
Zusammenfassung wichtiger Formeln

Die Elektrostatik beschäftigt sich mit den Feldern zeitlich konstanter Ladungsverteilungen. Grundlage dafür ist die COULOMB-Kraft auf eine infinitesimale Ladung dQ im elektrischen Feld $\mathbf{E}$

$$d\mathbf{K} = dQ \mathbf{E} . \quad (1.1)$$

Der Beitrag eines Ladungselementes dQ zur elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}$ ist

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} , \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} , \quad (1.2)$$

wobei der Vektor $\mathbf{R}$ von der Ladung zum betrachteten Aufpunkt weist. Das Gesamtfeld einer beliebigen Ladungsverteilung folgt aus (1.2) durch Summation bzw. Integration (Superpositionsprinzip).

Grundgleichungen im Vakuum

Die Grundgleichungen der Elektrostatik lauten als Spezialfälle der MAXWELL'schen Gleichungen in differentieller bzw. integraler Form

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 , & \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{q_V}{\epsilon_0} , & \epsilon_0 \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} &= \int_V q_V dV = Q_{\text{gesamt}} . \end{aligned} \quad (1.3)$$

q_V ist die räumliche Dichte der Ladungsverteilung. Das Oberflächenintegral in (1.3), das sogenannte GAUSS'sche Gesetz der Elektrostatik, steht für alle möglichen Ladungen in V und kann in einigen hochsymmetrischen Fällen, in denen $\mathbf{E}$ unabhängig von den Integrationsvariablen ist, direkt zur Feldberechnung verwendet werden (siehe z.B. Aufg. E5).

Das elektrostatische Feld ist konservativ und somit aus einem skalaren Potential ϕ bestimmbar

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi . \quad (1.4)$$

Elementare Feldquellen

Die Punktladung Q , der Dipol mit dem Dipolmoment $\mathbf{p}_e$ und die unendlich lange, gerade Linienladung q_L stellen elementare Quellen des elektrischen Feldes dar, Abb. 1.1.

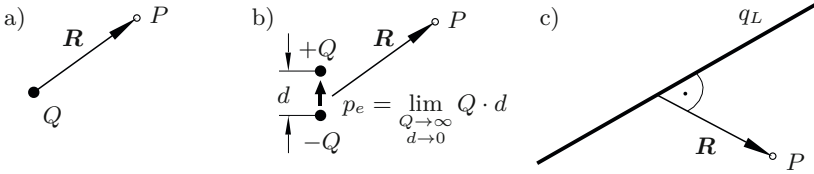


Abb. 1.1. Elementare Feldquellen. (a) Punktladung. (b) Elektrostatischer Dipol. (c) Unendlich lange, gerade Linienladung

Potential und elektrische Feldstärke dieser Elementarquellen lauten in koordinatenunabhängiger Form

$$\text{Punktladung: } \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1.5a)$$

$$\text{Dipol: } \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p}_e \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1.5b)$$

$$\text{Linienladung:}^1 \phi = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_0}, \quad \mathbf{E} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^2}. \quad (1.5c)$$

Analog zum räumlichen Dipol lässt sich auch ein „Liniendipol“ als zweidimensionale Elementarquelle einführen (siehe Aufg. E8).

Superposition

Das Feld einer gegebenen Ladungsverteilung lässt sich durch Überlagerung der Beiträge infinitesimal kleiner Ladungselemente bestimmen. Dabei ist es zweckmäßig, neben Raumladungen (Dichte q_V) auch Flächenladungen (Dichte q_F) und Linienladungen (Dichte q_L) zuzulassen, Abb. 1.2. Für das Potential und die Feldstärke einer Raumladung gilt dabei

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V q_V(\mathbf{r}') \frac{1}{R} dV', \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V q_V(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV'. \quad (1.6)$$

Für den Fall einer Flächenladung bzw. Linienladung ersetzt man $q_V(\mathbf{r}') dV'$ durch $q_F(\mathbf{r}') dF'$ bzw. $q_L(\mathbf{r}') ds'$.

¹ Der Abstand R_0 in (1.5c) sorgt für ein dimensionsloses Argument der Logarithmusfunktion und hat keinen Einfluss auf das Feld.

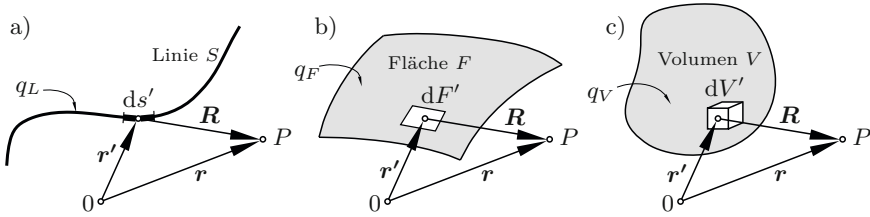


Abb. 1.2. (a) Linienladung. (b) Flächenladung. (c) Raumladung

Materie im elektrischen Feld

Bringt man materielle Körper in ein elektrisches Feld ein, so verändert sich dieses in der Regel. Man unterscheidet grundsätzlich leitende und nichtleitende (polarisierbare) Materie.

Leitende Materie: Im Leiter verschwindet die elektrische Feldstärke und die Leiteroberfläche stellt eine Äquipotentialfläche dar. Die Ladungen sind frei beweglich und nur auf der Oberfläche vorhanden.

Polarisierbare Materie: Der Einfluss eines polarisierbaren Mediums auf das elektrische Feld hat seinen Ursprung in der atomaren Dipolverteilung des Materials, die makroskopisch durch die Polarisation $\mathbf{P}$ (Dipolmomentendichte) beschrieben wird. Für polarisierbare Materie wird neben der elektrischen Feldstärke zusätzlich die elektrische Verschiebung $\mathbf{D}$ eingeführt und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_V \quad , \quad \mathbf{D} = \begin{cases} \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad , \quad \text{wenn } \mathbf{P} \sim \mathbf{E} . \end{cases} \quad (1.7)$$

ε_r ist die relative Dielektrizitätskonstante eines linearen Mediums.

Ein polarisierter Körper kann alternativ auch durch äquivalente Polarisationsladungen beschrieben werden

$$q_{Vpol} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad , \quad q_{Fpol} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \big|_{\text{Oberfläche}} . \quad (1.8)$$

Dabei ist $\mathbf{n}$ die Flächennormale des polarisierten Körpers.

Differentialgleichungen für das Potential

In Gebieten mit konstanter Dielektrizitätskonstanten ε erfüllt das elektrostatische Potential ϕ die POISSON-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q_V}{\varepsilon} \quad (1.9)$$

bzw. bei Raumladungsfreiheit die LAPLACE-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 . \quad (1.10)$$

Diese Differentialgleichungen bilden zusammen mit Rand- und Stetigkeitsbedingungen den Ausgangspunkt einer elektrostatischen Randwertaufgabe.²

² Lösungsansätze für die LAPLACE-Gleichung findet man im Anhang A.1.

Rand- und Stetigkeitsbedingungen

Oberflächen leitender Körper sowie Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten geben Anlass zu Unstetigkeiten der elektrischen Feldverteilung, Abb. 1.3.

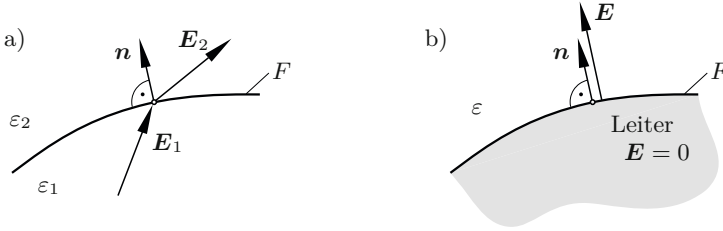


Abb. 1.3. (a) Sprungstelle der Dielektrizitätskonstanten. (b) Oberfläche eines leitenden Körpers

Auf der Leiteroberfläche gelten die Randbedingungen

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_F = 0, \quad \varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}|_F = q_F \quad (1.11)$$

und am Übergang $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ die Stetigkeitsbedingungen

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)_F = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)_F = 0. \quad (1.12)$$

Damit ist an der Grenzfläche die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig und die Normalkomponente unstetig. q_F in (1.11) ist die influenzierte Oberflächenladung des leitenden Körpers in Abb. 1.3b.

Befindet sich auf der Trennfläche in Abb. 1.3a zusätzlich eine freie Flächenladung q_F , so gilt anstelle von (1.12)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)_F = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)_F = q_F. \quad (1.13)$$

Elektrische Feldenergie

Im elektrischen Feld ist die Energie W_e gespeichert. Sie lässt sich für verschiedene Anordnungen folgendermaßen berechnen:

$$W_e = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV & \text{(allgemein)} \\ \frac{1}{2} \int_V q_V \phi \, dV & \text{(räumliche Ladungsverteilung)} \\ \frac{1}{2} Q \phi & \text{(Leiter mit Ladung } Q \text{ und Potential } \phi) \\ Q \phi & \text{(potentielle Energie einer Punktladung im Potentialfeld } \phi) \end{cases} \quad (1.14)$$

Elektrischer Fluss

Der elektrische Fluss durch eine Fläche F ist als Flächenintegral

$$\psi_e = \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} \quad (1.15)$$

definiert. Nach dem GAUSS'schen Gesetz ist der von einer Ladungsverteilung ausgehende Gesamtfluss identisch mit der Gesamtladung der Ladungsverteilung.

Der Fluss spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Feldlinien, da diese die Bewandung sogenannter Flussröhren bilden. Die prinzipielle Vorgehensweise wird u.a. in den Aufgaben E13* und E23 erläutert. Im Falle rotationssymmetrischer Felder erhält man die Feldlinien im ladungsfreien Gebiet durch Lösung der Gleichung $\psi_e = \text{const.}$. Handelt es sich dagegen um ebene, d.h. von einer geradlinigen Koordinate unabhängige Felder, so hält man den Fluss ψ'_e pro Längeneinheit konstant.

Kapazität

Die Kapazität eines Kondensators bestehend aus zwei Elektroden, Abb. 1.4a, ist

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{Q}{U} = \frac{\psi_e}{U}, \quad (1.16)$$

wobei Q und ϕ_1 Ladung und Potential der Elektrode 1 darstellen, während die Elektrode 2 die entgegengesetzte Ladung $-Q$ und das Potential ϕ_2 aufweist. ψ_e ist der von der Elektrode 1 ausgehende und in die Elektrode 2 einmündende Gesamtfluss. Bei Mehrleittersystemen, Abb. 1.4b, bestimmt man die Teilkapazitäten C_{ij} aus den Kapazitätskoeffizienten k_{ij}

$$C_{i\infty} = \sum_{j=1}^n k_{ij}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

$$C_{ij} = -k_{ij}$$

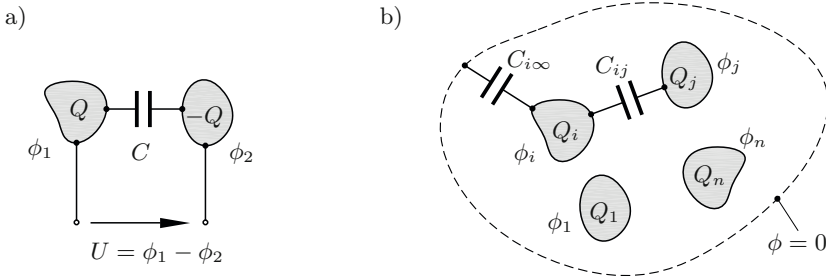


Abb. 1.4. (a) Kondensator. (b) Mehrleittersystem

Kräfte im elektrischen Feld

Die Kraft auf vorgegebene Ladungen kann mit (1.1) berechnet werden. Ansonsten kann auch das Prinzip der virtuellen Verrückung verwendet werden

$$K_s = \mp \frac{\delta W_e}{\delta s} \quad \text{bei} \quad \begin{array}{l} \text{konstanter Ladung} \\ \text{konstanter Spannung} \end{array}, \quad (1.18)$$

bei der ein Körper um eine virtuelle Strecke δs verschoben und die dabei auftretende Energieänderung δW_e ermittelt wird.

An leitenden Oberflächen bzw. dielektrischen Grenzflächen, Abb. 1.3, gilt für die Flächendichte der Kraft

$$\mathbf{K}'' = n \frac{1}{2} \begin{cases} \varepsilon E^2 & (\text{Leiter}) \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) & (\text{Trennfläche } \varepsilon_1/\varepsilon_2) . \end{cases} \quad (1.19)$$

Spiegelungsverfahren

In einigen (leider nur wenigen) Fällen ist es möglich, das sekundäre Feld eines leitenden oder dielektrischen Körpers bei Einwirkung eines primären elektrischen Feldes mit Hilfe von Ersatzladungen, sogenannten Spiegelladungen, zu beschreiben.

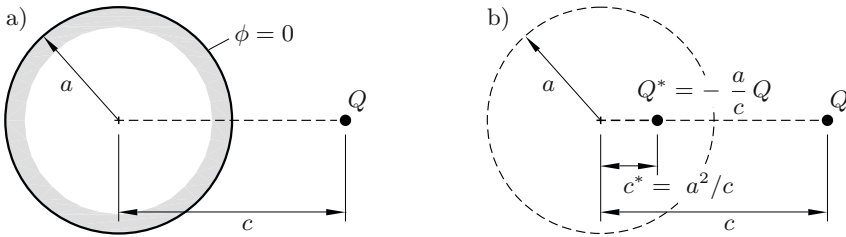


Abb. 1.5. Spiegelung einer Punktladung an einer leitenden, geerdeten Kugel. (a) Originalanordnung, (b) Ersatzanordnung

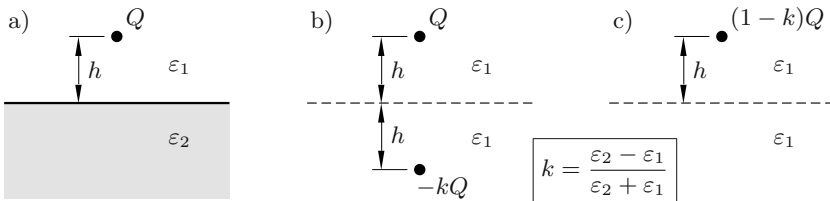


Abb. 1.6. Spiegelung einer Punktladung an einem dielektrischen Halbraum. (a) Originalanordnung. (b) Ersatzanordnung für das Potential im oberen Halbraum. (c) Ersatzanordnung für das Potential im unteren Halbraum

Die Abbildungen 1.5 und 1.6 zeigen dies am Beispiel einer leitenden, geerdeten Kugel und am dielektrischen Halbraum. Abb. 1.6 gilt im Grenzfall $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ auch für den leitenden Halbraum. Am dielektrischen Zylinder ist eine Spiegelung ebenfalls möglich, allerdings nur für unendlich lange, ebene Quellen (siehe Aufg. E15).

Aufgaben

E1 Kraftberechnung mit dem Coulomb'schen Gesetz

Bestimme die Gleichgewichtslage zwischen zwei punktförmig anzunehmenden Ladungen Q und q , wobei die Ladung Q fest im Raum angebracht ist, und die Ladung q mit einer starren Verbindung der Länge b beweglich um den Ursprung gelagert sein soll, Abb. 1.7. Auf die Ladung q wirke die Gewichtskraft $\mathbf{G}$, die gleich sein soll der COULOMB'schen Anziehungskraft zwischen zwei Ladungen Q und q im gegenseitigen Abstand a .

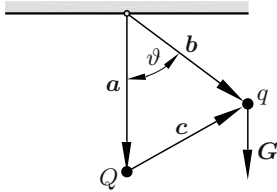


Abb. 1.7. Anordnung der beiden Punktladungen Q (fest) und q (beweglich)

Lösung: Im Gleichgewicht gilt für das Drehmoment $\mathbf{b} \times (\mathbf{K} + \mathbf{G}) = 0$ mit

$$\mathbf{K} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{c}}{c^3} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{c^3}$$

nach (1.1) und (1.2). Die Gewichtskraft zeigt in Richtung des Vektors $\mathbf{a}$ und kann daher in der Form

$$\mathbf{G} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{a}}{a^3}$$

geschrieben werden. Die Gleichgewichtsbedingung lautet jetzt

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{K} + \mathbf{G}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{b} \times \left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{c^3} + \frac{\mathbf{a}}{a^3} \right) = 0.$$

Nach Auflösen des Kreuzproduktes wird daraus

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{ab}{c^3} - \frac{ab}{a^3} \right) \sin \vartheta \mathbf{e}_z = 0$$

mit den Lösungen $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ und $c^2 = a^2$.

Mit dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta$ ergibt sich daraus die stabile Gleichgewichtslage $\vartheta = \arccos(b/2a)$.

E2 Superposition von Ladungen

Welche Kraft wirkt auf eine Punktladung Q am Ort $(x, y, z) = (0, a, 0)$, wenn auf der x -Achse **a)** zwei gleichnamige, homogene, kugelförmige Raumladungen der Dichte q_V oder **b)** zwei ungleichnamige, homogene, kugelförmige Raumladungen der Dichte $\pm q_V$ in den Punkten $x = \pm a$ angeordnet sind? Der Radius der Raumladungen sei r .

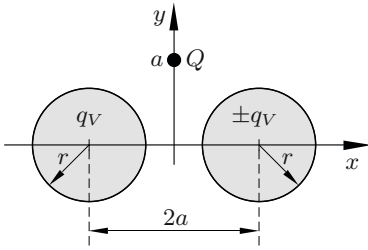


Abb. 1.8. Punktladung im elektrischen Feld zweier kugelförmiger Raumladungen

Lösung: Da das Feld der Raumladungen nur außerhalb benötigt wird, können diese wie Punktladungen betrachtet werden, die jeweils im Kugelmittelpunkt anzuordnen sind und folgenden Betrag aufweisen:

$$Q_k = q_V \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Im Fall a) wird sich aus Symmetriegründen nur eine y -Komponente der Kraft ausbilden $\mathbf{K}^{(a)} = K_y^{(a)} \mathbf{e}_y$ und im Fall b) eine x -Komponente $\mathbf{K}^{(b)} = K_x^{(b)} \mathbf{e}_x$. Mit dem Abstandsvektor $\mathbf{R} = -a \mathbf{e}_x + a \mathbf{e}_y$ vom Mittelpunkt der rechten Raumladung zur Punktladung wird dann nach (1.1) und (1.2)

$$K_y^{(a)} = 2 \frac{Q Q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{Q Q_k}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2} , \quad K_x^{(b)} = K_y^{(a)} .$$

E3 Unendlich lange, gerade Linienladungen

Zwei unendlich lange, gerade, homogene Linienladungen q_{L1} und q_{L2} stehen sich in allgemeiner Lage gegenüber. Ihre kürzeste Entfernung voneinander sei h und die beiden Ladungen seien um den Winkel $\alpha \neq 0$ aus einer parallelen Ausrichtung heraus verdreht, Abb. 1.9. Bestimme die Kraft zwischen den Ladungen.

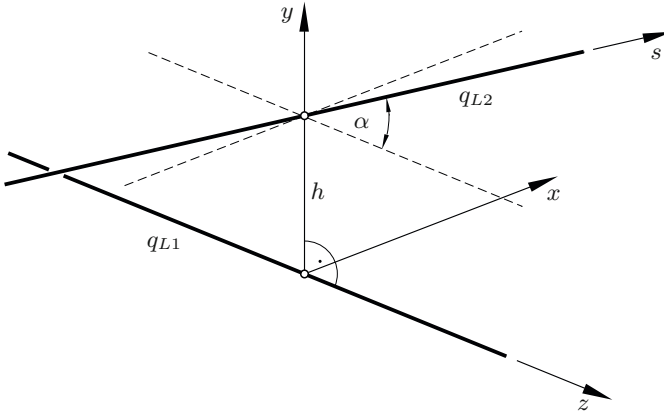


Abb. 1.9. Zur Bestimmung der Kraftwirkung zwischen zwei unendlich langen, geraden Linienladungen

Lösung: Die Linienladung q_{L1} erzeugt nach (1.4), (1.5c) das elektrische Feld

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \left(-\frac{q_{L1}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_0} \right) = \frac{q_{L1}}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^2} = \frac{q_{L1}}{2\pi\epsilon_0} \frac{x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y}{x^2 + y^2}.$$

Mit $x = s \sin \alpha$ und $y = h$ ergibt sich daraus für die aus Symmetriegründen allein benötigte y -Komponente der Feldstärke am Ort der Linienladung q_{L2}

$$E_{1y}(s) = \frac{q_{L1}}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{s^2 \sin^2 \alpha + h^2}.$$

Nach dem COULOMB'schen Gesetz (1.1) erhalten wir die Kraft auf die Linieneinladung q_{L2} , indem die Feldstärke am Ort s mit dem Ladungselement $q_{L2}ds$ multipliziert und über die gesamte Länge integriert wird, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{e}_y q_{L2} \int_{-\infty}^{\infty} E_{1y}(s) ds = \frac{q_{L1} q_{L2} h}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2 \sin^2 \alpha + h^2} = \\ &= \mathbf{e}_y \frac{q_{L1} q_{L2}}{\pi\epsilon_0 \sin \alpha} \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan \frac{s \sin \alpha}{h} \Big|_0^a = \frac{q_{L1} q_{L2}}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sin \alpha} \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

E4 Kreisförmige Flächenladung

Im kartesischen Koordinatensystem sei die Fläche $x^2 + y^2 \leq a^2$ der Ebene $z = 0$ homogen mit der Gesamtladung Q belegt, Abb. 1.10. Zu bestimmen ist die Kraft auf eine Punktladung Q , die im Abstand c von der Flächenladung auf der z -Achse angeordnet ist. Überprüfe das Ergebnis für $c \gg a$.

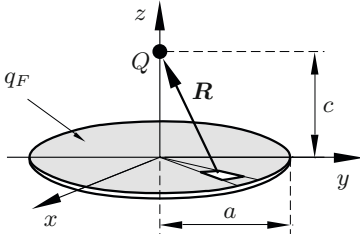


Abb. 1.10. Punktladung über einer kreisförmigen Flächenladung

Lösung: Die Anordnung ist rotationssymmetrisch, so dass die z -Achse naturgemäß eine Feldlinie darstellt und daher nach (1.1) nur eine Kraft in z -Richtung auftreten wird, $\mathbf{F} = \mathbf{e}_z F_z = \mathbf{e}_z Q E_z$. Der elementare Kraftbeitrag am Ort der Punktladung infolge der differentiellen Ladung $dq = q_F dF'$ beträgt nach (1.2)

$$dK_z = Q \frac{q_F dF'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{R}}{R^3} \quad , \quad q_F = \frac{Q}{\pi a^2}$$

mit $dF' = \varrho' d\varrho' d\varphi'$ und $\mathbf{R} = \mathbf{e}_z c - \mathbf{e}_{\varrho'} \varrho'$, so dass man für die resultierende Kraft den Ausdruck

$$\begin{aligned} K_z &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\varrho'=0}^a \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{c}{(c^2 + \varrho'^2)^{3/2}} \varrho' d\varrho' d\varphi' = \\ &= \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^a \frac{c}{(c^2 + \varrho'^2)^{3/2}} \varrho' d\varrho' = -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left. \frac{c}{\sqrt{c^2 + \varrho'^2}} \right|_0^a = \\ &= \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \right\} \end{aligned}$$

erhält, welcher wie zu erwarten stets positive Werte liefert.

