

# Inhaltsverzeichnis

## Einleitung.

|                                                                                                                        |          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Numerische Berechnungen im Gebiete der elliptischen Funktionen. . .</b>                                             | <b>1</b> |
| 0.1 Berechnung der Perioden bei gegebenen Invarianten. . . . .                                                         | 1        |
| 0.2 Berechnung der Invarianten bei gegebenen Perioden. . . . .                                                         | 10       |
| 0.3 Berechnung der elliptischen Funktionen bei gegebenem<br>Argumente und gegebenen Perioden. . . . .                  | 13       |
| 0.4 Berechnung der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung<br>bei gegebenen Grenzen und Invarianten. . . . . | 15       |
| 0.5 Tafeln. . . . .                                                                                                    | 21       |

## Abschnitt I Geometrische Anwendungen der elliptischen Funktionen.

|                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Bogen- und Flächenberechnungen. . . . .</b>                                             | <b>45</b> |
| 1.1 Die Bogenlänge der Lemniskate. . . . .                                                   | 45        |
| 1.2 Anwendungen des Additionstheorems auf Bogenkonstruktionen<br>bei der Lemniskate. . . . . | 48        |
| 1.3 Satz von Gauß über die Lemniskatenteilung. . . . .                                       | 56        |
| 1.4 Die Bogenlängen der Ellipse und Hyperbel. . . . .                                        | 65        |
| 1.5 Die Oberfläche des Ellipsoids. . . . .                                                   | 67        |
| <b>2 Ebene Kurven dritten Grades und elliptische Funktionen. . . . .</b>                     | <b>79</b> |
| 2.1 Kurve dritten Grades und Periodenparallelogramm. . . . .                                 | 79        |
| 2.2 System der Wendepunkte der Kurve $\mathbf{K}_3$ . . . . .                                | 82        |
| 2.3 Die kanonischen Koordinatensysteme der Kurven $\mathbf{K}_3$ . . . . .                   | 83        |
| 2.4 Die Kollineationsgruppe $G_{18}$ der Kurve $\mathbf{K}_3$ in sich. . . . .               | 86        |
| 2.5 Die singulären Koordinatensysteme der Kurven $\mathbf{K}_3$ . . . . .                    | 91        |
| 2.6 Die Hessesche Kollineationsgruppe $G_{216}$ . . . . .                                    | 94        |
| 2.7 Gruppe aller eindeutigen Transformationen der Kurve $\mathbf{K}_3$ in sich. . .          | 97        |
| 2.8 Realitätsbetrachtungen. . . . .                                                          | 101       |
| 2.9 Raumkurven vierter Ordnung und elliptische Funktionen. . . . .                           | 104       |

