

Darstellungstransformationen generieren aus einem Modell eine Rechnerinterne Darstellung (RID). [Lexi]

Um mit den Methoden der Computergrafik möglichst lange von spezifischer Hardware unabhängig zu bleiben, arbeitet man zunächst in einer virtuellen Welt mit virtuellen Arbeitsplätzen. Diese bilden die Schnittstelle zur Hardware. Damit ist man im übergeordneten Teil des Anwenderprogrammes systemunabhängig, und erst zur Steuerung physischer Geräte sind deren spezielle Eigenschaften zu berücksichtigen. Hierzu sind im Wesentlichen zwei Hauptaufgaben zu lösen:

- *Transformation* der realen Szenerie in eine virtuelle Darstellungsgeometrie: Die Objekte der Szenerie sind durch Knoten und ebene Facetten modelliert, wobei nur die Knoten die äußere Form festlegen. Die Facetten mit ihren Kanten spannen sich zwischen die Knoten. Insofern kann man zunächst die Knoten von den Facetten als entkoppelt betrachten. Hier in Kap. 8 geht es nur darum, die Knoten in die gewünschte Ansicht mit einer der gewünschten Projektionen zu transformieren. Kanten und Facetten werden dazu nicht gebraucht.
- *Visualisierung* der virtuellen Darstellung: In Kap. 9 wird unter Verwendung der zuvor transformierten Knoten zwischen diese die Facetten „eingehängt“, sichtbare Kanten und Oberflächen ermittelt und eine Grafik zur Ausgabe auf einer Hardware (Bildschirm, Drucker) erzeugt. Analog zu den diversen Projektionsmethoden stehen diverse Visualisierungsverfahren bereit. Abhängig von der gewünschten Qualität der Grafik reicht der Aufwand von „einfach und gering“ bis „kompliziert und rechenintensiv“.

8.1 Projektionselemente

Das darzustellende Objekt bzw. die gesamte Szenerie ist normalerweise nicht in einem **Globalsystem** $(XYZ)_G$ beschrieben, dessen Ursprung praktischerweise „oben links“ in einer Ecke liegt und dessen Achsen genau zu unseren Projektionskoordinaten $(XYZ)_V$ oder zu den Gerätekoordinaten (hvt) passen. In Abb. 8.1 dargestellt ist eine Projektion aus Sicht eines Beobachters mit ihren wesentlichen Elementen.

- **Das Objekt** bzw. die Szenerie ist in globalen Koordinaten $(XYZ)_G$ vermaßt.
- **Die Globalkoordinaten** $(XYZ)_G$ auch „Welt“-koordinaten (**WC** siehe Kap. 7): Dieses Koordinatensystem ist normalerweise ein kartesisches Rechtssystem; andere „Welt“-koordinaten sind leicht umzurechnen und/oder zusammenzuführen.
- **Der Beobachter** ist durch den Ortsvektor $\{\mathbf{b}\}$ positioniert und ist zugleich Projektionszentrum. Aus dieser Position betrachtet er entlang der Projektionsrichtung $\{\mathbf{v}\}$ die Szene. Ihm ist ein eigenes „View“-koordinatensystem $(XYZ)_V$ zugeordnet, dessen Ursprung im Projektionszentrum liegt.
Der Beobachter hat keine Probleme mit der Akkommodationsfähigkeit seiner Augen. Auch die leidige ‚Tiefenschärfe‘ einer Fotokamera kennt er nicht. Er sieht zugleich ‚hinten‘ und ‚vorne‘ alles scharf.
- **Die Projektionsrichtung** $\{\mathbf{v}\}$ geht durch das Projektionszentrum und ist identisch mit der Z_V -Achse des Viewsystems; auch Sicht- oder Bildachse. Genaugenommen ist es umgekehrt: Die Z_V -Achse wird in die Projektionsrichtung $\{\mathbf{v}\}$ gelegt. Wenn die Position $\{\mathbf{b}\}$ oder die Richtung $\{\mathbf{v}\}$ verändert wird, muss die Grafik neu berechnet werden.
- **Die Distanz** d vom Projektionszentrum zur Projektionsfläche wird in Richtung $\{\mathbf{v}\}$ gemessen und hat wesentlichen Einfluss auf Zentralprojektionen.
- **Das Projektionszentrum**
 - liegt im Unendlichen – die **Parallelprojektion**, die Projektionsstrahlen, Vektor $\{\mathbf{v}\}$, sind folglich alle parallel. In diesem Falle macht die Unterscheidung Sinn, wie die Strahlen auf die Projektionsebene treffen: senkrecht oder schief.
 - hat endlichen Abstand zur Projektionsebene, **Zentralprojektion**, alle Strahlen divergieren und treffen schief auf die Projektionsebene (bis auf einen).
- **Die Projektionsfläche** ist nach allen Seiten unbegrenzt. Ihre Normale $\{\mathbf{n}\}$ legt die Orientierung relativ zum **Globalsystem** und zur Projektionsrichtung fest. Bei der Parallelprojektion ist ihre Lage beliebig, für eine Zentralprojektion ist ihr Abstand vom Projektionszentrum erforderlich. Wird die Projektionsfläche verschoben, verändert sich die Darstellung auf der Projektionsfläche proportional zur Verschiebung. Die Projektionsfläche ist entweder
 - eben,
dann sind alle Projektionen planar. Die Projektionsfläche wird dann zur Projektionsebene. Die Projektion einer Geraden auf eine Ebene führt wieder zu einer Geraden. Dieser Bereich trifft für die meisten ingenieurtechnischen Anwendungen zu, und nur damit werden wir uns weiterhin beschäftigen;

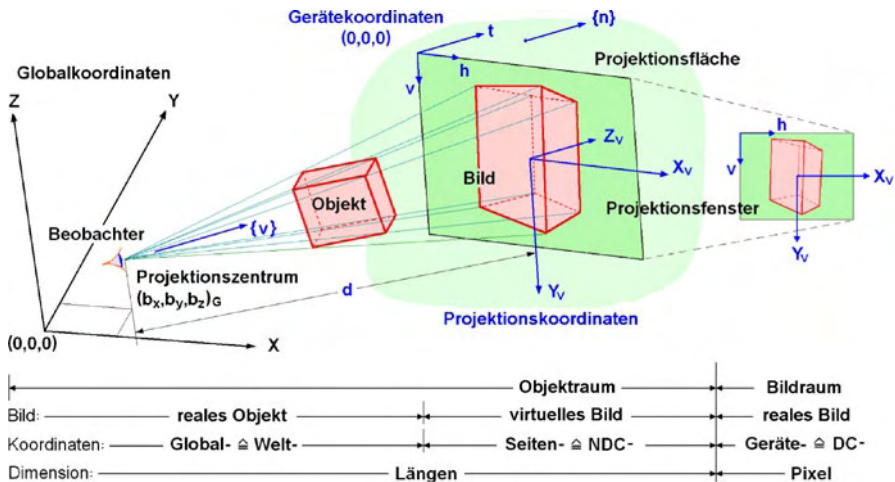


Abb. 8.1 Projektionselemente

- gekrümmt, hauptsächlich in der Kartografie verwendet, wo auch auf gekrümmte Projektionsflächen wie z.B. Zylinder (Mercator-Projektion) sowie Kugel und Kegel projiziert wird.
- **Das Projektionsfenster** ist Teil der Projektionsebene. Je nach Aufgabenstellung wird eines der beiden folgenden Koordinatensysteme zu seiner Beschreibung verwendet.
- **Die View- und Projektionskoordinaten:** Da zuerst ein virtuelles Bild in Seitenkoordinaten in den Ausgangsdimensionen erzeugt wird, verwendet man vorteilhaft das auf die Projektionsebene verschobene **Viewsystem** $(XYZ)_v$ auch als Projektionssystem. Alle **Objektraum**verfahren arbeiten mit diesen Seitenkoordinaten, siehe Kap. 9.
- **Die Gerätekoordinaten:** Beim Übergang auf Gerätekoordinaten (Pixel) sind die Projektionskoordinaten in die Gerätekoordinaten (h, v, t) für den Bildschirm, Plotter und/oder Drucker zu transformieren. Die h - und v -Achse sind die Achsen des Projektionsfensters. Sein Ursprung liegt in der linken oberen Ecke wie beim Bildschirmfenster (siehe Abschn. 7.1.3). Mit Gerätekoordinaten arbeiten die **Bildraum**verfahren.