Für große Entfernungen $c \gg a$ muss die Kraft dem Wert zustreben, der sich ergibt, wenn man die Flächenladung als Punktladung im Ursprung konzentriert annimmt. Entwickelt man also den reziproken Wurzelausdruck in eine TAYLOR-Reihe und bricht nach dem linearen Glied ab

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2} \quad \text{für} \quad \frac{a}{c} \ll 1 \quad ,$$

so erhält man schließlich $K_z \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}$ für $c \gg a$, q.e.d..

E5 Feldberechnung mit dem Gauß'schen Gesetz

In einer Kugel vom Radius a herrsche eine homogene Raumladungsdichte q_V mit Ausnahme einer hohlkugelförmigen Region vom Radius $b < a$, deren

Mittelpunkt vom Zentrum der Kugel den Abstand d aufweise, Abb. 1.11. Man bestimme die elektrische Feldstärke innerhalb der hohlkugelförmigen Region.

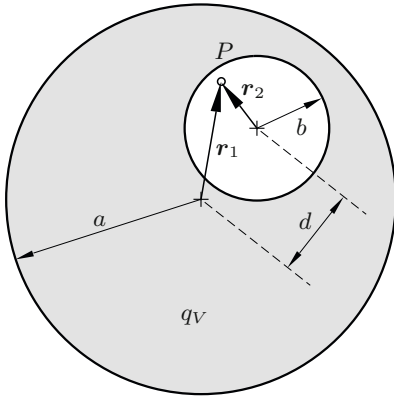


Abb. 1.11. Kugelförmiger Hohlraum in einer Raumladungskugel

Lösung: Nach dem Superpositionsprinzip kann man sich das elektrische Feld im kugelförmigen Hohlraum als die Überlagerung $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ vorstellen, wobei $\mathbf{E}_1$ das Feld einer homogenen Raumladungskugel mit dem Radius a und der Raumladungsdichte q_V ist, während $\mathbf{E}_2$ das Feld einer homogenen Raumladungskugel ist, die den Bereich des Hohlraumes ausfüllt und ebenfalls die Raumladungsdichte q_V aufweist. Die Anwendung des GAUSS'schen Gesetzes, d.h. des Oberflächenintegrals in (1.3), für eine Kugeloberfläche mit dem Radius r_1 liefert

$$\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_{r1}(r_1) r_1^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = q_V \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_1} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi .$$

Daraus folgt

$$4\pi\varepsilon_0 r_1^2 E_{r1}(r_1) = q_V \frac{4}{3} \pi r_1^3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_1 = \frac{q_V}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_1 .$$

Analog lautet das Feld der im Hohlraum angebrachten Raumladung

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_V}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_2$$

und es ergibt sich mit $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{d}$ das resultierende Feld im Hohlraum

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \frac{q_V}{3\varepsilon_0} \mathbf{d} .$$

Es ist also homogen und zeigt in Richtung der Verbindungsachse der beiden Kugelmittelpunkte.

E6 Halbkugelförmige Raumlading, Ladungsschwerpunkt

Gegeben ist eine halbkugelförmige, homogene Raumlading mit dem Radius a und der Gesamtladung Q , Abb. 1.12.

- Wo liegt der Ladungsschwerpunkt der Anordnung?
- Berechne die elektrische Feldstärke auf der Rotationsachse.
- Zeige, dass die Raumlading in großen Entfernungen $z \gg a$ durch eine Punktladung im Ladungsschwerpunkt ersetzt werden darf.

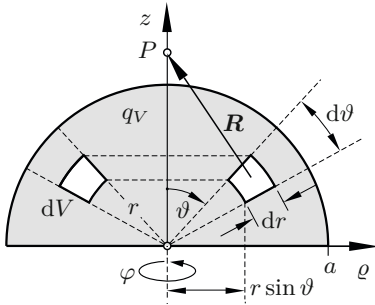


Abb. 1.12. Schnitt durch eine halbkugelförmige, homogene Raumlading. Dargestellt ist außerdem das ringförmige Volumenelement zur Berechnung der elektrischen Feldstärke.

Lösung:

- Aufgrund der rotationssymmetrischen Ladungsanordnung kann der Schwerpunkt nur auf der Rotationsachse liegen. Seine z -Koordinate wird dabei (ebenso wie der Masseschwerpunkt eines Körpers) in der Form

$$z_S = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_S = \frac{1}{V} \int_V (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}) dV = \frac{2\pi}{V} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta$$

ermittelt. Die Integration über r ergibt $a^4/4$ und mit der Substitution $u = \sin \vartheta$, $du/d\vartheta = \cos \vartheta$ erhält man

$$\int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^1 u du = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad z_S = \frac{3}{8} a .$$

- Zur Bestimmung des Achsenfeldes wird ein ringförmiges Volumenelement verwendet, Abb. 1.12. Das Feld im betrachteten Aufpunkt lautet dann

$$E_z(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{V} \int_V \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{R}}{R^3} dV \quad , \quad \begin{aligned} dV &= 2\pi r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta \\ V &= \frac{2}{3}\pi a^3 . \end{aligned}$$

Mit den geometrischen Zusammenhängen $z' = r \cos \vartheta$, $\mathbf{R} = -\varrho \mathbf{e}_\varrho + (z - z') \mathbf{e}_z$ und $R = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \vartheta}$ wird das Integral zunächst auf die Form

$$\frac{E_z(P)}{E_0} = \frac{3}{a} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{(z - r \cos \vartheta) \sin \vartheta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \vartheta)^{3/2}} r^2 dr d\vartheta \quad , \quad E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} .$$

gebracht. Substituiert man $u = \cos \vartheta$, so wird daraus

$$\frac{E_z(P)}{E_0} = \frac{3}{a} \int_0^a \int_0^1 \left[\frac{zr^2}{R^3} - \frac{r^3 u}{R^3} \right] du dr .$$

Nach Durchführung der Integration³ über u

$$\frac{E_z(P)}{E_0} = \frac{3}{a} \left\{ \int_0^a r \left[\frac{1}{R} \right]_{u=0}^1 dr - \int_0^a \frac{r}{2z^2} \left[R + \frac{r^2 + z^2}{R} \right]_{u=0}^1 dr \right\} .$$

erhalten wir mit $R(u=0) = \sqrt{r^2 + z^2}$ und $R(u=1) = |r - z|$

$$\frac{E_z(P)}{E_0} = \frac{3}{az^2} \int_0^a \left\{ \frac{r^2(z-r)}{|z-r|} + \frac{r^3}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right\} dr .$$

Die Integration des ersten Summanden erfordert eine Fallunterscheidung

$$\int_0^a \frac{r^2(z-r)}{|z-r|} dr = \begin{cases} \int_0^z r^2 dr - \int_z^a r^2 dr & , \quad 0 \leq z \leq a \\ + \int_0^a r^2 dr & , \quad z \geq a \\ - \int_0^a r^2 dr & , \quad z \leq 0 , \end{cases}$$

während die Integration des zweiten Summanden auf das Ergebnis

$$\int \frac{r^3}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr = \frac{1}{3} \sqrt{r^2 + z^2}^3 - z^2 \sqrt{r^2 + z^2}$$

führt⁴. Schlussendlich erhalten wir damit für das elektrische Feld auf der gesamten Rotationsachse die Darstellung

$$\frac{E_z(z)}{E_0} = \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \left(\frac{a^2}{z^2} - 2 \right) + \begin{cases} 4 \frac{z}{a} - \frac{a^2}{z^2} & , \quad 0 \leq z \leq a \\ 2 \frac{z}{a} + \frac{a^2}{z^2} & , \quad z \geq a \\ -2 \frac{z}{a} - \frac{a^2}{z^2} & , \quad z \leq 0 . \end{cases} \quad (1.20)$$

³ siehe z.B. [Bronstein] Integral Nr. 136

⁴ siehe z.B. [Bronstein] Integral Nr. 195

c) Die in (1.20) auftretende Wurzel wird nach TAYLOR in eine Potenzreihe für a/z entwickelt und nach dem 3. Glied abgebrochen

$$\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} = \left| \frac{z}{a} \right| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} - \frac{1}{8} \frac{a^4}{z^4} + \dots \right).$$

Nach Einsetzen und Berücksichtigung von Gliedern bis zur Ordnung a^3/z^3 erhält man die Approximation

$$\frac{E_z(z \gg a)}{E_0} \approx \frac{a^2}{z^2} \left(1 + \frac{6}{8} \frac{a}{z} \right) \approx \frac{a^2}{z^2} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{a}{z} \right)^{-2} = \frac{a^2}{(z - z_S)^2}, \quad (1.21)$$

die dem elektrischen Feld einer im Ladungsschwerpunkt z_S angebrachten Punktladung entspricht.

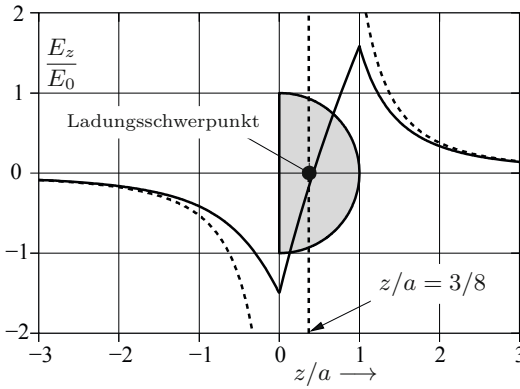


Abb. 1.13. Elektrische Feldstärke auf der z -Achse. Die durchgezogene Kurve gibt den exakten Verlauf wieder, während die gestrichelte Kurve die Approximation durch eine im Ladungsschwerpunkt angebrachte Punktladung zeigt.

Abb. 1.13 zeigt die Näherung (1.21) im Vergleich zur exakten Lösung (1.20).

E7 Lineare Dipolverteilung

Berechne die elektrische Feldstärke einer auf der z -Achse im Bereich $|z| \leq a$ homogen mit der Dichte $\mathbf{p}_L = p_L \mathbf{e}_z$ verteilten Dipolanordnung, Abb. 1.14. Wie kann man das Ergebnis deuten?

Lösung: Ein Element der Dipolverteilung hat das differentielle Moment $d\mathbf{p}_e = p_L dz' \mathbf{e}_z$ und das Potential im Aufpunkt P ist somit nach (1.5b)

$$\phi = \frac{p_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{R}}{R^3} dz'.$$

Mit $\mathbf{R} = (z - z') \mathbf{e}_z + \varrho \mathbf{e}_\varrho$ und $R = \sqrt{(z - z')^2 + \varrho^2}$ wird daraus

$$\phi = \frac{p_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{z - z'}{[(z - z')^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}} dz'$$

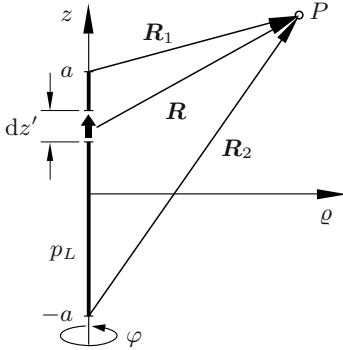


Abb. 1.14. Lineare Dipolverteilung auf der z -Achse und Festlegung eines Elementardipols der Länge dz'

oder nach Substitution $u = (z - z')^2 + \varrho^2$, $du = -2(z - z')dz'$

$$\phi = -\frac{p_L}{8\pi\epsilon_0} \int_{(z+a)^2+\varrho^2}^{(z-a)^2+\varrho^2} u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{p_L}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_{(z+a)^2+\varrho^2}^{(z-a)^2+\varrho^2}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{p_L}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad , \quad R_{1,2} = \sqrt{(z \mp a)^2 + \varrho^2} \quad .$$

Daraus ergibt sich das elektrische Feld mit $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ zu

$$\mathbf{E} = \frac{p_L}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right) \quad .$$

Dies ist aber nichts anderes als das elektrische Feld zweier Punktladungen $\pm Q = \pm p_L$ an den Enden der Dipolverteilung!

E8 Elektrischer Liniendipol

Bestimme das Potential eines sogenannten *Liniendipols*, bestehend aus zwei unendlich langen, homogenen Linienladungen $\pm q_L$, die sich im sehr kleinen Abstand δs parallel gegenüberstehen, Abb. 1.15. Das Produkt $q_L \cdot \delta s$ mit $q_L \rightarrow \infty$, $\delta s \rightarrow 0$ definiert dabei das Dipolmoment p_L des Liniendipols.

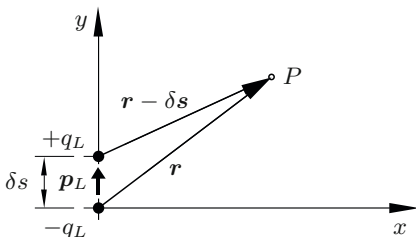


Abb. 1.15. Zwei parallel zur z -Achse verlaufende Linienladungen im kleinen Abstand δs zueinander bilden einen Liniendipol mit dem Dipolmoment

$$p_L = q_L \cdot \delta s \quad .$$

Lösung: Das Potential der Linienladung $-q_L$ ist nach (1.5c)

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_0}.$$

Für das Potential der Linienladung $+q_L$ kann man bei kleinem Abstand δs schreiben

$$\phi_2(\mathbf{r}) = -\phi_1(\mathbf{r} - \delta \mathbf{s}) \approx -[\phi_1(\mathbf{r}) - \delta \mathbf{s} \cdot \nabla \phi_1].$$

Daraus folgt im Grenzfall $\delta s \rightarrow 0$, $q_L \rightarrow \infty$

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) + \phi_2(\mathbf{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \delta \mathbf{s} \cdot \nabla \left\{ \ln \frac{r}{R_0} \right\} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_L \cdot \mathbf{r}}{r^2}. \quad (1.22)$$

Man beachte, dass (1.22) nur vom Ortsvektor abhängt und damit koordinatenunabhängig ist.

E9 Dipolverteilung auf einer Fläche (Doppelschicht)

In der Höhe h über der Erdoberfläche befinde sich eine langgestreckte Gewitterwolke der Breite $2a$. Als Modell nehme man am Ort der Wolke Dipole an, die gemäß Abb. 1.16b mit der Flächendichte $\mathbf{p}_F$ homogen verteilt sind. Berechne das elektrische Feld auf der Erdoberfläche für den Fall, dass die Länge der Gewitterwolke sehr viel größer als die Breite $2a$ ist (ebenes Problem).

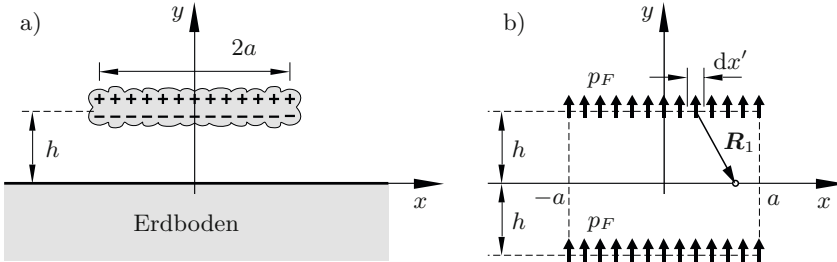


Abb. 1.16. (a) Langgestreckte Gewitterwolke über dem Erdboden. (b) Homogene Doppelschichten als Ersatzanordnung

Lösung: Der Einfluss des Erdbodens wird durch Spiegelung der Doppelschicht an der Ebene $y = 0$ erfasst, wodurch diese zur Äquipotentialfläche $\phi = 0$ wird, Abb. 1.16b. Der differentielle Potentialbeitrag eines infinitesimalen Liniendipols des Momentes $dp_L = p_F dx'$, der sich am Ort $x = x'$ und $y = h$ befindet, ist dann nach (1.22) mit $\mathbf{R} = (y - h) \mathbf{e}_y + (x - x') \mathbf{e}_x$

$$d\phi(x, y) = \frac{dp_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{R}}{R^2} = \frac{dp_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{y - h}{(x - x')^2 + (h - y)^2}.$$

Das elektrische Feld besitzt auf der Erdoberfläche mit $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$, siehe Abb. 1.16b, nur eine y -Komponente. Sie ergibt sich durch Differentiation des Potentials nach y

$$\begin{aligned} dE_y &= -\frac{dp_L}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(x-x')^2 + (h-y)^2} - 2 \frac{(h-y)^2}{[(x-x')^2 + (h-y)^2]^2} \right\} = \\ &= -\frac{dp_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x-x')^2 - (h-y)^2}{[(x-x')^2 + (h-y)^2]^2}. \end{aligned}$$

Das resultierende Feld der oberen Doppelschicht erhält man durch Integration und die gespiegelte Doppelschicht liefert aus Symmetriegründen denselben Feldbeitrag und damit einen Faktor 2:

$$\begin{aligned} E_y(x, y=0) &= -\frac{p_F}{\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{(x-x')^2 - h^2}{[(x-x')^2 + h^2]^2} dx' = -\frac{p_F}{\pi\epsilon_0} \frac{x-x'}{(x-x')^2 + h^2} \Big|_{-a}^a \\ \rightarrow E_y(x, y=0) &= \frac{p_F}{\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x+a}{(x+a)^2 + h^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + h^2} \right\}. \end{aligned}$$

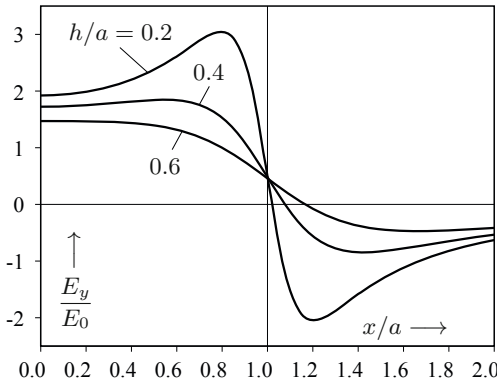


Abb. 1.17. Elektrische Feldstärke auf dem Erdboden. Aus Symmetriegründen wurde nur der Verlauf im Bereich $x > 0$ dargestellt.

Abb. 1.17 zeigt die Feldstärke in der Ebene $y = 0$, während in Abb. 1.18 die Feldlinien dargestellt wurden. Dort gibt es zwei *singuläre Punkte* S auf der Erdoberfläche, in denen die Feldstärke verschwindet und die Feldlinien unter einem Winkel von 45° einmünden. Für die Berechnung der Feldlinien kann man übrigens die Gleichung (3.45) in Aufg. M12 mit $k = 1$ verwenden. Denn die elektrischen Feldlinien einer elektrischen Doppelschicht entsprechen vollkommen den magnetischen Feldlinien einer magnetischen Doppelschicht.

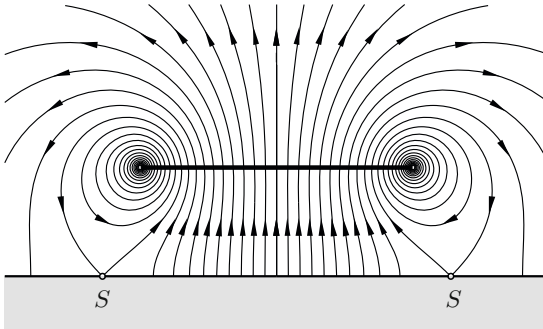


Abb. 1.18. Verlauf der elektrischen Feldlinien

E10 Feldreduzierende Wirkung eines Erdseils

Freileitungen werden im besonderen Maße den hohen elektrischen Feldern vorbeiziehender Gewitter ausgesetzt. Sie müssen also vor Überspannungen geschützt werden. Dies wird erreicht, indem an den Mastspitzen ein allseits gut geerdeter Draht, das sogenannte *Erdseil*, aufgehängt wird.

a) Wie lässt sich qualitativ die feldreduzierende Wirkung eines geerdeten Leiters erklären?

b) Berechne anhand eines idealisierten Modells den Feldverlauf zwischen Gewitterwolke und Erdboden. Das elektrische Feld der Wolke wird dabei als homogen angenommen und das Erdseil mit dem Radius a durch eine unendlich lange, gerade Linienladung im Mittelpunkt des Leiters approximiert, Abb. 1.19.

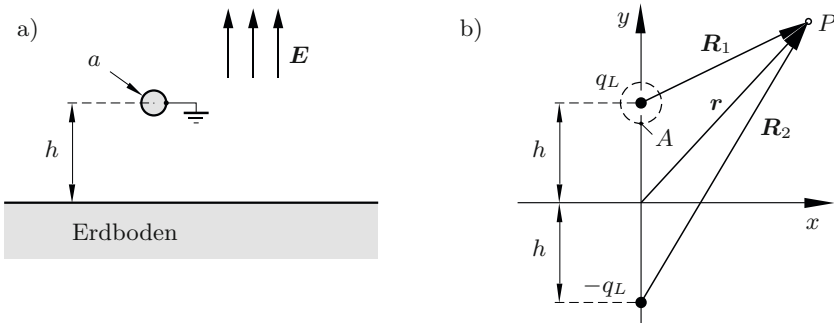


Abb. 1.19. (a) Geerdeter Draht im homogenen Feld über einem leitenden Halbraum. (b) Spiegelung der Erdseilladung am leitenden Halbraum

Lösung:

a) Wir betrachten zunächst einen *isolierten* Leiter zwischen Wolke und Erde Abb. 1.20a.

