheit, weshalb endlich-dimensionale Matrizen stets abgeschlossene lineare Operatoren darstellen. Die zweite Bedingung von Definition 2.1 schränkt die Klasse der Matrizen A ein, da nur einfache Eigenwerte erlaubt sind. In diesem Fall bilden ihre Eigenvektoren eine Basis im Hilbertraum H , von der noch nachzuweisen ist, dass sie eine Riesz-Basis darstellt. Hierzu führt man die Matrix

$$V = [v_1 \dots v_n] \quad (2.65)$$

der Eigenvektoren v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, von A ein, die aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren v_i invertierbar ist. Damit erfüllt V die für $\mathcal{S}$ in Definition 2.3 vorausgesetzten Anforderungen und es gilt offensichtlich

$$e_i = V^{-1}v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.66)$$

worin die *Einheitsvektoren* e_i eine orthonormale Basis für H bilden. Wegen Definition 2.3 spannen die Eigenvektoren v_i von A deshalb eine Riesz-Basis für H auf. Da die Matrix A nur endlich viele einfache Eigenwerte besitzt,

ist ihr Eigenwertspektrum vollständig unzusammenhängend. Damit sind alle Matrizen A mit einfachen Eigenwerten Riesz-Spektraloperatoren. ◀

Ausgehend von Beispiel 2.2 kann man die bisher vorgestellten Ergebnisse zu verteilt-parametrischen Systemen auch im Rahmen konzentriert-parametrischer Systeme der Ordnung n leicht veranschaulichen. Dort entspricht dem Riesz-Spektraloperator eine reelle Systemmatrix A mit einfachen Eigenwerten, deren Eigenvektoren eine Basis des Zustandsraums $\mathbb{C}^n$ aufspannen. Bekanntlich kann durch geeignete Skalierung immer erreicht werden, dass die Eigenvektoren von A^T stets biorthonormal zu denen von A sind. Dann lassen sich Elemente (bzw. Vektoren) von $\mathbb{C}^n$ nach dem durch die Eigenvektoren von A und A^T gebildeten Biorthonormalsystem entwickeln. In diesem Zusammenhang entspricht der adjungierten Operator $\mathcal{A}^*$ gerade A^T und (2.58) ist die Entwicklung nach einem Biorthonormalsystem.

Im nächsten Beispiel wird gezeigt, dass der Systemoperator $\mathcal{A}$ des im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Wärmeleiters ein Riesz-Spektraloperator ist.

Beispiel 2.3. Riesz-Spektraleigenschaft des Systemoperators eines Wärmeleiters mit Dirichletschen Randbedingungen

Im Folgenden soll nachgewiesen werden, dass es sich beim Systemoperator $\mathcal{A}$ des Wärmeleiters in Abschnitt 2.1 um einen Riesz-Spektraloperator handelt. Hierzu müssen die in Definition 2.1 geforderten Eigenschaften für den durch (2.17)–(2.18) eingeführten Operator $\mathcal{A}$ nachgewiesen werden. Der Beweis der Abgeschlossenheit des Operators $\mathcal{A}$ erfordert weitere Grundlagen der Funktionalanalysis und ist deshalb im Anhang B.1 dargestellt. Aus Beispiel 2.1 folgt, dass die Eigenwerte λ_i , $i \geq 1$, von $\mathcal{A}$ einfach sind und keine Häufungspunkte besitzen. Damit sind die zweite und die vierte Bedingung in Definition 2.1 erfüllt. Es muss deshalb nur noch gezeigt werden, dass die Eigenvektoren ϕ_i von $\mathcal{A}$ eine Riesz-Basis bilden. Dies folgt aber aus der in Beispiel 2.1 begründeten Tatsache, dass die Eigenvektoren ϕ_i eine orthonormale Basis in H darstellen. Es gibt dann nämlich eine eindeutige Entwicklung