8.1.1 „View“-koordinatensystem

Ein **View**koordinatensystem wird eingeführt, um die Szenerie aus Sicht des Beobachters beschreiben zu können. In der Wahl eines **View**koordinatensystems $(XYZ)_v$ ist man völlig frei. In Abb. 8.2 ist die Viewposition festgelegt durch den Ortsvektor $\{b\}$ (b_x, b_y, b_z) .

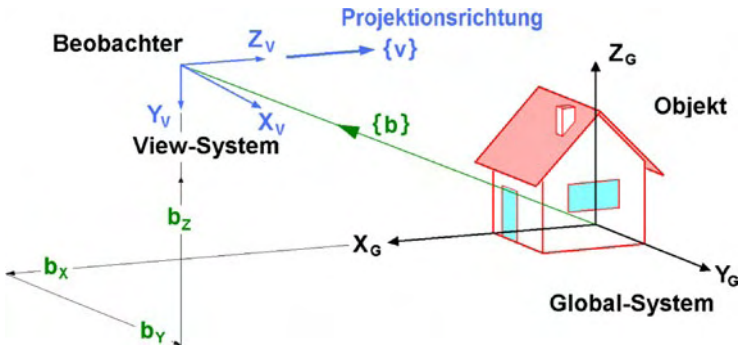


Abb. 8.2 Viewkoordinatensystem

Den Zusammenhang zwischen dem **Global-** und dem **View**koordinatensystem stellt man mit einer dieser beiden Möglichkeiten her:

- Die Koordinaten des Objektes im **Globalsystem** $(XYZ)_G$ werden umgerechnet ins **Viewsystem** $(XYZ)_V$. Hierzu wird das Objekt ins **Viewsystem** verschoben und mittels ggf. mehrerer **geometrischer Transformationen** (Abschn. 7.2) die neuen Koordinaten ermittelt.
- Das Objekt verbleibt im **Globalsystem** $(XYZ)_G$. Das **Viewsystem** wird ins **Globalsystem** verschoben und mittels **Koordinatentransformationen** (Abschn. 7.3) die Koordinaten des Objekts im **Viewsystem** $(XYZ)_V$ ermittelt.

Je nach Intuition lassen sich diese Transformationen entweder als Transformation der Koordinaten in einem unveränderlichen Raum oder als Transformation des Raumes bei unveränderlichen Koordinaten deuten. Die Ergebnisse sind in beiden Fällen gleich.

Der Zusammenhang zwischen dem oben dargestellten **Global-** und dem **View**koordinatensystem ist aus Sicht des **Viewsystems** also die Transformation von **Global** nach **View**:

Global => View :

die **View-X-Achse** entspricht der **Global-Y-Achse**
 die **View-Y-Achse** zeigt gegen die **Global-Z-Achse**
 die **View-Z-Achse** zeigt gegen die **Global-X-Achse**

$$\begin{array}{c}
 \text{Glo-} \\
 \text{X Y Z} \\
 \begin{array}{c}
 \text{X} \\
 \text{View-Y} \\
 \text{Z}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 \\
 -1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 = [T_{GV}]
 \end{array}$$

Diesen Sachverhalt zeigt die Transformationsmatrix. Natürlich ist hierzu auch eine inverse Transformation aus Sicht des **Global**systems möglich:

View => Global :

die **Global-X**-Achse zeigt gegen die **View-Z**-Achse
 die **Global-Y**-Achse entspricht der **View-X**-Achse
 die **Global-Z**-Achse zeigt gegen die **View-Y**-Achse

$$\begin{array}{c} \text{View-} \\ \text{X Y Z} \end{array} \begin{array}{c} \text{X} \\ \text{Glo-Y} \\ \text{Z} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} = [T_{VG}]$$

Die beiden Transformationsmatrizen hängen wie folgt zusammen:

$$[T_{GV}] = [T_{VG}]^{-1} = [T_{VG}]^t [T_{VG}] = [T_{GV}]^{-1} = [T_{GV}]^t [T_{GV}] \cdot [T_{VG}] = [I]$$

Diese Matrizen ermöglichen noch keine Projektionstransformation. Sie besorgen lediglich die Umordnung der Koordinaten zwischen beiden Systemen. ($\text{Det}([T]) = 1$).

8.1.2 Projektionsrichtung

Bei jeder Projektion ist die Aufreihung der Knoten, Kanten und Facetten eines Objekts entlang der Projektionsrichtung nur durch diese festgelegt. Solange keine störende Projektionsebene in der Schar der Projektionsstrahlen auftaucht, ist diese „Projektion“ orthogonal. Erst wenn man eine oder mehrere, reale oder virtuelle, ganz beliebig orientierte Ebenen in die Schar der Projektionsstrahlen stellt, wird auf jeder Ebene eine Projektion erzeugt. Diese werden zwar unterschiedlich aussehen, liefern aber die gleiche Information, nämlich die, die durch die Projektionsrichtung festgelegt ist.

Die Projektionsrichtung kann man frei wählen. Da die Viewposition sicher mit Bedacht gewählt wurde ist auf den ersten Blick nahe liegend, die Verbindung von der Beobachterposition zum Ursprung des **Global**systems zur Projektionsrichtung zu machen. Mit dem Ortsvektor $\{\mathbf{b}\}(b_x, b_y, b_z)$ ist dann auch die Projektionsrichtung $\{\mathbf{v}\}$ festgelegt als Gegenrichtung hierzu: $\{\mathbf{v}\} = -\{\mathbf{b}\}$. Von den noch fehlenden zwei Achsen unserer Transformationsmatrix können wir eine wählen, z. B. $\mathbf{X}_V$. Von ihren beiden Richtungen ($\pm \mathbf{X}_V$) verwenden wir $\{\mathbf{X}_V\}(-b_y, b_x, ?)$, die senkrecht auf $\{\mathbf{Z}_V\}$ steht. Die z-Komponente ist dabei zunächst beliebig. Legt man diese allerdings mit 0 fest, liegt $\mathbf{X}_V$ horizontal, damit also $\{\mathbf{X}_V\} = (-b_y, b_x, 0)$. Die $\mathbf{Y}_V$ -Achse ergibt sich dann einfach als Vektorprodukt zu $\{\mathbf{Y}_V\} = \{\mathbf{Z}_V\} \times \{\mathbf{X}_V\}$. Wenn dies alles in eine Transformationsmatrix verpackt wird, lässt sich der Zusammenhang zwischen dem **View**- und dem **Global**koordinatensystem wie folgt angeben:

$$\begin{array}{c} \text{Global-} \\ \text{X Y Z} \end{array} \begin{array}{c} \text{X}_V \\ \text{Y}_V \\ \text{Z}_V \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -b_y & b_x & 0 \\ \hline b_x \cdot b_z & b_y \cdot b_z & -b_x^2 - b_y^2 \\ \hline -b_x & -b_y & -b_z \\ \hline \end{array} = [T_{GV}]$$

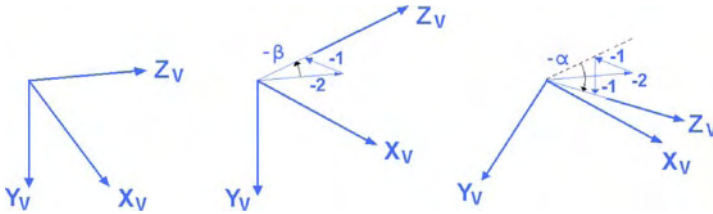


Abb. 8.3 Angabe einer beliebigen Projektionsrichtung

Die Vektoren dieser Transformationsmatrix werden natürlich noch zur Länge 1 normiert und sind dann die Richtungs cosinus des Viewsystems im Globalsystem.