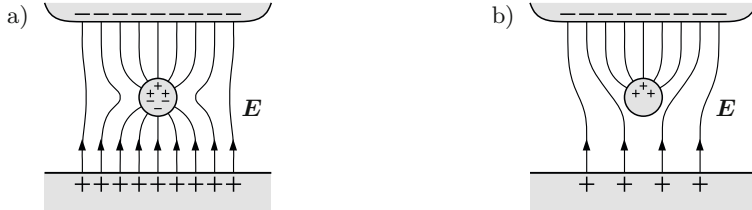


Abb. 1.20. (a) Isolierter Leiter zwischen Wolke und Erdboden. (b) Geerdeter Leiter zwischen Wolke und Erdboden

Der Leiter konzentriert das Feld in seiner Umgebung und seine Oberflächenladungen werden sich wie im Bild angedeutet polarisieren. Erden wir nun den Leiter, Abb. 1.20b, so fließen negative Ladungen zur Erde ab und es entsteht im unteren Bereich eine Zone verminderter elektrischer Feldstärke.

b) Zuerst wird die Erdseilladung q_L an der Erdoberfläche gespiegelt, so dass die Ersatzanordnung nach Abb. 1.19b entsteht, bei der das Potential, so wie es sein muss, für $y = 0$ verschwindet. Das resultierende Potential im Aufpunkt P lautet

$$\phi(x, y) = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2} - E_0 y \quad \text{mit} \quad R_{1,2} = \sqrt{x^2 + (y \mp h)^2}.$$

Soll das Potential im Punkt A der Oberfläche des Erdseils, Abb. 1.19b, verschwinden, so erhält man daraus die bisher nicht bekannte Erdseilladung

$$0 = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{2h-a} - E_0(h-a) \quad \rightarrow \quad q_L = 2\pi\epsilon_0 E_0 \frac{h-a}{\ln(2h/a-1)}$$

und auf der y -Achse stellt sich das elektrische Feld

$$E_y(0, y) = -\frac{\partial\phi(0, y)}{\partial y} = E_0 \left\{ \frac{h-a}{\ln(2h/a-1)} \left[\frac{1}{y-h} - \frac{1}{y+h} \right] + 1 \right\}$$

$$\rightarrow \frac{E_y(0, y)}{E_0} = \frac{2}{\ln(2h/a-1)} \frac{h(h-a)}{y^2 - h^2} + 1$$

ein. In Abb. 1.21 sieht man den Verlauf des Potentials und der elektrischen Feldstärke auf der y -Achse der Anordnung. Deutlich ist die Feldüberhöhung am Ort des Erdseils zu erkennen. Das bedeutet, dass ein Blitz ins Erdseil und *nicht* in die darunter liegenden Leitungen einschlagen wird.

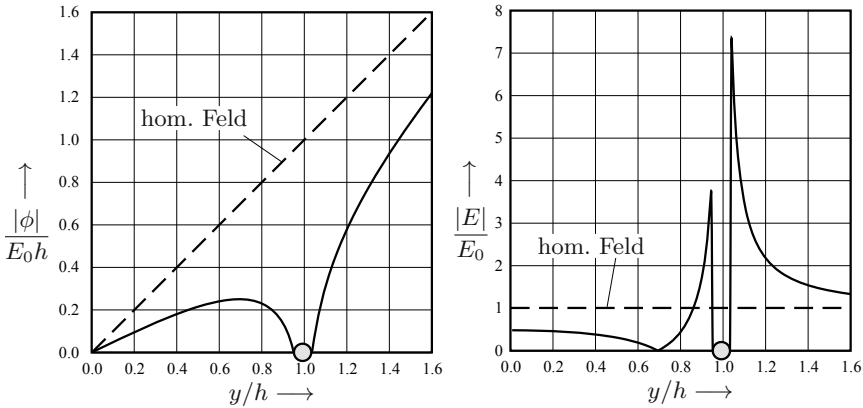


Abb. 1.21. (a) Potential und (b) elektrische Feldstärke entlang der y -Achse bei einem Abmessungsverhältnis $a/h = 0.05$

Genaugenommen wird das Potential nur im Punkt A der Leiteroberfläche verschwinden. Die Äquipotentialfläche $\phi = 0$ um die Linienladung q_L herum hat daher eine etwas andere Form als die Leiteroberfläche. Diese Abweichung fällt aber nur bei dickeren Leitern ins Gewicht, siehe Abb. 1.22.

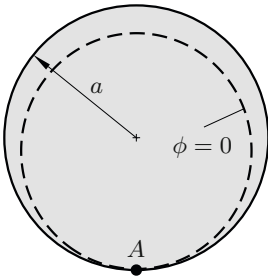


Abb. 1.22. Vergrößerte Darstellung des kreisförmigen Querschnittes des Erdseils und Abweichung der Äquipotentialfläche $\phi = 0$ von der idealen Kreisform für $a/h = 0.05$

E11 Äquipotentialflächen

Im ansonsten homogenen Gesamttraum befinden sich zwei unendlich lange, homogene Linienladungen $\pm q_L$ im Abstand $2a$ parallel zueinander, Abb. 1.23. Zeige, dass die Äquipotentialflächen der Anordnung kreiszylindrische Flächen sind und gib deren Radien und Mittelpunktslagen an.

Lösung: Das Gesamtpotential der Anordnung lautet nach (1.5c)

$$\phi(x, y) = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2 + a^2 + 2ax}{x^2 + y^2 + a^2 - 2ax}.$$

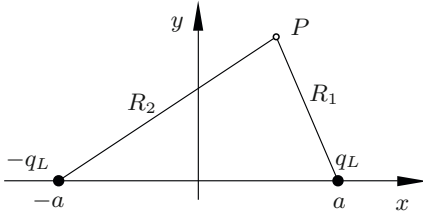


Abb. 1.23. Zur Berechnung des Potentials zweier unendlich langer Linienladungen

Mit der Abkürzung

$$\lambda := \exp\left(\frac{\phi(x, y)}{\phi_0}\right) \quad , \quad \phi_0 = \frac{qL}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.23)$$

wird daraus die Gleichung der Äquipotentialflächen

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + a^2 + 2ax}{x^2 + y^2 + a^2 - 2ax} = \text{const.}$$

und schließlich nach Umformen

$$y^2 + x^2 - 2ax \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} + \underbrace{a^2 \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right)^2}_{\text{quadratische Ergänzung}} + a^2 = 0$$

$$\rightarrow y^2 + (x - x_m)^2 = R^2 \quad (1.24)$$

Die gesuchten Äquipotentialflächen sind damit Kreiszylinder der Radien und Mittelpunkte

$$R = \frac{2a\sqrt{\lambda}}{|\lambda - 1|} \quad , \quad x_m = a \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad \text{mit} \quad R^2 = x_m^2 - a^2 \quad (1.25)$$

Es handelt sich hier um sogenannte *Apollonische Kreise*.

E12 Kapazität zwischen zylindrischen Leitern

Berechne unter Verwendung des Ergebnisses in Aufgabe E11 den Kapazitätsbelag einer Doppelleitung bestehend aus kreiszylindrischen Leitern der Radien R_1 und R_2 im Abstand $h > R_1 + R_2$, Abb. 1.24.

Lösung: In Aufg. E11 wurde festgestellt, dass zwei parallele, unendlich lange Linienladungen $\pm q_L$ kreiszylindrische Äquipotentialflächen erzeugen. Auch die Oberflächen leitender Körper stellen bekanntlich Äquipotentialflächen dar. Das Feld zweier leitender Kreiszylinder mit den Potentialen ϕ_1 und ϕ_2 lässt sich also ersatzweise mit Hilfe zweier Linienladungen beschreiben, die gemäß Abb. 1.24 auf der x -Achse angeordnet sind und auf den jeweiligen Oberflächen ebenfalls die Potentiale ϕ_1 und ϕ_2 hervorrufen. Die Abb. 1.25

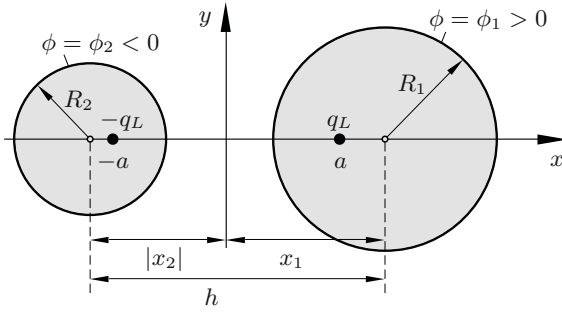


Abb. 1.24. Zwei kreiszylindrische Leiter und deren Ersatzlinienladungen

illustriert den eben dargestellten Sachverhalt noch einmal. Gezeigt werden dort die kreisförmigen Äquipotentialflächen nach (1.24), (1.25), wobei zwei davon durch leitende Zylinder ersetzt wurden.

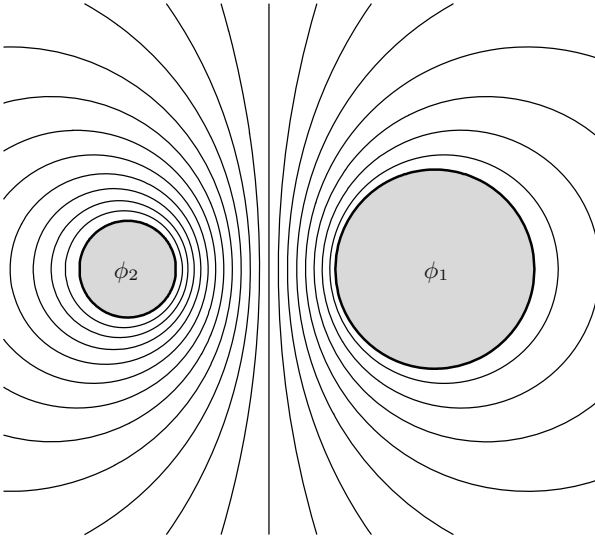


Abb. 1.25. Äquipotentiallinien zweier kreiszylindrischer Leiter mit den Potentialen ϕ_1 und ϕ_2 . Alle Linien sind Kreise.

Die Kapazität pro Längeneinheit lautet

$$C' = \frac{q_L}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{q_L/\phi_0}{\phi_1/\phi_0 - \phi_2/\phi_0} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}, \quad (1.26)$$

wobei die Abkürzung (1.23) verwendet wurde. Hinsichtlich der Vorzeichen gilt dabei

$$\begin{aligned} \phi_1 > 0 & \rightarrow \lambda_1 > 1 \rightarrow x_1 > 0 \\ \phi_2 < 0 & \rightarrow \lambda_2 < 1 \rightarrow x_2 < 0. \end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung sind jedoch nicht die Größen x_1 und x_2 vorgegeben, sondern nur die Leiterabmessungen h , R_1 und R_2 . Aus (1.25) ergeben sich zunächst die Zusammenhänge

$$\left. \begin{aligned} R_1^2 &= x_1^2 - a^2 \\ R_2^2 &= x_2^2 - a^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_1^2 - x_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

$$x_1 - x_2 = h \rightarrow x_1^2 = x_2^2 + h^2 + 2hx_2,$$

nach deren Subtraktion x_1 und x_2 durch h , R_1 und R_2 ausgedrückt werden können

$$x_2 = -\frac{1}{2} \left(h + \frac{R_2^2 - R_1^2}{h} \right), \quad x_1 = h + x_2. \quad (1.27)$$

Mit Hilfe von (1.25) lassen sich schließlich noch die zur Berechnung der Kapazität (1.26) benötigten Werte λ_1 und λ_2 angeben

$$\lambda_{1,2} = \frac{x_{1,2} + a}{x_{1,2} - a}, \quad a = \sqrt{x_{1,2}^2 - R_{1,2}^2},$$

womit das Problem gelöst wäre.

E13* Polarisierte Platte

- a) Eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke $2d$ habe die konstante Polarisierung $\mathbf{P}_0$. Wie groß ist die elektrische Feldstärke und die dielektrische Verschiebung innerhalb und außerhalb der Platte?
- b) Dieselbe Platte habe nun eine endliche Breite $2a$, sei aber immer noch unendlich lang, Abb. 1.26. Bestimme das resultierende Feld im gesamten Raum.
- c) Gib die Gleichung der elektrischen Feldlinien sowie der dielektrischen Verschiebungslinien an und diskutiere die jeweiligen Verläufe.

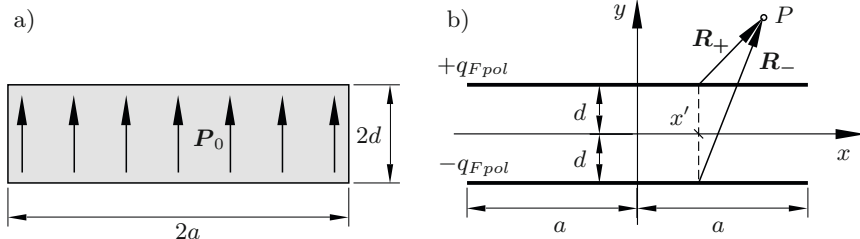


Abb. 1.26. (a) Polarisierte Platte. (b) Ersatz der polarisierten Platte durch Polarisationsflächenladungen $\pm q_{Fpol}$

Lösung:

a) Die polarisierte Platte kann nach (1.8) durch zwei Polarisationsflächenladungen $\pm q_{Fpol} = \pm P_0$ auf der Ober- bzw. Unterseite der Platte ersetzt werden. Da diese Flächenladungen unendlich ausgedehnt sind, heben sich ihre Beiträge zum Feld außerhalb der Platte gerade auf

$$\mathbf{E}_a = 0 \quad , \quad \mathbf{D}_a = \varepsilon_0 \mathbf{E}_a = 0 \quad .$$

Das Feld innerhalb der Platte kann man sich mit Hilfe von (1.7) und der Stetigkeitsbedingung (1.12) herleiten

$$\mathbf{D}_i = \varepsilon_0 \mathbf{E}_i + \mathbf{P}_0 = \mathbf{D}_a = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_i = -\mathbf{P}_0/\varepsilon_0 \quad .$$

b) Die Platte wird gemäß Abb. 1.26b durch ihre Polarisationsflächenladungen $\pm q_{Fpol}$ ersetzt. Da die Flächenladungen in z -Richtung unendlich ausgedehnt sind, entspricht ein herausgegriffenes Element der Breite dx' einer Linienladung $dq_L = P_0 dx'$. Das Potential dieser Linienladung sowie der entsprechenden negativen Linienladung auf der gegenüberliegenden Seite ist nach (1.5c) und Abb. 1.26b

$$d\phi = -\frac{P_0 dx'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_+}{R_-} \quad , \quad R_{\pm} = \sqrt{(x-x')^2 + (y \mp d)^2}$$

und damit das resultierende Potential der gesamten Platte

$$\phi(x, y) = \frac{E_0}{2} \int_{-a}^{+a} \ln \frac{(x-x')^2 + (y+d)^2}{(x-x')^2 + (y-d)^2} dx' \quad \text{mit} \quad E_0 = \frac{P_0}{2\pi\varepsilon_0} \quad .$$

Daraus folgen die Feldstärkekomponenten⁵ $E_x = -\partial\phi/\partial x$ und $E_y = -\partial\phi/\partial y$

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{E_0} &= \int_{-a}^{+a} \left\{ \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-d)^2} - \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y+d)^2} \right\} dx' = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x-a)^2 + (y+d)^2}{(x-a)^2 + (y-d)^2} \cdot \frac{(x+a)^2 + (y-d)^2}{(x+a)^2 + (y+d)^2} \right) \\ \frac{E_y}{E_0} &= \int_{-a}^{+a} \left\{ \frac{y-d}{(x-x')^2 + (y-d)^2} - \frac{y+d}{(x-x')^2 + (y+d)^2} \right\} dx' = \\ &= \arctan \frac{x-a}{y+d} - \arctan \frac{x-a}{y-d} - \arctan \frac{x+a}{y+d} + \arctan \frac{x+a}{y-d} \quad . \end{aligned}$$

c) Die Feldlinien der dielektrischen Verschiebung (D-Linien) lassen sich mit Hilfe des elektrischen Flusses berechnen. In Abb. 1.27a sind zwei benachbarte Feldlinien eines zweidimensionalen elektrischen Feldes angedeutet.

⁵ siehe z.B. [Bronstein] Integral Nr. 57 und 61

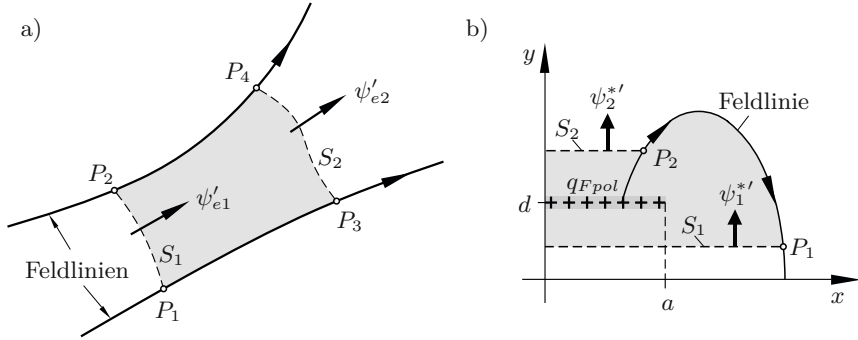


Abb. 1.27. (a) Zur Berechnung der D-Linien ebener, ladungsfreier, elektrischer Felder. (b) Berücksichtigung der Polarisationsladungen bei den E-Linien

Der Fluss pro Längeneinheit ψ'_{e1} durch die Verbindungslinie S_1 zwischen den Punkten P_1 und P_2 ist nach (1.15)

$$\psi'_{e1} = \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

wobei der Einheitsvektor $\mathbf{n}$ senkrecht auf S_1 steht. Ist das von den beiden Feldlinien sowie S_1 und S_2 begrenzte Gebiet wie in der vorliegenden Aufgabe ladungsfrei, so ist in Abb. 1.27 $\psi'_{e2} = \psi'_{e1}$ und folglich gilt allgemein

$$\psi'_e = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{const.}.$$

Die Berechnung der Feldlinien könnte dann so erfolgen, dass man für S eine Linie wählt, die von einem festen Punkt P_0 ausgeht und in einem variablen Punkt $P(x, y)$ endet. Bei der polarisierten Platte wissen wir, dass aus Symmetriegründen die y -Achse eine Feldlinie darstellt. Es ist daher sinnvoll, eine gerade Linie S parallel zur x -Achse von einem Punkt der zu berechnenden Feldlinie bis hin zur y -Achse zu wählen, so dass bei der Flussberechnung nur über x zu integrieren ist. Beschränken wir uns dabei, wieder aus Symmetriegründen, auf den ersten Quadranten des Rechengebietes, so erhalten wir die Gleichung der D-Linien in der Form

$$\varepsilon_0 \int_0^x E_y \, dx + \begin{cases} P_0 x & \text{für } y \leq d, \, x \leq a \\ P_0 a & \text{für } y \leq d, \, x > a \\ 0 & \text{für } y > d \end{cases} = \text{const.} \quad (1.28)$$

Die Feldlinien der elektrischen Feldstärke (E-Linien) können in ähnlicher Weise ermittelt werden. Jedoch ist hier zu bedenken, dass die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ im Gegensatz zur elektrischen Flussdichte $\mathbf{D}$ nicht quellenfrei ist. Wir betrachten dazu die Abb. 1.27b. Die „Flüsse“⁶

⁶ Für die E-Linien wird eine von (1.15) abweichende Flussdefinition verwendet und durch einen Stern gekennzeichnet.

$$\psi_1^{*'} = \varepsilon_0 \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad , \quad \psi_2^{*'} = \varepsilon_0 \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

unterscheiden sich in diesem Fall, weil in dem markierten Gebiet, das durch S_1 , S_2 , die y -Achse und die Feldlinie begrenzt wird, die Polarisationsladung umschlossen wird. Folglich lautet die korrekte Gleichung der E-Linien

$$\varepsilon_0 \int_0^x E_y \, dx + \begin{cases} P_0 a & \text{für } y \leq d \\ 0 & \text{für } y > d \end{cases} = \text{const.} \quad (1.29)$$

Wie man sieht, wurde für $y \leq d$ der konstante Term $P_0 a$ hinzugefügt. Er sorgt dafür, dass $\psi_1^{*'}$ und $\psi_2^{*'}$ für die auf derselben Feldlinie liegenden Punkte P_1 und P_2 identische Werte annehmen.

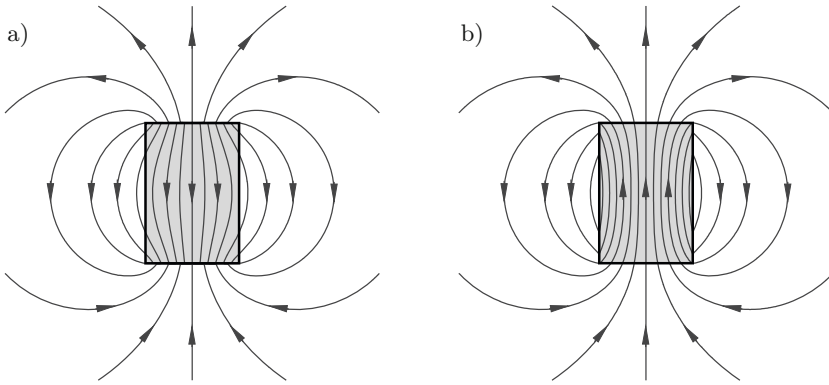


Abb. 1.28. (a) E-Linien und (b) D-Linien einer homogen polarisierten Platte

Das Integral in (1.28) bzw. (1.29) kann mit Hilfe von [Bronstein] Integral Nr. 498 gelöst werden, auf das Einsetzen wird an dieser Stelle aber verzichtet.

Die Feldbilder Abb. 1.28a+b unterscheiden sich nur im Innenraum. Die D-Linien sind aufgrund der Abwesenheit freier Ladungen stets geschlossen. Die E-Linien starten auf den positiven und enden auf den negativen Polarisationsladungen. Man erkennt deutlich, dass die elektrischen Feldlinien im Gegensatz zu den Verschiebungslinien ohne Knick durch die Seitenflächen der Platte verlaufen. Auf der oberen bzw. unteren Fläche verhält es sich genau umgekehrt.

E14 Stetigkeitsbedingungen am dielektrischen Zylinder

Ein in z -Richtung unendlich ausgedehnter, dielektrischer Kreiszylinder mit Radius a wird einem ebenen, d.h. nur von den Polarkoordinaten ϱ und φ abhängigen, elektrischen Feld mit dem Potential $\phi_e = \phi_e(\varrho, \varphi)$ ausgesetzt. Für das Potential innerhalb bzw. außerhalb des Zylinders lässt sich dann schreiben

$$\phi(\varrho, \varphi) = \begin{cases} \phi_e(\varrho, \varphi) - k\phi_e(a^2/\varrho, \varphi) & \text{für } \varrho > a \\ (1-k)\phi_e(\varrho, \varphi) & \text{für } \varrho < a. \end{cases} \quad (1.30)$$

Wie muss die Konstante k gewählt werden, damit die Stetigkeitsbedingungen auf der Zylinderoberfläche exakt erfüllt werden?

