

Einleitung.

Numerische Berechnungen im Gebiete der elliptischen Funktionen.

Für die Lösung von Aufgaben mittels elliptischer Funktionen, die bis zur Gewinnung von numerischen Endergebnissen getrieben werden müssen, werden hier zunächst einleitend Regeln und Methoden zur numerischen Berechnung der in der Theorie der elliptischen Funktionen auftretenden Grössen zusammengestellt.

0.1 Berechnung der Perioden bei gegebenen Invarianten.

Es sei eine besondere zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Verzweigungspunkten über der Ebene einer komplexen Veränderlichen z gegeben. Die Verzweigungspunkte mögen an den Stellen $z = e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ gelegen sein, die die Lösungen der biquadratischen Gleichung:

$$(1) \quad c_0 z^4 + 4c_1 z^3 + 6c_2 z^2 + 4c_3 z + c_4 = 0$$

sein mögen. Nach I, 121 ff.¹ berechnet man aus den Koeffizienten $c_0, c_1, \dots$ die zugehörigen Werte der rationalen Invarianten g_2, g_3, J .

Die einfachste irrationale absolute Invariante ist nach (8) in I, 345 das „Doppelverhältnis“ λ der vier Verzweigungspunkte, gegeben durch:

$$(2) \quad \lambda = \frac{e^{(1)} - e^{(2)}}{e^{(1)} - e^{(3)}} : \frac{e^{(4)} - e^{(2)}}{e^{(4)} - e^{(3)}}.$$

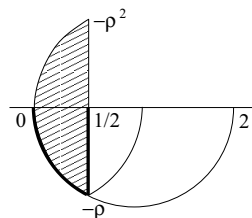


Fig. 1

Nach den in I, 345 ff. gegebenen Entwicklungen lassen sich die Bezeichnungen $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ in vier Arten so auf die Verzweigungspunkte verteilen, daß der numerische Wert λ einen Punkt des in Fig. 1 schraffierten Bereiches der λ -Ebene liefert. Unter ρ ist die komplexe dritte Wurzel der Einheit $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ verstanden, so daß die beiden Ecken des Be-

¹ I, 121 heißt Bd. 1, S. 121.

reiches bei $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ liegen. Der Kreis durch die beiden Ecken und den Nullpunkt $\lambda = 0$ begrenzt links den Bereich, während der rechte Rand die Verbindungsgerade der Ecken ist; vom Rande gilt nur der stärker ausgezogene Teil als dem Bereiche angehörig.

Um die transzendente Theorie zugänglich zu machen, bedarf man zunächst der Kenntnis der etwa „reduziert“ (vergl. I, 178) gewählten Perioden ω_1, ω_2 des zur Riemannschen Fläche gehörenden Weierstraßschen Normalintegrals erster Gattung oder auch der entsprechenden Jacobischen Grössen iK' und K (vergl. (6) in I, 370). Als erstes Ziel hat man die Berechnung des Periodenquotienten:

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{iK'}{K}$$

oder auch der Jacobischen Entwicklungsgrösse:

$$q = e^{\pi i \omega} = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

aus den gegebenen Invarianten anzusehen.

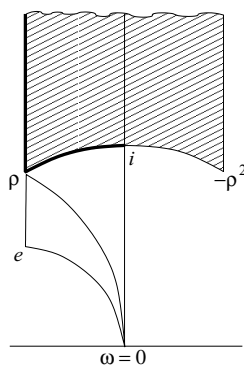


Fig. 2

Bei der Lösung dieser Aufgabe sind die Funktionen zweiter Stufe, und damit das Doppelverhältnis λ , denen der ersten Stufe, den rationalen Invarianten, überlegen. Der „reduzierte“ Periodenquotient ω liefert bekanntlich einen Zahlwert, dessen Bildpunkt in der positiven ω -Halbebene dem in Fig. 2 schraffierten Bereiche angehört; dieser Bereich zieht längs der imaginären ω -Achse ins Unendliche, wir sagen „nach der Spitze $\omega = i\infty$ “, und vom Rande gehört nur der stark ausgezogene Teil dem Bereiche an. Der Ausdruck von ω in $\lambda = k^2$ ist nun aus den Formeln (11) in I, 465 unmittelbar zu entnehmen. Man erhält:

$$(3) \quad \pi i \omega = -\pi \frac{K'}{K} = \log k^2 - 4 \log 2 + \frac{F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2)}{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2)},$$

wo F_1 und F die a. a. O. angegebenen Potenzreihen sind. Der Quotient dieser beiden Reihen werde in eine in der Umgebung von $k^2 = 0$ konvergente Reihe entwickelt:

$$(4) \quad \pi i \omega = \log k^2 - 4 \log 2 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{13}{26} k^4 + \frac{23}{26 \cdot 3} k^6 + \frac{2701}{2^{15}} k^8 + \dots$$

Man kann dieser Gleichung auch die Gestalt geben:

$$(5) \quad \frac{\pi i \omega}{4} = \log \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right)^4 + 13 \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right)^8 + \frac{368}{3} \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right)^{12} + \frac{2701}{2} \left(\frac{\sqrt{k}}{2} \right)^{16} + \dots$$

Durch Vermittlung der Exponentialreihe folgt weiter:

$$(6) \quad q^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{13} \\ + 1707\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{17} + \dots,$$

sowie hieraus endlich durch Erheben zur vierten Potenz:

$$(7) \quad q = \frac{1}{2^4}k^2 + \frac{1}{2^5}k^4 + \frac{21}{2^{10}}k^6 + \frac{31}{2^{11}}k^8 + \frac{6257}{2^{19}}k^{10} + \dots$$

Aus dem Vergleich der diedrisch geteilten Ebene von $\lambda = k^2$ (vergl. Fig. 83 in I, 445) mit der Dreiecksteilung der ω -Halbebene geht hervor, daß die vorliegenden Reihen für $|k| < 1$ konvergent sind, während der Punkt $\lambda = k^2 = 1$, dem Werte $\omega = 0$ entsprechend, der am Nullpunkte der λ -Ebene nächst gelegene irreguläre Punkt ist. Alle für uns in Betracht kommenden Werte von $\lambda = k^2$ (vergl. Fig. 1) liegen im Innern des Konvergenzkreises, abgesehen von den beiden Ecken $\lambda = -\rho^2$ und $-\rho$, bei denen man aber von vornherein die zugehörigen Werte $\omega = \rho$ und $-\rho^2$ kennt. Für den Gebrauch der aufgestellten Reihen ist es nötig zu wissen, ob alle Koeffizienten der Potenzen von k^2 positiv sind oder nicht. Hierüber ist bei der vorhin vollzogenen Herstellung der Reihen nicht ohne weiteres zu entscheiden. Es soll demnach noch eine zweite Art, die vorstehenden Formeln zu entwickeln, angegeben werden, bei der zugleich die aufgeworfene Frage im bejahenden Sinne beantwortet wird.

Man gehe von dem Ansatz aus:

$$(8) \quad \pi i \omega = 2 \log k - 4 \log 2 + a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + a_4 k^8 + \dots$$

und setze entsprechend der Landenschen Transformation² 2ω an Stelle von ω , wobei k nach (2) in II, 492 in:

$$k_1 = k(2\omega) = \frac{1 - k'}{1 + k'} = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{k^2}{(1 + \sqrt{1 - k^2})^2}$$

übergeht. Aus (8) folgt somit:

$$2\pi i \omega = 4 \log k - 4 \log(1 + \sqrt{1 - k^2}) - 4 \log 2 + a_1 k_1^2 + a_2 k_1^4 + a_3 k_1^6 + \dots,$$

so daß der Vergleich mit (8) ergibt:

$$(9) \quad 2(a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + \dots) = -4 \log(1 + \sqrt{1 - k^2}) + 4 \log 2 + a_1 k_1^2 + a_2 k_1^4 + \dots$$

² Die Transformation ersten Grades $\omega' = \omega + 1$ ergibt zwar Relationen zwischen den $a_1, a_2, a_3, \dots$, aus denen diese Koeffizienten aber noch nicht berechenbar sind.

Für $|k| < 1$ kann man die Quadratwurzel nach der binomischen Reihe entwickeln und gewinnt:

$$\log \left(1 + \sqrt{1 - k^2} \right) = \log 2 + \log \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{16}k^4 - \frac{1}{32}k^6 - \frac{5}{256}k^8 - \dots \right),$$

wo in der letzten Klammer alle Koeffizienten abgesehen vom Absolutgliede negativ sind. Mit Benutzung der Logarithmusreihe folgt weiter:

$$-\log(1 + \sqrt{1 - k^2}) + \log 2 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{32}k^4 + \frac{5}{96}k^6 + \frac{35}{1024}k^8 + \dots$$

mit durchweg positiven Entwicklungskoeffizienten. Die Gleichung (9) ergibt als identisch bestehend:

(10)

$$2a_1k^2 + 2a_2k^4 + 2a_3k^6 + \dots = k^2 + \frac{3}{8}k^4 + \frac{5}{24}k^6 + \frac{35}{256}k^8 + \dots + a_1k_1^2 + a_2k_1^4 + \dots,$$

wo (um es zu wiederholen) die Koeffizienten der ersten rechts stehenden Reihe durchweg positiv sind. Nun findet man weiter für k_1 folgende in der Umgebung von $k^2 = 0$ konvergente Entwicklung:

$$k_1 = \frac{(1 - \sqrt{1 - k^2})^2}{k^2} = k^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}k^2 + \frac{5}{64}k^4 + \frac{7}{128}k^6 + \dots \right),$$

wo wieder alle Koeffizienten positiv sind. Demnach treten endlich auch bei der Gleichung:

$$k_1^{2n} = k^{4n} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{4n} + \frac{n}{2^{4n}}k^2 + \dots \right)$$

in der Klammer ausnahmslos positive Entwicklungskoeffizienten auf. Trägt man in (10) rechter Hand für $k_1^2, k_1^4, k_1^6, \dots$ die hiermit sich ergebenden Potenzreihen in k^2 ein und ordnet die rechte Seite von (10) nach ansteigenden Potenzen von k^2 an, so ergibt der Vergleich gleich hoher Potenzen von k^2 rechts und links zur Bestimmung der Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \dots$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 1, & 2a_2 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{16}a_1, & 2a_3 &= \frac{5}{25} + \frac{1}{16}a_1, \\ 2a_4 &= \frac{35}{256} + \frac{7}{128}a_1 + \frac{1}{256}a_2, & \dots \end{aligned}$$

Auch weiterhin findet man für $2a_n$ stets einen linearen Ausdruck mit durchweg *positiven* rationalen Koeffizienten in $a_1, a_2, \dots, a_{\frac{n}{2}}$ oder in $a_1, a_2, \dots, a_{\frac{n-1}{2}}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Damit berechnen sich die $a_1, a_2, a_3, \dots$ durchweg als *positive* rationale Zahlen. Insbesondere führen die wirklich ausgerechneten Rekursionsformeln zu einer Bestätigung der schon in (4) angegebenen Anfangskoeffizienten. Daß auch in den weiteren Reihen (5), (6) und (7) die Koeffizienten durchweg positiv sind, ist nun selbstverständlich.

Bei der Berechnung von ω oder q aus k^2 mittels der angegebenen Formeln wendet man zweckmässig vorerst *einmal* die Landensche Transformation an. Schreibt man λ statt k^2 und setzt $k_1^2 = \lambda_1$, so gilt nach (2) in II, 492:³

$$\lambda_1 = \frac{\lambda^2}{(1 + \sqrt{1 - \lambda})^4}.$$

Mittels dieser Gleichung hat man den in Fig. 1 dargestellten Bereich von λ auf die λ_1 -Ebene abzubilden. Das Bild bedeckt einfach den in Fig. 3 schraffierten ganz nahe am Nullpunkte liegenden Bereich. Von den Randpunkten ist der mit a bezeichnete bei:

$$\lambda_1 = (-1 + \sqrt{2})^4 = 0,02944 \dots$$

dem Nullpunkte am nächsten und der mit b bezeichnete bei:

$$\lambda_1 = -(2 - \sqrt{3})^2 = -0,07180 \dots$$

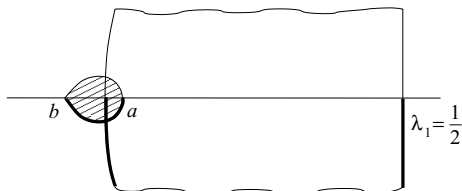


Fig. 3

dem Nullpunkte am fernsten⁴. Hiernach kommen nur noch Zahlen $\lambda_1 = k_1^2$ in Betracht, deren Beträge der Ungleichung:

$$(11) \quad |\lambda_1| < 0,072$$

genügen. Die Reihen konvergieren für solche Werte λ_1 sehr schnell.

Um in dieser Hinsicht genauere Angaben zu machen, entnehmen wir aus (6) durch Ausübung der Landenschen Transformation:

$$(12) \quad q^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{k_1}}{2} \left(1 + 2\frac{\lambda_1}{16} + 15\left(\frac{\lambda_1}{16}\right)^2 + 150\left(\frac{\lambda_1}{16}\right)^3 + 1707\left(\frac{\lambda_1}{16}\right)^4 \right) + R,$$

unter R den Reihenrest verstanden:

$$(13) \quad R = \frac{\sqrt{k_1}}{2} (a_5 \lambda_1^5 + a_6 \lambda_1^6 + a_7 \lambda_1^7 + \dots).$$

Da alle Koeffizienten $a_5, a_6, \dots$ positiv sind und die Bedingung (11) erfüllt ist, so gilt für den Absolutwert des Reihenrestes die Ungleichung:

$$(14) \quad |R| < \frac{1}{2} \sqrt[4]{0,072} (a_5 (0,072)^5 + a_6 (0,072)^6 + \dots).$$

Man weiß nun aus Entwicklungen des zweiten unten folgenden Abschnitts, daß für:

³ Vgl. die Umformung nach Gl. (8), S.3. [Anm. d. Hrsg.]

⁴ Man beweist leicht, daß $|\lambda_1|$ als Funktion von λ auf der Geraden zwischen $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\rho^2$ keinen Extremwert annimmt.

$$k = -1 + \sqrt{2} < 0, 4142136$$

die Werte:

$$\omega = i\sqrt{2}, \quad q^{\frac{1}{4}} = e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

zutreffen. Aus (14) folgt die um so mehr bestehende Ungleichung:

$$|R| < \frac{\sqrt[4]{0,072} \cdot (0,072)^5}{\sqrt[4]{-1+\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})^5} \cdot \frac{1}{2} \sqrt[4]{-1+\sqrt{2}} (a_5(-1+\sqrt{2})^5 + a_6(-1+\sqrt{2})^6 + \dots).$$

Der erste Bruch rechts ist $< 0,000126$; der übrige Bestandteil der rechten Seite hat zufolge der eben gemachten Angaben nach Formel (6) den Wert:

$$e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2} \left(1 + \frac{3-2\sqrt{2}}{8} + 15 \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{16} \right)^2 + 150 \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{16} \right)^3 + 1707 \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{16} \right)^4 \right).$$

Man stellt fest, daß diese Zahl $< 0,0000015$ ist. Hieraus geht hervor, daß der absolute Betrag des Restgliedes R in (12) sicher $< 2 \cdot 10^{-10}$ ist.

Vornehmlich wichtig ist der Fall reeller Koeffizienten c in der Gleichung (1). Das gewählte λ ist dann entweder reell und dem Intervall $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ angehörig, oder es liefert einen Punkt auf dem stark ausgezogenen Rande des schraffierten Bereiches der Fig. 1. Sollte der Punkt dem von $\lambda = \frac{1}{2}$ nach $\lambda = -\rho$ ziehenden geraden Teile des Randes angehören, so übe man die Substitution:

$$\lambda' = \frac{-1}{\lambda - 1}$$

aus und gewinnt dadurch einen Punkt auf dem durch $\lambda = -\rho$ und $\lambda = 2$ begrenzten Kreisbogen des Radius 1 um $\lambda = 1$ (vergl. Fig. 1). Es läuft dies darauf hinaus, daß wir jetzt nicht mit dem reduzierten ω , sondern mit einem ω auf der Verbindungsgeraden des Punktes $\omega = \rho$ mit der Ecke e in Fig. 2 arbeiten. Hat man nun ein λ auf dem unteren Halbkreise des Radius 1 um $\lambda = 1$ (vergl. Fig. 1) und also ein ω auf der Geraden zwischen e und $\omega = i\infty$ (vergl. Fig. 2), so ist dieser Fall leicht reduzierbar auf den Fall eines reellen λ des Intervalles $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Man übe nämlich einmal die Landensche Transformation aus und gelangt zu:

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{(1 + \sqrt{1-\lambda})^4}, \quad \omega' = 2\omega,$$

wo λ' reell im Intervalle $-1 < \lambda' < 0$ und $\omega' = -1 + i\eta$ mit $\eta > 1$ ist. Schreibt man endlich:

$$\lambda'' = \frac{\lambda'}{\lambda' - 1}, \quad \omega'' = \omega' + 1,$$

so hat man ein reelles λ'' des Intervalles $0 < \lambda'' < \frac{1}{2}$ und ein $\omega'' = i\eta$ mit $\eta > 1$, womit der genannte einfache Fall erreicht ist.