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i \quad (2.67)$$

für jedes Element ζ aus H . Folglich ist die Bedingung 1 der Definition 2.2 einer Riesz-Basis erfüllt. Um auch die zweite Bedingung nachzuweisen, geht man vom für orthonormale Funktionensysteme gültigen „verallgemeinerten Satz des Pythagoras“

$$\left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \|\phi_i\|^2, \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad (2.68)$$

aus, was mit $\|\phi_i\| = 1$ auf

$$\left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \quad (2.69)$$

führt. Damit ist die Ungleichung (2.56) für $M_1 = M_2 = 1$ erfüllt, womit die Eigenvektoren $\{\phi_i, i \geq 1\}$ von $\mathcal{A}$ eine Riesz-Basis für H bilden. Diese Betrachtung zeigt auch, dass jede orthonormale Basis im Zustandsraum eine Riesz-Basis ist. Folglich handelt es sich beim Systemoperator $\mathcal{A}$ in (2.17)–(2.18) um einen Riesz-Spektraloperator. In Verbindung mit den beschränkten Ein- und Ausgangsoperatoren stellt damit das System (2.13)–(2.14) ein Riesz-Spektralsystem dar. Da die Eigenwerte λ_i von $\mathcal{A}$ die Bedingung $\sup_{i \geq 1} \operatorname{Re} \lambda_i < \infty$ erfüllen (siehe Beispiel 2.1), ist $\mathcal{A}$ auch ein infinitesimaler Generator einer C_0 -Halbgruppe (siehe Theorem 2.3.5 in [14]). Gemäß Anhang A.3 gehört der Operator $-\mathcal{A}$ zur Klasse der Sturm-Liouville-Operatoren, womit die Klasse der Riesz-Spektraloperatoren auch solche Operatoren enthält. Die allgemeine Aussage, dass jeder Sturm-Liouville-Operator ein Riesz-Spektraloperator ist, wird im Anhang A.3 begründet. Dies macht deutlich, dass die *Sturm-Liouville-Systeme*, d.h. verteilt-parametrische Systeme (2.24)–(2.25), bei denen $-\mathcal{A}$ ein Sturm-Liouville-Operator ist, eine Teilklasse der Riesz-Spektralsysteme sind. ◀

Im nachfolgenden Beispiel wird die Zustandsbeschreibung eines zweiseitig drehbar gelagerten *Euler-Bernoulli-Balkens* hergeleitet. Solche Balken können beispielsweise als Modelle für flexible Handhabungsgeräte oder auch für elastische Weltraumstrukturen dienen. Da der Balken zwei verteilte Energiespeicher hat, besitzt die Zustandsdarstellung (2.24)–(2.25) vektoriellen Charakter, d.h. der Zustand $x(t)$ ist ein Vektor und die auftretenden Operatoren sind Matrizen mit Operatoren als Elemente. Die Eigenvektoren des Euler-Bernoulli-Balkens bilden im gedämpften Fall keine orthogonale Basis im Zustandsraum, was die Systemanalyse wesentlich erschwert (siehe Anhang B.2). Im nächsten Beispiel wird gezeigt, dass es aber eine Darstellung dieses Balkens als Riesz-Spektralsystem gibt. Damit lassen sich die in diesem Buch vorgestellten Ergebnisse auch auf dieses verteilt-parametrische System anwenden.

Beispiel 2.4. Zustandsbeschreibung eines beidseitig drehbar gelagerten Euler-Bernoulli-Balkens

Betrachtet wird der in Abbildung 2.2 dargestellte elastische Balken, der beidseitig drehbar gelagert ist. Dies bedeutet, dass an seinen Rändern die Auslenkung Null ist (siehe Randbedingungen (2.71)) und ebenfalls das Biegemoment dort verschwindet (siehe Randbedingungen (2.72)). Die im Balken vorhandene Reibung wird durch eine zu $-\partial_z^2 w(z, t)$ proportionale *strukturelle Dämpfung* mit der Proportionalitätskonstante $0 \leq \alpha < 1$ berücksichtigt. Zur Beeinflussung der transversalen Auslenkung $w(z, t)$ des Balkens dienen zwei punktförmige bei $z_1 = 0.6$ und $z_2 = 0.7$ auf den Balken wirkende Kräfte und die Regelgrößen sind durch die Auslenkungen bei $z_1 = 0.4$ und $z_2 = 0.3$ gegeben. Legt man bei der Modellbildung die Euler-Bernoulli-Balkenhypothese