Lösung: Auf der Oberfläche des Zylinders müssen die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke E_φ sowie die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung D_ϱ stetig übergehen

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right|_{\varrho=a+0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right|_{\varrho=a-0}, \quad \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=a+0} = \varepsilon \left. \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=a-0}. \quad (1.31)$$

Wie man durch Einsetzen von $\varrho = a$ in (1.30) feststellt, verhält sich das Potential $\phi(\varrho, \varphi)$ beim Durchgang durch die Zylinderoberfläche stetig, und da dies für jeden Winkel φ gilt, folgt daraus sofort die Stetigkeit der Tangentialableitung. Aus der Stetigkeit von D_ϱ wird nach Einsetzen von (1.30) in (1.31) und Anwenden der Kettenregel

$$\begin{aligned} \varepsilon(1-k) \left. \frac{\partial \phi_e(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=a} &= \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial \phi_e(\varrho, \varphi)}{\partial \varrho} - k \left(-\frac{a^2}{\varrho^2} \right) \frac{\partial \phi_e(a^2/\varrho, \varphi)}{\partial (a^2/\varrho)} \right\}_{\varrho=a} \\ \rightarrow \quad \varepsilon(1-k) &= \varepsilon_0(1+k) \quad \rightarrow \quad k = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}. \end{aligned}$$

E15 Spiegelung am dielektrischen Zylinder

Berechne die Kraft auf den Zylinder in Aufg. E14, wenn sich im Mittelpunkt Abstand $c > a$ eine unendlich lange Linienladung q_L parallel vor dem Zylinder befindet, Abb. 1.29.

Hinweis: Bestimme zunächst aus dem allgemeinen Potentialansatz äquivalente Spiegelladungen im Innern des Zylinders.

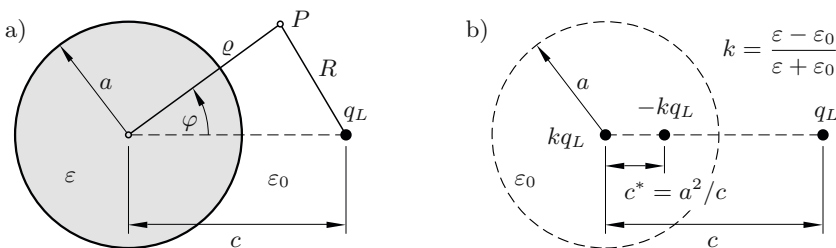


Abb. 1.29. (a) Linienladung vor einem dielektrischen Zylinder. (b) Ersatzanordnung für das Potential im Bereich $\varrho > a$

Lösung: Die Linienladung vor dem Zylinder erzeugt nach (1.5c) mit der willkürlichen Festlegung $R_0 = c$ das erregende Potential

$$\phi_e(\varrho, \varphi) = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{c} = -\frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\varrho^2 + c^2 - 2\varrho c \cos \varphi}{c^2}. \quad (1.32)$$

Nach Ersetzen von ϱ durch a^2/ϱ wird daraus

$$\phi_e\left(\frac{a^2}{\varrho}, \varphi\right) = -\frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{a^4}{c^2} \frac{1}{\varrho^2} + 1 - 2 \frac{a^2}{c} \frac{1}{\varrho} \cos \varphi \right)$$

oder etwas umgeformt und mit $c^* = a^2/c$

$$\phi_e\left(\frac{a^2}{\varrho}, \varphi\right) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\varrho}{c} - \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\varrho^2 + c^{*2} - 2\varrho c^* \cos \varphi}{c^2}. \quad (1.33)$$

Der erste Term in (1.33) beschreibt nach (1.5c) das Potential einer Linienladung $-q_L$ auf der Zylinderachse. Vergleicht man den zweiten Term mit (1.32), so erweist sich dieser als das Potential einer Linienladung $+q_L$ in der Entfernung $c^* = a^2/c$ von der Zylinderachse. Es ergibt sich also aus (1.30) die Ersatzanordnung nach Abb. 1.29b.

Die Kraft pro Längeneinheit auf die felderregende Ladung q_L ist dann $\mathbf{K}' = q_L \mathbf{E}$, wobei $\mathbf{E}$ das elektrische Feld der Spiegelladungen $\pm kq_L$ darstellt

$$\mathbf{K}' = e_x \frac{k q_L^2}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{c} - \frac{1}{c - a^2/c} \right\} = -e_x \frac{k q_L^2}{2\pi\epsilon_0 c} \frac{a^2}{c^2 - a^2}.$$

Wie es sein muss, wird die Ladung vom Zylinder angezogen.

Zur Veranschaulichung sind in Abb. 1.30 die D-Linien dargestellt. Sie verlaufen innerhalb des Zylinders geradlinig und ihre Verlängerungen treffen sich alle am Ort der erregenden Linienladung.

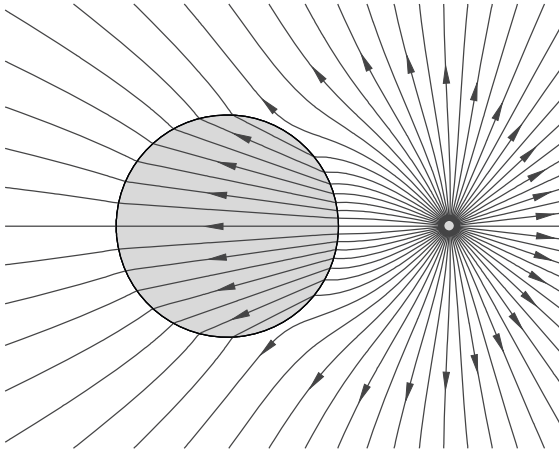


Abb. 1.30. Verlauf der D-Linien einer unendlich langen Linienladung vor einem dielektrischen Zylinder mit $\epsilon_r = 3$

E16 Linienladung vor einem dielektrischen Halbraum

In der Höhe h über einem dielektrischen Halbraum befindet sich eine unendlich lange Linienladung q_L , Abb. 1.31. Bestimme die Kraft pro Längeneinheit auf den Halbraum.

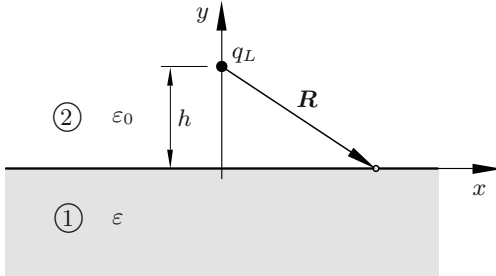


Abb. 1.31. Unendlich lange Linienladung über einem dielektrischen Halbraum

Lösung: Das elektrische Feld lässt sich im unteren Halbraum mit Hilfe des Spiegelungsverfahrens durch eine Linienladung

$$q_L(1 - k) \quad , \quad \text{mit} \quad k = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}$$

am Ort $x = 0, y = h$ im ansonsten homogenen Gesamttraum der Dielektrizitätskonstanten ε_0 bestimmen, vgl. Abb. 1.6c. Auf der Unterseite der Trennfläche $y = -0$ ist dann mit $R = \sqrt{x^2 + h^2}$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(x, y = -0) = \frac{q_L(1 - k)}{2\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{x}{R^2} \mathbf{e}_x - \frac{h}{R^2} \mathbf{e}_y \right\} .$$

Aufgrund der Stetigkeitsbedingungen (1.12) gilt für das elektrische Feld auf der Oberseite der Trennfläche

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}(x, y = +0) = \frac{q_L(1 - k)}{2\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{x}{R^2} \mathbf{e}_x - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{h}{R^2} \mathbf{e}_y \right\} .$$

Die Flächendichte der auf das Dielektrikum wirkenden Kraft folgt aus (1.19)

$$\mathbf{K}'' = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{e}_y = \left(\frac{q_L}{2\pi} \right)^2 \frac{k(1 - k)}{\varepsilon_0} \left\{ \frac{x^2}{R^4} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{h^2}{R^4} \right\} \mathbf{e}_y$$

und daraus die Kraft pro Längeneinheit

$$K'_y = \int_{-\infty}^{+\infty} K''_y dx = \left(\frac{q_L}{2\pi} \right)^2 \frac{k(1 - k)}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + (\varepsilon/\varepsilon_0)h^2}{(x^2 + h^2)^2} dx . \quad (1.34)$$

Das uneigentliche Integral kann mit dem Residuensatz gelöst werden, indem die reelle Variable x durch eine komplexe $z = \xi + j\eta$ ersetzt und der Integrationspfad wie in Abb. 1.32 in der oberen Halbebene ($\eta > 0$) mit unendlichem

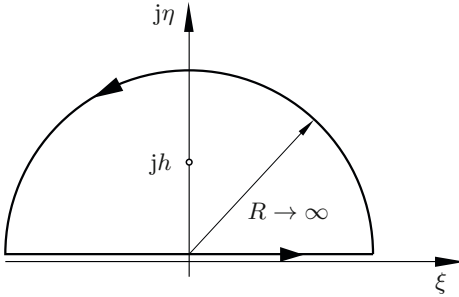


Abb. 1.32. Zur Berechnung des uneigentlichen Integrals in (1.34)

Radius geschlossen wird. An der Stelle $z = jh$ tritt in (1.34) ein zweifacher Pol auf, so dass das Residuum des Integranden die Gestalt

$$\lim_{z \rightarrow jh} \frac{d}{dz} \left\{ (z - jh)^2 \frac{z^2 + (\varepsilon/\varepsilon_0)h^2}{(z^2 + h^2)^2} \right\} = \frac{1}{2jh} \cdot \frac{1}{1 - k}$$

annimmt. Da das Integral nach dem Residuensatz das $2\pi j$ -fache dieses Wertes ist, ergibt sich daraus

$$K'_y = \frac{k q_L^2}{4\pi\varepsilon_0 h}.$$

Zum selben Resultat gelangt man natürlich auch, wenn man die COULOMB-Kraft pro Längeneinheit zwischen der Linienladung q_L und ihrer Spiegelladung im unteren Halbraum, siehe Abb. 1.6b, berechnet.

E17 Energie einer kugelförmigen Raumladung

Berechne die elektrostatische Feldenergie einer homogenen, kugelförmigen Raumladungswolke mit der Dichte q_{V0} und dem Radius a

- a) mit Hilfe der elektrischen Feldstärke
- b) mit Hilfe des Potentials.

Lösung:

a) Das radialsymmetrische Feld der kugelförmigen Raumladungsverteilung berechnen wir zunächst in gewohnter Weise mit Hilfe des GAUSS'schen Gesetzes der Elektrostatik

$$\varepsilon_0 \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = 4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r = \int_V q_V dV = q_{V0} \frac{4}{3} \pi \begin{cases} r^3 & \text{für } r \leq a \\ a^3 & \text{für } r \geq a \end{cases}$$

$$\rightarrow E_r = \frac{q_{V0}}{3\varepsilon_0} \begin{cases} r & \text{für } r \leq a \\ a^3/r^2 & \text{für } r \geq a. \end{cases}$$

Aus (1.14) folgt dann die Feldenergie

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V E_r^2 dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{q_{V0}}{3\varepsilon_0} \right)^2 4\pi \left\{ \int_0^a r^4 dr + \int_a^\infty \frac{a^6}{r^2} dr \right\} = \\
 &= \frac{4\pi}{15\varepsilon_0} q_{V0}^2 a^5 .
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

b) Das Potential ist nach (1.4) das Integral über die Feldstärke

$$\phi = - \int E_r dr + C = \frac{q_{V0}}{3\varepsilon_0} \begin{cases} -r^2/2 + C & \text{für } r \leq a \\ a^3/r & \text{für } r \geq a . \end{cases}$$

Die Konstante C wählt man so, dass ϕ für $r = a$ stetig ist und erhält

$$\phi = \frac{q_{V0}}{3\varepsilon_0} \begin{cases} (3a^2 - r^2)/2 & \text{für } r \leq a \\ a^3/r & \text{für } r \geq a . \end{cases}$$

Die Energie kann nun nach (1.14) durch Integration über das raumladungs-behaftete Volumen ermittelt werden

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V q_{V0} \phi dV = \frac{1}{2} \frac{q_{V0}^2}{3\varepsilon_0} 4\pi \int_0^a \frac{3a^2 - r^2}{2} r^2 dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0} q_{V0}^2 a^5 . \tag{1.36}$$

Die Resultate (1.35) und (1.36) stimmen also überein.

E18 Teilkapazitäten

Über dem Erdboden befinden sich in der Höhe h_1 bzw. h_2 zwei unendlich lange, parallele Leiter mit der gegenseitigen Entfernung a , Abb. 1.33. Die Radien r_1 bzw. r_2 der Leiter seien sehr viel kleiner als die übrigen Abmessungen. Zu bestimmen sind die Teilkapazitäten der Anordnung sowie die Betriebskapazität, wenn beide Leiter den gleichen Radius und die gleiche Höhe über der Erde aufweisen und im Gegentakt betrieben werden.

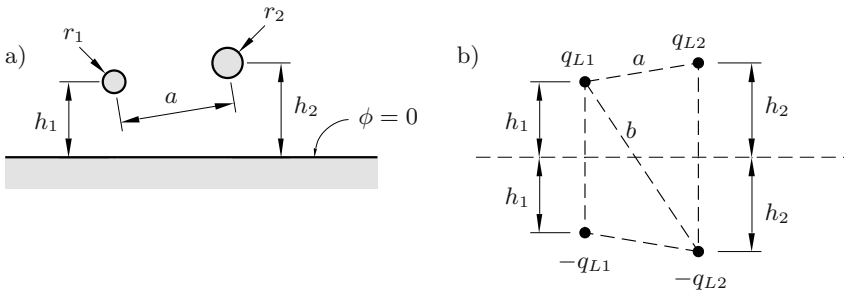


Abb. 1.33. (a) Zwei dünne Leiter über dem Erdboden. (b) Ersatzanordnung

Lösung: Zunächst können die beiden Leitungen aufgrund ihrer kleinen Radien durch unendlich lange Linienladungen in ihren Mittelpunkten ersetzt werden. Den Einfluss des Erdbodens erfassen wir wie üblich durch Spiegelung. Es entsteht dann die Ersatzanordnung in Abb. 1.33b, aus der man auch den diagonalen Abstand

$$b = \sqrt{a^2 + 4h_1h_2}$$

ablesen kann. Ausgangspunkt bei der Berechnung der Teilkapazitäten eines Systems von n Leitern ist ein Gleichungssystem, das die Ladung auf den Leitern mit den Leiterpotentialen verknüpft. Dieses Gleichungssystem hat in unserem Fall analog zu (1.17) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} q_{L1} \\ q_{L2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{L1} \\ q_{L2} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

mit den *Kapazitätskoeffizienten* k'_{ik} , aus denen nachher die gesuchten Teilkapazitäten bestimmt werden, und den *Potentialkoeffizienten* p_{ik} . Zuerst werden die Potentialkoeffizienten berechnet. Dabei ist zu beachten, dass auf jeder Leiteroberfläche die Beiträge aller vier Linienladungen zu superponieren sind. Nach (1.5c) erhält man dann

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(q_{L1} \ln \frac{r_1}{R_0} - q_{L1} \ln \frac{2h_1}{R_0} + q_{L2} \ln \frac{a}{R_0} - q_{L2} \ln \frac{b}{R_0} \right) \\ \phi_2 &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(q_{L2} \ln \frac{r_2}{R_0} - q_{L2} \ln \frac{2h_2}{R_0} + q_{L1} \ln \frac{a}{R_0} - q_{L1} \ln \frac{b}{R_0} \right) \end{aligned}$$

und durch Vergleich mit (1.37) folgt

$$p_{11,22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_{1,2}}{r_{1,2}} \quad , \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad .$$

Nach Inversion der Matrix der Potentialkoeffizienten in (1.37)

$$\begin{pmatrix} q_{L1} \\ q_{L2} \end{pmatrix} = \frac{1}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2} \begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{12} & p_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

lauten die Kapazitätskoeffizienten

$$k'_{11,22} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\Delta} \ln \frac{2h_{2,1}}{r_{2,1}} \quad , \quad k'_{12} = k'_{21} = -\frac{\pi\epsilon_0}{\Delta} \ln \left(1 + \frac{4h_1h_2}{a^2} \right) \quad ,$$

mit der Abkürzung

$$\Delta = (2\pi\epsilon_0)^2 (p_{11}p_{22} - p_{12}^2) = \ln \frac{2h_1}{r_1} \ln \frac{2h_2}{r_2} - \left(\ln \sqrt{1 + \frac{4h_1h_2}{a^2}} \right)^2 \quad .$$

Die Teilkapazitäten pro Längeneinheit, Abb. 1.34, folgen schließlich aus (1.17)

$$C'_{12} = -k'_{12} \quad , \quad C'_{1\infty} = k'_{11} + k'_{12} \quad , \quad C'_{2\infty} = k'_{22} + k'_{12} \quad . \quad (1.38)$$

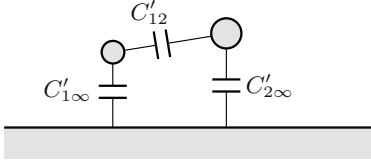


Abb. 1.34. Teilkapazitäten pro Längeneinheit einer Doppelleitung über dem Erdboden

Wir kommen nun zur Berechnung der gesuchten Betriebskapazität. Bei symmetrischer Anordnung der Leiter wird aus den Potentialkoeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = r_2 = r \\ h_1 = h_2 = h \end{array} \right\} \rightarrow p_{11} = p_{22} = p.$$

Außerdem ist im Gegentaktbetrieb

$$q_{L1} = -q_{L2} = q_L, \quad \phi_1 = -\phi_2 = (p - p_{12})q_L$$

und es ergibt sich als Betriebskapazität pro Längeneinheit der Ausdruck

$$C'_B = \frac{q_L}{\phi_1 - \phi_2} = \pi \varepsilon_0 \left/ \ln \left(2 \frac{h}{r} \sqrt{\frac{1}{1 + 4h^2/a^2}} \right) \right. . \quad (1.39)$$

Hier bietet sich eine schöne Kontrolle der zuvor ermittelten Teilkapazitäten an. Die Betriebskapazität ist nämlich nach Abb. 1.34 nichts anderes als die Parallelschaltung der Kapazität C'_{12} mit den in Reihe geschalteten Kapazitäten $C'_{1\infty}$ und $C'_{2\infty}$, d.h.

$$C'_B = C'_{12} + \frac{C'_{1\infty} C'_{2\infty}}{C'_{1\infty} + C'_{2\infty}} = C'_{12} + \frac{C'_{1\infty}}{2}.$$

Nach Einsetzen von (1.38) ergibt sich wieder das Resultat (1.39).

E19 Kräfte an metallischen Oberflächen

Eine leitende, dünnwandige Kugelschale mit Radius a bestehend aus zwei sich berührenden Hemisphären befindet sich in einem ursprünglich homogenen elektrischen Feld der Stärke E_0 , welches senkrecht auf der Trennebene der beiden Hälften steht. Bestimme die erforderliche Kraft, um die Hemisphären zusammenzuhalten.

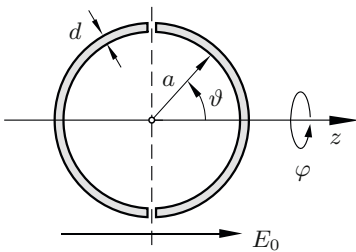


Abb. 1.35. Leitende, in der Mitte durchtrennte Hohlkugel im homogenen elektrischen Feld

Lösung: Zunächst erhebt sich die Frage, wie der Einfluss der leitenden Kugel auf das resultierende Feld erfasst werden kann. Es ist leicht vorstellbar, dass ein homogenes Feld dadurch erzeugt werden kann, dass man zwei entgegengesetzte Punktladungen immer weiter voneinander entfernt und dabei betragsmäßig größer werden lässt, so dass während dieses Grenzüberganges das Feld in einem *endlichen* Bereich zwischen den beiden Ladungen zunehmend homogener wird. Bei Anwesenheit der leitenden Kugel erhalten die beiden Ladungen ihre entsprechenden Spiegelbilder innerhalb der Kugel. Diese Spiegelladungen wandern im Zuge des erwähnten Grenzprozesses nach den Spiegelungsgesetzen (siehe Abb. 1.5b) aufeinander zu und werden dabei ebenfalls immer größer. Mit anderen Worten: Es entsteht ein Dipol im Kugelmittelpunkt, der die Wirkung der Influenzladung auf der Kugeloberfläche beschreibt und wir machen daher mit (1.5b) den Potentialansatz

$$\phi = -E_0 z + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad , \quad \mathbf{p}_e = p_0 \mathbf{e}_z \quad .$$

Das Moment des Ersatzdipols bestimmen wir so, dass sich auf der Kugeloberfläche das Potential $\phi = 0$ einstellt. Wegen $\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r} = p_0 z = p_0 r \cos \vartheta$ folgt

$$\phi(r = a) = 0 \quad \rightarrow \quad -E_0 a + \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 0 \quad \rightarrow \quad p_0 = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3 \quad .$$

Damit lautet das resultierende Potential eines durch eine leitende Kugel gestörten homogenen elektrischen Feldes

$$\phi(r, \vartheta) = E_0 \left\{ \frac{a^3}{r^2} - r \right\} \cos \vartheta \quad .$$

Die Radialkomponente der elektrischen Feldstärke auf der Kugeloberfläche folgt durch Differentiation

$$E_r(r = a, \vartheta) = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 3 E_0 \cos \vartheta \quad . \quad (1.40)$$

Diese gibt nach (1.19) Anlass zu einer mechanischen Spannung, deren Integration⁷ über die rechte Halbkugelfläche eine aus Symmetriegründen allein z-gerichtete Kraft liefert

$$K_z = \frac{1}{2} 2\pi a^2 \epsilon_0 \int_0^{\pi/2} E_r^2(a, \vartheta) \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r)}_{\cos \vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 a^2 E_0^2 \quad .$$

E20 Elektrischer Dipol vor einer leitenden Kugel

Vor einer ungeladenen, leitenden Kugel mit dem Radius a befindet sich im Abstand c vom Mittelpunkt der Kugel ein elektrostatischer Dipol mit dem Moment $\mathbf{p}_e$, Abb. 1.36a. Gesucht ist die auf den Dipol ausgeübte Kraft.

⁷ Man verwendet hierbei die Substitution $u = \cos \vartheta$, $du = -\sin \vartheta \, d\vartheta$.