Für diesen Fall hatte bereits Jacobi⁵ eine Tafel berechnet, die sich sogar auf das Intervall $0 < \lambda < 1$ bezieht. Mit Jacobi nehmen wir als Argument nicht $\lambda = k^2$, sondern $\alpha = \arcsin k$; dabei wird α in Graden gemessen, so daß wir das Intervall von $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 90^\circ$ haben. Die Jacobische Tafel schreitet nach Zehnteln eines Grades fort und giebt die Werte $(^{10}\log q + 10)$ mit fünf Dezimalstellen. Am Schlusse der Einleitung ist unter I. eine fünfstellige Tafel für $(^{10}\log q + 10)$ abgedruckt, die nach Zwölfteln eines Grades fortschreitet⁶.

Nach Berechnung von q und damit von ω gilt es weiter, die reduzierten Perioden selbst zu berechnen. Da man (vergl. die Formeln (6) in I, 370):

$$\omega_2 = \frac{2K}{\sqrt{e_2 - e_1}}, \quad \omega_1 = \frac{2iK'}{\sqrt{e_2 - e_1}}, \quad K' = -iK\omega$$

hat, so dürfen wir unsere Aufgabe auf die Berechnung von K beschränken. Unmittelbar ist K als Funktion von $\lambda = k^2$ nach I, 465 durch:

$$(15) \quad K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \lambda + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \right)^2 \lambda^3 + \dots \right)$$

dargestellt. Aber wenn auch diese Reihe für ein λ im Innern des Bereiches der Fig. 1 konvergent ist, so ist sie doch gleichwohl nur sehr schlecht konvergent, wenn der absolute Betrag von $\lambda = k^2$ nicht hinreichend klein ist. Man hätte also nötigenfalls erst ein oder zwei Male die Landensche Transformation auszuüben, wofür in II, 492 die nötigen Formeln entwickelt sind.

Natürlich ist es auch möglich, ganz von der Darstellung (15) abzusehen und die Berechnung von K allein auf die wiederholte Landensche Transformation und damit auf das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauß zu gründen. In dieser Hinsicht sei zunächst an die von Jacobi aufgestellten unendlichen Produkte für K erinnert, die durch die Gleichungen (12) und (14) in II, 494 gegeben sind. Noch geeigneter ist die ebenda unter (20) gewonnene Formel:

$$(16) \quad K = \frac{\pi}{2M(1, k')},$$

wo $k' = \sqrt{1 - \lambda}$ ist und $M(1, k')$ das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen 1 und k' ist. Für reelle Werte von λ im Intervalle $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ist diese Formel zur numerischen Berechnung von K sogar ausserordentlich geeignet, da der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels sehr schnell konvergiert. Als Beispiel werde $\lambda = \frac{1}{2}$, $k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gewählt und der Wert:

⁵ Vergl. Jacobi's Werke, Bd. 1, S. 363 ff.

⁶ Vergl. die im „Traité de calcul intégral“ von Bertrand (Paris, 1870) mitgeteilte Tafel, die gegenüber Jacobi die Zwölftelung des Grades bevorzugt.

$$K = \frac{\pi}{2M(1, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{\pi}{\sqrt{2}M(\sqrt{2}, 1)}$$

bestimmt. Man hat also in die Formelkette (17) in II, 495 für a_0 und b_0 die Werte $\sqrt{2}$ und 1 einzutragen. Man findet nach der von Gauß durchgeführten Rechnung⁷:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,20710.67811.86547.52440 \dots, & b_1 &= 1,18920.71150.02721.06671 \dots, \\ a_2 &= 1,19815.69480.94634.29555 \dots, & b_2 &= 1,19812.35214.93120.12260 \dots, \\ a_3 &= 1,19814.02347.93877.20908 \dots, & b_3 &= 1,19814.02346.77307.20579 \dots, \\ a_4 &= 1,19814.02347.35592.20744 \dots, & b_4 &= 1,19814.02347.35592.20743 \dots \end{aligned}$$

Bei der zweiten Anwendung des Algorithmus findet man also das Mittel bereits auf vier Stellen genau, bei der dritten auf neun Stellen und bei der vierten sogar auf 19 Dezimalstellen genau. Als Wert für K selbst ergibt sich:

$$K = 1,8540746 \dots^8.$$

Nicht minder geeignet für die numerische Berechnung von K ist die aus (21) in I, 419 folgende Entwicklung:

$$(17) \quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots,$$

wo rechts die Reihe für den Nullwert der ϑ_3 -Funktion steht. Man hat sich dabei auf den aus den Invarianten bereits berechneten Wert von q zu stützen. Die für einen reduzierten Periodenquotienten in Betracht kommenden Werte von q entsprechen (vergl. Fig. 2, S. 2) der Ungleichung:

$$|q| \leq e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} < 0,066.$$

Unter dieser Voraussetzung ist die Reihe (17) ausserordentlich schnell konvergent. Nimmt man nur die beiden ersten Reihenglieder, so ist der Reihenrest absolut bereits $< 0,00004$, so daß man für den in (17) links stehenden Ausdruck einen Näherungswert erhält, dessen Differenz gegen den genauen Wert absolut kleiner als eine halbe Einheit der vierten Dezimalstelle ist. Nimmt man das nächste Glied $2q^4$ noch hinzu, so sinkt der Absolutbetrag des Reihenrestes in (17) rechts sogar unter $6 \cdot 10^{-9}$ herab. Wählt man wieder als Beispiel $\lambda = \frac{1}{2}$, also:

$$q = e^{-\pi} = 0,04321.39182.6 \dots,$$

⁷ Vergl. Gauß' Werke, Bd. 3, S. 364.

⁸ Gauß hat eine nach halben Graden fortschreitende Tafel mit *siebenstelliger* Genauigkeit für die arithmetisch-geometrischen Mittel zwischen 1 und den Sinus der Winkel von 0° bis 90° berechnet (mitgeteilt in Bd. 3 von Gauß' Werken, S. 403), die man zur Berechnung von K auf Grund von (16) benutzen kann.

so findet man:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1,08643.48112.1 \dots ,$$

$$K = 1,85407.46804 \dots$$

In Legendre's „Traité des fonctions elliptiques etc.“ (Paris, 1825 bis 1828), Bd. 2, ist für die reellen $\lambda = k^2$ des Intervalles $0 < \lambda < 1$ eine Tafel der numerischen Werte von K mitgeteilt. Als Argument ist wieder $\alpha = \arcsin k$ benutzt, so daß das Intervall von $\alpha = 0^\circ$ bis 90° in Betracht kommt. Die Tafel schreitet nach Graden fort und giebt die Werte von K auf zwölf Dezimalstellen. Die Legendresche Tafel für K ist auf 10 Stellen gekürzt am Schlusse der Einleitung unter II wiedergegeben. Ist die letzte Ziffer oder sind die letzten Ziffern überstrichen, so bedeutet das hier und weiterhin, daß der angegebene Wert um weniger als die Hälfte einer Einheit der letzten Stelle zu gross ist. Weiter ist am Schlusse der Einleitung unter III eine nach halben Graden fortschreitende Tafel der Werte $^{10}\log K$ auf sieben Dezimalstellen mitgeteilt. Die Tafeln geben für das einzelne α immer auch K' als das zum Komplementwinkel von α gehörende K . Die letzte Tafel ist für Interpolationsrechnungen brauchbar, da sich bereits die zweiten Differenzen langsam ändern.

Die Perioden E und E' des Legendreschen Normalintegrals zweiter Gattung sind durch die Gleichungen (14) in I, 373 gegeben. Hat man K und K' bereits berechnet, so kann man sich auf die Berechnung von E beschränken und hernach E' vermittels der Legendreschen Relation:

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$

bestimmen. Es liegt dann am nächsten, für E aus der Erklärung dieser Periode die Potenzreihe:

$$(18) \quad E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1^2}{2^2} \cdot k^2 - \frac{1^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot 3k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot 5k^6 - \dots \right)$$

herzustellen, die für $|k| < 1$ konvergent ist. Indessen konvergiert diese Reihe, wenn nicht $|k|$ bereits sehr klein ist, keineswegs sehr schnell. Es empfiehlt sich demnach, an Stelle von E zunächst die Periode η_2 des Weierstraßschen Normalintegrals zweiter Gattung zu berechnen, die nach I, 372 zu E in der Beziehung steht:

$$\eta_2 = 2\sqrt{e_2 - e_1}E - \frac{2e_2K}{\sqrt{e_2 - e_1}}.$$

Dann kann man sich, nachdem q und ω_2 bereits berechnet sind, zur Bestimmung von η_2 der aus (15) in I, 271 folgenden Reihe:

$$(19) \quad \frac{1}{24} - \frac{\eta_2\omega_2}{8\pi^2} = \frac{q^2}{1 - q^2} + \frac{2q^4}{1 - q^4} + \frac{3q^6}{1 - q^6} + \frac{4q^8}{1 - q^8} + \dots$$

bedienen. Da $|q| < 0,066$ gilt, so konvergiert diese Reihe gut. Nimmt man z. B. nur die beiden ersten Reihenglieder, so ist der Reihenrest absolut genommen, wie die Abschätzung zeigt, bereits kleiner als eine Einheit der vierten Dezimalstelle. Für die reellen Werte von $\lambda = k^2$ zwischen 0 und 1 hat Legendre im zweiten Bande seines oben genannten Werkes eine nach Graden fortschreitende zwölfstellige Tafel mitgeteilt. Am Schlusse der Einleitung sind unter II und III nach Graden bzw. halben Graden fortschreitende Tafeln für E und $^{10}\log E$ mit zehn bzw. sieben Dezimalstellen gegeben, die mit den Tafeln für K vereint sind. Die Tafeln liefern wieder zugleich E' als das zum Komplementwinkel von α gehörende E .

0.2 Berechnung der Invarianten bei gegebenen Perioden.

Weit einfacher erledigt sich die Berechnung der Invarianten bei gegebenen Perioden ω_1, ω_2 , da man hier an die Reihen für die Nullwerte der drei geraden ϑ -Funktionen anknüpfen kann, die für ein ω des Bereiches der Fig. 2 (S. 2) sehr schnell konvergieren. Nach Bestimmung von q hat man zur Berechnung jener Nullwerte nach I, 419 die Reihen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \vartheta_0 &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \dots, \\ \vartheta_2 &= 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \dots), \\ \vartheta_3 &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \dots. \end{aligned}$$

Da $|q| < 0,066$ gilt, so ist, falls man sich nur der beiden ersten Reihenglieder bedient, der Fehler bei ϑ_0 und ϑ_3 absolut bereits $< 4 \cdot 10^{-5}$ und bei ϑ_2 sogar $< 2 \cdot 10^{-7}$. Benutzt man die Näherungsformeln:

$$(2) \quad \vartheta_0 = 1 - 2q + 2q^4, \quad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6), \quad \vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4,$$

so ist der Fehler bei ϑ_0 und ϑ_3 absolut $< 6 \cdot 10^{-9}$ und bei ϑ_2 absolut $< 4 \cdot 10^{-10}$. Ist insbesondere das Periodenverhältnis ω rein imaginär, so gilt für die in diesem Falle reelle positive Zahl q die Ungleichung $q < 0,0433$. Der in (2) gegebene Wert ϑ_0 ist dann zwar etwas zu groß und der Wert ϑ_3 etwas zu klein; aber der Fehler ist in beiden Fällen $< 3 \cdot 10^{-10}$. Auch ϑ_2 ist etwas zu klein, aber der Fehler ist $< 2 \cdot 10^{-12}$.

Liegt ω auf dem stark ausgezogenen Rande des Bereiches der Fig. 2 (S. 2), so wird man, falls $|\omega| = 1$ ist, statt ω lieber den Periodenquotienten $\omega' = \frac{-1}{\omega+1}$ gebrauchen. Man hat dann nur noch Werte $\omega = -\frac{1}{2} + i\eta$ mit $\eta \geq \frac{1}{2}$. Die zugehörigen Werte ϑ_0 und ϑ_3 sind konjugiert imaginär:

$$\vartheta_0 = \varphi + i\psi, \quad \vartheta_3 = \varphi - i\psi,$$

wo φ und ψ als reelle positive Grössen gegeben sind durch:

$$\varphi = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots, \quad \psi = 2|q|(1 + q^8 + q^{24} + \dots).$$

Man übe dann einmal die Landensche Transformation aus, wofür die Formeln in II, 494 ff. gegeben sind. Setzt man:

$$q' = -q^2 = e^{-2\pi\eta} ,$$

so ist wegen $\eta \geq \frac{1}{2}$ jetzt wieder q' reell, positiv und $< 0,0433$. Man berechne wie oben $\vartheta_0(q')$ und $\vartheta_3(q')$ und findet durch Umkehrung des Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels:

$$(3) \quad \begin{cases} \vartheta_0 = +\sqrt{\vartheta_0(q')^2 + i\sqrt{\vartheta_3(q')^2 - \vartheta_0(q')^2}} , \\ \vartheta_3 = +\sqrt{\vartheta_0(q')^2 - i\sqrt{\vartheta_3(q')^2 - \vartheta_0(q')^2}} . \end{cases}$$

Für die Berechnung von ϑ_2 benutze man nach (23) in I, 419 die Beziehung:

$$\vartheta_2 = \sqrt[4]{\vartheta_3^4 - \vartheta_0^4} .$$

Aus den drei ϑ -Nullwerten werden nun die Invarianten auf Grund bekannter Formeln gewonnen. Man findet zunächst die achte Wurzel der Diskriminante nach I, 433:

$$(4) \quad \sqrt[8]{\Delta} = \frac{\pi}{\omega_2} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 .$$

Weiter folgert man aus (21) in I, 419:

$$(5) \quad \begin{cases} e_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega_2} \right)^2 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) , \\ e_2 = +\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega_2} \right)^2 (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4) , \\ e_3 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega_2} \right)^2 (\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4) , \end{cases}$$

woraus dann weiter die rationalen Invarianten g_2 und g_3 in der Gestalt:

$$(6) \quad g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) , \quad g_3 = 4e_1 e_2 e_3$$

gewonnen werden. Der Wert der absoluten rationalen Invariante J berechnet sich aus:

$$(7) \quad J : (J - 1) : 1 = g_2^3 : 27g_3^2 : \Delta .$$

Die Quotienten der ϑ -Nullwerte liefern nach I, 419:

$$(8) \quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} , \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$$

und damit in der vierten Potenz des ersten Quotienten die absolute irrationale Invariante $\lambda = k^2$.

Ein numerisches Beispiel wird die ausserordentliche Genauigkeit der Formeln (2) mit den drei ersten Reihengliedern noch besser veranschaulichen. Wir setzen etwa $\omega = 2i$ und berechnen aus (2) und (8) einen Näherungswert von $\sqrt{k}(2i)$. Zunächst hat man folgende Werte⁹:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\pi}{2}} &= 0,207.879.576.350.761 \dots, \\ e^{-\pi} &= 0,043.213.918.263.772 \dots, \\ e^{-2\pi} &= 0,001.867.442.731.707.988 \dots, \\ e^{-4\pi} &= 0,000.003.487.342.356.208.995 \dots, \\ e^{-8\pi} &= 0,000.000.000.012.161.556.709 \dots, \\ e^{-12\pi} &= 0,000.000.000.000.000.042.411.511 \dots. \end{aligned}$$

Hieraus findet man mit 15-stelliger Genauigkeit¹⁰ für ϑ_2 und ϑ_3 :

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= 0,415.760.602.596.025 \dots, \\ \vartheta_3 &= 1,003.734.885.487.739 \dots. \end{aligned}$$

Beim Quotienten von ϑ_2 und ϑ_3 wird bei Benutzung dieser Werte die 15^{te} Stelle unsicher. Man findet:

$$(9) \quad \sqrt{k}(2i) = 0,414.213.562.373.093 \dots.$$

Das Ergebnis kann man prüfen. Da nämlich $k^2(i) = \frac{1}{2}$ ist, so ergibt die Landensche Transformation nach (2) in II, 492:

$$\sqrt{k}(2i) = -1 + \sqrt{2}.$$

Nun ist der auf 15 Stellen genaue Wert (vergl. Gauß' Werke, Bd. 3, S. 364):

$$-1 + \sqrt{2} = 0,414.213.562.373.095 \dots.$$

Der Näherungswert (9) weicht also in der Tat erst in der 15^{ten} Stelle vom genauen Werte ab, nämlich um zwei Einheiten dieser Stelle.

Begnügt man sich mit zweigliedrigen Annäherungen:

$$(10) \quad \vartheta_0 = 1 - 2q, \quad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2), \quad \vartheta_3 = 1 + 2q,$$

so sind die Reihenreste im vorliegenden Beispiele $< 3 \cdot 10^{-11}$. Man findet:

⁹ Vergl. Gauß' Werke, Bd. 3, S. 426 ff.

¹⁰ Für den vorliegenden Wert q ist bei Benutzung der drei ersten Reihenglieder der Reihenrest absolut kleiner als $2 \cdot 10^{-19}$.

$$\vartheta_2 = 0,415.760.602.594 \dots ,$$

$$\vartheta_3 = 1,003.734.885.463 \dots .$$

Bei Berechnung des Quotienten wird die zehnte Stelle unsicher. Man erhält:

$$\sqrt{k}(2i) = 0,414.213.562.38 \dots ,$$

so daß sogar die zehnte Stelle noch richtig und erst die elfte Stelle um eine Einheit zu groß ist.