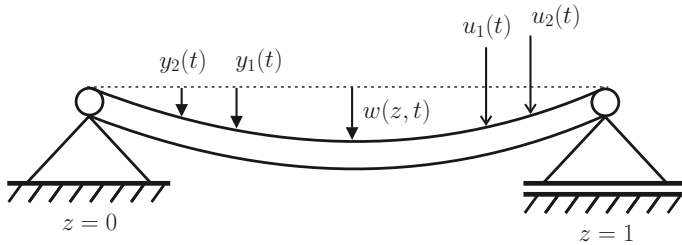


Abb. 2.2: Beidseitig drehbar gelagerter Balken mit transversaler Auslenkung $w(z, t)$, Eingangskräften $u_1(t)$ und $u_2(t)$ sowie transversale Auslenkungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ als Ausgangsgrößen

zugrunde, so erhält man als Bewegungsgleichung für den Balken eine *biharmonische PDgl.* (siehe z.B. [34]). Damit lässt sich die Dynamik dieses verteilt-parametrischen Systems in Form des Anfangs-Randwertproblems

$$\partial_t^2 w(z, t) + \partial_z^4 w(z, t) - 2\alpha \partial_t \partial_z^2 w(z, t) = b^T(z)u(t), t > 0, z \in (0, 1) \quad (2.70)$$

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, t > 0 \quad (2.71)$$

$$\partial_z^2 w(0, t) = \partial_z^2 w(1, t) = 0, t > 0 \quad (2.72)$$

$$w(z, 0) = w_0(z), z \in [0, 1] \quad (2.73)$$

$$\partial_t w(z, 0) = w_{t0}(z), z \in [0, 1] \quad (2.74)$$

$$y(t) = \int_0^1 c(z)w(z, t)dz, t \geq 0 \quad (2.75)$$

mit zwei Eingängen zusammengefasst im Vektor u und zwei Ausgängen als Elemente des Vektors y beschreiben. Um Dirac-Impulse in den Ortscharakteristiken zu vermeiden, wird der punktförmige Eingriff durch den Vektor $b^T(z) = [b_1(z) \ b_2(z)]$ mit den rechteckförmigen Ortscharakteristiken

$$b_1(z) = \begin{cases} 50 & : 0.59 \leq z \leq 0.61 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.76)$$

und

$$b_2(z) = \begin{cases} 50 & : 0.69 \leq z \leq 0.71 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.77)$$

approximiert. Entsprechend lassen sich mit (2.75) und dem Vektor $c(z) = [c_1(z) \ c_2(z)]^T$ die punktförmigen Regelgrößen näherungsweise durch die Ortscharakteristiken

$$c_1(z) = \begin{cases} 50 & : 0.39 \leq z \leq 0.41 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.78)$$

und

$$c_2(z) = \begin{cases} 50 & : 0.29 \leq z \leq 0.31 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.79)$$

beschreiben.

Um eine Zustandsbeschreibung des Balkens angeben zu können, werden die Zustandsgrößen

$$x_1(z, t) = w(z, t) \quad (2.80)$$

$$x_2(z, t) = \partial_t w(z, t) \quad (2.81)$$

eingeführt. Die zugehörigen Zustandsgleichungen lassen sich unter Verwendung von (2.70) sowie (2.80)–(2.81) leicht berechnen und lauten

$$\partial_t x_1(z, t) = x_2(z, t) \quad (2.82)$$

$$\partial_t x_2(z, t) = -\partial_z^4 x_1(z, t) + 2\alpha \partial_z^2 x_2(z, t) + b^T(z)u(t). \quad (2.83)$$

Zur Formulierung des partiellen Differentialgleichungssystems (2.82)–(2.83) zusammen mit den Rand- und Anfangsbedingungen als abstraktes Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in D(\mathcal{A}) \quad (2.84)$$

(siehe (2.24)) wird der Operator

$$\mathcal{A}_0 h = \frac{d^4}{dz^4} h \quad (2.85)$$

$$h \in D(\mathcal{A}_0) = \{h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{d}{dz}h, \frac{d^2}{dz^2}h, \frac{d^3}{dz^3}h \text{ absolut stetig}, \\ \frac{d^4}{dz^4}h \in L_2(0, 1) \text{ und } h(0) = h(1) = \frac{d^2}{dz^2}h(0) = \frac{d^2}{dz^2}h(1) = 0\} \quad (2.86)$$