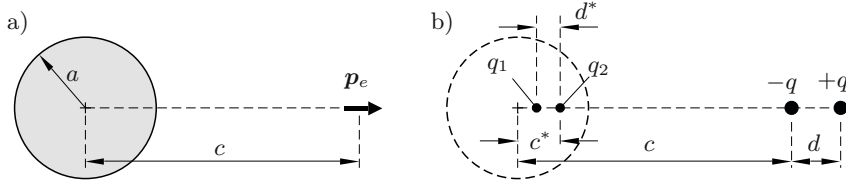


Abb. 1.36. (a) Elektrischer Dipol vor einer leitenden, ungeladenen Kugel.
(b) Spiegelung der Dipolladungen an der Kugel

Lösung: Wir nehmen zunächst an, die Kugel sei geerdet und ersetzen den Dipol durch zwei Punktladungen $\pm q$ im Abstand d , Abb. 1.36b. Spiegelt man diese Ladungen entsprechend dem Gesetz in Abb. 1.5b an der Kugel, so entstehen die Spiegelladungen q_1 und q_2 mit den Abständen $c^* - d^*$ bzw. c^*

$$q_1 = -\frac{a}{c+d} q, \quad q_2 = \frac{a}{c} q \quad (1.41)$$

$$c \cdot c^* = a^2, \quad (c+d) \cdot (c^* - d^*) = a^2 \rightarrow d^* = \frac{a^2 d}{c(c+d)}.$$

Im Grenzfall $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, mit $q \cdot d = p_e$, bildet sich daher ein Dipol mit dem Moment

$$\mathbf{p}_e^* = \frac{\mathbf{p}_e}{p_e} \lim_{q \rightarrow \infty} q_2 \cdot d^* = \frac{\mathbf{p}_e}{p_e} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{a^3}{c^2(c+d)} q d = \mathbf{p}_e \frac{a^3}{c^3}. \quad (1.42)$$

Summiert man die Ladungen q_1 und q_2 in (1.41)

$$q_1 + q_2 = \left(\frac{a}{c} - \frac{a}{c+d} \right) q = \frac{a}{c(c+d)} q d,$$

so stellt sich im Grenzfall $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, mit $q \cdot d = p_e$, eine nicht verschwindende Gesamtladung

$$Q^* = \frac{p_e a}{c^2} \quad (1.43)$$

am Ort $c^* = a^2/c$ ein. Da die Kugel aber ungeladen sein soll, müssen wir in ihrem Mittelpunkt eine weitere Punktladung

$$Q_M = -Q^* \quad (1.44)$$

anbringen, um die Ladungsfreiheit sicherzustellen. Damit lautet das äußere elektrische Feld aller Spiegelquellen (1.42), (1.43), (1.44) im Abstand z vom Mittelpunkt der Kugel zu einem beliebigen Punkt auf der Verbindungsachse zwischen Dipol und Kugelmittelpunkt

$$\mathbf{E}(z) = \frac{Q^*}{4\pi\epsilon_0(z-c^*)^2} \frac{\mathbf{p}_e}{p_e} + \frac{Q_M}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{\mathbf{p}_e}{p_e} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e^*}{(z-c^*)^3}.$$

Die gesuchte Kraft auf den Dipol lässt sich durch den Grenzübergang

$$\mathbf{K} = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \left\{ -q \mathbf{E}(z=c) + q \mathbf{E}(z=c+d) \right\} = p_e \left. \frac{d\mathbf{E}}{dz} \right|_{z=c}$$

berechnen und nach Einsetzen und Differenzieren ergibt sich daraus

$$\mathbf{K} = \frac{p_e \mathbf{p}_e}{2\pi\epsilon_0 a^4} \left\{ \frac{a^5}{c^5} - \frac{a^5 c}{(c^2 - a^2)^3} - \frac{3a^7 c}{(c^2 - a^2)^4} \right\}.$$

E21 Kapazität einer Stabantenne

Senkrecht über einem leitenden Halbraum befinde sich eine homogene Lini-
enladung q_L mit der Länge $2a$. Ihr Mittelpunkt habe die Entfernung c zum
Halbraum, Abb. 1.37a.

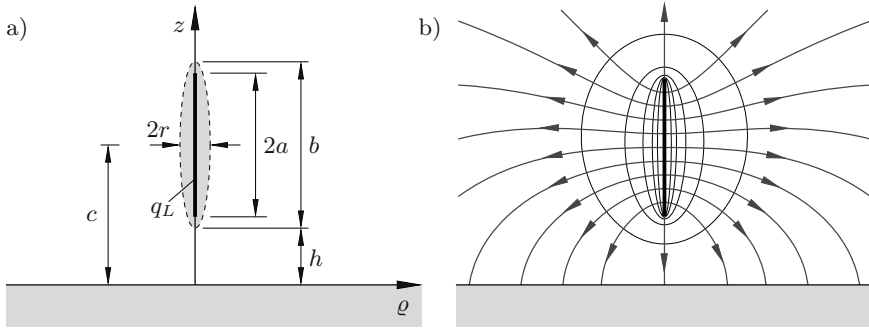


Abb. 1.37. (a) Linielenladung über einem leitenden Halbraum. (b) Elektrische Feldlinien und einige Äquipotentialflächen der Linielenladung

Berechne zunächst die Äquipotentialflächen der Anordnung und bestimme dann die Kapazität einer dünnen Stabantenne, die senkrecht über dem Erdboden angeordnet ist. Die Antenne habe die Länge b , den Durchmesser $2r$ und die Entfernung h zur Erdoberfläche.

Hinweis Die Kapazitätsberechnung soll näherungsweise erfolgen, indem man sich die leitende Oberfläche der Antenne als Äquipotentialfläche in unmittelbarer Umgebung der Linielenladung vorstellt (gestrichelte Linie in Abb. 1.37a).

Lösung: Mit $R = \sqrt{\varrho^2 + (z - z')^2}$ erhält man nach (1.6) zunächst das primäre Potential der Linielenladung bei Abwesenheit des leitenden Halbraumes⁸

$$\phi(p) = \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{c-a}^{c+a} \frac{dz'}{R} = \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z - c + a + \sqrt{\varrho^2 + (z - c + a)^2}}{z - c - a + \sqrt{\varrho^2 + (z - c - a)^2}} \right|. \quad (1.45)$$

⁸ siehe z.B. [Bronstein] Integral Nr. 192

Den Einfluss des leitenden Halbraumes erfassen wir nun mit Hilfe des Spiegelungsprinzips, d.h. wir nehmen eine negative Linienladung $-q_L$ im unteren Halbraum an. Deren Potentialbeitrag erhält man, wenn man in (1.45) z durch $z + 2c$ ersetzt. Das resultierende Potential ist also

$$\phi(\varrho, z) = \phi^{(p)}(\varrho, z) - \phi^{(p)}(\varrho, z + 2c) . \quad (1.46)$$

Wie man dem Feldbild 1.37b entnehmen kann, bilden die Äquipotentialflächen in unmittelbarer Umgebung der Linienladung langgestreckte Rotationskörper. Die Oberfläche einer Linearantenne wird im Folgenden näherungsweise als ein solcher Rotationskörper angesehen. Die Antenne sei gegenüber der Erde auf das Potential ϕ_A angehoben und trage die Gesamtladung Q . Die Kapazität zwischen Antenne und Erdboden ist dann

$$C = Q/\phi_A \quad , \quad Q = q_L 2a , \quad (1.47)$$

wobei das Antennenpotential ϕ_A durch Wahl des Aufpunktes $\varrho = r$, $z = c$ in (1.45) und (1.46) ermittelt wird

$$\phi_A = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + a^2} + a}{\sqrt{r^2 + a^2} - a} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + (2c - a)^2} + 2c - a}{\sqrt{r^2 + (2c + a)^2} + 2c + a} \right) .$$

Bei einer langgestreckten Antenne gilt $r \ll a$ und $r \ll (2c \pm a)$ und wir können die Wurzeln wegen $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ für $|x| \ll 1$ annähern

$$\sqrt{r^2 + a^2} \approx a + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a} , \quad \sqrt{r^2 + (2c \pm a)^2} \approx (2c \pm a) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{(2c \pm a)} .$$

Das Potential lässt sich damit auf die vereinfachte Form

$$\phi_A \approx \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left\{ \left(\frac{2a}{r} \right)^2 \frac{2c - a}{2c + a} \right\}$$

bringen und mit $2a \approx b$ und $c = h + b/2$ folgt aus (1.47) die Kapazität

$$C \approx 2\pi\epsilon_0 b \left\{ \ln \left(\frac{b}{r} \sqrt{\frac{4h+b}{4h+3b}} \right) \right\}^{-1} .$$

E22 Kapazität zwischen zwei Kugeln

Gegeben sind zwei gleich große, leitende Kugeln mit dem Radius a und dem Mittelpunktsabstand c , Abb. 1.38a. Gesucht ist die Kapazität zwischen den Kugeln.

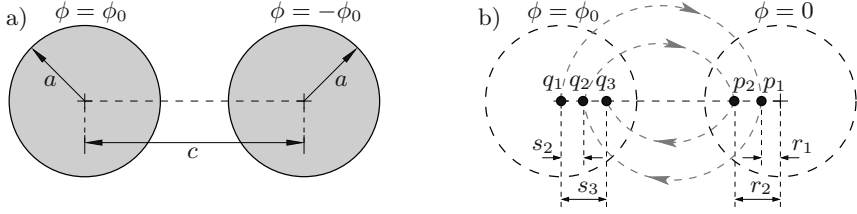


Abb. 1.38. (a) Zwei leitende Kugeln mit entgegengesetztem Potential. (b) Spiegelungsprozess für das Teilproblem A

Lösung: Wir betrachten zweckmäßigerweise zwei Teilprobleme:

Teilproblem A: Die linke Kugel hat das Potential $+\phi_0$ und die rechte ist geerdet.

Teilproblem B: Die rechte Kugel hat das Potential $-\phi_0$ und die linke ist geerdet.

Die Überlagerung beider Teilprobleme ergibt eine Anordnung, bei der die linke Kugel das Potential $+\phi_0$ und die rechte das Potential $-\phi_0$ aufweist. Damit kann man dann die Kapazität in der Form

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_l^{(A)} + Q_l^{(B)}}{2\phi_0} \quad (1.48)$$

berechnen, wobei $Q_l^{(A)}$ bzw. $Q_l^{(B)}$ die Gesamtladung der linken Kugel für das Teilproblem A bzw. B ist.

Um eine Ersatzanordnung von Spiegelladungen zu finden, siehe Abb. 1.38b, beginnt man mit einer Ladung

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 a \phi_0 \quad (1.49)$$

im Mittelpunkt der linken Kugel. Diese erzeugt auf der Oberfläche der linken Kugel das Potential ϕ_0 . Man spiegelt q_1 an der geerdeten rechten Kugel und erhält die Spiegelladung p_1 im Abstand r_1 , wobei nach dem Spiegelungsgesetz gilt (siehe Abb. 1.5)

$$p_1 = -\frac{r_1}{a} q_1 \quad , \quad r_1 = \frac{a^2}{c} . \quad (1.50)$$

Auf der rechten Kugel herrscht nun das Potential $\phi = 0$, aber die hinzugekommene Ladung p_1 verändert das Potential auf der linken Kugel. Um diesen Fehler zu kompensieren, wird p_1 an der linken Kugel gespiegelt. Die neu hinzugekommene Ladung q_2 und ihr Mittelpunktsabstand s_2 lauten

$$q_2 = -\frac{s_2}{a} p_1 \quad , \quad s_2 = \frac{a^2}{c - r_1} . \quad (1.51)$$

Damit ist aber das Potential auf der rechten Kugel nicht mehr null und man muss daher q_2 wieder an der rechten Kugel spiegeln, d.h. es entsteht eine weitere Ladung

$$p_2 = -\frac{r_2}{a} q_2 \quad , \quad r_2 = \frac{a^2}{c - s_2} . \quad (1.52)$$

Der Spiegelungsprozess wird in diesem Sinne weiter fortgeführt und man erkennt aus (1.50), (1.51) und (1.52) bereits das allgemeine Bildungsgesetz

$$r_n = \frac{a^2}{c - s_n} , \quad p_n = -q_n \frac{r_n}{a} , \quad s_{n+1} = \frac{a^2}{c - r_n} , \quad q_{n+1} = -p_n \frac{s_{n+1}}{a} , \quad (1.53)$$

aus dem mit den Startwerten $q_1 = 4\pi\epsilon_0 a\phi_0$ und $s_1 = 0$ die Spiegelladungen und ihre Abstände rekursiv bestimmt werden können. Bezieht man noch die Ladungen auf den Startwert q_1 und die Abstände auf den Kugelradius

$$p'_n = \frac{p_n}{q_1} , \quad q'_n = \frac{q_n}{q_1} , \quad r'_n = \frac{r_n}{a} , \quad s'_n = \frac{s_n}{a} ,$$

dann lautet die Rekursion

$$r'_n = \frac{1}{c/a - s'_n} , \quad p'_n = -q'_n r'_n , \quad s'_{n+1} = \frac{1}{c/a - r'_n} , \quad q'_{n+1} = -p'_n s'_{n+1} \quad (1.54)$$

mit den normierten Startwerten $s'_1 = 0$ und $q'_1 = 1$. Die Gesamtladungen der linken und rechten Kugel beim Teilproblem A sind

$$Q_l^{(A)} = \sum_n q_n \quad , \quad Q_r^{(A)} = \sum_n p_n .$$

Aus Symmetriegründen braucht man die Gesamtladung der linken Kugel im Teilproblem B nicht neu zu berechnen, denn es gilt $Q_l^{(B)} = -Q_r^{(A)}$ und aus der Kapazität (1.48) wird

$$C = \frac{1}{2\phi_0} \sum_n (q_n - p_n) = 2\pi\epsilon_0 a \sum_n (q'_n - p'_n) . \quad (1.55)$$

Die Beziehungen (1.55) und (1.54) lassen sich sehr einfach in einem kleinen Computerprogramm implementieren. Die Anzahl der zu berücksichtigenden Spiegelladungen hängt dabei vom Verhältnis c/a ab. Bei dicht benachbarten Kugeln ist die Konvergenz des Verfahrens naturgemäß schlechter und man wird eine größere Anzahl von Rekursionen benötigen, bis sich das Ergebnis stabilisiert hat.

Bei kleinen Kugeln mit $a \ll c$ gilt die Näherungsformel

$$C \approx 2\pi\epsilon_0 a \frac{c}{c - a} , \quad (1.56)$$

die man sehr einfach herleiten kann, indem man die Kugeln durch Punktladungen $\pm Q$ in ihrem Mittelpunkt ersetzt. Dies zu zeigen, sei dem Leser zur Übung überlassen. Abb. 1.39 macht deutlich, wie groß der Fehler speziell bei dicht beieinander liegenden Kugeln wird.

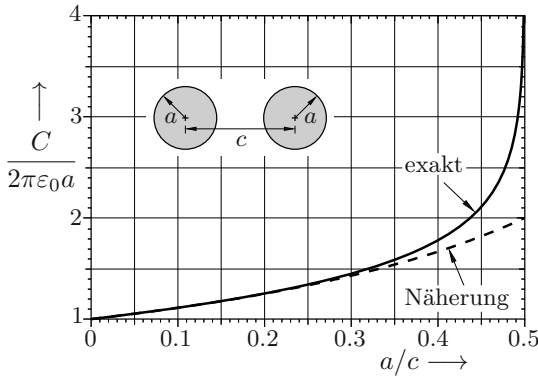


Abb. 1.39. Kapazität zwischen zwei Kugeln im Vergleich zur Näherungsformel für kleine Kugeln (1.56)

E23 Randwertproblem in kartesischen Koordinaten

Im kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenen $x = 0$, $x = a$ und $y = 0$ als leitende geerdete Beläge ausgeführt, während in der Ebene $y = b$ das Potential den Verlauf **a)** $\phi_0 \cos(\pi x/a)$ bzw. **b)** $\phi_0 \sin(\pi x/a)$ haben soll. Gesucht ist das Potential $\phi(x, y)$ im Innenraum des Rechteckzylinders sowie die Gleichung der elektrischen Feldlinien.

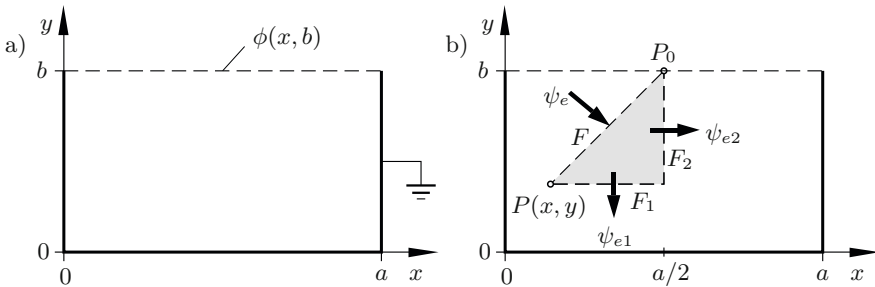


Abb. 1.40. (a) Rechteckzylinder mit drei geerdeten Wänden und Potentialvorgabe auf einer Wand (a) Zerlegung des Flusses zur Berechnung der elektrischen Feldlinien

Lösung: Es liegt ein hinsichtlich der Koordinate z ebenes Randwertproblem erster Art in kartesischen Koordinaten vor. Das Potential erfüllt die zweidimensionale LAPLACE-Gleichung (A.1) mit dem allgemeinen Lösungsansatz (A.2). Bei der Bestimmung der unbekannten Konstanten in (A.2) beginnt man am besten mit den homogenen Randbedingungen, um den allgemeinen Lösungsansatz soweit wie möglich zu reduzieren

$$\phi(0, y) = 0 \rightarrow A_0 = A_p = 0$$

$$\phi(a, y) = 0 \rightarrow B_0 = 0, \sin pa = 0 \rightarrow p = p_n = \frac{n\pi}{a}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\phi(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_p = 0.$$

Kürzt man noch das Produkt der übriggebliebenen Konstanten mit E_n ab, so lautet der auf das Problem zugeschnittene reduzierte Lösungsansatz

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh p_n y \sin p_n x. \quad (1.57)$$

a) Potentialvorgabe $\phi(x, b) = \phi_0 \cos(\pi x/a)$

Einsetzen der Potentialvorgabe in (1.57) liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh p_n b \sin p_n x = \phi_0 \cos \frac{\pi x}{a}. \quad (1.58)$$

Zur Bestimmung der Konstanten E_n werden beide Seiten von (1.58) mit $\sin p_m x$ multipliziert und anschließend über den Bereich $0 \leq x \leq a$ integriert (Orthogonalentwicklung)

$$\phi_0 \int_0^a \cos \frac{\pi x}{a} \sin p_m x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh p_n b \underbrace{\int_0^a \sin p_n x \sin p_m x \, dx}_{\delta_m^n a/2}.$$

Durch das Auftreten des KRONECKER-Symbols δ_m^n verbleibt lediglich das Glied $m = n$ in der Summe. Da der Index m jede beliebige natürliche Zahl sein kann, liefert die beschriebene Prozedur alle unbekannten Konstanten E_n . Die Integration auf der linken Seite ergibt⁹

$$\int_0^a \cos \frac{\pi x}{a} \sin p_m x \, dx = \frac{a}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos[(m+1)\pi]}{m+1} + \frac{1 - \cos[(m-1)\pi]}{m-1} \right]$$

und mit $\cos[(m+1)\pi] = \cos[(m-1)\pi] = (-1)^{m+1}$ wird aus (1.57)

$$\frac{\phi(x, y)}{\phi_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \frac{\sinh p_n y}{\sinh p_n b} \sin p_n x.$$

Die elektrischen Feldlinien erhält man durch Konstanthalten des elektrischen Flusses (1.15), wobei aus Symmetriegründen die Betrachtung des Bereiches $0 \leq x \leq a/2$ genügt. Der Fluss durch die Fläche F in Abb. 1.40b verändert sich nicht, wenn man den variablen Punkt $P(x, y)$ entlang einer Feldlinie verschiebt. Da das in Abb. 1.40b markierte Gebiet ladungsfrei ist, gilt für den Fluss pro Längeneinheit $\psi'_e = \psi'_{e1} + \psi'_{e2}$ mit

$$\psi'_{e1} = \varepsilon_0 \int_x^{a/2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx \quad , \quad \psi'_{e2} = -\varepsilon_0 \int_y^b \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=a/2} \, dy.$$

Die gesuchte Feldliniengleichung nimmt dann die Gestalt

⁹ siehe z.B. [Bronstein] Integral Nr. 408

$$\frac{\psi'_e(x, y)}{\psi'_0} = \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \left[\frac{\cosh p_n y}{\sinh p_n b} \cos p_n x - (-1)^{\frac{n}{2}} \coth p_n b \right] = \text{const.}$$

mit $\psi'_0 = 4\varepsilon_0\phi_0/\pi$ an. In Abb. 1.41 ist das Feldbild dargestellt.

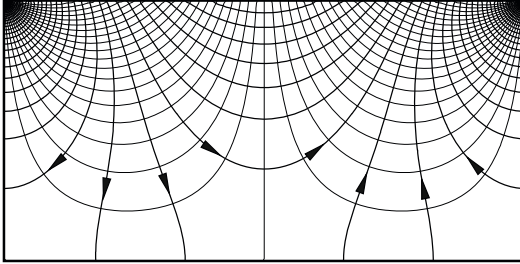


Abb. 1.41. Äquipotentiallinien und Feldlinien bei kosinusförmiger Potentialvorgabe

Bemerkenswert ist dabei die Wirbelbildung des elektrischen Feldes in den oberen Ecken des Zylinders. Tatsächlich sieht es dort eher wie das magnetische Feld eines Linienstromes aus. Denkt man sich nun in der linken oberen Ecke den Ursprung eines lokalen Polarkoordinatensystems (ϱ, φ) , dann kann man näherungsweise schreiben

$$\mathbf{E} \approx e_\varphi C \frac{1}{\varrho} \quad , \quad \int_0^{\pi/2} E_\varphi(\varrho) \varrho d\varphi = \phi_0 \quad \rightarrow \quad E_\varphi = \frac{2\phi_0}{\pi} \frac{1}{\varrho} . \quad (1.59)$$

Wie der Abb. 1.42 entnommen werden kann, wird das Feld in der Ecke durch (1.59) gut approximiert.¹⁰

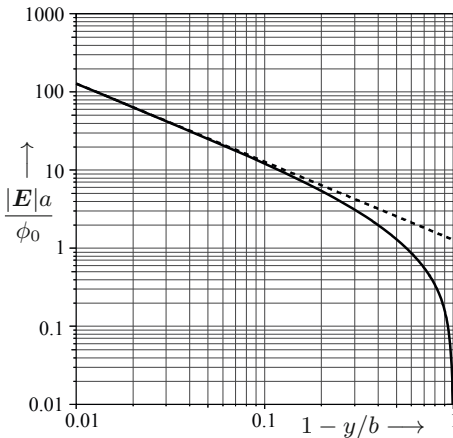


Abb. 1.42. Elektrisches Feld entlang der y -Achse. Der gestrichelte Verlauf zeigt die Approximation durch (1.59).