Man vergleiche hiermit die Genauigkeit, die eine auf die Tafel I (S. 22–25) gegründete Interpolationsrechnung bei Gebrauch einer siebenstelligen Logarithmentafel hat. Man findet für $\omega = 2i$:

$${}^{10}\log q + 10 = 7,271.247.5 ,$$

wofür die Tafel I beim Interpolieren:

$$\alpha = 9^\circ 52' 46''$$

liefert. Daraus erhält man:

$$(11) \quad k(2i) = 0,171.575.63 \dots ,$$

während der auf 13 Stellen genaue Wert:

$$k(2i) = 3 - 2\sqrt{2} = 0,171.572.875.253.8 \dots$$

ist. Der Näherungswert (11) ist also bereits in der sechsten Dezimalstelle um zwei Einheiten zu groß. Die Überlegenheit der auf die Reihen gegründeten Rechnungen ist damit evident.

0.3 Berechnung der elliptischen Funktionen bei gegebenem Argumente und gegebenen Perioden.

An dritter Stelle behandeln wir die Aufgabe, bei gegebenem Argumente u und gegebenen Perioden ω_1, ω_2 die elliptischen Funktionen zu berechnen. Das Periodenpaar sei reduziert gewählt. Die zugehörigen Werte der algebraischen Invarianten, sowie nötigenfalls die Perioden des Integrals zweiter Gattung denken wir nach 0.2 und 0.1 berechnet. An Stelle von u wird man demnach auch:

$$(1) \quad v = \frac{u}{\omega_2} \quad \text{oder} \quad w = u\sqrt{e_2 - e_1}$$

als gegebenes Argument benutzen können. Das Argument ist auf ein Periodenparallelogramm zu beschränken. Arbeitet man z. B. mit v , so wird der gegebene Wert v

in der v -Ebene zweckmässig dem in Fig. 4 schraffierten Parallelogramm der Ecken $\frac{\omega+1}{2}, \frac{\omega-1}{2}, \frac{-\omega+1}{2}, \frac{-\omega-1}{2}$ angehörig anzunehmen sein, wobei der Gitterpunkt ω der Parallelogrammteilung im Bereiche der reduzierten Periodenquotienten liegt.

Nach den eben gemachten Erfahrungen wird man die Berechnung der elliptischen Funktionen auf die vier ϑ -Reihen gründen:

$$(2) \quad \begin{cases} \vartheta_0(v) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots, \\ \vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots, \\ \vartheta_2(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \dots, \\ \vartheta_3(v) = 1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \dots. \end{cases}$$

Dabei sind zufolge Fig. 4 nur Argumente der Gestalt:

$$(3) \quad v = \frac{\lambda\omega + \mu}{2}$$

zuzulassen, wo λ und μ reelle Zahlen des Intervalles $-1 \leq \lambda, \mu \leq +1$ sind.

Wir haben nun die Fehler abzuschätzen, die den Ergebnissen anhaften, wenn man in (2) etwa die drei ersten Reihenglieder zulässt. Eine Fehlergrenze ist in jedem besonderen Falle leicht angebbar. Allgemein gilt folgende Abschätzung: Man hat erstlich für ϑ_0 die Darstellung:

$$\vartheta_0(v) = 1 - \varepsilon^{-1} q^{1-\lambda} + \varepsilon^{-2} q^{4-2\lambda} - \varepsilon^{-3} q^{9-3\lambda} + \dots - \varepsilon q^{1+\lambda} + \varepsilon^2 q^{4+2\lambda} - \varepsilon^3 q^{9+3\lambda} + \dots,$$

wo ε die Zahl $e^{\pi i \mu}$ des absoluten Betrages 1 ist. Da $|\lambda| \leq 1$ gilt, so ist, wenn man die drei ersten Reihenglieder zulässt, der Reihenrest, absolut genommen:

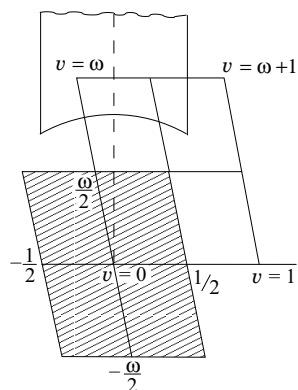


Fig. 4

$$|R| < 2 (|q|^6 + |q|^{12} + |q|^{20} + \dots) < \frac{2|q|^6}{1 - |q|^6}.$$

Da $|q| < 0,066$ gilt, so findet man leicht $|R| < 17 \cdot 10^{-8}$. Handelt es sich um ein Periodenrechteck, so ist $|q| < 0,044$. Dann findet man sogar $|R| < 15 \cdot 10^{-9}$. Dieselbe Abschätzung gilt für $\vartheta_3(v)$, so daß man bei Benutzung von drei Reihengliedern bereits sehr genaue Werte dieser Funktionen erhält. Bei der zweiten und dritten Reihe (2) ist, wenn man auch hier drei Glieder benutzt, der Reihenrest, absolut genommen, noch kleiner als bei der ersten und vierten, so daß bei Benutzung der Näherungsformeln:

$$(4) \quad \begin{cases} \vartheta_0(v) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v, \\ \vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v, \\ \vartheta_2(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v, \\ \vartheta_3(v) = 1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v \end{cases}$$

für alle in Betracht kommenden Werte v und ω ziemlich genaue Werte der ϑ -Funktionen gewonnen werden¹¹.

Die weiteren Berechnungen sind nach bekannten Regeln zu vollziehen. Die Jacobischen doppelperiodischen Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$ und $\operatorname{dn} w$ findet man nach I, 420 auf Grund der Formeln:

$$(5) \quad \operatorname{sn} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{cn} w = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{dn} w = \sqrt{k'} \cdot \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.$$

Hieraus berechnen sich endlich die Weierstraßschen Funktionen nach I, 389 in der Gestalt:

$$(6) \quad \wp(u) = e_1 + \frac{e_2 - e_1}{(\operatorname{sn} w)^2}, \quad \wp'(u) = -2(\sqrt{e_2 - e_1})^3 \cdot \frac{\operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w}{(\operatorname{sn} w)^3}.$$

0.4 Berechnung der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung bei gegebenen Grenzen und Invarianten.

Bei der Berechnung des elliptischen Integrals erster Gattung für vorgeschriebene obere Grenze und bei gegebenen algebraischen Invarianten wird angenommen, daß die Perioden nach 0.1 bereits berechnet sind. Es ist dann wegen der Beziehungen (1), S. 13 gleichgültig, ob man auf die Berechnung von u , v oder w ausgeht. Bevorzugt man w , so hat man aus der Gleichung:

$$(1) \quad w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

bei gegebenen k^2 und z den Wert w zu berechnen.

Der Wert $\lambda = k^2$ kann als dem schraffierten Bereiche der Fig. 1, S. 1, angehörig angenommen werden, was einem reduzierten Periodenpaare ω_1, ω_2 entspricht. Nach I, 394 kann ein erstes Abbild der

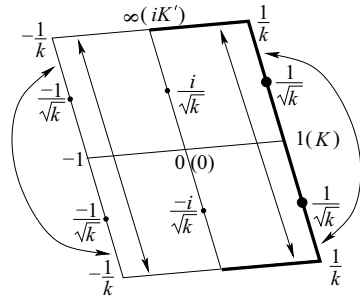


Fig. 5

¹¹ Die Abschätzung des Fehlers ist sehr wenig genau. Liegt insbesondere ω nicht sehr nahe am Rande seines Bereiches (Fig. 2, S. 2), so bleiben die Fehler weit unterhalb der berechneten Grenze.

Der nächstliegende Ansatz zur numerischen Berechnung von w knüpft an die Entwicklung von $(1 - k^2 z^2)^{-\frac{1}{2}}$ in die binomische Reihe an. Man hat:

$$(3) \quad w = \int_0^z \left(1 + \frac{1}{2}k^2 z^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}k^4 z^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}k^6 z^6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}k^8 z^8 + \dots \right) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

wo die Reihe unter der beschränkenden Voraussetzung $|z| < |\frac{1}{k}|$ gleichmässig konvergiert und also gliedweise integriert werden kann. Für das Integral zweiter Gattung:

$$(4) \quad Z = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz$$

findet man unter der gleichen Konvergenzbedingung entsprechend:

$$(5) \quad Z = \int_0^z \left(1 - \frac{1}{2}k^2 z^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}k^4 z^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}k^6 z^6 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8}k^8 z^8 - \dots \right) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Für den besonders wichtigen Fall eines Periodenrechtecks und damit reeller positiver K, K' ist wenigstens für reelle Argumente z des Intervalles von 0 bis 1 von Legendre ein grosses Tafelwerk für w und Z geschaffen und im zweiten Bande seines „Traité“ mitgeteilt. Legendre setzt:

$$(6) \quad z = \sin \varphi, \quad k = \sin \alpha$$

und erstreckt α sogar auf das Intervall von 0° bis 90° .

Man hat hier zunächst folgende weitere Entwicklung der Formeln (3) und (5): Man setzt $z = \sin \varphi$ in (3) ein und benutze φ als Argument. Es ist alsdann gliedweise zu integrieren und die Formel:

$$\int \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \varphi - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2n} \left(\sin^{2n-2} \varphi + \frac{2n-1}{2n-2} \sin^{2n-4} \varphi + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} \sin^{2n-6} \varphi + \dots + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3}{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2} \right)$$

zu benutzen. Man gelangt so für das Integral erster Gattung w zu der Entwicklung:

$$(7) \quad w = A\varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left(B_0 + \frac{2}{3}B_1 \sin^2 \varphi + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}B_2 \sin^4 \varphi + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}B_3 \sin^6 \varphi + \dots \right).$$

Dabei hat der Koeffizient A die folgende Bedeutung:

$$(8) \quad A = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 k^6 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}\right)^2 k^8 + \dots,$$

während die Koeffizienten $B_0, B_1, B_2, \dots$ durch:

$$(9) \quad \begin{aligned} B_0 &= A - 1, & B_1 &= A - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2, \\ B_2 &= A - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4, & \dots \end{aligned}$$

gegeben sind; sie stellen also die Reste der Reihe (8) bei Fortnahme von einem, zwei, drei usw. Anfangsgliedern dar. Die entsprechende Darstellung des Integrals zweiter Gattung ist:

$$(10) \quad Z = C\varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left(D_0 + \frac{2}{3} D_1 \sin^2 \varphi + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} D_2 \sin^4 \varphi + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} D_3 \sin^6 \varphi + \dots \right).$$

Der erste Koeffizient C ist gegeben durch:

$$(11) \quad C = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} k^6 - \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} k^8 - \dots,$$

während sich die übrigen Koeffizienten wieder aus Reihenresten berechnen:

$$(12) \quad \begin{aligned} D_0 &= -C + 1, & D_1 &= -C + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} k^2, \\ D_2 &= -C + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4, & \dots \end{aligned}$$

In (7) und (10) ist φ im ersten Gliede in Bogenmaß gemessen.

Die schon genannten Tafeln Legendre's für die Integrale w und Z schreiten sowohl in bezug auf w als auf α nach Graden fort und beziehen sich für α auch auf das Intervall von 45° bis 90° ; sie haben deshalb einen erheblichen Umfang. Die Werte w und Z sind für das Intervall von $\alpha = 0^\circ$ bis 45° zehnstellig, dann weiter bis 90° neunstellig angegeben. Am Schlusse der Einleitung ist unter IV eine siebenstellige Tafel des Integrals erster Gattung w mitgeteilt, die für φ nach Graden und für α nach fünf Graden fortschreitet. Tafel V giebt entsprechend die Werte des Integrals zweiter Gattung Z . Eine Überstreichung der letzten Ziffer oder der letzten Ziffern bedeutet wieder, daß der angegebene Wert um weniger als eine halbe Einheit der siebenten Dezimalstelle zu groß ist.

Die Reihen (3) und (5) bleiben natürlich so lange brauchbar, als es sich um ein z im Innern ihres Konvergenzkreises handelt, der den Nullpunkt der z -Ebene (vergl. Fig. 6, S. 16) zum Mittelpunkte hat, und dessen Peripherie durch den Punkt $z = \frac{1}{k}$ hindurchläuft. Handelt es sich um ein z ausserhalb dieses Kreises, so hat man zunächst eine Transformation vorzunehmen, die darauf hinausläuft, die ganze z -Ebene auf das Innere eines Kreises abzubilden. Regeln hierfür sind im Anschluß

an Weierstraß von H. A. Schwarz entwickelt¹² und auch von H. Burkhardt ausführlich dargestellt¹³.

Die eben genannten Regeln dürften indessen wohl kaum eine ausgedehntere Verwendung bei numerischen Rechnungen gefunden haben, da sie recht umständlich sind. Es ist demnach ein anderer Weg vorzuziehen, der auch hier die schnelle Konvergenz der Thetareihen verwertet. Nach der dritten Formel (27) in I, 420 hat man, wenn $\operatorname{dn} w$ in $z = \operatorname{sn} w$ ausgedrückt wird und für $\vartheta_3(v)$ und $\vartheta_0(v)$ ihre Reihen eingesetzt werden, den Ansatz:

$$(13) \quad \frac{\sqrt{1 - k^2 z^2}}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \dots}{1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots}.$$

Nach den Angaben von S. 14 dürfen wir bei allen für uns in Betracht kommenden Werten v (vergl. das schraffierte Parallelogramm der Fig. 4, S. 14) die hier im Zähler und Nenner stehenden Reihen auf die drei ersten Glieder kürzen. Setzt man weiter $\cos 4\pi v = 2 \cos^2 2\pi v - 1$, so folgt für die Berechnung von $\cos 2\pi v$ bei gegebenen z und k die quadratische Gleichung:

$$(14) \quad \frac{\sqrt{1 - k^2 z^2}}{\sqrt{k'}} = \frac{1 - 2q^4 + 2q \cos 2\pi v + 4q^4 \cos^2 2\pi v}{1 - 2q^4 - 2q \cos 2\pi v + 4q^4 \cos^2 2\pi v}.$$

Es bleibt dann noch die Bestimmung von v und damit von $w = 2Kv$ aus dem berechneten Werte von $\cos 2\pi v$.

In vielen Fällen ist es aber auch schon ausreichend, die Reihen in (13) auf ihre zwei ersten Glieder zu beschränken. Man findet dann die fertige Formel:

$$(15) \quad w = \frac{K}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{2q} \cdot \frac{\sqrt{1 - k^2 z^2} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1 - k^2 z^2} + \sqrt{k'}} \right).$$

Um diese Formel an einem Beispiele zu prüfen, das mittels der Legendreschen Tafel der Werte w nachgeprüft werden kann, wählen wir zwei reelle Werte z und k , etwa die zu den Winkeln $\varphi = 30^\circ$, $\alpha = 40^\circ$ gehörenden. Bei Benutzung einer siebenstelligen Tafel für die Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen findet man zunächst:

$$\begin{aligned} {}^{10}\log z + 10 &= {}^{10}\log \sin 30^\circ + 10 = 9,698\,9700, \\ {}^{10}\log k + 10 &= {}^{10}\log \sin 40^\circ + 10 = 9,808\,0675, \\ {}^{10}\log \sqrt{k'} + 10 &= \frac{1}{2} {}^{10}\log \cos 40^\circ + 10 = 9,942\,1270. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung:

¹² Man vergl. H. A. Schwarz „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Hrn. Prof. K. Weierstraß“, Göttingen, 1881 ff., S. 53 u. 67 ff.

¹³ Man vergl. H. Burkhardt „Elliptische Funktionen“, Leipzig, 1906, § 120 ff.

$$\sqrt{1 - k^2 z^2} = 0,946\,9457, \quad \sqrt{k'} = 0,875\,2396.$$

Für den Kosinus von $\frac{\pi w}{K}$ findet man:

$$\cos \frac{\pi w}{K} = \frac{1}{2q} \cdot \frac{717061}{18221853}.$$

Da die Jacobische Tafel für $^{10}\log q$ nur fünfstellig ist, so schreiben wir:

$$(16) \quad ^{10}\log \cos \frac{\pi w}{K} = \frac{\pi K'}{K} \, ^{10}\log e + ^{10}\log 717061 - ^{10}\log 2 - ^{10}\log 18221853.$$

Aus der unten folgenden Tafel III und der Logarithmentafel entnehmen wir die Werte:

$$\begin{aligned} ^{10}\log K' &= 0,286\,8114, \\ ^{10}\log K &= 0,252\,0684, \\ ^{10}\log \pi &= 0,497\,1499, \\ ^{10}\log(^{10}\log e) + 10 &= 9,637\,7843, \end{aligned}$$

woraus man leicht berechnet:

$$\frac{\pi K'}{K} \, ^{10}\log e = 1,478\,0103.^{14}$$

Damit findet sich der Wert der rechten Seite der Gleichung (16) sowie das Argument $\frac{\pi w}{K}$ in Gradmaß ausgedrückt:

$$^{10}\log \cos \frac{\pi w}{K} + 10 = 9,771\,9439, \quad 53^\circ 44' 15''.$$

Da w in Bogenmaß auszudrücken ist, so findet man bei Entnahme des Wertes von K aus der Tafel II:

$$w = 1,786\,7691 \cdot \frac{1}{180} \left(53 + \frac{4425}{6000} \right) = 0,533\,4250.$$

Nach der Tafel IV ist der auf sieben Stellen genaue Wert $0,533427\bar{5}$. Der berechnete Wert ist also um weniger als drei Einheiten der *sechsten* Dezimalstelle zu klein, so daß die Kürzung der in (13) rechts stehenden Reihe und damit die Benutzung der Näherungsformel (15) zur Berechnung des Integrals erster Gattung zu einem sehr günstigen Ergebnis führt.