Im Normalfall ist die Projektionsrichtung ganz beliebig und natürlich nicht an die Position des Beobachters gebunden, hat also mit dessen Ortsvektor $\{\mathbf{b}\}$ nichts zu tun. Die Transformationsmatrix $[\mathbf{T}_{GV}]$ für beliebiges $\{\mathbf{v}\}$ ist dann

$$\text{View-} \begin{array}{c} \mathbf{X}_V \\ \mathbf{Y}_V \\ \mathbf{Z}_V \end{array} \begin{array}{c} \text{Global-} \\ \mathbf{X} \quad \mathbf{Y} \quad \mathbf{Z} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{v}_y & -\mathbf{v}_x & 0 \\ \hline \mathbf{v}_x \cdot \mathbf{v}_z & \mathbf{v}_y \cdot \mathbf{v}_z & -\mathbf{v}_x^2 - \mathbf{v}_y^2 \\ \hline \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \\ \hline \end{array} = [\mathbf{T}_{GV}]$$

wobei die $\mathbf{v}$ -Komponenten mit Vorzeichen des Globalsystems zu verwenden sind. Im folgenden Beispiel (und allen anderen) transformieren wir stets von **Global** nach **View** auf der Basis von $[\mathbf{T}_{GV}]$ und machen konsequent die Achse $\mathbf{Z}_V$ entsprechend $\{\mathbf{v}\}$ zur Projektionsrichtung.

Eine beliebige Projektionsrichtung lässt sich nun einfach angeben, indem man geeignete Komponenten der Projektionsrichtung wählt (Abb. 8.3).

Wir behalten $\mathbf{Z}_V$ wieder als Projektionsrichtung bei und drehen die $\mathbf{Z}_V$ -Achse, bis der Beobachter auf das Objekt schaut. Dies erreicht man einfach durch Ändern der $\mathbf{Z}_V$ -Richtung von $\mathbf{Z}_V(-1, 0, 0)$ z. B. nach $(-2, -1, 0)$. Dies bedeutet eine negative Drehung um die Achse $\mathbf{Y}_V$. Dieser Drehung folgt die Achse $\mathbf{X}_V$ mit den neuen Komponenten $(-1, 2, 0)$ senkrecht zu $\mathbf{Z}_V$. Nun wird noch die z-Komponente der $\mathbf{Z}_V$ -Achse geändert von 0 nach -1 und damit die Achse abgesenkt. Dies entspricht einer weiteren negativen Drehung um die neue Achse $\mathbf{X}_V$. Die Achse $\mathbf{Z}_V$ hat jetzt die Komponenten $(-2, -1, -1)$.

Mit den beiden (noch nicht normierten) Richtungsvektoren für $\mathbf{Z}_V$ und $\mathbf{X}_V$ lässt sich nun die Achse $\mathbf{Y}_V$ als Vektorprodukt bestimmen: $\{\mathbf{Y}_V\} = \{\mathbf{Z}_V\} \times \{\mathbf{X}_V\}$. Das **Viewsystem** hat damit folgende Komponenten im Globalsystem (die zu Einheitsvektoren normierten Komponenten nebenstehend):

Global-

X Y Z

X

View-Y

Z

-1	2	0
2	1	-5
-2	-1	-1

Global-

X Y Z

-0,447	0,894	0
0,365	0,183	-0,913
-0,816	-0,408	-0,408

$\cong$

$= [T_{GV}]$

Für die z-Komponente der View-X-Achse wurde wieder der Wert 0 vorgegeben. Damit bleibt die X_V -Achse horizontal und auch die Achsen Y_V und Z_V „passen“ bereits, was für die spätere Projektion von Vorteil ist. Auf diese Weise lässt sich eine beliebige Projektionsrichtung festlegen.

Natürlich lässt sich die Transformationsmatrix $[T_{GV}]$ auch durch Drehen der Ausgangskoordinaten ermitteln. Hierzu müssen die Drehachsen, die Reihenfolge der Drehungen und die zugehörigen Drehwinkel bekannt sein und natürlich eine Idee, was wohin zu drehen ist, um das gewünschte Ergebnis zu erreichen. Für die Anschauung hilfreich ist ein (selbst gebasteltes) Koordinatendreibein.

In diesem Beispiel lassen sich die Drehwinkel leicht aus den Achskomponenten ermitteln: um X_V ist $\alpha = \arctan(1/\sqrt{5}) = 24,095^\circ$, um Y_V $\beta = \arctan(1/2) = 26,565^\circ$. Beide Winkel sind negativ, weil entgegen der positiven Koordinatenachsen gedreht wird. Zusätzlich werden die Koordinaten noch in das Viewsystem umgeordnet mittels $[T_{GV}]$; die drei Transformationen (siehe Abschn. 7.2.5) sind hier hintereinander geschaltet. Das Ganze in Zahlen unter Beachtung der negativen Drehwinkel:

$$[T] = [R_{-\alpha}] \cdot [R_{-\beta}] \cdot [T_{GV}]$$

			0,894	0	0,447	0	1	0
			0	1	0	0	0	-1
			-0,447	0	0,894	-1	0	0
1	0	0	0,894	0	0,447	-0,447	0,894	0
0	0,913	-0,408	0,183	0,913	-0,365	0,365	0,183	-0,913
0	0,408	0,913	-0,408	0,408	0,816	-0,816	-0,408	-0,408

Diese Transformationsmatrix $[T]$ ist leider nicht ganz so übersichtlich zu bestimmen wie bei Verwendung der Projektionsrichtung, wo sich alle Parameter ganz automatisch ergeben. In Abschn. 8.2.1.2 kommen wir darauf zurück.

Abweichend von diesem Vorgehen wird das View- bzw. das Projektionskoordinatensystem in der Literatur meist durch einen UP-Vektor $\{v_{up}\}$ definiert (Abb. 8.4).

