

Vorwort der Herausgeber

Im Vorwort der zweiten Auflage des ersten Teils seines Buchs über *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen* (Leipzig und Berlin: Teubner 1930) schrieb Robert Fricke im Juni 1930 über den geplanten dritten Teil: „Der dritte, noch in der Bearbeitung befindliche Band soll einige Anwendungen der elliptischen Funktionen behandeln. In einer Einleitung werden die Methoden und Hilfsmittel zur numerischen Berechnung der elliptischen Integrale und Funktionen gegeben. ... In einem ersten von drei Abschnitten werden geometrische Anwendungen besprochen, im zweiten arithmetische. Endlich soll der dritte Abschnitt einige mechanische und physikalische Anwendungen behandeln. Die lange Zwischenzeit seit Erscheinen des zweiten Bandes ist dem dritten jedenfalls insofern zugute gekommen, als es inzwischen gelang, die arithmetischen Anwendungen an einer gewissen, auch die allgemeine Transformationstheorie betreffenden Stelle neuerdings wesentlich zu vertiefen. Der Text der Einleitung und der beiden ersten Abschnitte ist fertig bearbeitet. Wenn mir die Kraft bleibt, hoffe ich, im Laufe des nächsten Jahres den dritten Band herausgeben zu können“.

Diese Hoffnung des Autors erfüllte sich nicht, denn Robert Fricke starb am 18. Juli 1930. Das Manuskript des dritten Bandes fand sich in seinem Nachlass im oben beschriebenen Zustand vor: Der mathematische Teil existiert als fertiges Schreibmaschinenmanuskript, in das Fricke die Formeln handschriftlich eingetragen hat. Dieser Teil endet mit der (sog. ersten) Kroneckerschen Grenzformel. Von diesem mathematischen Teil des Werks gibt es überdies ein Manuskript von der Hand des Verfassers. Vom geplanten dritten Abschnitt, der mechanische und physikalische Anwendungen behandeln sollte, gibt es nur einen handgeschriebenen Entwurf eines Kapitels über die analytische Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Aus einem ebenfalls handgeschriebenen früheren Entwurf des Inhaltsverzeichnisses des dritten Bandes geht hervor, welche weiteren physikalischen Anwendungen Fricke im Sinn hatte: Ebenes und sphärisches Pendel, Bewegung starrer Körper, Kreiselbewegung, Wärmeleitung, elastische Linien und Bewegungsmechanismen. Insgesamt deckt sich das Spektrum der mathematischen und physikalischen Anwendungsgebiete weitgehend mit denjenigen, die Fricke in seinem profunden Beitrag über *Elliptische Funktionen* in Heft II B 3 der Encyklopädie der mathematischen

Wissenschaften behandelt hat. Dieser Artikel gibt einen ausgezeichneten Überblick über den behandelten Gegenstand bis zum Jahr 1913 und ist dank seiner umfassenden Auswertung der bis zum Erscheinungsjahr publizierten Literatur nach wie vor von größtem Wert. Nach eigenem Bekunden verdankte Fricke die Anregung zu seinem Werk über elliptische Funktionen der Arbeit an diesem Enzyklopädiebeitrag.

Die mathematischen Abschnitte des Frickeschen Manuskripts zu Bd. III sind als abgeschlossen anzusehen. Sie enthalten in Abschnitt I einen bunten Strauß geometrischer Anwendungen, z. B. die Bogenlängen von Lemniskate, Ellipse und Hyperbel, den Satz von Gauß über die Lemniskatenteilung, den Zusammenhang ebener Kurven dritten Grades mit elliptischen Funktionen und die Wirkung der zugehörigen Transformationsgruppen, die Ponceletschen Polygone, die geodätischen Linien auf dem Umdrehungsellipsoid und den Zusammenhang zwischen sphärischer Trigonometrie und dem Additionstheorem elliptischer Funktionen. Unter den arithmetischen Anwendungen widmet Fricke der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen und den Klassengleichungen seine besondere Aufmerksamkeit. Ein erstes Ziel ist hier zunächst ein Beweis des Satzes von Abel, demzufolge bei Vorliegen komplexer Multiplikation der „singuläre Modul“ $j(\omega)$ durch Wurzelziehen im Bereich der rationalen Zahlen bestimmt werden kann. Zweites Ziel ist anschließend die explizite Berechnung dieser „Klasseninvarianten“. Als entscheidendes Hilfsmittel dient Fricke dabei das sog. „Klassenpolygon“. Im Vorwort zu Bd. II des vorliegenden Werks bezeichnet er das Klassenpolygon als ein „beziehungsreiches Gebilde, das die früh bemerkte Beziehung der elliptischen Funktionen zur Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen in klarster Weise darlegt und sich als ein wertvolles Hilfsmittel zur Behandlung der Transformationstheorie erwies“. Während zuvor bei zahlentheoretischen Anwendungen nur *Modulformen* eingesetzt wurden, zeigt Fricke hier erstmals den Nutzen der Theorie der *automorphen Formen* für arithmetische Untersuchungen. Weitere zahlentheoretische Anwendungen betreffen den Zusammenhang zwischen Darstellungsanzahlen gewisser quaternärer quadratischer Formen und Teilersummen sowie die Bestimmung von Klassenzahlrelationen. Das Manuskript endet ziemlich abrupt mit der Herleitung der Kroneckerschen Grenzformel. Ob der Verfasser noch Anwendungen dieser Formel geplant hat, ist nicht bekannt.