¹⁴ Hier scheint Fricke eine Ungenauigkeit im Rechnen unterlaufen zu sein. Die letzten drei Dezimalen sollten lauten: 094. – Ungenauigkeiten in den Rechnungen wurden von den Herausgebern nicht überall korrigiert. [Anm. d. Hrsg.]

0.5 Tafeln.

Dieser Abschnitt enthält folgende Tafeln¹⁵:

Tafel I.	Werte von $(^{10}\log q + 10)$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$	22
Tafel II.	Werte von K und E bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$	26
Tafel III.	Werte von $^{10}\log K$ und $^{10}\log E$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$	28
Tafel IV.	Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$	30
Tafel V.	Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$	36

¹⁵ Bei Bedarf stehen weitere Tafeln zur Verfügung z. B. im „Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables“, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards, Washington (D.C.) 1964 (reprinted by Dover Publications, New York (N. Y.) 1965). [*Anm. d. Hrsg.*]

Tafel I: Werte von $(^{10}\log q + 10)$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	0'	5'	10'	15'	20'	25'
0	$-\infty$	3, 12127	3, 72333	4, 07552	4, 32539	4, 51922
1	5, 27966	5, 34918	5, 41356	5, 47349	5, 52955	5, 58221
2	5, 88178	5, 91725	5, 95132	5, 98411	6, 01571	6, 04620
3	6, 23408	6, 25789	6, 28106	6, 30363	6, 32564	6, 34710
4	6, 48411	6, 50203	6, 51960	6, 53681	6, 55369	6, 57025
5	6, 67813	6, 69250	6, 70664	6, 72056	6, 73426	6, 74775
6	6, 83673	6, 84874	6, 86058	6, 87226	6, 88379	6, 89516
7	6, 97071	6, 98122	6, 99140	7, 00147	7, 01143	7, 02127
8	7, 08723	7, 09626	7, 10520	7, 11405	7, 12281	7, 13148
9	7, 18991	7, 19795	7, 20592	7, 21381	7, 22164	7, 22939
10	7, 28185	7, 28910	7, 29628	7, 30341	7, 31048	7, 31750
11	7, 36510	7, 37170	7, 37825	7, 38475	7, 39120	7, 39760
12	7, 44119	7, 44725	7, 45326	7, 45924	7, 46517	7, 47107
13	7, 51128	7, 51688	7, 52244	7, 52797	7, 53346	7, 53893
14	7, 57625	7, 58146	7, 58664	7, 59178	7, 59690	7, 60199
15	7, 63683	7, 64170	7, 64654	7, 65136	7, 65615	7, 66091
16	7, 69359	7, 69816	7, 70271	7, 70724	7, 71174	7, 71622
17	7, 74699	7, 75130	7, 75560	7, 75987	7, 76402	7, 76835
18	7, 79743	7, 80151	7, 80558	7, 80962	7, 81365	7, 81766
19	7, 84524	7, 84911	7, 85297	7, 85681	7, 86064	7, 86445
20	7, 89068	7, 89437	7, 89804	7, 90170	7, 90535	7, 90898
21	7, 93400	7, 93752	7, 94103	7, 94452	7, 94801	7, 95147
22	7, 97540	7, 97877	7, 98213	7, 98547	7, 98880	7, 99212
23	8, 01505	8, 01828	8, 02150	8, 02471	8, 02791	8, 03109
24	8, 05311	8, 05621	8, 05931	8, 06239	8, 06547	8, 06853
25	8, 08971	8, 09270	8, 09568	8, 09865	8, 10161	8, 10456
26	8, 12498	8, 12786	8, 13073	8, 13360	8, 13645	8, 13930
27	8, 15901	8, 16179	8, 16457	8, 16734	8, 17010	8, 17285
28	8, 19190	8, 19459	8, 19728	8, 19996	8, 20263	8, 20529
29	8, 22374	8, 22635	8, 22895	8, 23155	8, 23414	8, 23672
30	8, 25461	8, 25714	8, 25966	8, 26218	8, 26469	8, 26719
31	8, 28456	8, 28702	8, 28947	8, 29191	8, 29435	8, 29679
32	8, 31367	8, 31606	8, 31844	8, 32082	8, 32319	8, 32556
33	8, 34199	8, 34431	8, 34664	8, 34895	8, 35126	8, 35357
34	8, 36957	8, 37184	8, 37410	8, 37636	8, 37861	8, 38086
35	8, 39646	8, 39867	8, 40088	8, 40308	8, 40528	8, 40747
36	8, 42271	8, 42487	8, 42702	8, 42917	8, 43132	8, 43346
37	8, 44835	8, 45046	8, 45256	8, 45467	8, 45677	8, 45886
38	8, 47342	8, 47548	8, 47754	8, 47960	8, 48166	8, 48371
39	8, 49796	8, 49998	8, 50200	8, 50401	8, 50602	8, 50803
40	8, 52199	8, 52397	8, 52595	8, 52792	8, 52990	8, 53186
41	8, 54555	8, 54750	8, 54944	8, 55137	8, 55331	8, 55524
42	8, 56867	8, 57058	8, 57249	8, 57439	8, 57629	8, 57818
43	8, 59138	8, 59325	8, 59512	8, 59699	8, 59885	8, 60072
44	8, 61368	8, 61553	8, 61737	8, 61920	8, 62104	8, 62287

Tafel I: Werte von $(^{10}\log q + 10)$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	30'	35'	40'	45'	50'	55'
0	4,67758	4,81148	4,92746	5,02977	5,12129	5,20408
1	5,63187	5,67883	5,72339	5,76578	5,80619	5,84481
2	6,07565	6,10414	6,13173	6,15847	6,18441	6,20960
3	6,36804	6,38849	6,40847	6,42801	6,44711	6,46581
4	6,58651	6,60246	6,61813	6,63352	6,64864	6,66351
5	6,76103	6,77411	6,78700	6,79970	6,81222	6,82456
6	6,90639	6,91748	6,92843	6,93925	6,94993	6,96049
7	7,03100	7,04063	7,05015	7,05957	7,06888	7,07811
8	7,14007	7,14858	7,15700	7,16534	7,17361	7,18180
9	7,23707	7,24470	7,25226	7,25975	7,26718	7,27454
10	7,32446	7,33136	7,33821	7,34501	7,35176	7,35846
11	7,40396	7,41028	7,41655	7,42277	7,42896	7,43510
12	7,47693	7,48274	7,48852	7,49427	7,49997	7,50564
13	7,54436	7,54975	7,55511	7,56045	7,56575	7,57101
14	7,60705	7,61208	7,61709	7,62206	7,62701	7,63194
15	7,66566	7,67037	7,67506	7,67973	7,68437	7,68899
16	7,72068	7,72512	7,72954	7,73393	7,73831	7,74266
17	7,77256	7,77675	7,78093	7,78508	7,78922	7,79333
18	7,82165	7,82562	7,82958	7,83352	7,83744	7,84135
19	7,86824	7,87202	7,87578	7,87953	7,88326	7,88698
20	7,91259	7,91620	7,91979	7,92336	7,92692	7,93047
21	7,95493	7,95837	7,96180	7,96522	7,96863	7,97202
22	7,99543	7,99873	8,00202	8,00529	8,00856	8,01181
23	8,03427	8,03744	8,04059	8,04374	8,04687	8,05000
24	8,07159	8,07463	8,07767	8,08069	8,08371	8,08672
25	8,10751	8,11044	8,11336	8,11628	8,11919	8,12209
26	8,14214	8,14497	8,14780	8,15061	8,15342	8,15622
27	8,17559	8,17833	8,18106	8,18378	8,18650	8,18920
28	8,20795	8,21060	8,21324	8,21588	8,21851	8,22113
29	8,23929	8,24186	8,24442	8,24698	8,24953	8,25207
30	8,26969	8,27219	8,27467	8,27715	8,27963	8,28210
31	8,29922	8,30164	8,30406	8,30647	8,30887	8,31127
32	8,32792	8,33028	8,33263	8,33498	8,33732	8,33966
33	8,35587	8,35816	8,36046	8,36274	8,36502	8,36730
34	8,38310	8,38534	8,38757	8,38980	8,39203	8,39425
35	8,40966	8,41185	8,41403	8,41620	8,41838	8,42054
36	8,43560	8,43774	8,43987	8,44199	8,44411	8,44623
37	8,46095	8,46304	8,46512	8,46720	8,46928	8,47135
38	8,48575	8,48779	8,48983	8,49187	8,49390	8,49593
39	8,51003	8,51204	8,51403	8,51603	8,51802	8,52001
40	8,53383	8,53579	8,53775	8,53971	8,54166	8,54361
41	8,55717	8,55909	8,56101	8,56293	8,56485	8,56676
42	8,58007	8,58197	8,58385	8,58574	8,58762	8,58950
43	8,60258	8,60443	8,60629	8,60814	8,60999	8,61184
44	8,62470	8,62653	8,62835	8,63017	8,63199	8,63381

Tafel I: Werte von $(^{10}\log q + 10)$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	0'	5'	10'	15'	20'	25'
45	8,63562	8,63744	8,63925	8,64105	8,64286	8,64466
46	8,65722	8,65900	8,66078	8,66256	8,66434	8,66611
47	8,67848	8,68024	8,68200	8,68375	8,68550	8,68725
48	8,69944	8,70118	8,70291	8,70464	8,70636	8,70809
49	8,72012	8,72183	8,72353	8,72524	8,72695	8,72865
50	8,74052	8,74221	8,74390	8,74558	8,74726	8,74895
51	8,76067	8,76234	8,76401	8,76567	8,76733	8,76900
52	8,78059	8,78224	8,78389	8,78554	8,78718	8,78883
53	8,80030	8,80193	8,80356	8,80519	8,80682	8,80845
54	8,81980	8,82142	8,82303	8,82464	8,82626	8,82787
55	8,83911	8,84072	8,84232	8,84392	8,84552	8,84711
56	8,85826	8,85985	8,86144	8,86302	8,86461	8,86619
57	8,87726	8,87883	8,88041	8,88198	8,88356	8,88513
58	8,89611	8,89768	8,89924	8,90080	8,90237	8,90393
59	8,91484	8,91640	8,91795	8,91951	8,92106	8,92261
60	8,93347	8,93501	8,93656	8,93811	8,93965	8,94120
61	8,95200	8,95354	8,95508	8,95662	8,95816	8,95970
62	8,97045	8,97199	8,97352	8,97506	8,97659	8,97812
63	8,98885	8,99038	8,99191	8,99344	8,99497	8,99650
64	9,00720	9,00873	9,01026	9,01178	9,01331	9,01484
65	9,02553	9,02704	9,02856	9,03011	9,03163	9,03316
66	9,04385	9,04537	9,04690	9,04883	9,04996	9,05148
67	9,06218	9,06371	9,06524	9,06677	9,06830	9,06983
68	9,08055	9,08208	9,08361	9,08515	9,08668	9,08822
69	9,09897	9,10051	9,10205	9,10359	9,10513	9,10667
70	9,11748	9,11902	9,12057	9,12212	9,12367	9,12522
71	9,13609	9,13765	9,13920	9,14076	9,14232	9,14388
72	9,15484	9,15641	9,15798	9,15955	9,16113	9,16270
73	9,17376	9,17535	9,17693	9,17852	9,18011	9,18170
74	9,19289	9,19450	9,19610	9,19771	9,19932	9,20094
75	9,21228	9,21391	9,21554	9,21717	9,21880	9,22044
76	9,23197	9,23362	9,23528	9,23694	9,23861	9,24027
77	9,25202	9,25371	9,25540	9,25709	9,25879	9,26050
78	9,27250	9,27423	9,27597	9,27770	9,27944	9,28119
79	9,29351	9,29529	9,29707	9,29886	9,30065	9,30244
80	9,31515	9,31699	9,31883	9,32067	9,32253	9,32438
81	9,33756	9,33946	9,34138	9,34330	9,34523	9,34716
82	9,36091	9,36291	9,36491	9,36692	9,36894	9,37097
83	9,38545	9,38756	9,38968	9,39181	9,39395	9,39610
84	9,41152	9,41377	9,41604	9,41833	9,42063	9,42294
85	9,43962	9,44207	9,44455	9,44704	9,44956	9,45210
86	9,47054	9,47328	9,47605	9,47886	9,48169	9,48456
87	9,50569	9,50889	9,51213	9,51542	9,51877	9,52218
88	9,54798	9,55200	9,55613	9,56036	9,56472	9,56921
89	9,60564	9,61185	9,61844	9,62547	9,63302	9,64122

Tafel I: Werte von $(^{10}\log q + 10)$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	30'	35'	40'	45'	50'	55'
45	8,64646	8,64826	8,65006	8,65185	8,65364	8,65543
46	8,66789	8,66966	8,67143	8,67320	8,67496	8,67672
47	8,68900	8,69074	8,69249	8,69423	8,69597	8,69771
48	8,70981	8,71154	8,71326	8,71497	8,71669	8,71840
49	8,73035	8,73205	8,73375	8,73544	8,73714	8,73883
50	8,75063	8,75231	8,75398	8,75566	8,75733	8,75900
51	8,77066	8,77232	8,77398	8,77563	8,77729	8,77894
52	8,79047	8,79211	8,79375	8,79539	8,79703	8,79866
53	8,81007	8,81170	8,81332	8,81494	8,81656	8,81818
54	8,82948	8,83109	8,83270	8,83430	8,83591	8,83751
55	8,84871	8,85030	8,85190	8,85349	8,85508	8,85667
56	8,86778	8,86936	8,87094	8,87252	8,87410	8,87568
57	8,88670	8,88827	8,88984	8,89141	8,89298	8,89454
58	8,90549	8,90705	8,90861	8,91017	8,91173	8,91329
59	8,92417	8,92572	8,92727	8,92882	8,93037	8,93192
60	8,94274	8,94429	8,94583	8,94737	8,94891	8,95046
61	8,96123	8,96277	8,96431	8,96584	8,96738	8,96892
62	8,97966	8,98119	8,98272	8,98425	8,98579	8,98732
63	8,99803	8,99956	9,00109	9,00261	9,00414	9,00567
64	9,01637	9,01789	9,01942	9,02095	9,02247	9,02400
65	9,03469	9,03621	9,03774	9,03927	9,04079	9,04232
66	9,05301	9,05454	9,05607	9,05760	9,05912	9,06065
67	9,07136	9,07289	9,07442	9,07595	9,07748	9,07902
68	9,08975	9,09129	9,09282	9,09436	9,09590	9,09743
69	9,10821	9,10975	9,11130	9,11284	9,11439	9,11593
70	9,12677	9,12832	9,12987	9,13142	9,13298	9,13453
71	9,14544	9,14701	9,14857	9,15014	9,15170	9,15327
72	9,16428	9,16585	9,16743	9,16901	9,17059	9,17218
73	9,18330	9,18489	9,18649	9,18809	9,18969	9,19129
74	9,20255	9,20417	9,20578	9,20740	9,20903	9,21065
75	9,22208	9,22372	9,22537	9,22701	9,22866	9,23031
76	9,24194	9,24361	9,24529	9,24697	9,24865	9,25033
77	9,26220	9,26391	9,26562	9,26734	9,26906	9,27078
78	9,28294	9,28469	9,28645	9,28821	9,28997	9,29174
79	9,30424	9,30605	9,30786	9,30968	9,31150	9,31332
80	9,32625	9,32812	9,32999	9,33187	9,33376	9,33566
81	9,34910	9,35105	9,35301	9,35497	9,35694	9,35892
82	9,37301	9,37506	9,37712	9,37919	9,38127	9,38335
83	9,39827	9,40044	9,40263	9,40483	9,40705	9,40928
84	9,42527	9,42762	9,42998	9,43237	9,43476	9,43718
85	9,45466	9,45724	9,45985	9,46248	9,46514	9,46783
86	9,48746	9,49040	9,49338	9,49639	9,49945	9,50255
87	9,52565	9,52918	9,53278	9,53646	9,54021	9,54405
88	9,57384	9,57863	9,58359	9,58875	9,59412	9,59974
89	9,65025	9,66035	9,67196	9,68579	9,70342	9,72938

Tafel II: Werte von K und E bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	K	E
0	1, 57079 63268	1, 57079 63268
1	1, 57091 59581	1, 57067 67091
2	1, 57127 49524	1, 57031 79199
3	1, 57187 36105	1, 56972 01504
4	1, 57271 24350	1, 56888 37196
5	1, 57379 21309	1, 56780 90740
6	1, 57511 36078	1, 56649 67878
7	1, 57667 79816	1, 56494 75630
8	1, 57848 65777	1, 56316 22295
9	1, 58054 09339	1, 56114 17454
10	1, 58284 28043	1, 55888 71966
11	1, 58539 41638	1, 55639 97978
12	1, 58819 72125	1, 55368 08919
13	1, 59125 43820	1, 55073 19510
14	1, 59456 83409	1, 54755 45759
15	1, 59814 20021	1, 54415 04969
16	1, 60197 85301	1, 54052 15741
17	1, 60608 13494	1, 53666 97976
18	1, 61045 41538	1, 53259 72877
19	1, 61510 09161	1, 52830 62961
20	1, 62002 58991	1, 52379 92053
21	1, 62523 36678	1, 51907 85300
22	1, 63072 91016	1, 51414 69175
23	1, 63651 74093	1, 50900 71479
24	1, 64260 41437	1, 50366 21354
25	1, 64899 52185	1, 49811 49284
26	1, 65569 69263	1, 49236 87111
27	1, 66271 59585	1, 48642 68037
28	1, 67005 94263	1, 48029 26638
29	1, 67773 48841	1, 47396 98872
30	1, 68575 03548	1, 46746 22093
31	1, 69411 43573	1, 46077 35062
32	1, 70283 52364	1, 45390 77961
33	1, 71192 46952	1, 44686 92407
34	1, 72139 08314	1, 43966 21471
35	1, 73124 51757	1, 43229 09693
36	1, 74149 92344	1, 42476 03101
37	1, 75216 52365	1, 41707 49234
38	1, 76325 61841	1, 40923 97160
39	1, 77478 59091	1, 40125 97508
40	1, 78676 91349	1, 39314 02485
41	1, 79922 15441	1, 38488 65914
42	1, 81215 98537	1, 37650 43258
43	1, 82560 18981	1, 36799 91659
44	1, 83956 67211	1, 35937 69973
45	1, 85407 46773	1, 35064 38810