eingeführt. Da der (selbstadjungierte) Operator $\mathcal{A}_0$ ein *positiver Operator* im Funktionenraum $L_2(0, 1)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_0^1 x(z) \overline{y(z)} dz \quad (2.87)$$

ist, d.h. $\langle \mathcal{A}_0 \zeta, \zeta \rangle_{L_2} > 0$, $\forall \zeta \in D(\mathcal{A}_0)$ gilt (siehe Definition A.3.71 in [14]), existiert auch der zugehörige *Wurzeloperator*

$$\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} h = -\frac{d^2}{dz^2} h \quad (2.88)$$

$$h \in D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}) = \{h \in L_2(0, 1) \mid h, \frac{d}{dz}h \text{ absolut stetig}, \\ \frac{d^2}{dz^2}h \in L_2(0, 1) \text{ und } h(0) = h(1) = 0\} \quad (2.89)$$

als Faktor in der Zerlegung

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \quad (2.90)$$

(siehe Theorem A.3.73 sowie Exercise 2.22 in [14]). Der aus (2.80)–(2.81) gebildete Zustandsvektor

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(\cdot, t) \\ x_2(\cdot, t) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

in (2.84) ist Element des noch zu wählenden Hilbertraums $H = H_1 \oplus H_2$. Darin bezeichnet $V \oplus W$ die *direkte Summe* zweier Vektorräume V und W , d.h. für $v \in V$ und $w \in W$ ist

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \in V \oplus W, \quad (2.92)$$

wobei $V \oplus W$ wieder ein Vektorraum ist. Damit folgt aus $x(t) \in H_1 \oplus H_2$, dass $x_1(t) \in H_1$ und $x_2(t) \in H_2$ gilt. Anhand von (2.82)–(2.83) sowie (2.85) und (2.88) erkennt man, dass der Systemoperator $\mathcal{A}$ in (2.84) durch

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A}_0 & -2\alpha\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

mit dem Definitionsbereich $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_0) \oplus D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}})$ gegeben ist. Darin bezeichnet $I : H_2 \rightarrow H_1$ den *Identitätsoperator*. Unter Beachtung von (2.83) wird der Eingangsoperator

$$\mathcal{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u_2(t) \quad (2.94)$$

mit den Ortscharakteristiken b_i in (2.76)–(2.77) eingeführt, die in H_2 liegen müssen. Der Zustandsraum H muss nun so gewählt werden, dass das Anfangswertproblem (2.84) *wohlgestellt* ist (siehe Anhang A.1). Dies bedeutet, dass (2.84) eine eindeutige Lösung besitzt und dass die Lösung stetig von den Anfangswerten x_0 abhängt. Wenn man vom Wärmeleiter ausgeht (siehe Abschnitt 2.1), dann ist eine nahe liegende Wahl der Raum $H = L_2(0, 1) \oplus L_2(0, 1)$ mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_{L_2} + \langle x_2, y_2 \rangle_{L_2}, \quad x_1, y_1 \in L_2(0, 1), \quad x_2, y_2 \in L_2(0, 1). \quad (2.95)$$

Allerdings lässt sich nachweisen, dass für diesen Zustandsraum die Lösung von (2.84) nicht stetig von den Anfangswerten abhängt und somit dieses Anfangswertproblem nicht wohlgestellt ist. Dieser Sachverhalt kann auch physikalisch interpretiert werden. Hierzu bildet man das Normquadrat des Zustands $x(t)$, was mit (2.95)

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 &= \langle x_1(t), x_1(t) \rangle_{L_2} + \langle x_2(t), x_2(t) \rangle_{L_2} \\
&= \int_0^1 (w(z, t))^2 dz + \int_0^1 (\partial_t w(z, t))^2 dz
\end{aligned} \tag{2.96}$$

ergibt, wenn man (2.80)–(2.81) berücksichtigt. Die kinetische Energie des Balkens ist durch

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_t w(z, t))^2 dz \tag{2.97}$$

gegeben und tritt auch in (2.96) auf. Allerdings gilt für die potentielle Energie