Schon wenige Monate nach Frickes Tod wandte sich seine Familie an das Verlagshaus Teubner mit der Bitte um eine Herausgabe des dritten Bandes. Der Gang der damaligen Überlegungen lässt sich an Hand von Briefen aus dem Nachlass von Helmut Hasse nachvollziehen, die Clemens Adelmann in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen aufgefunden hat, und an Hand zweier weiterer Briefe, die Emmy Noether an Frickes Tochter Gertrud Landauer schrieb. Wir beschränken uns hier auf eine Zusammenfassung der wesentlichen Punkte: Auf Vorschlag des Funktionentheoretikers und Geometers Ludwig Bieberbach wandte sich der Teubner-Verlag wegen der Edition und Vervollständigung des Frickeschen Manuskripts zunächst an Lothar Koschmieder und informierte Frickes Familie über diesen Schritt. Daraufhin schrieb Frickes Tochter Gertrud Landauer an Emmy Noether mit der Bitte um Rat. Diese nannte in ihrem Antwortschreiben vom 29. September 1930 Lothar Koschmieder „als Herausgeber ganz geeignet“ und

bezeichnete ihn als einen „guten Kenner der elliptischen Funktionen“. Weiter diskutierte sie die Option, „an Hand des handschriftlichen Inhaltsverzeichnisses noch einige physikalische Anwendungen zufügen“ zu lassen; alternativ „wäre ja noch die Möglichkeit, von der wir auch in Harzburg zuerst sprachen, nur die beiden fertigen ersten Teile als 3. Band zu bringen“. Dem gesamten Tenor nach schien es eine ausgemachte Sache zu sein, dass das Manuskript gedruckt werden würde – schließlich hatte Robert Fricke in 40 Jahren fruchtbarer Zusammenarbeit (anfangs gemeinsam mit Felix Klein) etliche gewichtige Werke bei Teubner publiziert.

Inzwischen hatte Koschmieder in seiner Antwort an den Verlag Helmut Hasse als Herausgeber vorgeschlagen, da ein wesentlicher Teil des Buchmanuskripts arithmetischen Anwendungen gewidmet sei. Zweifellos war Hasse für die Herausgabe des zahlentheoretischen Teils geradezu prädestiniert, hatte er doch damals gerade seine *Neue Begründung der komplexen Multiplikation* (J. reine angew. Math. 158 (1927), 228–259; II. *ibid.* 165 (1931), 64–88) vollendet. Koschmieder erklärte sich überdies grundsätzlich bereit, bei Bedarf den Abschnitt über geometrische Anwendungen herauszugeben und den fehlenden Abschnitt über physikalische Anwendungen neu zu schreiben.

In den folgenden Briefen von 9. und 23. Dezember 1930 an Hasse machte der Teubner-Verlag jedoch nachdrücklich auf die wirtschaftlichen Risiken des Projekts aufmerksam und führte aus, dass ein wenigstens die Kosten deckender Absatz des Buchs „von entscheidender Bedeutung“ sei. Hier wird der Ernst der wirtschaftlichen Lage in der Zeit der Weltwirtschaftskrise nach 1929 deutlich. Bereits in den Jahren nach dem Ersten Weltkrieg war der Verlag B. G. Teubner in erhebliche finanzielle Bedrängnis geraten und konnte sich nicht mehr im bisherigen Umfang für das Fach Mathematik engagieren. Das Hassesche Gutachten an den Verlag existiert wahrscheinlich nicht mehr, doch geht aus der folgenden Korrespondenz hervor, dass es mit Bezug auf den zahlentheoretischen Teil das Wort „überholt“ enthielt. Der Verlag erhob daraufhin „größte Bedenken gegen die Veröffentlichung“. Koschmieder widersprach und legte dar, dass der „weit umfänglichere“ nicht zahlentheoretische Teil „von Dingen handelt, die schon ihre klassische Gestalt haben und daher nicht veralten können“. Auch Hasse widersprach dem Verlag in einem Brief vom 2. Mai 1931 und erklärte, dass „auch der zahlentheoretische Teil gegenüber den bisher vorliegenden Darstellungen dieses Gebiets stofflich so viel Neues“ enthalte, „daß eine Drucklegung ganz gewiß lohnend erscheint.“ Seine Kritik habe sich hauptsächlich „auf die Frickesche Darstellungsmethode“ bezogen; „in dieser Hinsicht“ seien „in der letzten Zeit ... Fortschritte“ gemacht worden, die Fricke aber gar nicht habe berücksichtigen können, um nicht die Einheitlichkeit des Gesamtwerks zu gefährden. Zusätzlich begründete Hasse ausführlich seine Meinung, dass durchaus ein ausreichender Absatz des Werks zu erwarten sei. Nach weiteren brieflichen Diskussionen kam am Ende jedoch eine Publikation des Frickeschen dritten Bandes durch den Teubner-Verlag nicht zustande.