Tafel II: Werte von K und E bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	K	E
45	1, 85407 46773	1, 35064 38810
46	1, 86914 75460	1, 34180 60581
47	1, 88480 86574	1, 33286 99541
48	1, 90108 30365	1, 32384 21845
49	1, 91799 75464	1, 31472 95603
50	1, 93558 10960	1, 30553 90943
51	1, 95386 48093	1, 29627 80080
52	1, 97288 22663	1, 28695 37388
53	1, 99266 97557	1, 27757 39483
54	2, 01326 65652	1, 26814 65311
55	2, 03471 53122	1, 25867 96248
56	2, 05706 23228	1, 24918 16206
57	2, 08035 80667	1, 23966 11753
58	2, 10465 76585	1, 23012 72242
59	2, 13002 14384	1, 22058 89958
60	2, 15651 56475	1, 21105 60276
61	2, 18421 32169	1, 20153 81841
62	2, 21319 46950	1, 19204 56766
63	2, 24354 93417	1, 18258 90849
64	2, 27537 64296	1, 17317 93827
65	2, 30878 67982	1, 16382 79645
66	2, 34390 47244	1, 15454 66775
67	2, 38087 01906	1, 14534 48567
68	2, 41984 16537	1, 13624 43647
69	2, 46099 94583	1, 12724 96378
70	2, 50455 00790	1, 11837 77380
71	2, 55073 14496	1, 10964 34135
72	2, 59981 97301	1, 10106 21688
73	2, 65213 80046	1, 09265 03455
74	2, 70806 76146	1, 08442 52194
75	2, 76806 31454	1, 07640 51131
76	2, 83267 25829	1, 06860 95330
77	2, 90256 49407	1, 06105 93338
78	2, 97856 89512	1, 05377 69204
79	3, 06172 86120	1, 04678 64993
80	3, 15338 52519	1, 04011 43957
81	3, 25530 29421	1, 03378 94624
82	3, 36986 80267	1, 02784 36197
83	3, 50042 24992	1, 02231 25882
84	3, 65185 59695	1, 01723 69183
85	3, 83174 19998	1, 01266 35062
86	4, 05275 81665	1, 00864 79569
87	4, 33865 39760	1, 00525 85872
88	4, 74271 72653	1, 00258 40855
89	5, 43490 98296	1, 00075 15777
90	∞	1, 00000 00000

Tafel III: Werte von $^{10}\log K$ und $^{10}\log E$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$	α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$
0,0	0,196 1199	0,196 1199	22,5	0,213 1421	0,179 4377
0,5	0,196 1281	0,196 1116	23,0	0,213 9206	0,178 6913
1,0	0,196 1530	0,196 0868	23,5	0,214 7175	0,177 9288
1,5	0,196 1943	0,196 0455	24,0	0,215 5329	0,177 1503
2,0	0,196 2522	0,195 9876	24,5	0,216 3668	0,176 3557
2,5	0,196 3266	0,195 9132	25,0	0,217 2194	0,175 5451
3,0	0,196 4176	0,195 8222	25,5	0,218 0907	0,174 7186
3,5	0,196 5252	0,195 7148	26,0	0,218 9808	0,173 8761
4,0	0,196 6493	0,195 5908	26,5	0,219 8899	0,173 0178
4,5	0,196 7900	0,195 4502	27,0	0,220 8181	0,172 1435
5,0	0,196 9474	0,195 2932	27,5	0,221 7654	0,171 2535
5,5	0,197 1213	0,195 1196	28,0	0,222 7319	0,170 3476
6,0	0,197 3119	0,194 9295	28,5	0,223 7179	0,169 4260
6,5	0,197 5191	0,194 7229	29,0	0,224 7233	0,168 4886
7,0	0,197 7430	0,194 4998	29,5	0,225 7484	0,167 5356
7,5	0,197 9836	0,194 2602	30,0	0,226 7933	0,166 5669
8,0	0,198 2409	0,194 0041	30,5	0,227 8580	0,165 5827
8,5	0,198 5149	0,193 7314	31,0	0,228 9427	0,164 5829
9,0	0,198 8057	0,193 4423	31,5	0,230 0476	0,163 5676
9,5	0,199 1134	0,193 1367	32,0	0,231 1728	0,162 5369
10,0	0,199 4378	0,192 8147	32,5	0,232 3184	0,161 4907
10,5	0,199 7791	0,192 4762	33,0	0,233 4847	0,160 4293
11,0	0,200 1373	0,192 1212	33,5	0,234 6716	0,159 3525
11,5	0,200 5124	0,191 7497	34,0	0,235 8795	0,158 2606
12,0	0,200 9044	0,191 3618	34,5	0,237 1084	0,157 1535
12,5	0,201 3135	0,190 9575	35,0	0,238 3586	0,156 0313
13,0	0,201 7396	0,190 5367	35,5	0,239 6301	0,154 8940
13,5	0,202 1828	0,190 0996	36,0	0,240 9233	0,153 7418
14,0	0,202 6431	0,189 6460	36,5	0,242 2382	0,152 5747
14,5	0,203 1206	0,189 1760	37,0	0,243 5751	0,151 3928
15,0	0,203 6154	0,188 6896	37,5	0,244 9341	0,150 1962
15,5	0,204 1274	0,188 1869	38,0	0,246 3154	0,148 9849
16,0	0,204 6567	0,187 6678	38,5	0,247 7193	0,147 7590
16,5	0,205 2034	0,187 1323	39,0	0,249 1460	0,146 5186
17,0	0,205 7675	0,186 5806	39,5	0,250 5956	0,145 2639
17,5	0,206 3492	0,186 0125	40,0	0,252 0684	0,143 9948
18,0	0,206 9484	0,185 4281	40,5	0,253 5647	0,142 7116
18,5	0,207 5652	0,184 8274	41,0	0,255 0846	0,141 4142
19,0	0,208 1997	0,184 2104	41,5	0,256 6285	0,140 1028
19,5	0,208 8519	0,183 5772	42,0	0,258 1965	0,138 7776
20,0	0,209 5220	0,182 9277	42,5	0,259 7889	0,137 4385
20,5	0,210 2099	0,182 2621	43,0	0,261 4061	0,136 0858
21,0	0,210 9158	0,181 5802	43,5	0,263 0482	0,134 7196
21,5	0,211 6398	0,180 8822	44,0	0,264 7155	0,133 3399
22,0	0,212 3818	0,180 1680	44,5	0,266 4085	0,131 9470

Tafel III: Werte von $^{10}\log K$ und $^{10}\log E$ bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$	α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$
45,0	0,268 1272	0,130 5409	67,5	0,380 2283	0,057 2032
45,5	0,269 8722	0,129 1217	68,0	0,383 7869	0,055 4717
46,0	0,271 6436	0,127 6897	68,5	0,387 4139	0,053 7438
46,5	0,273 4418	0,126 2450	69,0	0,391 1115	0,052 0201
47,0	0,275 2673	0,124 7878	69,5	0,394 8825	0,050 3014
47,5	0,277 1202	0,123 3181	70,0	0,398 7297	0,048 5885
48,0	0,279 0011	0,121 8362	70,5	0,402 6560	0,046 8822
48,5	0,280 9102	0,120 3423	71,0	0,406 6647	0,045 1834
49,0	0,282 8480	0,118 8364	71,5	0,410 7592	0,043 4930
49,5	0,284 8150	0,117 3189	72,0	0,414 9432	0,041 8118
50,0	0,286 8114	0,115 7899	72,5	0,419 2208	0,040 1409
50,5	0,288 8377	0,114 2496	73,0	0,423 5961	0,038 4812
51,0	0,290 8945	0,112 6982	73,5	0,428 0740	0,036 8337
51,5	0,292 9822	0,111 1359	74,0	0,432 6595	0,035 1996
52,0	0,295 1012	0,109 5629	74,5	0,437 3581	0,033 5799
52,5	0,297 2520	0,107 9796	75,0	0,442 1760	0,031 9758
53,0	0,299 4353	0,106 3860	75,5	0,447 1196	0,030 3884
53,5	0,301 6515	0,104 7826	76,0	0,452 1964	0,028 8190
54,0	0,303 9013	0,103 1694	76,5	0,457 4142	0,027 2690
54,5	0,306 1851	0,101 5469	77,0	0,462 7819	0,025 7397
55,0	0,308 5037	0,099 9152	77,5	0,468 3095	0,024 2324
55,5	0,310 8575	0,098 2747	78,0	0,474 0077	0,022 7487
56,0	0,313 2474	0,096 6256	78,5	0,479 8888	0,021 2901
56,5	0,315 6741	0,094 9683	79,0	0,485 9667	0,019 8581
57,0	0,318 1381	0,093 3030	79,5	0,492 2569	0,018 4545
57,5	0,320 6403	0,091 6301	80,0	0,498 7770	0,017 0811
58,0	0,323 1815	0,089 9500	80,5	0,505 5474	0,015 7396
58,5	0,325 7624	0,088 2630	81,0	0,512 5914	0,014 4321
59,0	0,328 3840	0,086 5694	81,5	0,519 9360	0,013 1605
59,5	0,331 0471	0,084 8697	82,0	0,527 6129	0,011 9270
60,0	0,333 7526	0,083 1642	82,5	0,535 6595	0,010 7340
60,5	0,336 5016	0,081 4534	83,0	0,544 1205	0,009 5837
61,0	0,339 2950	0,079 7376	83,5	0,553 0498	0,008 4788
61,5	0,342 1340	0,078 0173	84,0	0,562 5136	0,007 4221
62,0	0,345 0196	0,076 2929	84,5	0,572 5943	0,006 4165
62,5	0,347 9531	0,074 5649	85,0	0,583 3963	0,005 4652
63,0	0,350 9356	0,072 8339	85,5	0,595 0549	0,004 5716
63,5	0,353 9686	0,071 1002	86,0	0,607 7507	0,003 7396
64,0	0,357 0533	0,069 3644	86,5	0,621 7319	0,002 9734
64,5	0,360 1912	0,067 6271	87,0	0,637 3550	0,002 2778
65,0	0,363 3838	0,065 8888	87,5	0,655 1599	0,001 6581
65,5	0,366 6329	0,064 1501	88,0	0,676 0272	0,001 1208
66,0	0,369 9400	0,062 4115	88,5	0,701 5560	0,000 6736
66,5	0,373 3069	0,060 6737	89,0	0,735 1923	0,000 3263
67,0	0,376 7357	0,058 9374	89,5	0,787 3031	0,000 0931

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
1	0,017 4533	0,017 4533	0,017 4534	0,017 4534	0,017 4535	0,017 4535
2	0,034 9066	0,034 9068	0,034 9071	0,034 9074	0,034 9079	0,034 9084
3	0,052 3601	0,052 3606	0,052 3615	0,052 3627	0,052 3641	0,052 3659
4	0,069 8136	0,069 8149	0,069 8170	0,069 8198	0,069 8233	0,069 8273
5	0,087 2673	0,087 2698	0,087 2739	0,087 2794	0,087 2862	0,087 2941
6	0,104 7212	0,104 7255	0,104 7326	0,104 7421	0,104 7539	0,104 7676
7	0,122 1753	0,122 1822	0,122 1934	0,122 2085	0,122 2272	0,122 2489
8	0,139 6298	0,139 6400	0,139 6566	0,139 6793	0,139 7072	0,139 7396
9	0,157 0845	0,157 0990	0,157 1227	0,157 1549	0,157 1947	0,157 2408
10	0,174 5396	0,174 5595	0,174 5920	0,174 6361	0,174 6906	0,174 7539
11	0,191 9951	0,192 0215	0,192 0647	0,192 1234	0,192 1959	0,192 2801
12	0,209 4510	0,209 4853	0,209 5413	0,209 6175	0,209 7115	0,209 8208
13	0,226 9074	0,226 9509	0,227 0221	0,227 1188	0,227 2384	0,227 3773
14	0,244 3643	0,244 4186	0,244 5073	0,244 6280	0,244 7772	0,244 9507
15	0,261 8218	0,261 8884	0,261 9974	0,262 1457	0,262 3291	0,262 5425
16	0,279 2798	0,279 3605	0,279 4926	0,279 6724	0,279 8948	0,280 1538
17	0,296 7385	0,296 8351	0,296 9932	0,297 2086	0,297 4753	0,297 7858
18	0,314 1978	0,314 3122	0,314 4997	0,314 7550	0,315 0713	0,315 4398
19	0,331 6577	0,331 7921	0,332 0121	0,332 3120	0,332 6837	0,333 1170
20	0,349 1184	0,349 2748	0,349 5309	0,349 8802	0,350 3133	0,350 8187
21	0,366 5799	0,366 7604	0,367 0564	0,367 4600	0,367 9610	0,368 5459
22	0,384 0421	0,384 2492	0,384 5887	0,385 0521	0,385 6275	0,386 2999
23	0,401 5051	0,401 7412	0,402 1283	0,402 6569	0,403 3137	0,404 0818
24	0,418 9689	0,419 2364	0,419 6753	0,420 2748	0,421 0202	0,421 8927
25	0,436 4336	0,436 7352	0,437 2300	0,437 9063	0,438 7479	0,439 7338
26	0,453 8992	0,454 2374	0,454 7927	0,455 5520	0,456 4975	0,457 6061
27	0,471 3567	0,471 7434	0,472 3635	0,473 2122	0,474 2697	0,475 5107
28	0,488 8332	0,489 2530	0,489 9428	0,490 8873	0,492 0651	0,493 4486
29	0,506 3016	0,506 7666	0,507 5307	0,508 5778	0,509 8845	0,511 4209
30	0,523 7710	0,524 2840	0,525 1275	0,526 2840	0,527 7285	0,529 4286
31	0,541 2413	0,541 8055	0,542 7334	0,544 0064	0,545 5977	0,547 4726
32	0,558 7128	0,559 3311	0,560 3485	0,561 7472	0,563 4928	0,565 5539
33	0,576 1852	0,576 8608	0,577 9731	0,579 5009	0,581 4142	0,583 6733
34	0,593 6587	0,594 3949	0,595 6072	0,597 2737	0,599 3627	0,601 8318
35	0,611 1333	0,611 9332	0,613 2511	0,615 0641	0,617 3386	0,622 0302
36	0,628 6090	0,629 4759	0,630 9050	0,632 8721	0,635 3425	0,638 2692
37	0,646 0858	0,647 0230	0,648 5688	0,650 6982	0,653 3749	0,656 5498
38	0,663 5637	0,664 5747	0,666 2429	0,668 5426	0,671 4361	0,674 8725
39	0,681 0428	0,682 1309	0,683 9272	0,686 4055	0,689 5267	0,693 2381
40	0,698 5230	0,699 6916	0,701 6220	0,704 2871	0,707 6470	0,711 6473
41	0,716 0043	0,717 2569	0,719 3272	0,722 1875	0,725 7974	0,730 1006
42	0,733 4867	0,734 8269	0,737 0430	0,740 1071	0,743 9781	0,748 5086
43	0,750 9704	0,752 4016	0,754 7693	0,758 0458	0,762 1895	0,767 1419
44	0,768 4552	0,769 9809	0,772 5064	0,776 0039	0,780 4317	0,785 7309
45	0,785 9411	0,787 5649	0,790 2542	0,793 9814	0,798 7051	0,804 3661