¹⁰ (1.59) ist das korrekte Feld von zwei unendlich ausgedehnten, rechtwinklig und isoliert aufeinander treffenden, leitenden Platten mit den Potentialen $\phi = 0$ und $\phi = \phi_0$. Hiervon kann sich der Leser sehr leicht durch Lösung der LAPLACE-Gleichung in Polarkoordinaten überzeugen.

b) Potentialvorgabe $\phi(x, b) = \phi_0 \sin(\pi x/a)$

In diesem Fall ist die Vorgabe in Form der ersten Eigenfunktion gegeben und man braucht in der allgemeinen Lösungssumme nur das Glied $n = 1$ zu berücksichtigen. Es stellt sich daher die Potentialverteilung

$$\frac{\phi(x, y)}{\phi_0} = \frac{\sinh(\pi y/a)}{\sinh(\pi b/a)} \sin \frac{\pi x}{a}$$

ein. Bei der Flussberechnung ist zu beachten, dass die Linie $x = a/2$ zur Feldlinie wird, so dass ψ_{e2} in Abb. 1.40b verschwindet. Damit lautet die Gleichung der Feldlinien

$$\psi'_e(x, y) = \varepsilon_0 \phi_0 \frac{\cosh(\pi y/a)}{\sinh(\pi b/a)} \cos \frac{\pi x}{a} = \text{const.}$$

Die Äquipotential- und Feldlinien sind in Abb. 1.43 dargestellt.

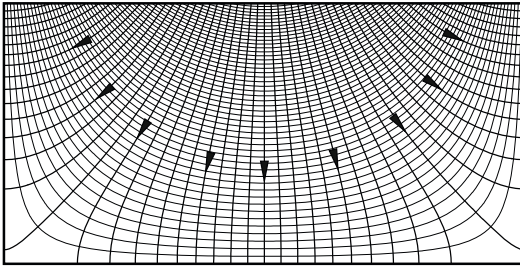


Abb. 1.43. Äquipotentiallinien und Feldlinien bei sinusförmiger Potentialvorgabe

E24 Elektrostatische Linse (periodischer Fall)

Koaxiale Strukturen, bestehend aus leitenden Ringen mit unterschiedlichen Potentialen, Abb. 1.44a, treten in der Praxis bei Teilchenbeschleunigern und Fokussierungseinrichtungen auf.

Gegeben ist eine periodische Anordnung solcher Ringe, an die alternierend die Potentiale $\pm\phi_0$ angelegt sind, Abb. 1.44b. Der Radius aller Ringe sei a , ihre Breite h und der gegenseitige Abstand $d \ll a, h$. Bestimme das Potential im Raum $\varrho < a$ unter der Annahme, dass das Potential sich im Spalt zwischen den Ringen in erster Näherung linear mit der Koordinate z ändert.

Lösung: Es liegt ein rotationssymmetrisches Randwertproblem erster Art in Zylinderkoordinaten vor. Das Potential erfüllt die LAPLACE-Gleichung (A.5). Die Periodizität der Anordnung erfordert hier einen periodischen Lösungsansatz in z -Richtung, also wählen wir (A.6). Aufgrund ihres singulären Verhaltens auf der Achse $\varrho = 0$ scheiden der natürliche Logarithmus sowie die

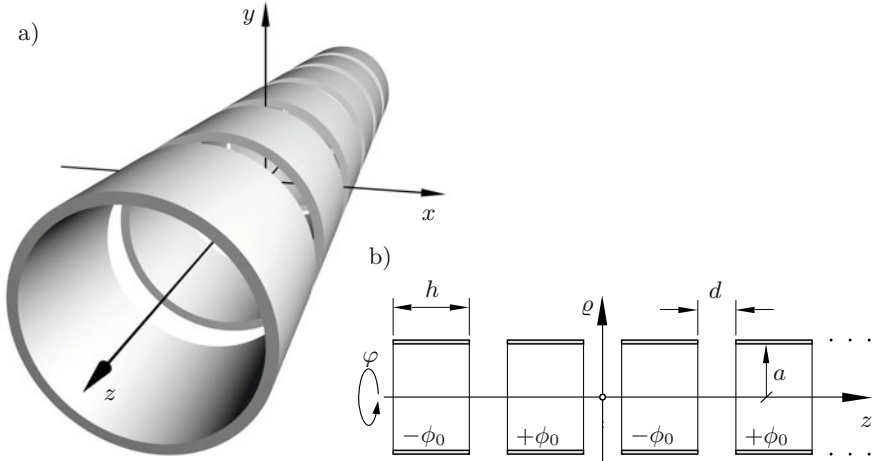


Abb. 1.44. (a) Periodische Anordnung leitender Ringe. (b) Betrachtung der Anordnung in Zylinderkoordinaten und Festlegung der Potentiale

modifizierte BESSEL-Funktion zweiter Art dabei aus. Ein linearer Term in z -Richtung ist aufgrund der Periodizität der Anordnung ebenfalls nicht möglich. Der zur Ebene $z = 0$ schiefssymmetrische Potentialverlauf lässt weiterhin nur Sinusfunktionen im Ansatz zu. Zur Ebene $z = (h + d)/2$ dagegen wird sich das Potential symmetrisch ausbilden, so dass damit auch die Separationskonstanten p in der Form

$$p = p_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad L = h + d \quad , \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

vorliegen und wir erhalten den reduzierten Potentialansatz

$$\phi(\rho, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0(p_n \rho) \sin p_n z \, .$$

Auf der Fläche $\rho = a$ hat das Potential den Verlauf

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0(p_n a) \sin p_n z = -\phi_0 \begin{cases} 2z/d & \text{für } 0 \leq z \leq d/2 \\ 1 & \text{für } d/2 \leq z \leq L/2 \end{cases} \quad (1.60)$$

Dabei wurde nur ein Viertel der gesamten Periodenlänge betrachtet. Dies ist aus Symmetriegründen auch vollkommen ausreichend, da die Funktionen $\sin p_n z$ alle Symmetrieanforderungen erfüllen. Zwecks Auffindung der noch unbekannten Konstanten A_n wird (1.60) im Zuge einer FOURIER-Analyse auf beiden Seiten mit $\sin p_m z$ multipliziert und über den Orthogonalitätsbereich $0 \leq z \leq L/2$ integriert

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0(p_n a) \underbrace{\int_0^{L/2} \sin p_n z \sin p_m z \, dz}_{\delta_m^n L/4} &= \\
 = -\frac{2}{d} \phi_0 \underbrace{\int_0^{d/2} z \sin p_m z \, dz}_{\mathcal{I}_{1m}} - \phi_0 \underbrace{\int_{d/2}^{L/2} \sin p_m z \, dz}_{\mathcal{I}_{2m}} .
 \end{aligned}$$

Mit den Integralen¹¹

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{1m} &= \left[\frac{\sin p_m z}{p_m^2} - \frac{z \cos p_m z}{p_m} \right]_0^{d/2}, \quad \mathcal{I}_{2m} = - \left[\frac{\cos p_m z}{p_m} \right]_{d/2}^{L/2} \\
 \rightarrow \quad \frac{2}{d} \mathcal{I}_{1m} + \mathcal{I}_{2m} &= \frac{2}{d} \frac{\sin(p_m d/2)}{p_m^2}
 \end{aligned}$$

und der Spaltfunktion $\text{si}(x) = \frac{\sin x}{x}$ ergibt sich schließlich das Resultat

$$\frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \text{si}(p_n d/2) \frac{I_0(p_n \varrho)}{I_0(p_n a)} \sin p_n z . \quad (1.61)$$

Damit kann auch das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ und daraus die Bahnkurve eines geladenen Teilchens mit der Ladung q und der Masse m in dem periodischen Potentialfeld berechnet werden. Dafür sind die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen

$$K_\varrho = qE_\varrho = m \frac{dv_\varrho}{dt} = m \frac{d^2\varrho}{dt^2}, \quad K_z = qE_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

zu lösen. Für ein kleines Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$, in welchem angenommen werden kann, dass sich die elektrische Feldstärke nur unwesentlich ändert, liefert die Integration der Bewegungsgleichung zunächst die Geschwindigkeit in ϱ -Richtung

$$v_\varrho(t_0 + \Delta t) = v_\varrho(t_0) + \frac{q}{m} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} E_\varrho(t) \, dt \approx \frac{q}{m} E_\varrho(t_0) \Delta t$$

und nach nochmaliger Integration den Ort

$$\varrho(t_0 + \Delta t) \approx \varrho(t_0) + v_\varrho(t_0) \Delta t + \frac{q}{2m} E_\varrho(t_0) (\Delta t)^2 .$$

Wenn also die Zeitspanne Δt klein genug gewählt wird, ist es auf diesem Wege möglich die Bahnkurve auf iterative Weise zu erhalten, indem die aus

¹¹ siehe z.B. [Bronstein] Integral Nr. 279

den Anfangswerten $\varrho(t_0)$ und $v_\varrho(t_0)$ berechneten aktuellen Werte ϱ und v_ϱ als neue Startwerte verwendet werden, u.s.w.. Zur Normierung führen wir noch die Geschwindigkeit v_0 ein, die dem kinetischen Energiezuwachs der Ladung q nach Durchqueren der Potentialdifferenz $\Delta\phi = \phi_0$ entspricht

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \pm q \phi_0 \quad \text{für } q \gtrless 0$$

und erhalten den iterativen Algorithmus

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_{i+1}}{a} &= \frac{\varrho_i}{a} + 2\delta \frac{v_{\varrho,i}}{v_0} \pm \delta^2 \frac{E_\varrho(\varrho_i, z_i)}{\phi_0/a} \\ \frac{v_{\varrho,i+1}}{v_0} &= \frac{v_{\varrho,i}}{v_0} \pm \delta \frac{E_\varrho(\varrho_i, z_i)}{\phi_0/a} \end{aligned} \quad \text{für } q \gtrless 0. \quad (1.62)$$

Völlig analog lassen sich die entsprechenden Gleichungen für die longitudinale Position z und Geschwindigkeit v_z herleiten.

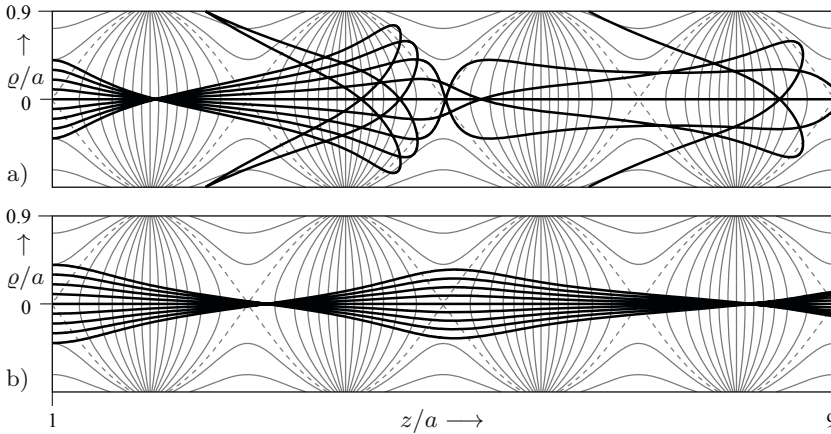


Abb. 1.45. Bahnkurven geladener Teilchen und Äquipotentiallinien des periodischen Potentialfeldes der Anordnung in Abb. 1.44b für $h = 2a$ und $v_\varrho(z = h/2) = 0$. **(a)** $v_z(z = h/2)/v_0 = 0.2$. **(b)** $v_z(z = h/2)/v_0 = 0.4$

Zur Abkürzung wurde in (1.62) die normierte Zeitschrittweite

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{v_0 \Delta t}{a}$$

eingeführt. Diese muss klein genug sein und sollte der am jeweiligen Ort herrschenden Feldstärke angepaßt werden, damit der Algorithmus stabile Ergebnisse liefert. In Abb. 1.45 wurden neun radial versetzte Teilchen betrachtet, die in der Ebene $z = h/2$ mit $v_\varrho = 0$ und $v_z/v_0 = 0.2$ bzw. $v_z/v_0 = 0.4$ starten. Im Falle der geringeren Anfangsgeschwindigkeit werden die Ladungen zunächst fokussiert, aber die kinetische Energie der äußeren Teilchen

reicht offenbar nicht aus, um die nächste Potentialbarriere zu überwinden. Die COULOMB'sche Abstoßungskraft der Ladungen untereinander blieb bei der Berechnung unberücksichtigt.

E25* Elektrostatische Linse (aperiodischer Fall)

Anstelle der periodischen Anordnung in Aufg. E24 soll nun der aperiodische Fall, d.h. zwei auf die Potentiale $+\phi_0$ bzw. $-\phi_0$ angehobene und einseitig ins Unendliche laufende, leitende Zylinder betrachtet werden, Abb. 1.46. Dabei darf der Abstand d diesmal als vernachlässigbar klein angesehen werden.

- a) Berechne das Potential sowie die elektrischen Feldlinien.
 b) Leite das Potential zur Kontrolle aus dem periodischen Resultat (1.61) der Aufg. E24 mit $L \rightarrow \infty$ (unendliche Periodenlänge) her.

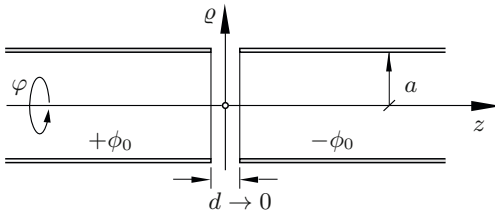


Abb. 1.46. Zwei Hälften eines in der Mitte durchtrennten Rohres mit den Potentialen $\pm\phi_0$

Lösung:

a) Bei dieser aperiodischen Anordnung wählen wir den Lösungsansatz (A.7). Aufgrund ihres singulären Verhaltens auf der Achse $\rho = 0$ scheiden der natürliche Logarithmus sowie die NEUMANN-Funktion aus. Ein linearer Term in z -Richtung ist ebenfalls nicht möglich, da er für $z \rightarrow \infty$ zu einem unendlichen Potential führen würde. Dasselbe gilt auch für die Hyperbelfunktionen, so dass wir stattdessen Exponentialfunktionen verwenden. Unter Beachtung der Symmetrie zur Ebene $z = 0$ kann man also den Ansatz

$$\phi(\rho, z) = \text{sign}(z) \left\{ -\phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(j_{0n} \rho/a) e^{-j_{0n} |z|/a} \right\} \quad (1.63)$$

aufstellen. Als Separationskonstante wurde $p = j_{0n}/a$ gesetzt, wobei j_{0n} die Nullstellen der BESSEL-Funktion J_0 sind. Damit verschwindet die Summe in (1.63) für $\rho = a$ und die Randbedingung auf dem leitenden Rohr ist bereits erfüllt. Weiterhin ist die Ebene $z = 0$ natürlich identisch mit der Äquipotentialfläche $\phi = 0$, d.h.

$$\phi(\rho, z = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(j_{0n} \rho/a) . \quad (1.64)$$

Im Zuge der folgenden FOURIER-BESSEL-Entwicklung werden beide Seiten von (1.64) mit $\varrho J_0(j_{0m}\varrho/a)$ multipliziert und über den orthogonalen Bereich $0 \leq \varrho \leq a$ integriert

$$\underbrace{\phi_0 \int_0^a J_0\left(j_{0m}\frac{\varrho}{a}\right) \varrho d\varrho}_{J_1(j_{0m}) a^2/j_{0m} \text{ nach (A.27)}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^a J_0(j_{0n}\varrho/a) J_0\left(j_{0m}\frac{\varrho}{a}\right) \varrho d\varrho}_{\delta_m^n J_1^2(j_{0m}) a^2/2 \text{ nach (A.29)}} .$$

In der Summe verbleibt dabei nur das Glied $n = m$ und mit den dadurch bekannten Konstanten A_m lautet das resultierende Potential

$$\frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = \text{sign}(z) \left\{ -1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{0n}\varrho/a)}{j_{0n} J_1(j_{0n})} e^{-j_{0n}|z|/a} \right\} . \quad (1.65)$$

Zur Veranschaulichung der Feldausbildung wurden in Abb. 1.47 sowohl die Äquipotentiallinien als auch die elektrischen Feldlinien dargestellt. Dabei erhält man die Feldlinien durch Konstanthalten des elektrischen Flusses (1.15) durch eine kreisförmige Fläche mit variablem Radius. Für $z > 0$ gilt dann mit (A.27)

$$\psi_e = -2\pi\epsilon_0 \int_0^{\varrho} \frac{\partial\phi}{\partial z} \varrho d\varrho = 4\pi\epsilon_0 a \phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{a} \frac{J_1(j_{0n}\varrho/a)}{j_{0n} J_1(j_{0n})} e^{-j_{0n}z/a} = \text{const..}$$

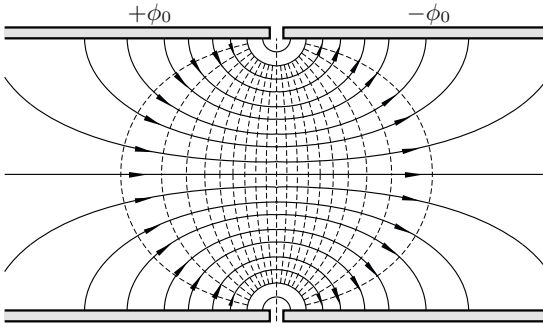


Abb. 1.47. Äquipotential- und Feldlinien am Übergang zweier leitender Rohrhälften mit den Potentialen $\pm\phi_0$

b) Mit $d \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ wird zunächst aus (1.61)

$$\frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = -\frac{4}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{I_0(p_n \varrho)}{I_0(p_n a)} \sin p_n z .$$

Die Differenz zweier benachbarter Eigenwerte $p_n = n\pi/L$ wird für $L \rightarrow \infty$ infinitesimal klein und die Summe geht in ein Integral über

$$p_{n+1} - p_n = \frac{2\pi}{L} \rightarrow dp \quad , \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \frac{L}{n\pi} \frac{2\pi}{L} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{dp}{p}$$

$$\rightarrow \frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_0(p\varrho)}{I_0(pa)} \frac{\sin pz}{p} dp .$$

Solche uneigentlichen Integrale lassen sich mit dem Residuensatz lösen. Dabei nutzen wir aus, dass der Integrand eine gerade Funktion von p ist und setzen $\sin pz = (e^{j pz} - e^{-j pz})/2j$

$$2\pi j \frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0(p\varrho)}{p I_0(pa)} e^{-j pz} dp}_{-\text{Int.}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_0(p\varrho)}{p I_0(pa)} e^{j pz} dp}_{\text{Int.}} . \quad (1.66)$$

Wir fassen nun p als komplexe Variable auf und schließen den Integrationspfad über einen Halbkreisbogen mit unendlichem Radius in der oberen komplexen Halbebene, Abb. 1.48. Für $z > 0$ liefert dieser Halbkreisbogen keinen zusätzlichen Beitrag.¹²

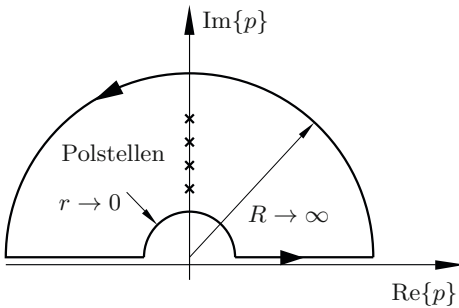


Abb. 1.48. Zur Lösung des uneigentlichen Integrals (1.66)

Für modifizierte BESSEL-Funktionen mit imaginärem Argument gilt

$$I_0(jx) = J_0(x) \quad , \quad I_1(jx) = j J_1(x) , \quad (1.67)$$

so dass die Polstellen des Integranden auf der imaginären Achse liegen und in der Form

$$pa = j \cdot j_{0n}$$

durch die Nullstellen von J_0 gegeben sind. Eine weitere Polstelle liegt im Ursprung der komplexen Ebene $p = 0$. Sie wird in Abb. 1.48 von einem Halbkreis mit Radius $r \rightarrow 0$ umfahren. Nach dem Residuensatz wird dann aus dem Integral in (1.66)

$$\begin{aligned} \text{Int.} = \oint f(p) e^{j pz} dp &= 2\pi j \text{Res} \left\{ f(p); p = \frac{j \cdot j_{0n}}{a} \right\} e^{-j_{0n} z/a} + \\ &+ \pi j \text{Res} \{ f(p); p = 0 \} \end{aligned} \quad (1.68)$$

¹² Für $z < 0$ würde man das Integral in der unteren komplexen Halbebene schließen. Aus Symmetriegründen genügt es jedoch, sich auf $z > 0$ zu beschränken.

mit den Residuen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left\{ f(p); p = \frac{j \cdot j_{0n}}{a} \right\} &= \lim_{pa \rightarrow j \cdot j_{0n}} \frac{pa - j \cdot j_{0n}}{I_0(pa)} \cdot \frac{I_0(p\varrho)}{pa} = -\frac{J_0(j_{0n}\varrho/a)}{j_{0n} J_1(j_{0n})} \\ \operatorname{Res} \{f(p); p = 0\} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p-0}{p} \frac{I_0(p\varrho)}{I_0(pa)} = 1. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Bei der Grenzwertberechnung wurde die Regel von L'HOSPITAL, (1.67) und (A.26) verwendet. Nach Einsetzen der Residuen (1.69) in (1.68) und danach von (1.68) in (1.66) ergibt sich in Übereinstimmung mit (1.65)

$$\frac{\phi(\varrho, z > 0)}{\phi_0} = -1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{0n}\varrho/a)}{j_{0n} J_1(j_{0n})} e^{-j_{0n}z/a}.$$

E26 Homogen polarisierter Zylinder

Gegeben ist ein sehr langer, in x -Richtung homogen polarisierter Zylinder vom Radius a , Abb. 1.49. Die Polarisation sei $\mathbf{P} = P_0 \mathbf{e}_x$. Berechne das Feld im Innen- und Außenraum des Zylinders.