Die Projektionsrichtung ist hier ausnahmsweise mit $\{r\}$ bezeichnet, um Verwechslungen zu vermeiden. Der Normalenvektor der Projektionsebene ist $\{n\}$ und fällt mit der Projektionsrichtung $\{r\}$ zusammen. Ein beliebiger UP-Vektor $\{v_{up}\}$ liegt in der durch die Vektoren $\{r\}$ und $\{r_z\}$ aufgespannten Ebene. Die fehlenden beiden Richtungen ergeben sich über die Vektorprodukte zu $\{u\} = \{n\} \times \{v_{up}\}$ und $\{v\} = \{u\} \times \{n\}$. Das so definierte (UVN)-System ist um die $\{n\}$ -Richtung um 180°

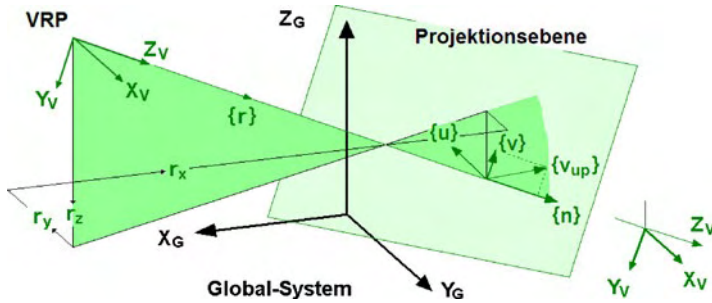


Abb. 8.4 Projektionskoordinatensystem, definiert durch UP-Vektor

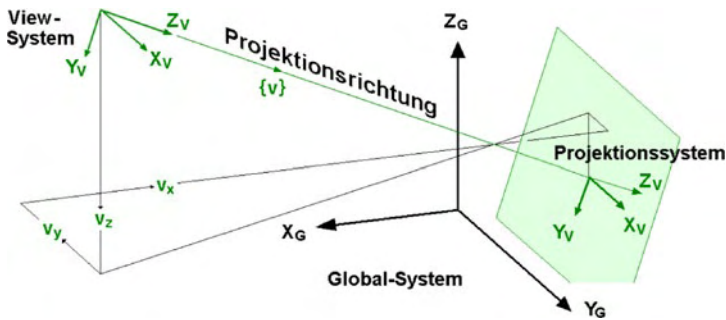


Abb. 8.5 Viewsystem als Projektionssystem

gedreht bzgl. des $(XYZ)_V$ -Systems. **VRP** bezeichnet den View-Reference-Point als Position des Beobachters.

8.1.3 Projektionskoordinaten

Da zuerst ein virtuelles Bild in Seitenkoordinaten mit den Ausgangsdimensionen der gegebenen Koordinaten erzeugt wird, verwendet man vorteilhaft das auf die Projektionsebene verschobene **Viewsystem** $(XYZ)_V$ auch als Projektionssystem. Die Z_V -Achse entspricht der Projektionsrichtung $\{v\}$ und zeigt in die Darstellungsebene hinein (Abb. 8.5).

8.1.4 Projektionsebene

Abhängig von der Ebenennormale $\{n\}$ relativ zur Projektionsrichtung ergeben sich entweder orthographische oder schiefe Projektionen. Folgende Richtungen sind möglich: Die Normale $\{n\}$

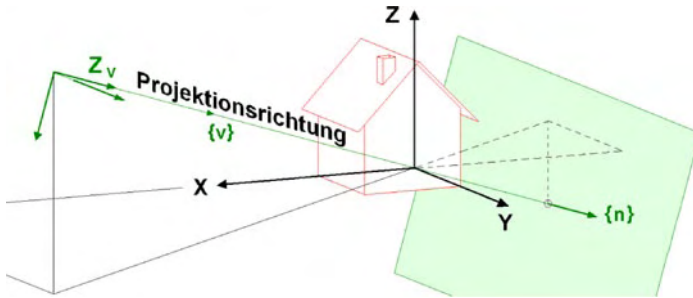
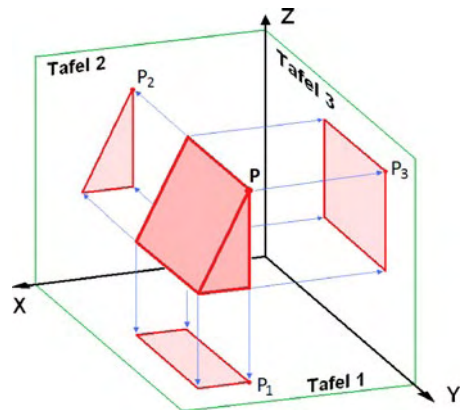


Abb. 8.6 Senkrechte bzw. orthographische Projektion

Abb. 8.7 3-Tafel-Projektion



- ist parallel zur Projektionsrichtung $\{Z_v\}$, die Projektionsebene steht senkrecht auf der Projektionsrichtung; das ergibt senkrechte bzw. orthographische Projektionen.
- ist parallel zu einer der Achsen des **Global-Systems**.
In diesen Fällen wird auf Ebenen projiziert, die parallel zu den Koordinatenebenen liegen; z. B. $\{n\}$ parallel $\{Z_G\}$ projiziert senkrecht auf die XY_G -Ebene. Das Bild wird jeweils auf der Koordinatenebene erzeugt, die durch die beiden anderen Achsen gebildet wird. Projiziert man mittels Parallelprojektionen nacheinander in Richtung aller drei Koordinatenachsen, dann erhält man die schon erwähnte 3-Tafel-Projektion (Abb. 8.7).
- hat eine beliebige Lage.
Dies führt zu schiefen Projektionen. In Abb. 8.8 wird ein Objekt projiziert, links mit einer Parallel-, rechts mit einer Zentralprojektion.
- steht senkrecht zur Projektionsrichtung,
dann liegt die Projektionsebene zur Projektionsrichtung parallel und Projektionen sind nicht möglich; die Ausnahme der beliebigen Lage.

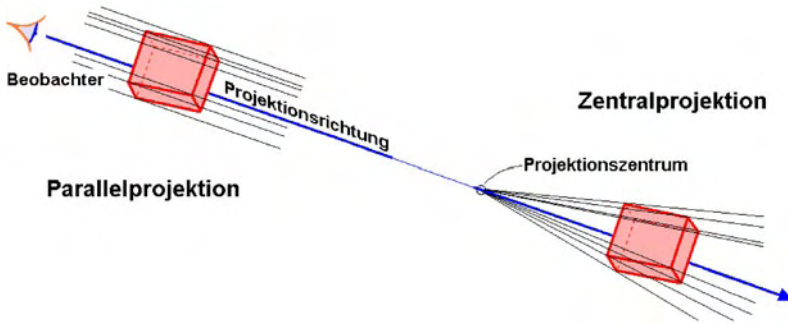


Abb. 8.8 Schiefe Projektionen: links Parallelprojektion, rechts Zentralprojektion

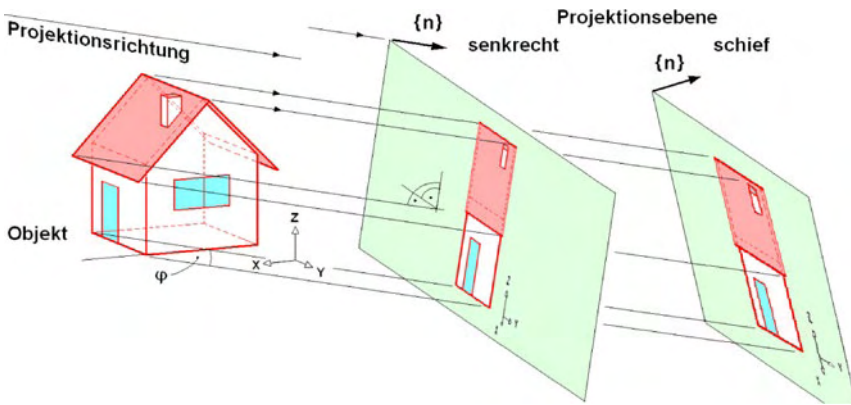


Abb. 8.9 Parallelprojektion

Bei orthographischen Projektionen ist also die Lage der Projektionsebene bereits durch/mit der Projektionsrichtung festgelegt. Bei schiefen Projektionen ist folglich neben der Projektionsrichtung auch eine Projektionsebene anzugeben, meist ist das eine der Koordinatenebenen.