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
1	0,017 4536	0,017 4537	0,017 4537	0,017 4538	0,017 4539	0,017 4540
2	0,034 9089	0,034 9095	0,034 9102	0,034 9107	0,034 9113	0,034 9119
3	0,052 3677	0,052 3698	0,052 3718	0,052 3739	0,052 3759	0,052 3778
4	0,069 8318	0,069 8366	0,069 8415	0,069 8465	0,069 8512	0,069 8557
5	0,087 3029	0,087 3122	0,087 3219	0,087 3315	0,087 3408	0,087 3496
6	0,104 7827	0,104 7988	0,104 8155	0,104 8322	0,104 8483	0,104 8635
7	0,122 2730	0,122 2986	0,122 3251	0,122 3516	0,122 3773	0,122 4015
8	0,139 7754	0,139 8137	0,139 8533	0,139 8929	0,139 9314	0,139 9675
9	0,157 2919	0,157 3464	0,157 4028	0,157 4593	0,157 5142	0,157 5658
10	0,174 8240	0,174 8989	0,174 9763	0,175 0539	0,175 1294	0,175 2003
11	0,192 3735	0,192 4732	0,192 5764	0,192 6799	0,192 7806	0,192 8753
12	0,209 9421	0,210 0717	0,210 2059	0,210 3405	0,210 4715	0,210 5948
13	0,227 5315	0,227 6965	0,227 8674	0,228 0389	0,228 2059	0,228 3632
14	0,245 1435	0,245 3498	0,245 5635	0,245 7783	0,245 9875	0,246 1847
15	0,262 7796	0,263 0337	0,263 2971	0,263 5619	0,263 8201	0,264 0635
16	0,280 4417	0,280 7504	0,281 0707	0,281 3930	0,281 7074	0,282 0041
17	0,298 1314	0,298 5021	0,298 8871	0,299 2748	0,299 6533	0,300 0108
18	0,315 8503	0,316 2910	0,316 7490	0,317 2105	0,317 6616	0,318 0880
19	0,333 6001	0,334 1191	0,334 6590	0,335 2036	0,335 7363	0,336 2403
20	0,351 3824	0,351 9887	0,352 6199	0,353 2572	0,353 8812	0,354 4722
21	0,369 1989	0,369 9018	0,370 6344	0,371 3748	0,372 1005	0,372 7884
22	0,387 0512	0,387 8607	0,388 7052	0,389 5597	0,390 3980	0,391 1935
23	0,404 9408	0,405 8673	0,406 8349	0,407 8151	0,408 7779	0,409 6925
24	0,422 8694	0,423 9239	0,425 0264	0,426 1446	0,427 2442	0,428 2900
25	0,440 8385	0,442 0325	0,443 2823	0,444 5515	0,445 8011	0,446 9912
26	0,458 8496	0,460 1951	0,461 6055	0,463 0392	0,464 4529	0,465 8009
27	0,476 9042	0,478 4139	0,479 9982	0,481 6113	0,483 2037	0,484 7243
28	0,495 0039	0,496 6909	0,498 4636	0,500 2710	0,502 0579	0,503 7666
29	0,513 1501	0,515 0281	0,517 0042	0,519 0220	0,521 0199	0,522 9330
30	0,531 3443	0,533 4275	0,535 6227	0,537 8677	0,540 0939	0,542 2291
31	0,549 5877	0,551 8910	0,554 3218	0,556 8115	0,559 2845	0,561 6603
32	0,567 8820	0,570 4207	0,573 1041	0,575 8571	0,578 5962	0,581 2321
33	0,586 2283	0,589 0185	0,591 9724	0,595 0079	0,598 0336	0,600 9504
34	0,604 6280	0,607 6861	0,610 9291	0,614 2675	0,617 6012	0,620 8208
35	0,623 0824	0,626 4256	0,629 9769	0,633 6395	0,637 3037	0,640 8494
36	0,641 5927	0,645 2387	0,649 1184	0,653 1273	0,657 1459	0,661 0423
37	0,660 1600	0,664 1273	0,668 3562	0,672 7345	0,677 1324	0,681 4055
38	0,678 7857	0,683 0929	0,687 6928	0,692 4646	0,697 2681	0,701 9453
39	0,697 4707	0,702 1374	0,707 1307	0,712 3213	0,717 5578	0,722 6682
40	0,716 2162	0,721 2624	0,726 6722	0,732 3079	0,738 0063	0,743 5807
41	0,735 0230	0,740 4694	0,746 3199	0,752 4280	0,758 6187	0,764 6894
42	0,753 8923	0,759 7600	0,766 0760	0,772 6851	0,779 3999	0,786 0012
43	0,772 8249	0,779 1356	0,785 9429	0,793 0826	0,800 3547	0,807 5228
44	0,791 8215	0,798 5977	0,805 9228	0,813 6240	0,821 4883	0,829 2613
45	0,810 8831	0,818 1477	0,826 0179	0,834 3125	0,842 8055	0,851 2237

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
1	0,017 4540	0,017 4541	0,017 4541	0,017 4542	0,017 4542	0,017 4542
2	0,034 9124	0,034 9128	0,034 9132	0,034 9135	0,034 9136	0,034 9137
3	0,052 3795	0,052 3810	0,052 3822	0,052 3831	0,052 3836	0,052 3838
4	0,069 8598	0,069 8633	0,069 8661	0,069 8682	0,069 8695	0,069 8699
5	0,087 3576	0,087 3644	0,087 3700	0,087 3741	0,087 3766	0,087 3774
6	0,104 8773	0,104 8891	0,104 8988	0,104 9059	0,104 9102	0,104 9117
7	0,122 4233	0,122 4422	0,122 4576	0,122 4689	0,122 4758	0,122 4781
8	0,140 0002	0,140 0285	0,140 0515	0,140 0684	0,140 0788	0,140 0822
9	0,157 6125	0,157 6528	0,157 6856	0,157 7098	0,157 7246	0,157 7296
10	0,175 2645	0,175 3201	0,175 3652	0,175 3985	0,175 4190	0,175 4258
11	0,192 9611	0,193 0353	0,193 0956	0,193 1401	0,193 1674	0,193 1766
12	0,210 7066	0,210 8034	0,210 8820	0,210 9401	0,210 9757	0,210 9877
13	0,228 5059	0,228 6295	0,228 7300	0,228 8042	0,228 8497	0,228 8650
14	0,246 3637	0,246 5187	0,246 6449	0,246 7381	0,246 7952	0,246 8145
15	0,264 2847	0,264 4763	0,264 6324	0,264 7477	0,264 8184	0,264 8422
16	0,282 2738	0,282 5077	0,282 6982	0,282 8390	0,282 9254	0,282 9545
17	0,300 3359	0,300 6181	0,300 8480	0,301 0181	0,301 1225	0,301 1577
18	0,318 4760	0,318 8131	0,319 0879	0,319 2913	0,319 4161	0,319 4583
19	0,336 6993	0,337 0984	0,337 4239	0,337 6649	0,337 8130	0,337 8629
20	0,355 0109	0,355 4796	0,355 8622	0,356 1456	0,356 3198	0,356 3785
21	0,373 4161	0,373 9626	0,374 4092	0,374 7400	0,374 9435	0,375 0121
22	0,391 9202	0,392 5534	0,393 0713	0,393 4552	0,393 6913	0,393 7710
23	0,410 5288	0,411 2583	0,411 8552	0,412 2981	0,412 5706	0,412 6626
24	0,429 2474	0,430 0833	0,430 7679	0,431 2762	0,431 5891	0,431 6947
25	0,448 0818	0,449 0350	0,449 8164	0,450 3970	0,450 7546	0,450 8753
26	0,467 0378	0,468 1200	0,469 0081	0,469 6683	0,470 0752	0,470 2127
27	0,486 1213	0,487 3451	0,488 3503	0,489 0983	0,489 5595	0,489 7154
28	0,505 3385	0,506 7173	0,507 8510	0,508 6953	0,509 2162	0,509 3923
29	0,524 6957	0,526 2438	0,527 5181	0,528 4680	0,529 0544	0,529 2527
30	0,544 1993	0,545 9319	0,547 3599	0,548 4253	0,549 0835	0,549 3061
31	0,563 8558	0,565 7894	0,567 3851	0,568 5768	0,569 3135	0,569 5627
32	0,583 6720	0,585 8242	0,587 6024	0,588 9320	0,589 7545	0,590 0329
33	0,603 6549	0,606 0443	0,608 0213	0,609 5011	0,610 4173	0,610 7275
34	0,623 8116	0,626 4582	0,628 6513	0,630 2948	0,631 3131	0,631 6581
35	0,644 1493	0,647 0746	0,649 5024	0,651 3239	0,652 4537	0,652 8366
36	0,664 6756	0,667 9025	0,670 5849	0,672 6002	0,673 8513	0,674 2755
37	0,685 3983	0,688 9512	0,691 3098	0,694 1356	0,695 5188	0,695 9880
38	0,706 3252	0,710 2304	0,713 4882	0,715 9429	0,717 4697	0,717 9880
39	0,727 4645	0,731 7502	0,735 3321	0,738 0351	0,739 7184	0,740 2901
40	0,748 8246	0,753 5208	0,757 4536	0,760 4264	0,762 2798	0,762 9097
41	0,770 4143	0,775 5531	0,779 8658	0,783 1313	0,785 1697	0,785 8630
42	0,792 2423	0,797 8583	0,802 5819	0,806 1652	0,808 4050	0,809 1672
43	0,814 3178	0,820 4480	0,825 6163	0,829 5445	0,832 0033	0,832 8407
44	0,836 6503	0,843 3344	0,848 9835	0,853 2861	0,855 9833	0,856 9026
45	0,859 2494	0,866 5300	0,872 6992	0,877 4083	0,880 3650	0,881 3736

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
46	0,803 4282	0,805 1537	0,808 0127	0,811 9784	0,817 0098	0,823 0478
47	0,820 9165	0,822 7471	0,825 7819	0,829 9950	0,835 3460	0,841 7763
48	0,838 4059	0,840 3452	0,843 5619	0,848 0311	0,853 7137	0,860 5519
49	0,855 8965	0,857 9480	0,861 3527	0,866 0869	0,872 1129	0,879 3748
50	0,873 3883	0,875 5554	0,879 1541	0,884 1621	0,890 5439	0,898 2452
51	0,890 8812	0,893 1676	0,896 9662	0,902 2569	0,909 0064	0,917 1632
52	0,908 3752	0,910 7843	0,914 7890	0,920 3712	0,927 5006	0,936 1288
53	0,925 8704	0,928 4056	0,932 6223	0,938 5048	0,946 0262	0,955 1419
54	0,943 3667	0,946 0314	0,950 4660	0,956 6577	0,964 5831	0,974 2026
55	0,960 8641	0,963 6618	0,968 3201	0,974 8296	0,983 1713	0,993 3106
56	0,978 8363	0,981 2966	0,986 1845	0,993 0205	1,001 7904	1,012 4657
57	0,995 8621	0,998 9358	1,004 0591	1,011 2301	1,020 4401	1,031 6677
58	1,013 3627	1,016 5793	1,021 9437	1,029 4582	1,039 1203	1,050 9161
59	1,030 8644	1,034 2271	1,039 8381	1,047 7045	1,057 8305	1,070 2156
60	1,048 3671	1,051 9791	1,057 7423	1,065 9689	1,076 5704	1,089 5507
61	1,065 8709	1,069 5352	1,075 6560	1,084 2510	1,095 3395	1,108 9358
62	1,083 3756	1,087 1954	1,093 5791	1,102 5505	1,114 1374	1,128 3653
63	1,100 8813	1,104 8594	1,111 5113	1,120 8670	1,132 9635	1,147 8384
64	1,118 3879	1,122 5274	1,129 4525	1,139 2002	1,151 8173	1,167 3546
65	1,135 8954	1,140 1991	1,147 4024	1,157 5497	1,170 6981	1,186 9127
66	1,153 4039	1,157 8744	1,165 3609	1,175 9150	1,180 6054	1,206 5121
67	1,170 9132	1,175 5533	1,183 3276	1,194 2958	1,208 5384	1,226 1517
68	1,188 4233	1,193 2356	1,201 3023	1,212 6916	1,227 4965	1,245 8303
69	1,205 9343	1,210 9213	1,219 2848	1,231 1020	1,246 4788	1,265 5470
70	1,223 4460	1,228 6101	1,237 2747	1,249 5263	1,265 4846	1,285 3006
71	1,240 9585	1,246 3020	1,255 2718	1,267 9641	1,284 5130	1,305 0897
72	1,258 4717	1,263 9969	1,273 2758	1,286 4148	1,303 5631	1,324 9130
73	1,275 9856	1,281 6945	1,291 2864	1,304 8779	1,322 6341	1,344 7693
74	1,293 5002	1,299 3949	1,303 3033	1,323 3529	1,341 7249	1,364 6570
75	1,311 0154	1,317 0978	1,327 3261	1,341 8390	1,360 8347	1,384 5746
76	1,328 5311	1,334 8031	1,345 3546	1,360 3357	1,379 9623	1,404 5205
77	1,346 0474	1,352 5106	1,363 3883	1,378 8424	1,399 1067	1,424 4932
78	1,363 5643	1,370 2202	1,381 4269	1,397 3585	1,418 2669	1,444 4909
79	1,381 0816	1,387 9318	1,399 4702	1,415 8831	1,437 4418	1,464 5119
80	1,398 5993	1,405 6452	1,417 5176	1,434 4158	1,456 6301	1,484 5546
81	1,416 1174	1,423 3360	1,435 5689	1,452 9557	1,475 8309	1,504 6169
82	1,433 6359	1,441 1077	1,453 6237	1,471 5023	1,495 0428	1,524 6972
83	1,451 1547	1,458 7946	1,471 6817	1,490 0547	1,514 2648	1,544 7934
84	1,468 6738	1,476 5136	1,489 7423	1,508 6124	1,533 4955	1,564 9038
85	1,486 1932	1,494 2336	1,507 8053	1,527 1745	1,552 7338	1,585 0262
86	1,503 7127	1,511 9544	1,525 8703	1,545 7403	1,571 9785	1,605 1588
87	1,521 2324	1,529 6759	1,543 9368	1,564 3091	1,591 2282	1,625 2996
88	1,538 7523	1,547 3980	1,562 0046	1,582 8801	1,610 4818	1,645 4464
89	1,556 2722	1,565 1203	1,580 0731	1,601 4526	1,629 7379	1,665 5974
90	1,573 7921	1,592 8428	1,598 1420	1,620 0259	1,648 9952	1,685 7504

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
46	0,830 0103	0,837 7866	0,846 2302	0,855 1515	0,864 3114	0,873 4174
47	0,849 2037	0,857 5175	0,866 5617	0,876 1442	0,886 0109	0,895 8496
48	0,868 4640	0,877 3362	0,887 0144	0,897 2937	0,907 9091	0,918 5277
49	0,887 7915	0,897 2489	0,907 5900	0,918 6032	0,930 0108	0,941 4592
50	0,907 1868	0,917 2549	0,928 2904	0,940 0757	0,952 3209	0,964 6516
51	0,926 6502	0,937 3548	0,949 1169	0,961 7139	0,974 8443	0,988 1125
52	0,946 1818	0,957 5494	0,970 0712	0,983 5207	0,997 5856	1,011 8496
53	0,965 7820	0,977 8392	0,991 1546	1,005 4986	1,020 5494	1,035 8705
54	0,985 4507	0,998 2248	1,012 3682	1,027 6500	1,043 7403	1,060 1829
55	1,005 1880	1,018 7063	1,033 7130	1,049 9774	1,067 1627	1,084 7943
56	1,024 9938	1,039 2841	1,055 1899	1,072 4826	1,090 8206	1,109 7124
57	1,044 8677	1,059 9582	1,076 7996	1,095 1676	1,114 7181	1,134 9444
58	1,064 8096	1,080 7285	1,098 5425	1,118 0340	1,138 8589	1,160 4978
59	1,084 8190	1,101 5948	1,120 4190	1,141 0832	1,163 2465	1,186 3796
60	1,104 8954	1,122 5567	1,142 4291	1,164 3164	1,187 8841	1,212 5366
61	1,125 0382	1,143 6136	1,164 5726	1,187 7342	1,212 7744	1,239 1555
62	1,145 2466	1,164 7648	1,186 8492	1,211 3374	1,237 9200	1,266 0624
63	1,165 5198	1,186 0096	1,209 2583	1,235 1259	1,263 3227	1,293 3231
64	1,185 8568	1,207 3467	1,231 7988	1,259 0996	1,288 9843	1,320 9429
65	1,206 2566	1,228 7750	1,254 4698	1,283 2580	1,314 9057	1,348 9264
66	1,226 7179	1,250 2931	1,277 2697	1,307 6000	1,341 0874	1,377 2777
67	1,247 2395	1,271 8993	1,300 1968	1,332 1241	1,367 5293	1,405 9999
68	1,267 8199	1,293 5919	1,323 2490	1,356 8286	1,394 2305	1,435 0955
69	1,288 4577	1,315 3690	1,346 4242	1,381 7110	1,421 1896	1,464 5657
70	1,309 1510	1,337 2282	1,369 7195	1,406 7685	1,448 4043	1,494 4109
71	1,329 8983	1,359 1674	1,393 1321	1,431 9978	1,475 8715	1,524 6300
72	1,350 6976	1,381 1840	1,416 6586	1,457 3949	1,503 5872	1,555 2209
73	1,371 5469	1,403 2751	1,440 2956	1,482 9554	1,531 5466	1,586 1798
74	1,392 4441	1,425 4379	1,464 0390	1,508 6744	1,559 7439	1,617 5013
75	1,413 3870	1,447 6694	1,487 8847	1,534 5462	1,588 1723	1,649 1787
76	1,434 3734	1,469 9661	1,511 8281	1,560 5648	1,616 8242	1,681 2030
77	1,455 4007	1,492 3247	1,535 8643	1,586 7235	1,645 6906	1,713 5638
78	1,476 4666	1,514 7415	1,559 9882	1,613 0151	1,674 7618	1,746 2485
79	1,497 5684	1,537 2127	1,584 1942	1,639 4318	1,704 0271	1,779 2426
80	1,518 7035	1,559 7344	1,608 4767	1,665 9654	1,733 4744	1,812 5295
81	1,539 8690	1,582 3025	1,632 8297	1,692 6070	1,763 0911	1,846 0908
82	1,561 0622	1,604 9127	1,657 2468	1,719 3474	1,792 8633	1,879 9058
83	1,582 2802	1,627 5608	1,681 7216	1,746 1768	1,822 7762	1,913 9522
84	1,603 5200	1,650 2421	1,706 2473	1,773 0851	1,852 8144	1,948 2054
85	1,624 7786	1,672 9523	1,730 8171	1,800 0618	1,882 9614	1,982 6396
86	1,646 0529	1,695 6865	1,755 4239	1,827 0959	1,913 2003	2,017 2270
87	1,667 3399	1,718 4401	1,780 0604	1,854 1763	1,943 5135	2,051 9388
88	1,688 6363	1,741 2083	1,804 7193	1,881 2917	1,973 8827	2,086 7449
89	1,709 9392	1,763 9863	1,829 3932	1,908 4306	2,004 2896	2,121 6144
90	1,731 2452	1,786 7691	1,854 0747	1,935 5811	2,034 7153	2,156 5156