|                                                                            |                                                                                               |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>3</b>                                                                   | <b>Vermischte geometrische Anwendungen.</b>                                                   | 109 |
| 3.1                                                                        | Ponceletsche Polygone.                                                                        | 109 |
| 3.2                                                                        | Darstellung der geodätischen Linien auf dem Umdrehungsellipsoid durch elliptische Funktionen. | 114 |
| 3.3                                                                        | Verlauf der geodätischen Linien auf dem Umdrehungsellipsoid.                                  | 122 |
| 3.4                                                                        | Sphärische Dreiecke und Additionstheorem.                                                     | 127 |
| <b>Abschnitt II Arithmetische Anwendungen der elliptischen Funktionen.</b> |                                                                                               |     |
| <b>4</b>                                                                   | <b>Komplexe Multiplikation und Klassengleichungen.</b>                                        | 133 |
| 4.1                                                                        | Die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.                                      | 133 |
| 4.2                                                                        | Einführung der Klasseninvarianten und der Klassengleichung.                                   | 136 |
| 4.3                                                                        | Angaben über spezielle Transformationsgleichungen erster Stufe.                               | 138 |
| 4.4                                                                        | Herstellung der Klassengleichung.                                                             | 142 |
| 4.5                                                                        | Gruppe der Formenkomposition.                                                                 | 151 |
| 4.6                                                                        | Diskriminante der Transformationsgleichung bei einem Primzahlgrade.                           | 156 |
| 4.7                                                                        | Beziehungen zwischen den Wurzeln der Klassengleichung $H_D(j) = 0$ .                          | 161 |
| 4.8                                                                        | Primidealzerlegungen rationaler Primzahlen im Klassenkörper.                                  | 172 |
| 4.9                                                                        | Irreduzibilität der Klassengleichung in $(\Re, \sqrt{D})$ .                                   | 178 |
| 4.10                                                                       | Angaben über ambige Klassen.                                                                  | 179 |
| 4.11                                                                       | Galoissche Gruppe der Klassengleichung.                                                       | 182 |
| <b>5</b>                                                                   | <b>Transformation der elliptischen Funktionen und Berechnung der Klasseninvarianten.</b>      | 185 |
| 5.1                                                                        | Transformationsgruppe, Klassengruppe und Hauptgruppe.                                         | 185 |
| 5.2                                                                        | Methoden zur Berechnung der Klasseninvarianten.                                               | 190 |
| 5.3                                                                        | Einfachste Beispiele zur Berechnung der Klasseninvarianten.                                   | 193 |
| 5.4                                                                        | Bericht über frühere Untersuchungen.                                                          | 200 |
| 5.5                                                                        | Hauptpolygon, Zwischengruppen und Formklassen beim Grade 110.                                 | 207 |
| 5.6                                                                        | Herstellung der Hauptfunktion des Grades 110.                                                 | 211 |
| 5.7                                                                        | Funktionssysteme der Zwischengruppen.                                                         | 218 |
| 5.8                                                                        | Hauptgruppe und Hauptfunktion des 55 <sup>sten</sup> Transformationsgrades.                   | 221 |
| 5.9                                                                        | Zwischengruppen $G_{1,t}^{(55)}$ und Eckenwerte der Hauptfunktion $u(\omega)$ .               | 226 |
| 5.10                                                                       | Übergang zum Transformationsgrade 11.                                                         | 229 |
| 5.11                                                                       | Klasseninvarianten und Klassenkörper der Diskriminanten $-55$ , $-220$ , $-440$ .             | 232 |
| 5.12                                                                       | Anhang: Fortsetzung der Berechnung der Klasseninvarianten.                                    | 237 |
| <b>6</b>                                                                   | <b>Vermischte arithmetische Anwendungen.</b>                                                  | 245 |
| 6.1                                                                        | Relationen zwischen Darstellungsanzahlen und Teilersummen.                                    | 245 |
| 6.2                                                                        | Klassenzahlrelation erster Stufe.                                                             | 254 |
| 6.3                                                                        | Angaben über Klassenzahlrelationen höherer Stufen.                                            | 261 |
| 6.4                                                                        | Die Kroneckersche Grenzformel.                                                                | 263 |

**Abschnitt III Mechanische und physikalische Anwendungen.**

|          |                                                                                 |     |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>7</b> | <b>Analytische Theorie des ebenen Gelenkvierecks.</b>                           | 277 |
| 7.1      | Das Gelenkviereck und Kurven dritten Grades.                                    | 277 |
| 7.2      | Das Gelenkviereck und elliptische Funktionen.                                   | 281 |
| 7.2.1    | Eine Formel von Jacobi.                                                         | 281 |
| 7.2.2    | Ansatz zur Darstellung der Koordinaten durch elliptische Funktionen.            | 282 |
| 7.2.3    | Der Integralmodul $k$ , die Modulfunktion $\ell(\omega)$ und Ausartungen.       | 285 |
| 7.2.4    | Gleichungen für die Parameter $u$ .                                             | 287 |
| 7.2.5    | Der Grenzfall $d = 0$ .                                                         | 291 |
| 7.2.6    | Gleichungen für die Parameterhalbierung $u/2$ .                                 | 292 |
| 7.2.7    | Beschreibung der Winkel im Gelenkviereck durch elliptische Funktionen.          | 294 |
| 7.2.8    | Darstellung der Diagonalen durch elliptische Funktionen.                        | 298 |
| 7.3      | Alternative Behandlung des Gelenkvierecks.                                      | 299 |
| 7.3.1    | Ansatz für die Parameter $\mu$ .                                                | 300 |
| 7.3.2    | Beschreibung der Winkel im Gelenkviereck durch elliptische Funktionen.          | 303 |
| 7.3.3    | Darstellung der Diagonalen durch elliptische Funktionen.                        | 305 |
| 7.3.4    | Gleichungen für die Parameter $\mu$ .                                           | 306 |
| 7.3.5    | Darstellung der Winkel mit einem Parameter $\theta$ .                           | 307 |
| 7.4      | Geometrische Deutung der Winkel $\varphi, \psi, \chi$ und der Parameter $\mu$ . | 311 |
|          | <b>Ergänzende Literatur.</b>                                                    | 315 |
|          | <b>Register.</b>                                                                | 319 |

Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen

Dritter Teil: Anwendungen

Fricke, R. - Adelmann, C.; Elstrodt, J.; Klimenko, E.

(Hrsg.)

2012, XVII, 323 S. 35 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-20953-6