Welche Projektion letztendlich erzeugt wird, hängt ganz davon ab, wo der Beobachter durch seinen Ortsvektor $\{\mathbf{b}\} = (b_x, b_y, b_z)$ platziert ist:

$\{\mathbf{b}\} = \infty$ Parallelprojektion: Der Abstand zwischen (fiktivem) Beobachter und Objekt ist unendlich groß, alle Projektionsstrahlen sind deshalb parallel. Die Angabe eines **Viewsystems** beschreibt lediglich die Projektionsrichtung und wird nicht verwendet, um damit auch den Ortsvektor des Beobachters zu ermitteln.

Für den Beobachter stellt sich Abb. 8.9 als Parallelprojektion um die Y-Achse gedreht wie in Abb. 8.10 dar.

Abb. 8.10 Abbildung 8.9 aus Perspektive des Beobachters

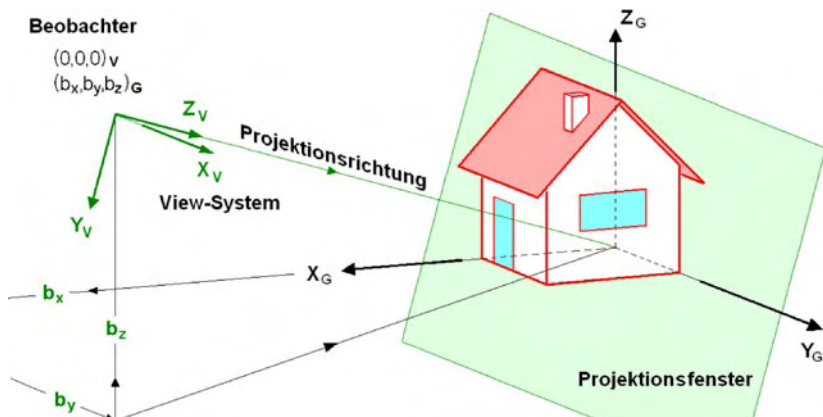
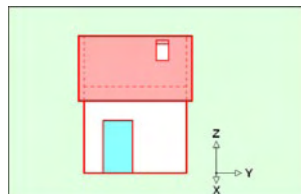
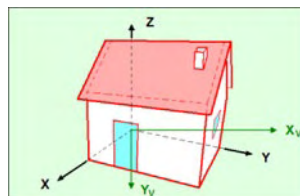


Abb. 8.11 Zentralprojektion

Abb. 8.12 Abbildung 8.11 aus Perspektive des Beobachters



$\{b\} < \infty$ Zentralprojektion (Abb. 8.11): Der Ortsvektor zur Position des Beobachters ist von endlicher Länge. Alle Projektionsstrahlen gehen zentral vom Projektionszentrum aus und sind folglich nicht parallel. Für die Projektion haben die Abstände zwischen Beobachter und Ursprung sowie des **Globalsystems** und der Projektionsebene wesentlichen Einfluss.

Aus Sicht des Beobachters stellt sich Abb. 8.11 als Zentral- bzw. Perspektivprojektion wie in Abb. 8.12 dar:

8.1.5 Projektionsarten

Wir kommen nochmals zurück auf den Überblick der Projektionsarten in Abschn. 2.2.3. Für den praktischen Gebrauch des Ingenieurs sind nur einige dieser Projektionsarten interessant, und nur mit diesen werden wir uns weiter beschäftigen. In der komprimierten Zusammenfassung verbleiben:

- parallele oder Parallelprojektion
 - senkrecht bzw. orthographisch
 - * 3-Tafel-Projektionen
 - * allgemeine Projektionen
 - * axonometrische Projektionen
 - isometrisch
 - dimetrisch
- schief
 - auf Koordinatenebenen
 - Kavalier- und Kabinettprojektionen
 - allgemeine Projektionen
- perspektivische oder Zentralprojektion
 - * senkrechte Zentralprojektion
 - * senkrechte Zentralprojektion auf Koordinatenebenen
 - * allgemeine Zentralprojektion
 - * Projektionen mit Fluchtpunkten
 - Frosch- und
 - Vogel-Perspektive

8.2 Parallelprojektionen

Die Verwendung paralleler Projektionsstrahlen vereinfacht die Berechnungen erheblich:

- die Position des Beobachters ist beliebig, es wird nur die Projektionsrichtung gebraucht; ebenso ist
- die Platzierung der Projektionsebene entlang der Projektionsrichtung beliebig und
- für Parallelprojektionen sind homogene Koordinaten nicht erforderlich.

Für dieses und die folgenden Beispiele wird ein Quader (Seitenlängen 5–3–2 Einheiten; Abb. 8.13) verwendet. Die **Global**koordinaten seiner Knoten sind in der Matrix $[P_G]$ zusammengefasst. Bei den Projektionskoordinaten $(XYZ)_V$ berechnen wir stets auch Z_V des virtuellen Bildes für nachgeschaltete Aufgaben.

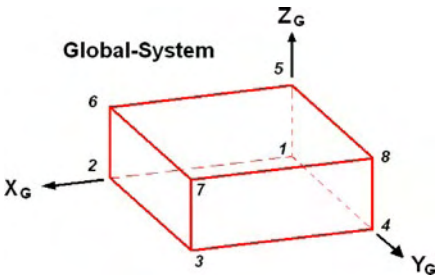


Abb. 8.13 Beispielquader

Knoten	1	2	3	4	5	6	7	8	
	.0	5.0	5.0	.0	.0	5.0	5.0	.0	Richtung
	.0	.0	3.0	3.0	.0	.0	3.0	3.0	X_G
	.0	.0	.0	.0	2.0	2.0	2.0	2.0	Y_G

$= [P_G]$ Z_G

8.2.1 Senkrechte bzw. orthographische Parallelprojektionen

Wenn die Projektionsrichtung senkrecht zur Projektionsebene ist, spricht man von einer senkrechten oder orthographischen Projektion. Folglich führt die Angabe

- einer beliebigen Projektionsrichtung zu einer zugehörigen beliebigen Lage der Projektionsebene im Raum und
- einer Projektion auf die Koordinatenebenen zu einer zugehörigen Projektionsrichtung, z.B. Projektionsebene XY mit Projektionsrichtung Z.

Eine beliebige Projektionsrichtung auf eine beliebige Projektionsfläche führt zu einer schiefen Parallelprojektion.

8.2.1.1 3-Tafel-Projektionen

Der einfachste Fall ist der, bei dem in Richtung einer der Koordinatenachsen projiziert wird. Das Bild wird jeweils auf der Koordinatenebene erzeugt, die durch die beiden anderen Achsen gebildet wird. Wenn wir weiterhin das **Viewsystem** verwenden, läuft die ganze Transformation lediglich darauf hinaus, die Globalachsen in die **Viewachsen** umzuordnen. Die hierfür benötigten Matrizen sind für alle drei Koordinatenrichtungen im unteren Teil von Abb. 8.14 zusammengestellt.

Wird beispielsweise in Y_G -Richtung auf die X_GZ_G -Ebene projiziert, nehmen wir wieder Z_V als Projektionsrichtung und halten X_V horizontal. Die Transformationsmatrix $[T_{GV}]$ von **Global** nach **View** ist dann in Abb. 8.14 die mittlere der drei möglichen Transformationen.