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
46	0,882 1250	0,890 0478	0,896 7797	0,901 9302	0,905 1695	0,906 2755
47	0,905 2875	0,913 9015	0,921 2421	0,926 8721	0,930 4194	0,931 6316
48	0,928 7472	0,938 1053	0,946 1043	0,952 2554	0,956 1385	0,957 4669
49	0,952 5151	0,962 6739	0,971 3854	0,978 1031	0,982 3526	0,983 8079
50	0,976 6021	0,987 6225	0,997 1054	1,004 4394	1,009 0890	1,010 6832
51	1,001 0196	1,012 9673	1,023 2852	1,031 2902	1,036 3771	1,038 1235
52	1,025 7793	1,038 7247	1,049 9470	1,058 6831	1,064 2485	1,066 1617
53	1,050 8929	1,064 9121	1,077 1145	1,086 6475	1,092 7370	1,094 8335
54	1,076 3726	1,091 5474	1,104 8123	1,115 2149	1,121 8792	1,124 1772
55	1,102 2308	1,118 6492	1,133 0665	1,144 4189	1,151 7146	1,154 2346
56	1,128 4799	1,146 2370	1,161 9048	1,174 2958	1,182 2858	1,185 0507
57	1,155 1327	1,174 3307	1,191 3564	1,204 8843	1,213 6391	1,216 6748
58	1,182 2020	1,202 9514	1,221 4524	1,236 2262	1,245 8250	1,249 1606
59	1,209 7009	1,232 1203	1,252 2253	1,268 3663	1,278 8982	1,282 5668
60	1,237 6421	1,261 8599	1,283 7099	1,301 3532	1,312 9187	1,316 9579
61	1,266 0387	1,292 1929	1,315 9428	1,335 2392	1,347 9522	1,352 4048
62	1,294 9036	1,323 1429	1,348 9625	1,370 0809	1,384 0707	1,388 9860
63	1,324 2493	1,354 7340	1,382 8101	1,405 9396	1,421 3537	1,426 7882
64	1,354 0882	1,386 9907	1,417 5287	1,442 8820	1,459 8891	1,465 9083
65	1,384 4322	1,419 9380	1,453 1636	1,480 9801	1,499 7741	1,506 4542
66	1,415 2927	1,453 6008	1,489 7627	1,520 3125	1,541 1172	1,548 5472
67	1,446 6803	1,488 0044	1,527 3761	1,560 9649	1,584 0393	1,592 3237
68	1,478 6046	1,523 1737	1,566 0564	1,603 0302	1,628 6760	1,637 9387
69	1,511 0743	1,559 1331	1,605 8578	1,646 6100	1,675 1800	1,685 5685
70	1,544 0968	1,595 9062	1,646 8371	1,691 8149	1,723 7240	1,735 4152
71	1,577 6776	1,633 5155	1,689 0522	1,738 7655	1,774 5037	1,787 7120
72	1,611 8208	1,671 9814	1,732 5623	1,787 5930	1,827 7431	1,842 7300
73	1,646 5280	1,711 3224	1,777 4270	1,838 4401	1,883 6985	1,900 7867
74	1,681 7986	1,751 5538	1,823 7051	1,891 4610	1,942 6658	1,962 2572
75	1,717 6294	1,792 6874	1,871 4540	1,946 8223	2,004 9878	2,027 5894
76	1,754 0137	1,834 7302	1,920 7272	2,004 7021	2,071 0641	2,097 3240
77	1,790 9420	1,877 6841	1,971 5733	2,065 2889	2,141 3634	2,172 1218
78	1,828 4008	1,921 5444	2,024 0327	2,128 7797	2,216 4375	2,252 8027
79	1,866 3728	1,966 2991	2,078 1349	2,195 3752	2,296 9400	2,340 4007
80	1,904 8367	2,011 9280	2,133 8951	2,265 2733	2,383 6471	2,436 2461
81	1,943 7668	2,058 4012	2,191 3102	2,338 6591	2,477 4815	2,542 0904
82	1,983 1330	2,105 6792	2,250 3543	2,415 6900	2,579 5368	2,660 3061
83	2,022 9007	2,153 7112	2,310 9748	2,496 4757	2,691 0944	2,794 2191
84	2,063 0313	2,202 4358	2,373 0880	2,581 0521	2,813 6178	2,948 7002
85	2,103 4817	2,251 7800	2,436 5761	2,669 3504	2,948 6888	3,131 3013
86	2,144 2052	2,301 6602	2,501 2851	2,761 1640	3,097 8203	3,354 6735
87	2,185 1515	2,351 9829	2,567 0253	2,856 1187	3,261 9792	3,642 5334
88	2,226 2677	2,402 6458	2,633 5730	2,953 6563	3,441 1604	4,048 1254
89	2,267 4984	2,453 5396	2,700 6764	3,053 0391	3,632 7929	4,741 3488
90	2,308 7868	2,504 5501	2,768 0631	3,153 3853	3,831 7420	∞

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
1	0,017 4533	0,017 4533	0,017 4532	0,017 4532	0,017 4531	0,017 4531
2	0,034 9065	0,034 9064	0,034 9061	0,034 9058	0,034 9053	0,034 9048
3	0,052 3597	0,052 3592	0,052 3583	0,052 3571	0,052 3556	0,052 3539
4	0,069 8127	0,069 8115	0,069 8094	0,069 8065	0,069 8030	0,069 7990
5	0,087 2656	0,087 2631	0,087 2591	0,087 2535	0,087 2467	0,087 2388
6	0,104 7183	0,104 7140	0,104 7070	0,104 6974	0,104 6856	0,104 6720
7	0,122 1707	0,122 1639	0,122 1527	0,122 1376	0,122 1189	0,122 0972
8	0,139 6229	0,139 6127	0,139 5961	0,139 5735	0,139 5456	0,139 5133
9	0,157 0747	0,157 0602	0,157 0366	0,157 0044	0,156 9648	0,156 9188
10	0,174 5262	0,174 5064	0,174 4739	0,174 4298	0,174 3755	0,174 3125
11	0,191 9773	0,191 9509	0,191 9078	0,191 8492	0,191 7769	0,191 6931
12	0,209 4080	0,209 3937	0,209 3378	0,209 2618	0,209 1681	0,209 0594
13	0,226 8782	0,226 8347	0,226 7637	0,226 6672	0,226 5482	0,226 4102
14	0,244 3278	0,244 2736	0,244 1851	0,244 0648	0,243 9163	0,243 7441
15	0,261 7770	0,261 7104	0,261 6017	0,261 4539	0,261 2716	0,261 0601
16	0,279 2255	0,279 1449	0,279 0131	0,278 8341	0,278 6132	0,278 3568
17	0,296 6735	0,296 5769	0,296 4192	0,296 2049	0,295 9402	0,295 6332
18	0,314 1208	0,314 0064	0,313 8195	0,313 5656	0,313 2520	0,312 8880
19	0,331 5674	0,331 4332	0,331 2139	0,330 9158	0,330 5476	0,330 1202
20	0,349 0133	0,348 8571	0,348 6019	0,348 2549	0,347 8263	0,347 3286
21	0,366 4585	0,366 2781	0,365 9833	0,365 5825	0,365 0874	0,364 5122
22	0,383 9028	0,383 6960	0,383 3579	0,382 8981	0,382 3300	0,381 6699
23	0,401 3464	0,401 1107	0,400 7254	0,400 2013	0,399 5535	0,398 8007
24	0,418 7892	0,418 5221	0,418 0854	0,417 4915	0,416 7571	0,415 9035
25	0,436 2311	0,435 9301	0,435 4379	0,434 7683	0,433 9403	0,432 9775
26	0,453 6721	0,453 3346	0,452 2725	0,452 0314	0,451 1022	0,450 0216
27	0,471 1121	0,470 7354	0,470 1190	0,469 2802	0,468 2424	0,467 0350
28	0,488 5513	0,488 1325	0,487 4472	0,486 5144	0,485 3601	0,484 0167
29	0,505 9895	0,505 5257	0,504 7669	0,503 7337	0,502 4548	0,500 9660
30	0,523 4267	0,522 9151	0,522 0778	0,520 9377	0,519 5260	0,517 8819
31	0,540 8629	0,540 3005	0,539 3799	0,538 1260	0,536 5730	0,534 7639
32	0,558 2981	0,557 6818	0,556 6729	0,555 2983	0,553 5955	0,551 6110
33	0,575 7322	0,575 0589	0,573 9566	0,572 4544	0,570 5928	0,568 4226
34	0,593 1653	0,592 4319	0,591 2308	0,589 5939	0,587 5646	0,585 1981
35	0,610 5973	0,609 8006	0,608 4956	0,606 7165	0,604 5105	0,601 9369
36	0,628 0283	0,627 1649	0,625 7506	0,623 8221	0,621 4300	0,618 6383
37	0,645 4581	0,644 5248	0,642 9958	0,640 9104	0,638 3228	0,635 3018
38	0,662 8868	0,661 8803	0,660 2311	0,657 9812	0,655 1886	0,651 9269
39	0,680 3144	0,679 2313	0,677 4564	0,675 0343	0,672 0271	0,668 5132
40	0,697 7408	0,696 5778	0,694 6715	0,692 0695	0,688 8379	0,685 0602
41	0,715 1661	0,713 9199	0,711 8765	0,709 0868	0,705 6209	0,701 5677
42	0,732 5903	0,731 2572	0,729 0712	0,726 0860	0,722 3759	0,718 0352
43	0,750 0133	0,748 5899	0,746 2556	0,743 0670	0,739 1027	0,734 4626
44	0,767 4352	0,765 9181	0,763 4297	0,760 0297	0,755 8011	0,750 8496
45	0,784 8559	0,783 2416	0,780 5934	0,776 9740	0,772 4711	0,767 1960

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
1	0,017 4530	0,017 4529	0,017 4528	0,017 4528	0,017 4527	0,017 4526
2	0,034 9043	0,034 9037	0,034 9030	0,034 9024	0,034 9018	0,034 9013
3	0,052 3520	0,052 3500	0,052 3479	0,052 3458	0,052 3438	0,052 3419
4	0,069 7945	0,069 7898	0,069 7848	0,069 7799	0,069 7751	0,069 7707
5	0,087 2301	0,087 2207	0,087 2111	0,087 2015	0,087 1922	0,087 1834
6	0,104 6569	0,104 6408	0,104 6242	0,104 6076	0,104 5915	0,104 5763
7	0,122 0733	0,122 0477	0,122 0214	0,121 9950	0,121 9694	0,121 9454
8	0,139 4775	0,139 4394	0,139 4001	0,139 3607	0,139 3225	0,139 2867
9	0,156 8659	0,156 8136	0,156 7576	0,156 7016	0,156 6472	0,156 5962
10	0,174 2427	0,174 1684	0,174 0916	0,174 0147	0,173 9401	0,173 8701
11	0,191 6004	0,191 5014	0,191 3992	0,191 2970	0,191 1977	0,191 1045
12	0,208 9391	0,208 8107	0,208 6781	0,208 5454	0,208 4166	0,208 2955
13	0,226 2573	0,226 0942	0,225 9257	0,225 7570	0,225 5932	0,225 4393
14	0,243 5534	0,243 3498	0,243 1395	0,242 9288	0,242 7243	0,242 5321
15	0,260 8257	0,260 5755	0,260 3169	0,260 0580	0,259 8064	0,259 5700
16	0,278 0726	0,277 7692	0,277 4557	0,277 1415	0,276 8362	0,276 5492
17	0,295 2927	0,294 9291	0,294 5533	0,294 1766	0,293 8105	0,293 4662
18	0,312 4844	0,312 0532	0,311 6074	0,311 1604	0,310 7258	0,310 3171
19	0,329 6461	0,329 1395	0,328 6156	0,328 0901	0,327 5791	0,327 0984
20	0,346 7765	0,346 1863	0,345 5756	0,344 9630	0,344 3671	0,343 8063
21	0,363 8740	0,363 1915	0,362 4852	0,361 7764	0,361 0867	0,360 4374
22	0,380 9372	0,380 1535	0,379 3421	0,378 5276	0,377 7348	0,376 9881
23	0,397 9648	0,397 0704	0,396 1442	0,395 2140	0,394 3082	0,393 4548
24	0,414 9554	0,413 9406	0,412 8893	0,411 8330	0,410 8041	0,409 8343
25	0,431 9078	0,430 7624	0,429 5752	0,428 3821	0,427 2194	0,426 1231
26	0,448 8205	0,447 5340	0,446 2001	0,444 8589	0,443 5512	0,442 3178
27	0,465 6925	0,464 2540	0,462 7618	0,461 2609	0,459 7968	0,458 4153
28	0,482 5225	0,480 9207	0,479 2585	0,477 5857	0,475 9533	0,474 4122
29	0,499 3093	0,497 5328	0,495 6883	0,493 8312	0,492 0181	0,490 3055
30	0,516 0520	0,514 0886	0,512 0493	0,509 9950	0,507 9884	0,506 0921
31	0,532 7493	0,530 5869	0,528 3398	0,526 0750	0,523 8617	0,521 7689
32	0,549 4003	0,547 0264	0,544 5582	0,542 0692	0,539 6354	0,537 3320
33	0,566 0041	0,563 4057	0,560 7027	0,557 9755	0,555 3072	0,552 7816
34	0,582 5597	0,579 7236	0,576 7718	0,573 7919	0,570 8747	0,568 1118
35	0,599 0662	0,595 9790	0,592 7641	0,589 5166	0,586 3356	0,583 3210
36	0,615 5228	0,612 1708	0,608 6781	0,605 1479	0,601 6877	0,598 4066
37	0,631 9289	0,628 2979	0,624 5124	0,620 6839	0,616 9290	0,613 3659
38	0,648 2836	0,644 3595	0,640 2659	0,636 1231	0,632 0573	0,628 1965
39	0,664 5864	0,660 3545	0,655 9373	0,651 4640	0,647 0708	0,642 8962
40	0,680 8366	0,676 2823	0,671 5255	0,666 7051	0,661 9676	0,657 4625
41	0,697 0338	0,692 1420	0,687 0295	0,681 8451	0,676 7460	0,671 8935
42	0,713 1774	0,707 9330	0,702 4484	0,696 8828	0,691 4045	0,686 1870
43	0,729 2670	0,723 6547	0,717 7814	0,711 8169	0,705 9414	0,700 3411
44	0,745 3023	0,739 3065	0,733 0276	0,726 6464	0,720 3554	0,714 3541
45	0,761 2830	0,754 8881	0,748 1865	0,741 3705	0,734 6452	0,728 2241