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_z^2 w(z, t))^2 dz, \tag{2.98}$$

womit der erste Summand in (2.96) nicht proportional zu $E_{pot}(t)$ ist. Damit beschreibt das Normquadrat $\|x(t)\|^2$ in (2.96) nicht die Gesamtenergie des Balkens. Beispielsweise bedeutet dann ein kleines Normquadrat $\|x(t)\|^2$ nicht, dass die Gesamtenergie des Balkens klein ist. In (2.96) geht nämlich nur $w(z, t)$ ein, das klein sein kann, auch wenn $\partial_z^2 w(z, t)$ große Werte annimmt. Letztere Größe beschreibt aber wegen (2.98) die potentielle Energie des Balkens. Diese Betrachtungen machen die unzulässige Wahl des Zustandsraums $H = L_2(0, 1) \oplus L_2(0, 1)$ deutlich, da die Gesamtenergie des Systems nicht durch die Zustände charakterisiert werden kann. Dieses Ergebnis lässt sich jedoch verwenden, um einen geeigneten Zustandsraum zu bestimmen. Führt man nämlich das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x_1, \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} y_1 \rangle_{L_2} + \langle x_2, y_2 \rangle_{L_2}, \\
x_1, y_1 &\in D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}), \quad x_2, y_2 \in L_2(0, 1)
\end{aligned} \tag{2.99}$$

mit dem Wurzeloperator aus (2.88) im Zustandsraum ein, so gilt wegen (2.97)–(2.98) für das Normquadrat

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 &= \langle \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x_1(t), \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x_1(t) \rangle_{L_2} + \langle x_2(t), x_2(t) \rangle_{L_2} \\
&= \int_0^1 (\partial_z^2 w(z, t))^2 dz + \int_0^1 (\partial_t w(z, t))^2 dz \\
&= 2E_{pot}(t) + 2E_{kin}(t).
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Folglich charakterisiert $\|x(t)\|^2$ in (2.100) die Gesamtenergie des Balkens. Deshalb darf man annehmen, dass ein Zustandsraum mit diesem Skalarprodukt zu einem wohlgestellten Anfangswertproblem (2.84) führt. Einen solchen Zustandsraum, in dem das Skalarprodukt proportional zur Gesamtenergie des Systems ist, bezeichnet man als *Energieraum*. Ein Energieraum für den Balken lässt sich aus der Forderung ableiten, dass aufgrund des ersten Summanden in (2.99) der Zustand x_1 im Definitionsbereich von $\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}$ liegen muss.

Dies führt auf den Zustandsraum $H = D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}) \oplus L_2(0, 1)$, der mit dem Skalarprodukt (2.99) auch ein Hilbertraum ist (siehe Example 2.2.5 in [14]). Darüber hinaus liegen wegen $b_1, b_2 \in L_2(0, 1)$ und $H_2 = L_2(0, 1)$ die Ortscharakteristiken der Eingänge in diesem Raum (siehe (2.76)–(2.77) und (2.94)). Wie in Anhang B.2 ausführlich gezeigt wird, ist $\mathcal{A}$ in (2.93) dann ein Riesz-Spektraloperator und das resultierende Anfangswertproblem ist wohlgestellt. Eine weitere Möglichkeit, um zu einem wohlgestellten Anfangswertproblem für den Balken zu kommen, ist eine andere Wahl der Zustandsgrößen. Geht man vom Normquadrat (2.100) aus, dann können direkt die *Energiekoordinaten*

$$x_1(z, t) = \partial_z^2 w(z, t) \quad (2.101)$$

$$x_2(z, t) = \partial_t w(z, t) \quad (2.102)$$

als Zustände im Energieraum $H = L_2(0, 1) \oplus L_2(0, 1)$ mit dem Skalarprodukt (2.95) verwendet werden, da sich dann wieder das Normquadrat (2.100) ergibt. Auch dieser Ansatz führt auf ein wohlgestelltes Anfangswertproblem (siehe z.B. [35]). Ein Vorteil der Verwendung des Zustandsraums $H = D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}) \oplus L_2(0, 1)$ ist jedoch, dass die erste Komponente x_1 Element des Raums $D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}})$ ist, der nur „glatte“ Funktionen enthält (siehe (2.88)). Folglich führen *Punktmessungen*