In ihrem zweiten Brief an Gertrud Landauer vom 12. August 1931 bemüht sich Emmy Noether, die Absage des Teubner-Verlags zu erklären: „Ich glaube Sie haben ganz richtig erkannt, daß in der Mathematik augenblicklich eine starke Verschiebung der Interessen sich vollzogen hat – ein Übergang von der durch Klein

inaugurierten Richtung, der auch das Lebenswerk Ihres Vaters angehört, zu einer Richtung, die vielleicht am stärksten durch den Namen Dedekind zu bezeichnen ist, mit der aber in anderer Hinsicht auch wieder Ihr Vater verknüpft ist. Solche Wandlungen der Wissenschaft treten immer wieder auf!“ Wie man sieht, war sich Emmy Noether der damaligen strukturellen Neuorientierung der Mathematik, die mit der maßgeblich auch von ihr selbst ausgehenden und von ihren Schülern rasch weiter entwickelten und verbreiteten abstrakten Algebraisierung verbunden war, vollauf bewusst. Mit Bezug auf den zahlentheoretischen Abschnitt des dritten Bandes berichtet sie über ein Gespräch, das sie mit einem der für den Verlag in dieser Sache tätigen Gutachter geführt habe. Dieser Gutachter war offenbar Helmut Hasse, aber sein Name wird im Brief nicht genannt. Sie schreibt: „Er sagte mir, daß es ihm sehr arg war, daß Teubner auf sein rein fachliches Urteil hin den Druck aufgeben wollte. . .“, und sie beendet ihren Brief mit der Feststellung, „daß Teubner bei der augenblicklichen wirtschaftlichen Lage keine starke Initiative hat!“

Um das Frickesche Werk über elliptische Funktionen zu einem sinnvollen Abschluss zu bringen, veröffentlichen wir das vorhandene Manuskript zusammen mit Nachdrucken der ersten beiden Bände, auf die im Text häufig zurückgegriffen wird. Der zweite Abschnitt des hier vorliegenden dritten Bandes steht auch in enger Beziehung zu den letzten drei Kapiteln des dritten Bandes von Fricke *Lehrbuch der Algebra* (Braunschweig: Vieweg 1928), auf die ebenfalls mehrfach verwiesen wird. In diesem Zusammenhang erscheint der Hinweis angebracht, dass in den drei Bänden von Fricke *Lehrbuch der Algebra* noch etliche Perlen klassischer Mathematik ihrer Wiederentdeckung harren, die dem Bewusstsein der Gegenwart entrückt zu sein scheinen (vgl. hierzu J.-P. Serre, *Œuvres*, vol. III (Berlin etc.: Springer-Verlag 1986), S. 550–554).