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
1	0,017 4526	0,017 4525	0,017 4525	0,017 4524	0,017 4524	0,017 4524
2	0,034 9008	0,034 9003	0,034 9000	0,034 8997	0,034 8996	0,034 8995
3	0,052 3402	0,052 3388	0,052 3376	0,052 3367	0,052 3361	0,052 3360
4	0,069 7666	0,069 7631	0,069 7603	0,069 7582	0,069 7569	0,069 7565
5	0,087 1755	0,087 1687	0,087 1631	0,087 1591	0,087 1566	0,087 1557
6	0,104 5627	0,104 5509	0,104 5413	0,104 5342	0,104 5299	0,104 5285
7	0,121 9237	0,121 9049	0,121 8897	0,121 8785	0,121 8717	0,121 8693
8	0,139 2542	0,139 2263	0,139 2035	0,139 1868	0,139 1766	0,139 1731
9	0,156 5500	0,156 5102	0,156 4778	0,156 4540	0,156 4394	0,156 4345
10	0,173 8068	0,173 7521	0,173 7077	0,173 6750	0,173 6549	0,173 6482
11	0,191 0202	0,190 9474	0,190 8883	0,190 8447	0,190 8180	0,190 8090
12	0,208 1861	0,208 0915	0,208 0147	0,207 9581	0,207 9234	0,207 9117
13	0,225 3001	0,225 1798	0,225 0821	0,225 0101	0,224 9660	0,224 9511
14	0,242 3581	0,242 2078	0,242 0857	0,241 9956	0,241 9405	0,241 9219
15	0,259 3559	0,259 1709	0,259 0206	0,258 9098	0,258 8419	0,258 8190
16	0,276 2894	0,276 0647	0,275 8822	0,275 7476	0,275 6651	0,275 6374
17	0,293 1544	0,292 8848	0,292 6657	0,292 5041	0,292 4051	0,292 3717
18	0,309 9469	0,309 6266	0,309 3663	0,309 1743	0,309 0566	0,309 0170
19	0,326 6627	0,326 2858	0,325 9795	0,325 7534	0,325 6148	0,325 5682
20	0,343 2980	0,342 8580	0,342 5004	0,342 2365	0,342 0747	0,342 0201
21	0,359 8486	0,359 3390	0,358 9246	0,358 6187	0,358 4312	0,358 3680
22	0,376 3108	0,375 7244	0,375 2475	0,374 8953	0,374 6794	0,374 6066
23	0,392 6806	0,392 0100	0,391 4644	0,391 0615	0,390 8144	0,390 7311
24	0,408 9541	0,408 1915	0,407 5710	0,407 1126	0,406 8314	0,406 7366
25	0,425 1277	0,424 2649	0,423 5627	0,423 0439	0,422 7256	0,422 6183
26	0,441 1975	0,440 2261	0,439 4352	0,438 8507	0,438 4921	0,438 3711
27	0,457 1599	0,456 0710	0,455 1841	0,454 5285	0,454 1261	0,453 9905
28	0,473 0112	0,471 7955	0,470 8050	0,470 0727	0,469 6231	0,469 4716
29	0,488 7479	0,487 3958	0,486 2938	0,485 4788	0,484 9784	0,484 8096
30	0,504 3666	0,502 8680	0,501 6462	0,500 7423	0,500 1872	0,500 0000
31	0,519 8637	0,518 2083	0,516 8581	0,515 8589	0,515 2451	0,515 0381
32	0,535 2359	0,533 4129	0,531 9253	0,530 8241	0,530 1475	0,529 9193
33	0,550 4799	0,548 4781	0,546 8439	0,545 6337	0,544 8899	0,544 6390
34	0,565 5925	0,563 4002	0,561 6098	0,560 2834	0,559 4680	0,559 1929
35	0,580 5705	0,578 1758	0,576 2191	0,574 7690	0,573 8773	0,573 5764
36	0,595 4110	0,592 8014	0,590 6680	0,589 0864	0,588 1136	0,587 7853
37	0,610 1108	0,607 2736	0,604 9528	0,603 2315	0,602 1725	0,601 8150
38	0,624 6672	0,621 5890	0,619 0697	0,617 2004	0,616 0499	0,615 6615
39	0,639 0773	0,635 7444	0,633 0151	0,630 9890	0,629 7416	0,629 3204
40	0,653 3384	0,649 7367	0,646 7855	0,644 5935	0,643 2435	0,642 7876
41	0,667 4480	0,663 5628	0,660 3773	0,658 0101	0,656 5517	0,656 0590
42	0,681 4035	0,677 2197	0,673 7872	0,671 2350	0,669 6620	0,669 1306
43	0,695 2025	0,690 7047	0,687 0120	0,684 2647	0,682 5708	0,681 9984
44	0,708 8428	0,704 0149	0,700 0483	0,697 0954	0,695 2740	0,694 6584
45	0,722 3222	0,717 1477	0,712 8930	0,709 7238	0,707 7680	0,707 1068

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
46	0,802 2754	0,800 5605	0,797 7467	0,793 9000	0,789 1126	0,783 5017
47	0,819 6938	0,817 8748	0,814 8896	0,810 8077	0,805 7255	0,799 7666
48	0,837 1110	0,835 1845	0,832 0222	0,827 6969	0,822 3100	0,815 9907
49	0,854 5271	0,852 4895	0,849 1445	0,844 5679	0,838 8659	0,832 1740
50	0,871 9420	0,869 7900	0,866 2564	0,861 4206	0,855 3934	0,848 3166
51	0,889 3558	0,887 0859	0,883 3581	0,878 2551	0,871 8926	0,864 4186
52	0,906 7684	0,904 3773	0,900 4496	0,895 0716	0,888 3637	0,880 4802
53	0,924 1799	0,921 6642	0,917 5310	0,911 8701	0,904 8067	0,896 5017
54	0,941 5903	0,938 9466	0,934 5024	0,928 6508	0,921 2220	0,912 4831
55	0,958 9996	0,956 2246	0,951 6638	0,945 4139	0,937 6097	0,928 4250
56	0,976 4079	0,973 4983	0,968 7155	0,962 1595	0,953 9702	0,944 3277
57	0,993 8150	0,990 7676	0,985 7574	0,978 8879	0,970 3038	0,960 1916
58	1,011 2211	1,008 0327	1,002 7899	0,995 5993	0,986 6108	0,976 0172
59	1,028 6261	1,025 2936	1,019 8129	1,012 2940	1,002 8916	0,991 8050
60	1,046 0301	1,042 5505	1,036 8266	1,028 9722	1,019 1466	1,007 5556
61	1,063 4331	1,059 8033	1,053 8314	1,045 6343	1,035 3763	1,023 2696
62	1,080 8351	1,077 0522	1,070 8272	1,062 2805	1,051 5812	1,038 9477
63	1,098 2362	1,094 2972	1,087 8143	1,078 9113	1,067 7618	1,054 5906
64	1,115 6363	1,111 5384	1,104 7930	1,095 5269	1,083 9187	1,070 1991
65	1,133 0355	1,128 7760	1,121 7634	1,112 1278	1,100 0524	1,085 7740
66	1,150 4339	1,146 0101	1,138 7257	1,128 7143	1,116 1635	1,101 3163
67	1,167 8313	1,163 2406	1,155 6803	1,145 2869	1,132 2527	1,116 8267
68	1,185 2279	1,180 4679	1,172 6273	1,161 8459	1,148 3206	1,132 3062
69	1,202 6237	1,197 6919	1,189 5670	1,178 3920	1,164 3681	1,147 7560
70	1,220 0188	1,214 9127	1,206 4996	1,194 9254	1,180 3957	1,163 1769
71	1,237 4131	1,232 1306	1,223 4255	1,211 4468	1,196 4043	1,178 5700
72	1,254 8066	1,249 3457	1,240 3449	1,227 9565	1,212 3946	1,193 9366
73	1,272 1995	1,266 5579	1,257 2582	1,244 4552	1,228 3674	1,209 2778
74	1,289 5918	1,283 7676	1,274 1655	1,260 9434	1,244 3236	1,224 5947
75	1,306 9834	1,300 9748	1,291 0673	1,277 4215	1,260 2640	1,239 8886
76	1,324 3745	1,318 1797	1,307 9638	1,293 8902	1,276 1896	1,255 1607
77	1,341 7650	1,335 3824	1,324 8553	1,310 3501	1,292 1011	1,270 4125
78	1,359 1550	1,352 5831	1,341 7423	1,326 8017	1,307 9996	1,285 6451
79	1,376 5445	1,369 7818	1,358 6249	1,343 2455	1,323 8859	1,300 8599
80	1,393 9337	1,386 9789	1,375 5036	1,359 6823	1,339 7610	1,316 0584
81	1,411 3223	1,404 1743	1,392 3787	1,376 1127	1,355 6259	1,331 2419
82	1,428 7106	1,421 3683	1,409 2505	1,392 5371	1,371 4815	1,346 4119
83	1,446 0986	1,438 5610	1,426 1194	1,408 9564	1,387 3289	1,361 5698
84	1,463 4864	1,455 7525	1,442 9858	1,425 3711	1,403 1690	1,371 7171
85	1,480 8738	1,472 9431	1,459 8499	1,441 7818	1,419 0029	1,391 8553
86	1,498 2611	1,490 1329	1,476 7122	1,458 1892	1,434 8315	1,406 9859
87	1,515 6483	1,507 3221	1,493 5731	1,474 5940	1,450 6561	1,422 1103
88	1,533 0353	1,524 5107	1,510 4328	1,490 9969	1,466 4774	1,437 2302
89	1,550 4222	1,541 6990	1,527 2918	1,507 3984	1,482 2967	1,452 3470
90	1,567 8091	1,558 8872	1,544 1505	1,523 7992	1,498 1149	1,467 4622

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
46	0,777 2090	0,770 3990	0,763 2575	0,755 9882	0,748 8097	0,741 9497
47	0,793 0799	0,785 8390	0,778 2400	0,770 4989	0,762 8478	0,755 5293
48	0,808 8958	0,801 2079	0,793 1338	0,784 9020	0,776 7585	0,768 9617
49	0,824 6566	0,816 5055	0,807 9386	0,799 1970	0,790 5411	0,782 2456
50	0,840 3623	0,831 7319	0,822 6542	0,813 3835	0,804 1950	0,795 3801
51	0,856 0132	0,846 8871	0,837 2807	0,827 4613	0,817 7196	0,808 3643
52	0,871 6093	0,861 9712	0,851 8179	0,841 4303	0,831 1146	0,821 1974
53	0,887 1508	0,876 9845	0,866 2662	0,855 2905	0,844 3798	0,833 8789
54	0,902 6382	0,891 9274	0,880 6258	0,869 0422	0,857 5151	0,846 4084
55	0,918 0719	0,906 8002	0,894 8971	0,882 6855	0,870 5207	0,858 7856
56	0,933 4521	0,921 6034	0,909 0807	0,896 2210	0,883 3967	0,871 0106
57	0,948 7796	0,936 3377	0,923 1771	0,909 6492	0,896 1436	0,883 0833
58	0,964 0549	0,951 0037	0,937 1870	0,922 9709	0,908 7621	0,895 0043
59	0,979 2786	0,965 6023	0,951 1115	0,936 1869	0,921 2529	0,906 7741
60	0,994 4515	0,980 1343	0,964 9515	0,949 2983	0,933 6169	0,918 3933
61	1,009 5744	0,994 6007	0,978 7080	0,962 3063	0,945 8554	0,929 8630
62	1,024 6483	1,009 0026	0,992 3823	0,975 2121	0,957 9697	0,941 1843
63	1,039 6739	1,023 3411	1,005 9759	0,988 0174	0,969 9613	0,952 3587
64	1,054 6524	1,037 6175	1,019 4901	1,000 7238	0,981 8320	0,963 3878
65	1,069 5848	1,051 8332	1,032 9266	1,013 3330	0,993 5836	0,974 2735
66	1,084 4723	1,065 9896	1,046 2871	1,025 8472	1,005 2185	0,985 0180
67	1,099 3160	1,080 0882	1,059 5735	1,038 2684	1,016 7388	0,995 6239
68	1,114 1174	1,094 1307	1,072 7877	1,050 5989	1,028 1473	1,006 0936
69	1,128 8776	1,108 1187	1,085 9319	1,062 8412	1,039 4466	1,016 4302
70	1,143 5981	1,122 0541	1,099 0083	1,074 9980	1,050 6398	1,026 6369
71	1,158 2804	1,135 9387	1,112 0192	1,087 0720	1,061 7301	1,036 7173
72	1,172 9260	1,149 7746	1,124 9670	1,099 0662	1,072 7210	1,046 6752
73	1,187 5365	1,163 5637	1,137 8583	1,110 9837	1,083 6160	1,056 5147
74	1,202 1134	1,177 3082	1,150 6839	1,122 8279	1,094 4192	1,066 2403
75	1,216 6585	1,191 0104	1,163 4585	1,134 6020	1,105 1345	1,075 8567
76	1,231 1736	1,204 6723	1,176 1809	1,146 3097	1,115 7662	1,085 3688
77	1,245 6603	1,218 2965	1,188 8542	1,157 9547	1,126 3189	1,094 7821
78	1,260 1205	1,231 8853	1,201 4814	1,169 5408	1,136 7973	1,104 1020
79	1,274 5561	1,245 4412	1,214 0658	1,181 0721	1,147 2061	1,113 3346
80	1,288 9690	1,258 9668	1,226 6105	1,192 5526	1,157 5507	1,122 4859
81	1,303 3612	1,272 4645	1,239 1189	1,203 9865	1,167 8360	1,131 5624
82	1,317 7345	1,285 9370	1,251 5945	1,215 3781	1,178 0677	1,140 5708
83	1,332 0911	1,299 3871	1,264 0407	1,226 7320	1,188 2511	1,149 5180
84	1,346 4329	1,312 8174	1,276 4610	1,238 0526	1,198 3922	1,158 4111
85	1,360 7621	1,326 2307	1,288 8591	1,249 3445	1,208 4966	1,167 2575
86	1,375 0806	1,339 6297	1,301 2385	1,260 6124	1,218 5702	1,176 0646
87	1,389 3907	1,353 0174	1,313 6030	1,271 8610	1,228 6193	1,184 8403
88	1,403 6943	1,366 3964	1,325 9562	1,283 0951	1,238 6497	1,193 5921
89	1,417 9937	1,379 7698	1,338 3019	1,294 3195	1,248 6678	1,202 3281
90	1,432 2910	1,393 1402	1,350 6439	1,305 5391	1,258 6796	1,211 0560

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
46	0,735 6385	0,730 1005	0,725 5433	0,722 1464	0,720 0490	0,719 3398
47	0,748 7901	0,742 8709	0,737 9960	0,734 3598	0,732 1135	0,731 3537
48	0,761 7749	0,755 4567	0,750 2485	0,746 3608	0,743 9579	0,743 1448
49	0,774 5915	0,767 8556	0,762 2980	0,758 1462	0,755 5786	0,754 7096
50	0,787 2382	0,780 0656	0,774 1420	0,769 7130	0,766 9723	0,766 0444
51	0,799 7138	0,792 0848	0,785 7778	0,781 0582	0,778 1357	0,777 1460
52	0,812 0169	0,803 9115	0,797 2033	0,792 1789	0,789 0655	0,788 0108
53	0,824 1467	0,815 5440	0,808 4163	0,803 0723	0,799 7586	0,798 6355
54	0,836 1022	0,826 9809	0,819 4146	0,813 7358	0,810 2119	0,809 0170
55	0,847 8828	0,838 2209	0,830 1962	0,824 1669	0,820 4223	0,819 1520
56	0,859 4878	0,849 2630	0,840 7596	0,834 3632	0,830 3870	0,829 0376
57	0,870 9172	0,860 1061	0,851 1029	0,844 3222	0,840 1032	0,838 6706
58	0,882 1706	0,870 7497	0,861 2249	0,854 0419	0,849 5681	0,848 0481
59	0,893 2483	0,881 1932	0,871 1242	0,863 5202	0,858 7791	0,857 1673
60	0,904 1506	0,891 4364	0,880 7997	0,872 7552	0,867 7336	0,866 0254
61	0,914 8781	0,901 4792	0,890 2507	0,881 7452	0,876 4293	0,874 6197
62	0,925 4316	0,911 3218	0,899 4765	0,890 4887	0,884 8638	0,882 9476
63	0,935 8121	0,920 9646	0,908 4766	0,898 9843	0,893 0349	0,891 0065
64	0,946 0211	0,930 4085	0,917 2510	0,907 2306	0,900 9406	0,898 7940
65	0,956 0601	0,939 6545	0,925 7998	0,915 2269	0,908 5787	0,906 3078
66	0,965 9311	0,948 7039	0,934 1234	0,922 9723	0,915 9476	0,913 5455
67	0,975 6364	0,957 5585	0,942 2225	0,930 4662	0,923 0454	0,920 5049
68	0,985 1785	0,966 2203	0,950 0983	0,937 7085	0,929 8707	0,927 1839
69	0,994 5603	0,974 6918	0,957 7522	0,944 6991	0,936 4220	0,933 5804
70	1,003 7851	0,982 9758	0,965 1863	0,951 4385	0,942 6981	0,939 6926
71	1,012 8565	0,991 0757	0,972 4026	0,957 9273	0,948 6980	0,945 5186
72	1,021 7784	0,998 9952	0,979 4043	0,964 1668	0,954 4208	0,951 0565
73	1,030 5554	1,006 7385	0,986 1945	0,970 1585	0,959 8659	0,956 3048
74	1,039 1921	1,014 3105	0,992 7773	0,975 9046	0,965 0330	0,961 2617
75	1,047 6939	1,021 7163	0,999 1574	0,981 4078	0,969 9221	0,965 9258
76	1,056 0663	1,028 9620	1,005 3402	0,986 6716	0,974 5336	0,970 2957
77	1,064 3153	1,036 0540	1,011 3316	0,991 7003	0,978 8682	0,974 3701
78	1,072 4475	1,042 9994	1,017 1388	0,996 4990	0,982 9273	0,978 1476
79	1,080 4698	1,049 8060	1,022 7697	1,001 0741	0,986 7129	0,981 6272
80	1,088 3894	1,056 4822	1,028 2331	1,005 4329	0,990 2278	0,984 8078
81	1,096 2143	1,063 0371	1,033 5389	1,009 5847	0,993 4759	0,987 6883
82	1,103 9524	1,069 4803	1,038 6984	1,013 5399	0,996 4626	0,990 2681
83	1,111 6123	1,075 8224	1,043 7237	1,017 3113	0,999 1951	0,992 5462
84	1,119 2031	1,082 0743	1,048 6281	1,020 9136	1,001 6832	0,994 5219
85	1,126 7337	1,088 2477	1,053 4263	1,024 3639	1,003 9403	0,996 1947
86	1,134 2139	1,094 3548	1,058 1339	1,027 6821	1,005 9845	0,997 5641
87	1,141 6533	1,100 4081	1,062 7677	1,030 8904	1,007 8408	0,998 6295
88	1,149 0620	1,106 4207	1,067 3451	1,034 0136	1,009 5423	0,999 3908
89	1,156 4502	1,112 4061	1,071 8847	1,037 0787	1,011 1323	0,999 8477
90	1,163 8280	1,118 3777	1,076 4051	1,040 1144	1,012 6635	1,000 0000

Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen

Dritter Teil: Anwendungen

Fricke, R. - Adelmann, C.; Elstrodt, J.; Klimenko, E.

(Hrsg.)

2012, XVII, 323 S. 35 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-20953-6