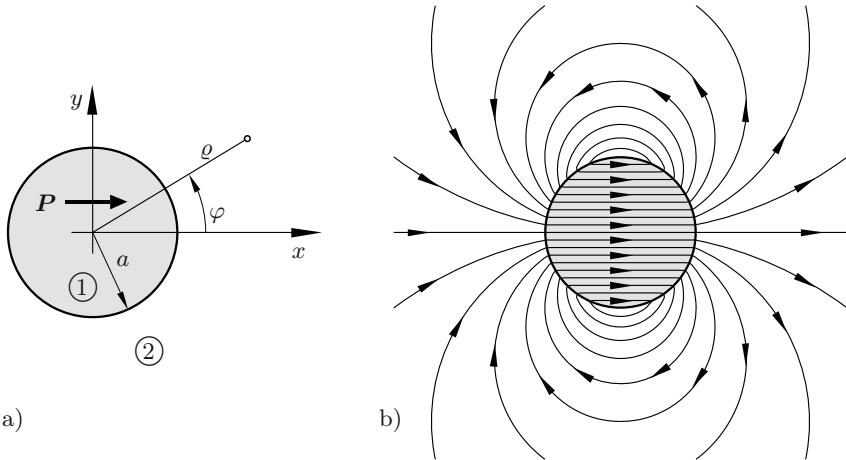


Abb. 1.49. (a) Homogen polarisierter Zylinder. (b) Feldlinien der dielektrischen Verschiebung (D-Linien)

Lösung: Es liegt ein ebenes Randwertproblem in Polarkoordinaten vor. Wegen $\nabla \cdot \mathbf{P} = \partial P / \partial x = 0$ gilt für $\varrho \neq a$ die LAPLACE-Gleichung (A.3) mit dem allgemeinen Lösungsansatz (A.4). Auf der Oberfläche des Zylinders $\varrho = a$ befindet sich nach (1.8) die Polarisationsflächenladung

$$q_{Fpol} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{e}_\varrho \cdot \mathbf{e}_x P_0 = P_0 \cos \varphi \quad (1.70)$$

und es gelten die Stetigkeitsbedingungen (1.12). Die Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ wird durch ein stetiges Potential gewährleistet. Mit $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = -\varepsilon_0 \nabla \phi + \mathbf{P}$ nach (1.4) und (1.7) lauten damit die entsprechenden Bedingungen für das Potential

$$\phi_1(\varrho = a, \varphi) = \phi_2(\varrho = a, \varphi) \quad , \quad \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \varrho} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=a} = \frac{P_0 \cos \varphi}{\varepsilon_0} . \quad (1.71)$$

Das Potential muss für $\varrho \rightarrow \infty$ abklingen, für $\varrho = 0$ endlich bleiben und die gleiche φ -Abhängigkeit wie die Polarisationsflächenladung (1.70) aufweisen, so dass man den allgemeinen Ansatz (A.4) in den Teilbereichen 1 und 2 auf die reduzierte Form

$$\phi_1 = A \frac{\varrho}{a} \cos \varphi \quad , \quad \phi_2 = B \frac{a}{\varrho} \cos \varphi$$

bringen kann. Einsetzen in (1.71) liefert

$$A = B \quad , \quad A \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{\varrho^2} \right) \Big|_{\varrho=a} = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad A = \frac{a P_0}{2 \varepsilon_0}$$

und schließlich mit $\varrho \cos \varphi = x$ und $\varrho^2 = x^2 + y^2$

$$\phi_1 = \frac{a P_0}{2 \varepsilon_0} \frac{x}{a} \quad , \quad \phi_2 = \frac{a P_0}{2 \varepsilon_0} \frac{x a}{x^2 + y^2} .$$

Das Potential steigt also im Innenraum linear mit der Koordinate x an und hat damit ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x P_0 / (2 \varepsilon_0)$ zur Folge. Das Feld im Außenraum entspricht dem Feld eines x -gerichteten Liniendipols, vgl. (1.22) in Aufg. E8. In Abb. 1.49b wurden die D-Linien dargestellt. Man beachte, dass die elektrische Flussdichte $\mathbf{D}$ im Innenraum wegen $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ entgegengesetzt zur elektrischen Feldstärke, also in positive x -Richtung zeigt.

E27 Sphärische Entwicklung des Potentials einer Ringladung

In der Höhe h über dem leitenden Halbraum $z < 0$ befinde sich eine ringförmige Linienladung q_L mit dem Radius b und dem Mittelpunkt auf der z -Achse. Ferner sei der halbkugelförmige Bereich $r \leq a$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ mit homogener, dielektrischer Materie gefüllt, Abb. 1.50a. Zu bestimmen ist das elektrostatische Potential im gesamten Raum. Außerdem soll das Ergebnis für den Spezialfall $\varepsilon \rightarrow \infty$ überprüft werden.

Lösung: Wir bestimmen zunächst das Potential $\phi^{(q)}$ der Ringladung im freien Raum und beschreiben diese mit Hilfe der DIRAC'schen Deltafunktion $\delta(\vartheta - \vartheta')$ als Flächenladung $q_F(\vartheta)$ auf einer Kugelschale mit dem Radius c . Aus Abb. 1.50b ergeben sich die geometrischen Zusammenhänge

$$c = \sqrt{b^2 + h^2} \quad , \quad \cos \vartheta' = \frac{h}{c} =: u' \quad , \quad \sin \vartheta' = \frac{b}{c} .$$

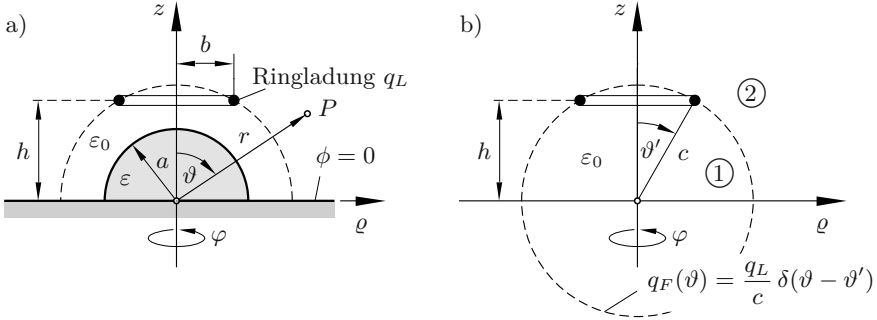


Abb. 1.50. (a) Ringladung über einem leitenden Halbraum mit dielektrischer Halbkugel. (b) Zur Berechnung des erregenden Potentials der Ringladung

Die so eingeführte Flächenladung trennt den Gesamttraum in die beiden Teilräume 1 und 2, in denen jeweils die LAPLACE-Gleichung in Kugelkoordinaten (A.11) mit dem allgemeinen Lösungsansatz (A.12) gilt. Weil im vorliegenden Fall die Rotationsachse Teil des Rechenvolumens ist, müssen die Funktionen zweiter Art von der Lösung ausgeschlossen werden, d.h. $D_p = 0$ und die Separationskonstante p ist ganzzahlig. Da das Potential außerdem im Ursprung $r = 0$ nicht unendlich werden darf und für $r \rightarrow \infty$ gegen null gehen muss, lassen sich in den beiden Teilräumen die reduzierten Ansätze

$$\phi^{(q)}(r, \vartheta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(u) \left(\frac{r}{c}\right)^n & \text{für } r \leq c \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(u) \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} & \text{für } r \geq c \end{cases} \quad \text{mit } u = \cos \vartheta$$

aufstellen.¹³ Die erforderliche Stetigkeit des Potentials für $r = c$ wird daher durch die Gleichheit der Konstanten A_n und B_n erreicht

$$\phi^{(q)}(c + 0, \vartheta) = \phi^{(q)}(c - 0, \vartheta) \quad \rightarrow \quad A_n = B_n .$$

Zur Bestimmung der verbleibenden Konstanten A_n wird das sprungartige Verhalten der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung beim Durchgang durch eine Flächenladung (1.13) herangezogen

$$\begin{aligned} E_r^{(q)}(c + 0, \vartheta) - E_r^{(q)}(c - 0, \vartheta) &= \left. \frac{\partial \phi^{(q)}}{\partial r} \right|_{r=c-0} - \left. \frac{\partial \phi^{(q)}}{\partial r} \right|_{r=c+0} = \frac{q_F(\vartheta)}{\varepsilon_0} \\ \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) A_n P_n(u) &= \frac{q_L}{\varepsilon_0} \delta(\vartheta - \vartheta') . \end{aligned} \quad (1.72)$$

¹³ Man beachte, dass die willkürlich vorgenommene Normierung des Abstandes r auf den Kugelschalenradius c keine Beschränkung der Allgemeingültigkeit darstellt. Solche Normierungen wirken sich hingegen günstig auf die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen aus.

Um nun nach den Konstanten auflösen zu können, verwenden wir die Orthogonalitätseigenschaft (A.46) der LEGENDRE-Polynome und multiplizieren beide Seiten von (1.72) mit $P_m(u)$ und integrieren über u im Bereich $-1 \leq u \leq +1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n \underbrace{\int_{-1}^{+1} P_n(u) P_m(u) du}_{\delta_m^n 2/(2n+1)} = \frac{qL}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-1}^{+1} \delta(\vartheta - \vartheta') P_m(u) du}_{\sin \vartheta' P_m(u')} . \quad (1.73)$$

Dabei wurde von der Ausblendeigenschaft der DIRAC'schen Deltafunktion

$$\int_0^{\pi} f(\vartheta) \delta(\vartheta - \vartheta') d\vartheta = f(\vartheta')$$

sowie von $du = -\sin \vartheta d\vartheta$ Gebrauch gemacht. Die Konstanten A_n in (1.73) lassen sich nun eliminieren und das Potential der Ringladung lautet

$$\phi^{(q)}(r, \vartheta) = \frac{qL}{2\varepsilon_0} \frac{b}{c} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u') P_n(u) \left(\frac{r}{c}\right)^n & \text{für } r \leq c \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u') P_n(u) \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} & \text{für } r \geq c . \end{cases}$$

Es gilt nun, den Einfluss der Inhomogenitäten, d.h. des leitenden Halbraumes und der dielektrischen Halbkugel zu erfassen. Der Einfluss des leitenden Halbraumes lässt sich durch eine negative aber ansonsten gleichartige Ringladung in der Ebene $z = -h$ simulieren. Wegen

$$P_n(u') - P_n(-u') = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n \\ 2P_n(u') & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

ergibt sich für das Potential einer Ringladung vor einem leitenden Halbraum, im Folgenden primäres Potential $\phi^{(p)}$ genannt,

$$\phi^{(p)}(r, \vartheta) = \frac{qL}{\varepsilon_0} \frac{b}{c} \begin{cases} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} P_n(u') P_n(u) \left(\frac{r}{c}\right)^n & \text{für } r \leq c \\ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} P_n(u') P_n(u) \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} & \text{für } r \geq c . \end{cases} \quad (1.74)$$

Die sich in der dielektrischen Halbkugel als Folge des Potentials $\phi^{(p)}$ einstellende Polarisierung wird durch ein sekundäres Potential $\phi^{(s)}$ in der Form

$$\phi^{(s)}(r, \vartheta) = \frac{qL}{\varepsilon_0} \frac{b}{c} \begin{cases} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} C_n P_n(u) \left(\frac{r}{a}\right)^n & \text{für } r \leq a \\ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} C_n P_n(u) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} & \text{für } r \geq a \end{cases}$$

mit den noch unbekannten Konstanten C_n erfasst. Wie man sofort sieht, garantiert der Ansatz für $\phi^{(s)}$ ein stetiges Potential an der Trennfläche $r = a$. Dort muss auch die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte $\mathbf{D}$ stetig sein, d.h.

$$\varepsilon_0 \left. \frac{\partial (\phi^{(s)} + \phi^{(p)})}{\partial r} \right|_{r=a+0} = \varepsilon \left. \frac{\partial (\phi^{(s)} + \phi^{(p)})}{\partial r} \right|_{r=a-0}$$

$$\rightarrow \varepsilon_0 \left\{ \frac{n}{a} \left(\frac{a}{c} \right)^n P_n(u') - \frac{n+1}{a} C_n \right\} = \varepsilon \left\{ \frac{n}{a} \left(\frac{a}{c} \right)^n P_n(u') + \frac{n}{a} C_n \right\},$$

woraus die Konstanten C_n folgen

$$C_n = - \left(\frac{a}{c} \right)^n P_n(u') \frac{n(\varepsilon_r - 1)}{n(\varepsilon_r + 1) + 1}, \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Das sekundäre Potential der polarisierten Halbkugel ist damit

$$\phi^{(s)}(r, \vartheta) = -\frac{qL}{\varepsilon_0} \frac{b}{c} \begin{cases} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \xi_n P_n(u') P_n(u) \left(\frac{r}{c} \right)^n & \text{für } r \leq a \\ \frac{a}{r} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \xi_n P_n(u') P_n(u) \left(\frac{r^*}{c} \right)^n & \text{für } r \geq a \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$r^* = \frac{a^2}{r}, \quad \xi_n = \frac{n(\varepsilon_r - 1)}{n(\varepsilon_r + 1) + 1}.$$

Abb. 1.51 zeigt zur Veranschaulichung des Feldes die Äquipotentiallinien für zwei verschiedene Dielektrizitätskonstanten.

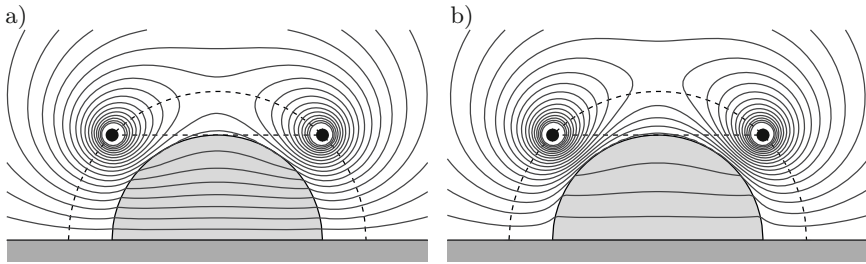


Abb. 1.51. Äquipotentiallinien der betrachteten Randwertaufgabe in Kugelkoordinaten für $a = h = b$. (a) $\varepsilon_r = 3$. (b) $\varepsilon_r = 10$

Für den Spezialfall $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ wird $\xi_n = 1$ und wir erhalten durch Vergleich mit (1.74) den einfachen Zusammenhang

$$\phi^{(s)}(r, \vartheta) = -\frac{a}{r} \phi^{(p)}(r^*, \vartheta) \quad \text{für } r > a.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Bestätigung des Spiegelungsgesetzes an der leitenden Kugel. Denn ein Körper mit unendlicher Permittivität verhält sich im Außenraum wie ein leitender Körper. In beiden Fällen steht das elektrische Feld senkrecht auf der Oberfläche.

E28* Lösung einer Poisson-Gleichung

In den Aufgaben E23 bis E27 haben wir uns mit Randwertaufgaben beschäftigt, denen die LAPLACE-Gleichung zugrunde lag. Wie wir gesehen haben, kann man Punkt-, Linien- und Flächenladungen durch eine entsprechende Raumaufteilung und über die Stetigkeitsbedingungen berücksichtigen, ohne direkt die POISSON-Gleichung lösen zu müssen. Bei räumlichen Ladungsverteilungen könnte man das Potential eines infinitesimalen Elementes bestimmen und dann das Ergebnis über das ladungsbehaftete Volumen integrieren. Oftmals ist aber der direkte Weg über die POISSON-Gleichung einfacher. Die folgende Aufgabe zeigt die prinzipielle Vorgehensweise.

Es soll das Potential eines endlich langen, homogen geladenen Hohlzylinders mit dem Innenradius a , dem Außenradius b und der Länge $2l$ als Lösung der POISSON-Gleichung in Zylinderkoordinaten berechnet werden, Abb. 1.52a. Da die Anordnung weder in z - noch in φ -Richtung begrenzt ist, lässt sich das Potential zunächst nicht mit Hilfe unendlicher Reihen darstellen. Um dies dennoch zu ermöglichen, wird gemäß Abb. 1.52b eine künstliche Begrenzung in Form eines leitenden, geerdeten Zylinders eingeführt. Bei genügend großem Radius c ist der Einfluss dieses Zylinders vernachlässigbar.

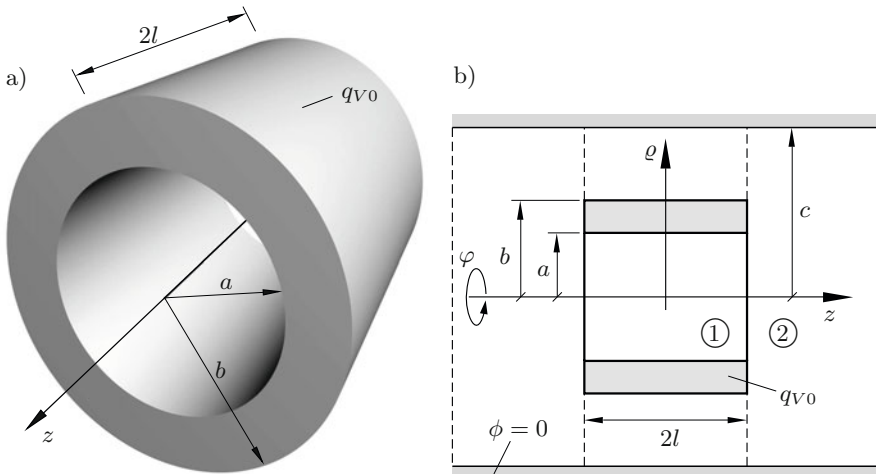


Abb. 1.52. (a) Homogen geladener Hohlzylinder. (b) Die Raumladung wird für die Feldberechnung konzentrisch mit einem leitenden, geerdeten Zylinder umgeben.

Lösung: Für das rotationssymmetrische Potential $\phi(\varrho, z)$ lautet die POISSON-Gleichung (1.9) in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{qV_0}{\varepsilon_0} \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq \varrho \leq b, |z| \leq l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.75)$$

Wir nehmen zunächst eine Aufteilung des Rechengebietes in den Teilraum 1 ($|z| < l$) und in den ladungsfreien Bereich 2 ($|z| > l$) vor. Dann kann im Raum 2 der Lösungsansatz (A.7) verwendet werden. Dabei wird die NEUMANN-Funktion aufgrund ihres singulären Verhaltens ausgeschlossen und anstelle der Hyperbelfunktionen werden abklingende Exponentialfunktionen verwendet. Da außerdem das Potential auf dem Zylinder $\varrho = c$ verschwinden muss, liegen auch die Separationskonstanten als $p = j_{0n}/c$ mit den Nullstellen j_{0n} der BESSEL-Funktion J_0 bereits fest und man kann den reduzierten Ansatz

$$\phi^{(2)}(\varrho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0 \left(j_{0n} \frac{\varrho}{c} \right) \exp \left(-j_{0n} \frac{|z-l|}{c} \right)$$

aufstellen. Im Bereich 1 ist der Lösungsansatz (A.7) wegen der vorhandenen Raumladung jedoch nicht mehr gültig. Wenn wir dort ebenfalls BESSEL-Funktionen wählen, was im Hinblick auf die in der Ebene $z = l$ zu erfüllenden Stetigkeitsbedingungen sinnvoll ist, dann müssen in z -Richtung zunächst noch unbekannte Funktionen $Z_n(z)$ angesetzt werden

$$\phi^{(1)}(\varrho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0 \left(j_{0n} \frac{\varrho}{c} \right) Z_n(z). \quad (1.76)$$

Zur Bestimmung der Funktionen Z_n wird (1.76) in (1.75) eingesetzt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ Z_n \left(\frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \right) J_0 \left(j_{0n} \frac{\varrho}{c} \right) + \frac{d^2 Z_n}{dz^2} J_0 \left(j_{0n} \frac{\varrho}{c} \right) \right\} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \frac{j_{0n}^2}{c^2} Z_n \right\} J_0 \left(j_{0n} \frac{\varrho}{c} \right) = -\frac{qV_0}{\varepsilon_0} \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq \varrho \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Dabei wurde die BESSEL'sche Differentialgleichung nullter Ordnung

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + f(x) = 0$$

angewendet. Ferner kann die Orthogonalitätsrelation (A.29) ausgenutzt werden. Multiplikation von (1.77) mit $\varrho J_0(j_{0n}\varrho/c)$ und Integration im Bereich $0 \leq \varrho \leq c$ liefert dann unter Verwendung von (A.27) die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \frac{j_{0n}^2}{c^2} Z_n = K_n \quad (1.78)$$

$$\text{mit } K_n = -\frac{qV_0}{\varepsilon_0} \frac{2}{j_{0n}} \frac{1}{J_1^2(j_{0n})} \left\{ \frac{b}{c} J_1 \left(j_{0n} \frac{b}{c} \right) - \frac{a}{c} J_1 \left(j_{0n} \frac{a}{c} \right) \right\}.$$

Die Lösung von (1.78) setzt man wie üblich aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen

$$Z_n(z) = A_n \cosh\left(j_{0n} \frac{z}{c}\right) - K_n \frac{c^2}{j_{0n}^2}$$

und das Potential nimmt somit im gesamten Bereich $\varrho < c$ die Form

$$\phi(\varrho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(j_{0n} \frac{\varrho}{c}\right) \begin{cases} A_n \cosh\left(j_{0n} \frac{z}{c}\right) - K_n \frac{c^2}{j_{0n}^2} & \text{für } |z| \leq l \\ B_n \exp\left(-j_{0n} \frac{|z-l|}{c}\right) & \text{für } |z| \geq l \end{cases}$$

mit den noch zu bestimmenden Koeffizienten A_n und B_n an. Nun gibt es am Übergang $z = l$ zwischen den Teilbereichen keinen Anlass zu Unstetigkeiten, weder für das Potential noch für die elektrische Feldstärke, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \phi(\varrho, l-0) = \phi(\varrho, l+0) &\rightarrow A_n \cosh\left(j_{0n} \frac{l}{c}\right) - K_n \frac{c^2}{j_{0n}^2} = B_n \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=l-0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=l+0} &\rightarrow A_n \sinh\left(j_{0n} \frac{l}{c}\right) = -B_n. \end{aligned}$$

Nach Auflösen sind die Konstanten und damit das gesuchte Potential vollständig bekannt und man erhält für $z \geq 0$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \phi(\varrho, z) = -\frac{q_{V0}c}{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(j_{0n} \frac{\varrho}{c}\right) \frac{b J_1\left(j_{0n} \frac{b}{c}\right) - a J_1\left(j_{0n} \frac{a}{c}\right)}{j_{0n}^3 J_1^2(j_{0n})} \times \\ \times \begin{cases} \exp\left(+j_{0n} \frac{z-l}{c}\right) + \exp\left(-j_{0n} \frac{z+l}{c}\right) - 2 & \text{für } 0 \leq z \leq l \\ \exp\left(-j_{0n} \frac{z+l}{c}\right) - \exp\left(-j_{0n} \frac{z-l}{c}\right) & \text{für } z \geq l. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Das Resultat soll nun anhand von Spezialfällen, für die einfachere Lösungen existieren, überprüft werden. Dabei wird von einem Vollzylinder mit $a = 0$ ausgegangen.