Die Koordinatentransformationen (Abschn. 7.3) von **Global** nach **View** bewirkt hier nur ein Umordnen der Koordinaten. Vormultiplikation der Koordinaten mit der Transformationsmatrix

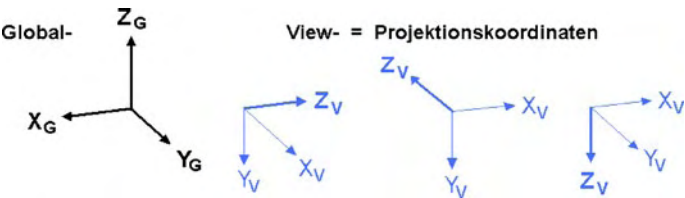


Abb. 8.14 3-Tafel-Projektion: Umordnung der Globalachsen in die Viewachsen

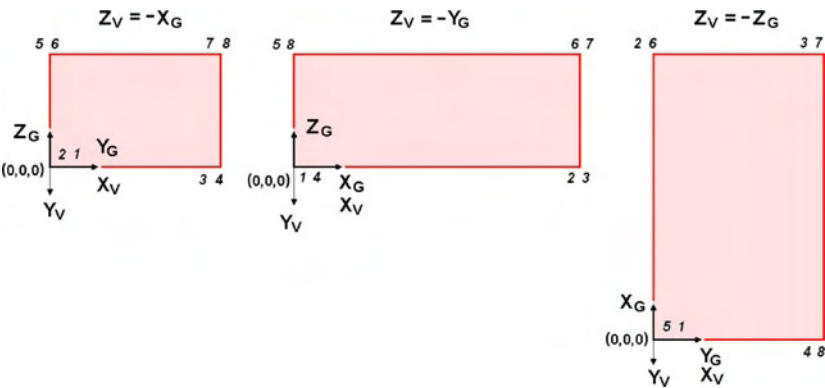


Abb. 8.15 3-Tafel-Projektion für $Z_V = -X_G$, $Z_V = -Y_G$ und $Z_V = -Z_G$

$$[T_{GV}] \cdot [P_G] = [P_V]$$

.0	5.0	5.0	.0	.0	5.0	5.0	.0
.0	.0	3.0	3.0	.0	.0	3.0	3.0
.0	.0	.0	.0	2.0	2.0	2.0	2.0

-1	0	0	.0	-5.0	-5.0	.0	.0
0	0	-1	.0	.0	.0	-2.0	-2.0
0	-1	0	.0	.0	-3.0	-3.0	.0

liefert die Koordinaten im **Viewsystem**. In Abb. 8.15 sind alle drei Projektionen dargestellt, wenn die Projektionsrichtung Z_V nacheinander in Richtung der drei globalen Achsen zeigt. Diese Art der orthographischen Parallelprojektion kommt hauptsächlich im „Technischen Zeichnen“ und in CAD-Programmen zum Einsatz.

8.2.1.2 Allgemeine orthographische Parallelprojektionen

Für das folgende Beispiel (Abb. 8.16) verfahren wir wie in Abschn. 8.1.3. Die Projektionsrichtung sei festgelegt vom Beobachter zum Ursprung des **Globalsystems** mit der Achse Z_V als Projektionsrichtung. Ihre Komponenten seien $\{v\}(-19, -7, -8)$ Einheiten.

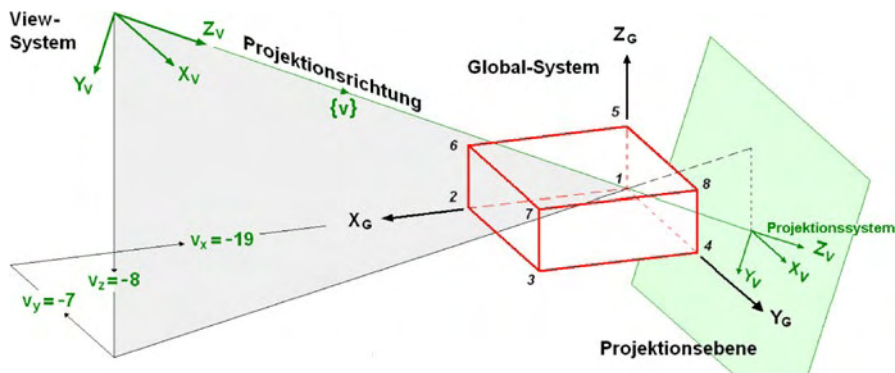


Abb. 8.16 Allgemeine orthographische Parallelprojektion: Projektionsrichtung Beobachter -> Ursprung des Globalsystems

Den Aufbau der Transformationsmatrix übernehmen wir, setzen die Komponenten ein und normieren die Vektoren zur Länge 1:

Global-

XYZ

View-

X_V

Y_V

Z_V

v_y	$-v_x$	0
$v_x \cdot v_z$	$v_y \cdot v_z$	$-v_x^2 - v_y^2$
v_x	v_y	v_z

$\Rightarrow$

-7	19	0
152	56	-410
-19	-7	-8

$\Rightarrow$

-0,346	0,938	0
0,345	0,127	-0,930
-0,873	-0,322	-0,367

 = $[T_{GV}]$

Das **View**system verwenden wir ebenfalls als Projektionssystem, indem es auf die Projektionsebene verschoben wird. Dessen Abstand zum Ursprung des Globalsystems oder zum Beobachter ist bei der Parallelprojektion nicht relevant. Eine Koordinatentransformation von **Global** nach **View** (Abb. 8.17) mit der Matrix $[T]$ liefert die Koordinaten im **View**system $(XYZ)_V$:

$[T] \cdot [P_G] = [P_V]$

.0	5.0	5.0	.0	.0	5.0	5.0	.0
.0	.0	3.0	3.0	.0	.0	3.0	3.0
.0	.0	.0	.0	2.0	2.0	2.0	2.0

-0,346	0,938	0,000
0,345	0,127	-0,930
-0,873	-0,322	-0,367

.00	-1.73	1.09	2.82	.00	-1.73	1.09	2.82
.00	1.72	2.10	.38	-1.86	-.14	.24	-1.48
.00	-4.36	-5.33	-.96	-.74	-5.10	-6.06	-1.70

$= [P_V]$

Richtung

X_V

Y_V

Z_V

Bei gegebener Projektionsrichtung ist die Transformationsmatrix $[T]$ problemlos wie oben zu bestimmen. Es macht dann wenig Sinn, aus den Komponenten der Projektionsrichtung erst die Drehwinkel zu ermitteln und die Transformationsmatrix schrittweise wie in Abschn. 8.1.3 aufzubauen.

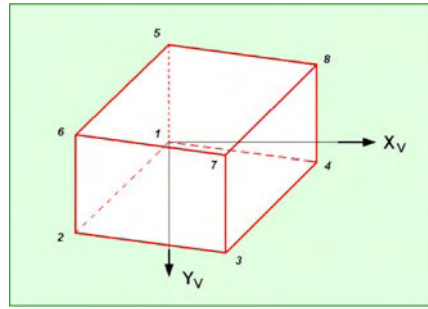


Abb. 8.17 Quader für die Projektionsrichtung Global -> View

Eine x-beliebige Drehung ist mit einer der Transformations-Matrizen $[R]$ aus Abschn. 7.2 zu erreichen.

Bleibt noch der Zusammenhang herzustellen mit der hier verwendeten Transformationsmatrix. Das Projektionssystem hat die Achsen $(XYZ)_V$, siehe Abb. 8.17, wobei die Achse Z_V senkrecht auf der Projektionsebene steht und in diese hineinzeigt. Das Objekt ist nun um die globalen Achsen so zu drehen, dass die Projektionsrichtung parallel zur Achse Z_V verläuft; in diesem Beispiel sogar mit dieser zusammenfällt.

Prinzipiell kann die Gesamtdrehung über jede der Globalachsen aufgebaut werden. Hier erfolgt in zwei Schritten:

- eine negative Drehung um Y_G mit $\beta = -\arctan(8/\sqrt{(19^2 + 7^2)}) = -21,56^\circ$,
- eine positive Drehung um Z_G mit $\gamma = \arctan(7/19) = 20,22^\circ$.