Bei der Herausgabe des 80 Jahre alten Texts mussten wir im Großen wie im Kleinen zahlreiche Entscheidungen treffen. Grundsätzlich kam nur eine sorgfältige Edition des vorhandenen Dokuments in Betracht. Eine darüber hinausgehende Modernisierung der Diktion, darstellerische Umgestaltung oder Anbindung an die neuere mathematische Entwicklung haben wir von vornherein ausgeschlossen. Das betrifft besonders die numerischen Methoden. Aus heutiger Sicht hatte die numerische Mathematik zur Zeit der Entstehung des Frickeschen Manuskripts gegenüber der reinen Mathematik einen gewaltigen Nachholbedarf. Der bequeme Zugang zu leistungsfähigen Computern hat hier heute die Möglichkeiten in früher buchstäblich unvorstellbarer Weise erweitert. Dennoch ist es durchaus reizvoll zu sehen, wie Fricke durch geschickten Einsatz des reichen Formelmaterials mit wenig Rechnung zu erstaunlich genauen Ergebnissen kommt. Gegen Ende des Kapitels 5 hat Fricke einige Rechnungen wegen zu großen Rechenaufwands nicht zu Ende geführt. Clemens Adelmann hat das Fehlende in Abschnitt 5.12 ergänzt; dabei verweisen Zahlen in eckigen Klammern auf das Verzeichnis ergänzender Literatur auf S. 315–318. Ferner hat er den Text des 7. Kapitels über die analytische Theorie des ebenen Gelenkvierecks nach dem handschriftlichen Frickeschen Manuskript und den von Fricke benutzten Literaturvorlagen für den Druck vorbereitet. Dabei hat er den Frickeschen Text weitestgehend beibehalten und Ergänzungen durch eckige Klammern [...] kenntlich gemacht. Zusätzlich hat er die Lesbarkeit des 7. Kapitels

durch Einfügen von Zwischenüberschriften, die im Frickeschen Originaltext fehlen, erleichtert.

Die individuellen Eigenheiten der Frickeschen Rechtschreibung und Zeichensetzung haben wir weitgehend beibehalten, um die stilistische Einheit der Darstellung mit den vorangehenden Bänden I, II zu wahren. Nur ganz vereinzelt erfolgten behutsame Eingriffe in die Rechtschreibung und Zeichensetzung des Originals, wenn das geeignet erschien, die Lektüre des Texts zu erleichtern. Offensichtliche kleinere Errata haben wir stillschweigend korrigiert, größere Korrekturen und Anmerkungen der Herausgeber als solche kenntlich gemacht.

Die Herstellung der Druckvorlage wurde durch die Verwendung der Software des Verlagshauses Springer wesentlich erleichtert. Dadurch ergab sich im System der Gliederung des Texts eine kleine Abweichung vom äußeren Erscheinungsbild der Bände I, II.

Zur Erläuterung der Bezeichnungen erwähnen wir: Fricke benutzt die alten Abkürzungen tg , cotg für den Tangens ($\tan$) bzw. Kotangens ($\cot$) und Cof , Sin , Tg für den Kosinus hyperbolicus ($\cosh$) bzw. Sinus hyperbolicus ($\sinh$) bzw. Tangens hyperbolicus ($\tanh$). Bezüglich der Schreibweise der Jacobischen Funktionen sn , cn , dn ist zu beachten: In Bd. I werden die Potenzen dieser Funktionen mit $\text{sn}^2 w$, $\text{cn}^2 w$, $\text{dn}^2 w$ etc. bezeichnet. In Bd. II und im vorliegenden Bd. III schreibt der Autor hingegen des öfteren z. B. $\text{sn } u^2$ (statt $\text{sn}^2 u = (\text{sn } u)^2$), $\text{sn } gw^2$ (statt $\text{sn}^2 gw = (\text{sn } gw)^2$), $\text{sn } w^4$ (statt $\text{sn}^4 w = (\text{sn } w)^4$) oder $\text{cn } \frac{w}{2}$ (anstelle von $\text{cn}^2 \frac{w}{2}$). Mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet Fricke den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, und die Adjunktion eines oder mehrerer Elemente bringt er z. B. folgendermaßen zum Ausdruck: $(\mathfrak{R}, i) := \mathbb{Q}(i)$, $(\mathfrak{R}, k^2) := \mathbb{Q}(k^2)$, $(\mathfrak{R}, \theta) := \mathbb{Q}(\theta)$, $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}, \varepsilon) := \mathbb{Q}(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$, $(\mathfrak{R}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, i) := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$. Der Periodenquotient wird gewählt in der Form $\omega = \omega_1/\omega_2$ (mit positivem Imaginärteil), und es ist $q = e^{\pi i \omega}$. Statt „Nebenklasse“ verwendet Fricke den Namen „Nebengruppe“, eine „ausgezeichnete Untergruppe“ ist ein Normalteiler, und eine „gleichberechtigte Untergruppe“ ist in heutiger Terminologie eine konjugierte Untergruppe. – Das ergänzende Literaturverzeichnis und das Register wurden von den Herausgebern hinzugefügt.

Braunschweig,
Münster und Düsseldorf,
den 15. Mai 2011

*Clemens Adelmann,
Jürgen Elstrodt und Elena Klimenko*

Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen

Dritter Teil: Anwendungen

Fricke, R. - Adelman, C.; Elstrodt, J.; Klimenko, E.

(Hrsg.)

2012, XVII, 323 S. 35 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-20953-6