Man kann z.B. das elektrische Feld auf der Rotationsachse¹⁴ $\varrho = 0$ ohne weiteres mit Hilfe des COULOMB-Integrals (1.6) berechnen. Der Leser möge sich zur Übung selbst davon überzeugen, dass auf der Stirnseite der Raumladung die elektrische Feldstärke

$$E_z(\varrho = 0, z = l) = \frac{q_{V0}l}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{b}{2l} - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{l^2}}\right) \quad (1.80)$$

herrscht. Für $c \rightarrow \infty$ muss (1.79) mit $E_z = -\partial\phi/\partial z$ numerisch denselben Wert liefern. Abbildung 1.53a zeigt die relative Abweichung vom exakten Ergebnis (1.80) in Abhängigkeit vom Radius der geerdeten Hülle. Für das

¹⁴ Außerhalb der Achse ist es nicht möglich, einen geschlossenen Ausdruck für die Feldstärke anzugeben und es wäre eine numerische Integration erforderlich.

gewählte Beispiel liegt der Fehler schon bei einem Radienverhältnis $c/b = 3$ unter 1%. Dabei ist zu bedenken, dass der Rechenaufwand mit größerem Radius c ansteigt, da die Konvergenz der unendlichen Reihe in (1.79) erst später einsetzt. Ein Hinweis darauf ist die leichte Welligkeit in der Fehlerkurve bei größeren Radien. Bei der numerischen Auswertung wurden konstant 200 Summenglieder berücksichtigt.

Eine weitere gute Kontrolle lässt sich durch Betrachtung der elektrischen Feldstärke auf der Mantelfläche der Raumladung durchführen, wenn es sich um einen sehr langen Zylinder, $l \gg b$, handelt. Dann nämlich können die Randeffekte vernachlässigt werden und das Feld lässt sich mit dem GAUSS'schen Gesetz ermitteln. Auch hier überlassen wir es dem Leser zu zeigen, dass das Feld den Grenzwert

$$E_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} E_\varrho(\varrho = b) = \frac{qV_0 b}{2\varepsilon_0}$$

annimmt. In Abb. 1.53b wird deutlich, wie das aus (1.79) mit $E_\varrho = -\partial\phi/\partial\varrho$ numerisch gewonnene Feld bei zunehmender Zylinderlänge dem Wert E_0 zustrebt.

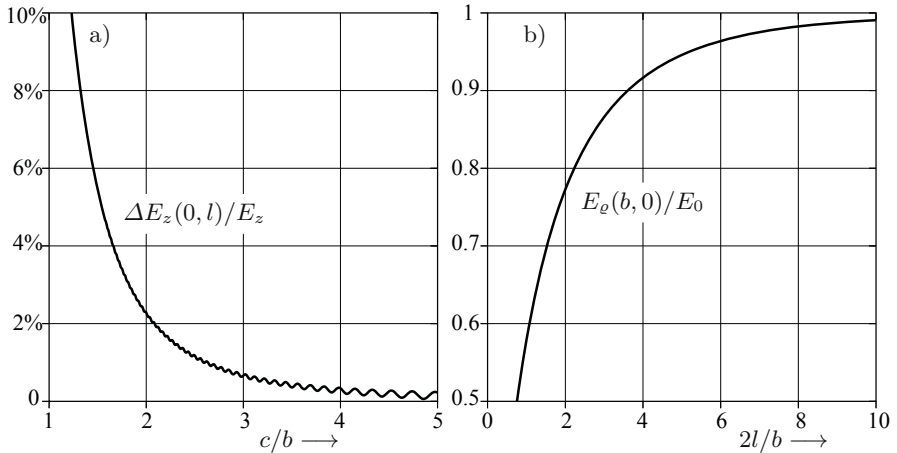


Abb. 1.53. (a) Relativer Fehler der elektrischen Feldstärke am Ort $\varrho = 0$, $z = l$ für $a = 0$ und $2l = b$. (b) Elektrische Feldstärke am Ort $\varrho = b$, $z = 0$ bezogen auf das elektrische Feld auf der Oberfläche eines unendlich langen Zylinders für $a = 0$ und $c = 3b$

Abschließend sind in Abb. 1.54 die Äquipotentiallinien eines geladenen Hohlzylinders dargestellt. Im Mittelpunkt stellt sich dabei ein singulärer Punkt S mit verschwindender Feldstärke ein. Es lässt sich zeigen, dass in unmittelbarer Umgebung dieses singulären Punktes die durch S verlaufende Äquipotentialfläche durch einen Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel $\alpha = 2 \arctan \sqrt{2} \approx 109^\circ$ angenähert werden kann.

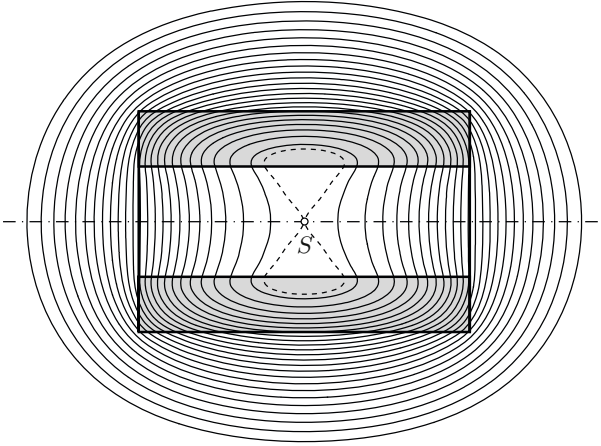
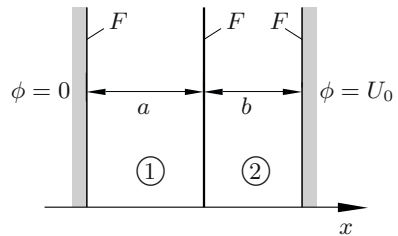


Abb. 1.54. Äquipotentiallinien eines homogen geladenen Hohlzylinders

Ergänzungsaufgaben

Aufgabe E29: Im Luftzwischenraum eines ebenen Plattenkondensators (Plattenfläche F , Abstand d und Randeffekte vernachlässigbar) befindet sich isoliert eine weitere dünne Platte gleicher Fläche, welche die gleichmäßig verteilte Gesamtladung Q trägt.

- a) Wie groß ist das elektrische Feld, wenn zwischen den Platten die Spannung U_0 liegt?
 b) Welche Kraft wirkt auf die innere Platte?

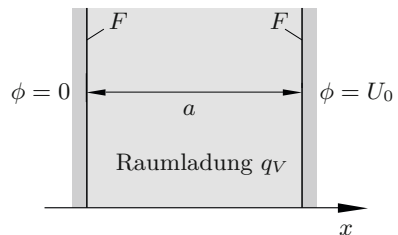


Lösung: a) $E_1 = -\frac{U_0}{d} - \frac{b}{d} \frac{Q}{\varepsilon_0 F}$, $E_2 = -\frac{U_0}{d} + \frac{a}{d} \frac{Q}{\varepsilon_0 F}$

b) $K = \frac{Q}{2} (E_1 + E_2) e_x$

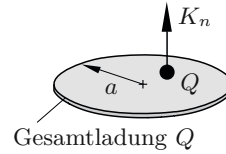
Aufgabe E30: Der Bereich zwischen zwei parallel angeordneten Elektroden mit der Fläche F und dem Abstand a sei homogen mit einer Raumladung der Dichte q_V gefüllt. Die linke Elektrode ist geerdet und die rechte hat das Potential $\phi = U_0$.

- a) Bestimme das Potential im Raumladungsbereich unter der Voraussetzung, dass es nur von der Koordinate x abhängt.
 b) Welche Ladung befindet sich auf der rechten Elektrode?



Lösung: a) $\phi = U_0 \frac{x}{a} + \frac{q_V a^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right)$, b) $Q = \left(\frac{\epsilon_0 U_0}{a} - \frac{q_V a}{2} \right) F$

Aufgabe E31: Gegeben ist eine kreisförmige, dünne Scheibe vom Radius a , die homogen mit der Gesamtladung Q belegt ist. Mit welcher Kraft senkrecht zur Scheibe wird eine Punktladung Q abgestoßen, die sich auf dieser Scheibe befindet?

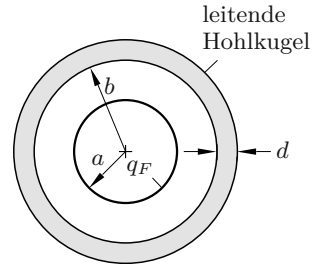


Lösung: $K_n = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2}$

Aufgabe E32: Gegeben ist eine kugelförmige, homogene Flächenladung q_F mit Radius a .

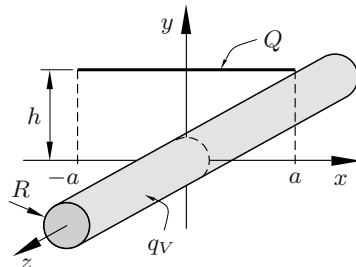
a) Wie groß ist die elektrostatische Feldenergie der Anordnung?

b) Wie groß ist die Feldenergie wenn die Flächenladung konzentrisch von einer leitenden, ungeladenen Hohlkugel mit dem Innenradius $b > a$ und der Wandstärke d umhüllt wird?



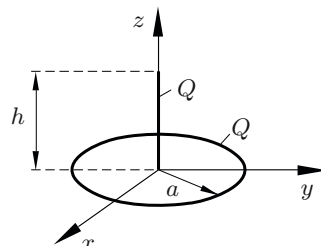
Lösung: a) $W_e = q_F^2 \frac{2\pi a^3}{\epsilon_0}$, b) $W_e = q_F^2 \frac{2\pi a^4}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b+d} \right)$

Aufgabe E33: Eine Raumladung ist homogen mit der Dichte q_V in einem unendlich langen Zylinder vom Radius R verteilt. In der Höhe h darüber wird rechtwinklig zur Zylinderachse ein gleichmäßig mit der Gesamtladung Q geladener Stab der Länge $2a$ angeordnet. Berechne die Kraft auf den Stab.



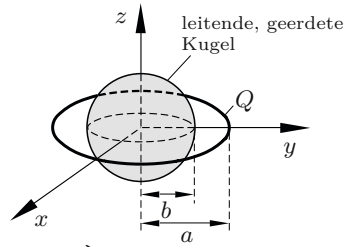
Lösung: $K = \frac{Qq_V}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{a} \arctan \frac{a}{h} e_y$

Aufgabe E34: Auf einem Ring mit dem Radius a ist die Gesamtladung Q homogen verteilt. Welche Kraft wirkt auf eine homogene Linienladung, die auf der z -Achse im Bereich $0 \leq z \leq h$ angeordnet ist und ebenfalls die Gesamtladung Q hat?



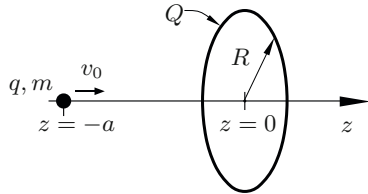
Lösung: $K = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right] e_z$

Aufgabe E35: In der Ebene $z = 0$ befindet sich eine kreisförmige Linienladung mit der Gesamtladung Q und dem Radius a . Man berechne das elektrische Feld auf der z -Achse, wenn sich eine leitende, geerdete Kugel mit dem Radius $b < a$ im Koordinatenursprung befindet.



Lösung:
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{b}{a} \frac{z}{(b^4/a^2 + z^2)^{3/2}} \right\} e_z$$

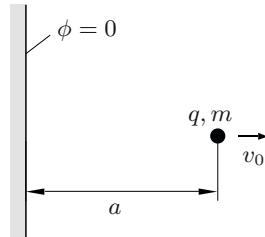
Aufgabe E36: Eine Punktladung (Masse m , Ladung q) bewege sich geradlinig auf der z -Achse. Konzentrisch um die z -Achse ist am Ort $z = 0$ ein homogener geladener Ring mit dem Radius R und der Gesamtladung Q angeordnet. Beide Ladungen haben das gleiche Vorzeichen. Welche Mindestgeschwindigkeit v_0 benötigt die Punktladung im Punkt $z = -a$, um durch den Ring hindurchzufiegen?



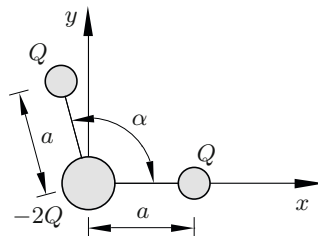
Lösung:
$$v_0 > \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right\}}$$

Aufgabe E37: Eine Punktladung (Ladung q , Masse m) befinde sich im Abstand a vor einer unendlich ausgedehnten, perfekt leitenden, geerdeten Platte. Welche Anfangsgeschwindigkeit benötigt die Punktladung, um ins Unendliche befördert zu werden?

Lösung:
$$v_0 \geq \frac{q}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi\epsilon_0 m a}}$$

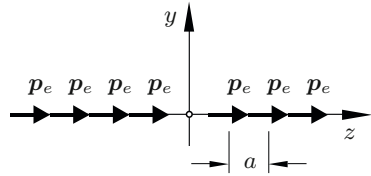


Aufgabe E38: Gegeben sind drei homogene, kugelförmige Raumladungen, die durch Punktladungen Q , bzw. $-2Q$ in ihren Mittelpunkten ersetzt werden können. Die Ladungen Q haben jeweils den Abstand a zur Ladung $-2Q$ und die beiden Achsen zwischen den positiven Ladungen und der negativen Ladung bilden wie im Bild angegeben den Winkel α . Bestimme das äquivalente Dipolmoment der Anordnung.



Lösung: $p_e = 2Qa \cos \frac{\alpha}{2}$

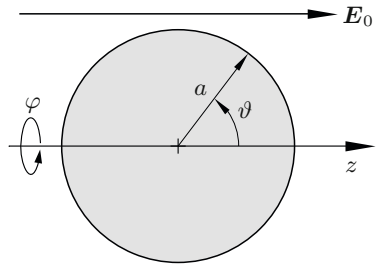
Aufgabe E39: Auf der z -Achse befindet sich mit Ausnahme des Ortes $z = 0$ eine unendlich lange Dipolkette. Die Dipole haben das Moment $\mathbf{p}_e$ und den gegenseitigen Abstand a voneinander. Bestimme das elektrische Feld im Koordinatenursprung.



Lösung: $E = \frac{p_e}{\pi \varepsilon_0 a^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \approx 1.202 \frac{p_e}{\pi \varepsilon_0 a^3}$

Aufgabe E40: Bestimme die Ladungsverteilung $q_F(\vartheta)$ auf einer leitenden Kugel, die in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld der Stärke E_0 eingebracht wird.

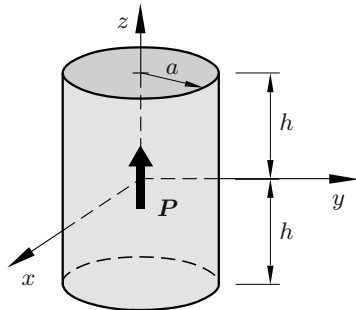
Hinweis: Das Störfeld der Kugel kann proportional zu einem Dipolfeld angesetzt werden.



Lösung: $q_F(\vartheta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \vartheta$

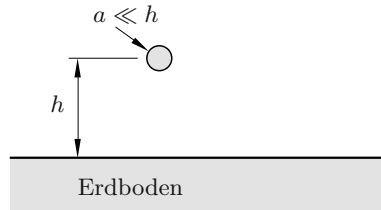
Aufgabe E41: Gegeben ist ein homogen polarisierter Stab mit der Höhe $2h$ und dem Radius a . Die Polarisation sei $\mathbf{P} = P_0 \mathbf{e}_z$. Berechne die elektrische Flussdichte $\mathbf{D}$ auf der z -Achse.

Lösung: $D_z = \frac{P_0}{2} [f(z+h) - f(z-h)]$
mit $f(\zeta) = \zeta / \sqrt{a^2 + \zeta^2}$

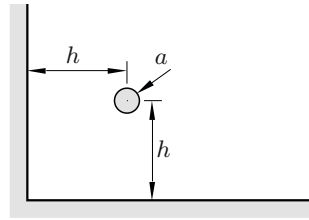


Aufgabe E42: Man bestimme die Kapazität C' pro Längeneinheit eines unendlich langen, dünnen, leitenden Drahtes vom Radius a , der in der Höhe h über dem Erdboden verläuft.

Lösung: $C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(2h/a)}$

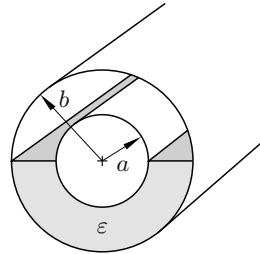


Aufgabe E43: Vor einem leitenden, geerdeten Winkel befinde sich gemäß Abbildung eine kleine, leitende Kugel mit dem Radius $a \ll h$. Berechne die Kapazität der Anordnung.



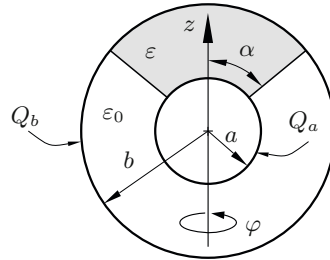
Lösung: $C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{h} + \frac{1}{2\sqrt{2}h} \right)^{-1}$

Aufgabe E44: Bestimme die Kapazität pro Längeneinheit eines unendlich langen Zylinderkondensators mit Innenradius a und Außenradius b , der zur Hälfte mit Dielektrikum $\epsilon \neq \epsilon_0$ gefüllt ist.



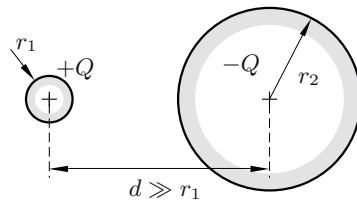
Lösung: $C' = \pi(\epsilon_0 + \epsilon) \left\{ \ln \frac{b}{a} \right\}^{-1}$

Aufgabe E45: Ein Kugelleiter (Radius a , Ladung Q_a) werde konzentrisch von einer leitenden Hohlkugel (Radius b , Ladung Q_b) umschlossen. Der Bereich $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ ist mit Dielektrikum gefüllt. Berechne die Energieänderung des elektrischen Feldes ΔW_e , wenn beide Elektroden leitend miteinander verbunden werden.



Lösung: $\Delta W_e = -\frac{Q_a^2}{4\pi} \frac{b-a}{ab} \frac{1}{\epsilon(1 - \cos \alpha) + \epsilon_0(1 + \cos \alpha)}$

Aufgabe E46: Gegeben ist eine sehr kleine metallische Kugel mit Radius r_1 und eine große mit Radius r_2 . Der Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten sei d . Die Kugeln tragen entgegengesetzt gleiche Ladungen $\pm Q$. Man bestimme die Kapazität der Anordnung.



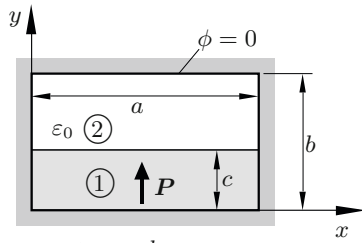
Lösung: $C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_1} + \frac{r_2 - d}{d^2} - \frac{r_2}{d^2 - r_2^2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{d}}$

Aufgabe E47: Die Ebenen $x = 0$ und $x = a$ sowie $y = 0$ und $y = b$ bilden eine leitende geerdete Bewandung. Der Bereich $0 < x < a$, $0 < y < c$ sei in y -Richtung polarisiert:

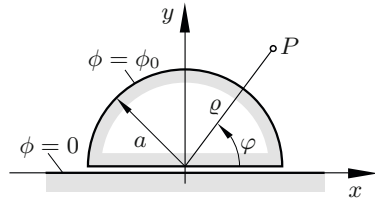
$$\mathbf{P} = e_y P_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

Bestimme das Potential im Bereich 2.

Lösung: $\phi_2 = \frac{a P_0}{\pi \varepsilon_0} \sin \frac{\pi x}{a} \sinh \frac{\pi(b-y)}{a} \sinh \frac{\pi c}{a} / \sinh \frac{\pi b}{a}$

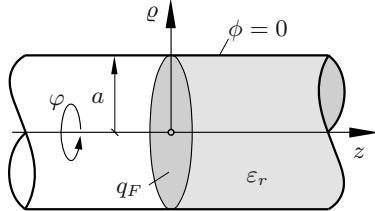


Aufgabe E48: Ein leitender Halbzylinder befindet sich isoliert in sehr kleinem Abstand über einem leitenden Halbraum. Der Halbzylinder habe das Potential ϕ_0 , der Halbraum das Potential $\phi = 0$. Berechne das Potential $\phi(\varrho, \varphi)$ der Anordnung.



Lösung: $\phi(\varrho, \varphi) = \phi_0 \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\varrho} \right)^{2n-1} \frac{\sin(2n-1)\varphi}{2n-1}$

Aufgabe E49: Gegeben ist ein unendlich langes, geerdetes Metallrohr vom Radius a . Das Rohr ist für $z > 0$ mit Dielektrikum $\varepsilon_r \neq 1$ gefüllt. In der Ebene $z = 0$ befinde sich die Flächenladung $q_F = q_{F0} J_0(j_{01} \varrho/a)$, wobei j_{01} die erste Nullstelle der BESSEL-Funktion J_0 sein soll. Bestimme das Potential innerhalb des Rohres.

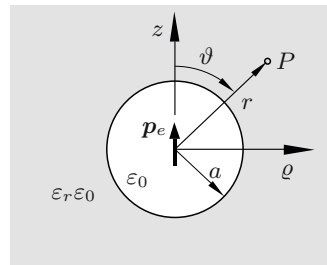


Lösung: $\phi(\varrho, z) = \frac{q_{F0} a}{j_{01} \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_r)} J_0 \left(j_{01} \frac{\varrho}{a} \right) e^{-j_{01} |z|/a}$

Aufgabe E50: Gegeben ist ein dielektrisches Medium (ε_r) mit einem kugelförmigen Hohlraum vom Radius a . Im Mittelpunkt des Hohlraumes befinde sich ein elektrostatischer Dipol mit dem Moment

$$\mathbf{p}_e = e_z p_0$$

Bestimme das Potential im Hohlraum.



Lösung: $\phi(r \leq a, \vartheta) = \frac{p_0}{4\pi \varepsilon_0 a^2} \left\{ \frac{a^2}{r^2} + 2 \frac{r}{a} \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + 2\varepsilon_r} \right\} \cos \vartheta$

Übungsbuch Elektromagnetische Felder

Filtz, M.; Henke, H.

2012, XIII, 281 S. 162 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-19741-3