Beide Drehungen hintereinander geschaltet liefert eine Transformationsmatrix für eine globale Drehung (Nullwerte in den Matrizen sind weggelassen):

$$[T_G] = [R_{-\beta}] \cdot [R_{+\gamma}]$$

			<table><tr><td>.938</td><td>.346</td><td></td></tr><tr><td>-.346</td><td>.938</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td></tr></table>			.938	.346		-.346	.938				1
.938	.346													
-.346	.938													
		1												
.930		.367	.873	.322	.367									
	1		-.346	.938	.000									
-.367		.930	-.345	-.127	.930									

Mit dieser Transformationsmatrix werden lediglich die gedrehten Koordinaten im Globalsystem ermittelt. Würde man beide Matrizen vertauschen, ergibt sich ein anderes Matrizenprodukt. Dies ist leicht einzusehen, basiert doch die 2. Drehung auf einer anderen Ausgangslage der Achsen aus der 1. Drehung.

Mit der Transformationsmatrix $[T_G]$ werden die gedrehten Koordinaten im Globalsystem ermittelt:

$$[T_G] \cdot [P_G] = [P'_G]$$

.873	.322	.367
-.346	.938	.000
-.345	-.127	.930

.00	4.36	5.33	.96	.74	5.10	6.06	1.70
.00	-1.73	1.09	2.82	.00	-1.73	1.09	2.82
.00	-1.72	-2.10	-.38	1.86	.14	-.24	1.48

.0	5.0	5.0	.0	.0	5.0	5.0	.0
.0	.0	3.0	3.0	.0	.0	3.0	3.0
.0	.0	.0	.0	2.0	2.0	2.0	2.0

$$= [P'_G]$$

Richtung
 X_G
 Y_G
 Z_G

Dieses Ergebnis entspricht immer noch nicht den Erwartungen. Im abschließenden nächsten Schritt erfolgt die Transformation von Global- nach Viewkoordinaten (= Projektionskoordinaten) durch Vervielfachung mit $[T_{GV}]$:

1	
	-1
-1	

.00	4.36	5.33	.96	.74	5.10	6.06	1.70
.00	-1.73	1.09	2.82	.00	-1.73	1.09	2.82
.00	-1.72	-2.10	-.38	1.86	.14	-.24	1.48

.00	4.36	5.33	.96	.74	5.10	6.06	1.70
.00	-1.73	1.09	2.82	.00	-1.73	1.09	2.82
.00	-1.72	-2.10	-.38	1.86	.14	-.24	1.48

$$= [P'_G]$$

Richtung
 X_G
 Y_G
 Z_G

.00	4.36	5.33	.96	.74	5.10	6.06	1.70
.00	-1.73	1.09	2.82	.00	-1.73	1.09	2.82
.00	-1.72	-2.10	-.38	1.86	.14	-.24	1.48

.00	4.36	5.33	.96	.74	5.10	6.06	1.70
.00	-1.73	1.09	2.82	.00	-1.73	1.09	2.82
.00	-1.72	-2.10	-.38	1.86	.14	-.24	1.48

$$= [P_V]$$

Richtung
 X_V
 Y_V
 Z_V

Diesen Schritt kann man sich ersparen, wenn $[T_{GV}]$ gleich mit in die Transformationsmatrix einbezogen wird:

$$[T] = [T_{GV}] \cdot [R_{-\beta}] \cdot [R_{+\gamma}]$$

.938	.346	
-.346	.938	
		1

$$[R_{+\gamma}]$$

.930		.367
	1	
-.367		.930

.873	.322	.367
-.346	.938	.000
-.345	-.127	.930

$$[R_{-\beta}] \cdot [R_{+\gamma}]$$

1	
	-1
-1	

-.346	.938	.000
.345	.127	-.930
-.873	-.322	-.367

$$[T_{GV}] \cdot [R_{-\beta}] \cdot [R_{+\gamma}]$$

Hiermit wird hinreichend deutlich, wie vorteilhaft die Transformationsmatrix aus den Komponenten der Projektionsrichtung aufgebaut werden kann. Das Drehen von Objekten um Koordinatenachsen wird nochmals interessant bei der Einbeziehung von Beleuchtung.

8.2.1.3 Axonometrische Projektionen

„Axonometrie“ ist lediglich der Hinweis darauf, dass zusätzlich zum abgebildeten Objekt die Koordinatenachsen mitprojiziert werden. Durch die Lage der Achsen und die ggf. abgebildeten Maßeinheiten auf diesen ist eine genauere Bestimmung

der Lage des Objekts zum Koordinatensystem und der wahren Längen von achsenparallelen Strecken möglich.

Es wird eine orthographische Parallelprojektion auf einer Projektionsebene erzeugt, die nicht parallel zu einer der drei Koordinatenebenen liegt. Die beiden gebräuchlichsten Projektionen sind folgende.

- **Isometrisch:** Die Projektionsrichtung bildet gleiche Winkel mit den drei Koordinatenachsen. Folglich schneidet die Projektionsebene alle drei Achsen in gleicher Entfernung vom Ursprung, und die Projektionsebene steht auf keiner der Achsen senkrecht. Die Skalierung für alle drei Achsen ist einheitlich, d.h., die Abmessungen des Objekts werden im gleichen Maßstab dargestellt, also ist das Seitenverhältnis $x : y : z = 1 : 1 : 1$. Senkrechte Kanten der Z-Richtung bleiben senkrecht.
- **Dimetrisch:** Die Winkel zwischen Projektionsrichtung und nur zwei Koordinatenachsen sind gleich. Senkrechte Kanten der Z-Richtung bleiben senkrecht. Die standardisierte dimetrische Projektion ist festgelegt in der ISO 5456-3 und wird hauptsächlich im technischen Zeichnen eingesetzt. Die dort festgelegten gerundeten Parameter sind: Die X-Richtung ist 42° , die Y-Richtung ist 7° gegen die Waagerechte geneigt; das Seitenverhältnis ist $x : y : z = 0,5 : 1 : 1$, mit x als Tiefenrichtung.

Isometrische Projektion

Die Projektionsrichtung für eine isometrische Projektion zu finden ist recht einfach, da es nur eine Möglichkeit gibt, bei der die Projektionsrichtung gleiche Winkel mit den drei Koordinatenachsen bildet.

In Abb. 8.18 dargestellt ist der Einheitswürfel mit der Kantenlänge 1 im Ursprung des Koordinatensystems. Die Projektionsrichtung ist die Raumdiagonale von der Ecke (1, 1, 1) zum Ursprung (0, 0, 0). Andere Raumdiagonalen zum Ursprung – z. B. von den Ecken (1, 1, -1) oder (-1, -1, -1) und weitere – führen zu ähnlichen Projektionen und sind nichts Neues. Die Projektionsebene schneidet die Ecken des Einheitswürfels auf den Koordinatenachsen und ist dadurch so geneigt, dass sie auf der Projektionsrichtung senkrecht steht.