$$y(t) = x_1(z_0, t), \quad 0 \leq z_0 \leq 1 \quad (2.103)$$

in diesem Raum zu beschränkten Ausgangsoperatoren, womit solche Ausgangsgrößen in diesem Fall auch mit den in diesem Buch vorgestellten Methoden behandelt werden können. Bei parabolischen Systemen wie dem in Abschnitt 2.1 vorgestellten Wärmeleiter ist dies nicht möglich. Der dort verwendete Zustandsraum $L_2(0, 1)$ enthält nämlich auch unstetige Funktionen, für welche die punktförmige Messung bzw. die punktförmige Funktionsauswertung Probleme bereitet. Damit ist die Darstellung (2.75) mit (2.78)–(2.79) von allgemeinerer Bedeutung, da sie in jedem Fall anwendbar ist. Darüber hinaus modelliert sie die physikalischen Verhältnisse besser, da Punktmessungen nur mathematische Idealisierungen darstellen.

Zur Vervollständigung der Zustandsbeschreibung des mit den Zuständen (2.80)–(2.81) beschriebenen Balkens, muss noch die Ausgangsgleichung (2.75) im Zustandsraum $H = D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}) \oplus L_2(0, 1)$ formuliert werden. Sie lässt sich mit (2.87) in der Form

$$y(t) = \int_0^1 w(z, t) c(z) dz = \begin{bmatrix} \langle x_1(t), c_1 \rangle_{L_2} \\ \langle x_1(t), c_2 \rangle_{L_2} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

darstellen. Beachtet man, dass der Operator $\mathcal{A}_0$ beschränkt invertierbar ist (siehe Exercise 2.22 in [14]), d.h. der Operator $\mathcal{A}_0^{-1}$ ist beschränkt, und dass

der Wurzeloperator $\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}$ zur Klasse der *selbstadjungierten Operatoren* gehört, d.h. es gilt

$$\langle x, \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} y \rangle_{L_2} = \langle \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x, y \rangle_{L_2}, \quad x, y \in D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}) \quad (2.105)$$

(siehe Exercise 2.22 in [14] und Anhang A.2), dann erhält man mit (2.90) für (2.104)

$$y(t) = \begin{bmatrix} \langle x_1(t), \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_0^{-1} c_1 \rangle_{L_2} \\ \langle x_1(t), \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_0^{-1} c_2 \rangle_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x_1(t), \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \tilde{c}_1 \rangle_{L_2} \\ \langle \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x_1(t), \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \tilde{c}_2 \rangle_{L_2} \end{bmatrix}, \quad (2.106)$$

worin

$$\tilde{c}_i = \mathcal{A}_0^{-1} c_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.107)$$

eingeführt wurde. Man beachte, dass $\tilde{c}_i \in D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}})$ gilt, weil die unstetigen Ortscharakteristiken (2.78)–(2.79) durch den *Integraloperator*

$$(\mathcal{A}_0^{-1} h)(z) = \int_0^1 g(z, \zeta) h(\zeta) d\zeta \quad (2.108)$$

mit der zu $\mathcal{A}_0$ gehörenden *Greenschen Funktion* $g(z, \zeta)$ als Kern geglättet werden (siehe auch Anhang B.1). Unter Beachtung von (2.99) lautet die Ausgangsgleichung in $H = D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}}) \oplus L_2(0, 1)$ schließlich

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} \langle \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x_1(t), \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \tilde{c}_1 \rangle_{L_2} + \langle x_2(t), 0 \rangle_{L_2} \\ \langle \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} x_1(t), \mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}} \tilde{c}_2 \rangle_{L_2} + \langle x_2(t), 0 \rangle_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle x(t), \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\ \left\langle x(t), \begin{bmatrix} \tilde{c}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{C}x(t). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Da $\mathcal{C}$ in (2.109) und $\mathcal{B}$ in (2.94) beschränkte lineare Operatoren sind sowie $\mathcal{A}$ in (2.93) einen Riesz-Spektraloperator darstellt, ist damit gezeigt, dass eine Zustandsbeschreibung des betrachteten Balkens als Riesz-Spektralsystem angegeben werden kann. ◀

2.2.2 Lösung der Zustandsgleichungen

Die Systemdynamik von Riesz-Spektralsystemen lässt sich beurteilen, wenn man die allgemeine Lösung der Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \in H \quad (2.110)$$

Zustandsregelung verteilt-parametrischer Systeme

Deutscher, J.

2012, IX, 315 S., Hardcover

ISBN: 978-3-642-19558-7