Zur rechnerischen Behandlung greifen wir auf Abschn. 8.1.3 zurück. Unser Viewkoordinatensystem ist in den Ursprung verschoben, liegt auf der Projektionsebene und die Achse Z_V fällt mit der Projektionsrichtung zusammen. Für eine Projektionsrichtung durch den Ursprung gilt die dort gegebene Transformationsmatrix $[T]$ ebenfalls für isometrische Projektionen (Abb. 8.19). Mit den Komponenten der Projektionsrichtung $\{v\} = (-1, -1, -1)$ ergibt sich:

$$\begin{array}{c} \text{Global-} \\ \text{X} \quad \text{Y} \quad \text{Z} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{View-} \\ X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline v_y & -v_x & 0 \\ \hline v_x \cdot v_z & v_y \cdot v_z & -v_x^2 - v_y^2 \\ \hline v_x & v_y & v_z \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \cong \begin{array}{|c|c|c|} \hline -0,707 & 0,707 & 0 \\ \hline 0,408 & 0,408 & -0,816 \\ \hline -0,577 & -0,577 & -0,577 \\ \hline \end{array} = [T]$$

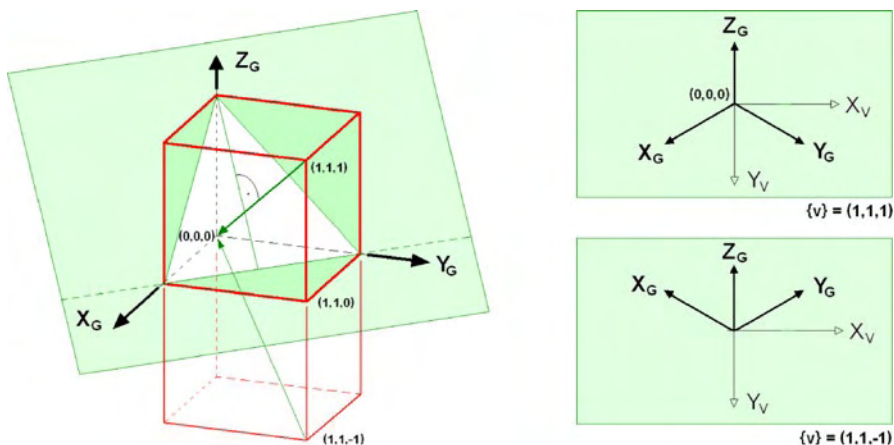


Abb. 8.18 Einheitswürfel mit Kantenlänge 1 im Ursprung des Koordinatensystems. Rechts: projizierte Koordinatenachsen für die Raumdiagonalen $\{v\} = (1, 1, 1)$ und $\{v\} = (1, 1, -1)$ zum Ursprung $(0, 0, 0)$. In beiden Fällen schließt die X_G - und die Y_G -Achse einen Winkel von 30° mit der Horizontalen ein und die Z_G -Achse steht senkrecht. Diese ganz spezielle Lage der Projektionsrichtung führt zu gleichen Verzerrungen in allen drei Achsen, und somit bleibt das Seitenverhältnis $x : y : z = 1 : 1 : 1$ gewahrt

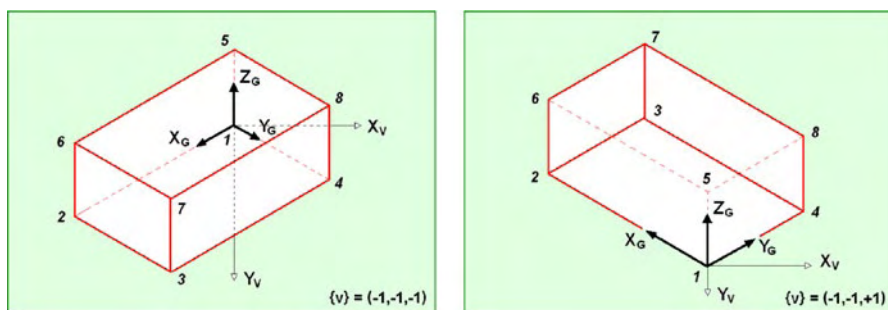


Abb. 8.19 Isometrische Projektionen des Beispielquaders. Links $\{v\} = (-1, -1, -1)$; rechts $\{v\} = (-1, -1, 1)$

Dimetrische Projektion

Eine dimetrische Projektion ergibt sich bei einer Projektionsrichtung $\{v\} = (\sqrt{7}, 1, 1)$. Die weitere Aufbereitung ist völlig analog zu den anderen Beispielen. Wir verwenden also wieder Z_V als Projektionsrichtung und setzen deren Komponenten mit $-\{v\}$ in die Transformationsmatrix $[T]$ ein. Die X_V -Achse ist damit auch bekannt, und Achse Y_V erhalten wir wieder über das Vektorprodukt $\{Y_V\} = \{Z_V\} \times \{X_V\}$. $[T]$ sieht dann folgendermaßen aus (rechts die zu Einheitsvektoren normierten Komponenten):

$$\begin{array}{c} \text{Global-} \\ \text{X} \quad \text{Y} \quad \text{Z} \\ \text{View-} \begin{array}{c} \text{X}_V \\ \text{Y}_V \\ \text{Z}_V \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{v}_y & -\text{v}_x & 0 \\ \hline \text{v}_x \cdot \text{v}_z & \text{v}_y \cdot \text{v}_z & -\text{v}_x^2 - \text{v}_y^2 \\ \hline \text{v}_x & \text{v}_y & \text{v}_z \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & \sqrt{7} & 0 \\ \hline \sqrt{7} & 1 & -8 \\ \hline -\sqrt{7} & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1/(2 \cdot \sqrt{2}) & \sqrt{7}/(2 \cdot \sqrt{2}) & 0 \\ \hline \sqrt{7}/(6 \cdot \sqrt{2}) & 1/(6 \cdot \sqrt{2}) & -8/(6 \cdot \sqrt{2}) \\ \hline -\sqrt{7}/3 & -1/3 & -1/3 \\ \hline \end{array} = [\mathbf{T}]$$

Die Seitenverhältnisse ergeben sich bei dieser Projektion zu $x : y : z = 0,5 : 1 : 1$, wobei x die Tiefenrichtung ist.

Die Transformation von **Global** nach **View** erfolgt wieder mittels $[\mathbf{T}] \cdot [\mathbf{P}_G] = [\mathbf{P}_V]$. Auf die Wiedergabe der Zahlenrechnung wird verzichtet und nur das Ergebnis der dimetrischen Projektion des Quaders dargestellt (Abb. 8.20)

Neben dieser sind weitere Projektionsrichtungen möglich. Jede Komponente von $\{\mathbf{v}\}$ kann mit beiden Vorzeichen verwendet werden, also $\{\mathbf{v}\} = (\pm\sqrt{7}, \pm 1, \pm 1)$.

Die Elemente der normierten Transformationsmatrix $[\mathbf{T}]$ sind die Richtungs-cosinus zwischen den Achsen des Global- und denen des Viewsystems. Mit diesen Daten lassen sich die Winkel zwischen der $\mathbf{X}_G$ - und $\mathbf{Y}_G$ -Achse zur Waagerechten, also zur horizontalen $\mathbf{X}_V$ -Achse des Viewsystems, unmittelbar aus der normierten $[\mathbf{T}]$ ablesen.

Daten aus der isometrischen Projektion, wobei die Achse $\mathbf{Z}_G$ wegen $T_{(1,3)} = 0$ in beiden Fällen senkrecht auf $\mathbf{X}_V$ steht, sind:

$$\begin{array}{c} \text{Global-} \\ \text{X} \quad \text{Y} \quad \text{Z} \\ \text{View-} \begin{array}{c} \text{X}_V \\ \text{Y}_V \\ \text{Z}_V \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ \hline 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ \hline -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -0,707 & 0,707 & 0 \\ \hline 0,408 & 0,408 & -0,816 \\ \hline -0,577 & -0,577 & -0,577 \\ \hline \end{array} = [\mathbf{T}]$$

Achse $\mathbf{X}_G$: $\alpha = \arctan(T_{(2,1)}/T_{(1,1)})$

Achse $\mathbf{Y}_G$: $\beta = \arctan(T_{(2,2)}/T_{(1,2)})$

– isometrisch

$$\alpha = \arctan((1/\sqrt{6}) - (1/\sqrt{2})) = -30^\circ$$

$$\beta = \arctan((1/\sqrt{6})/(1/\sqrt{2})) = 30^\circ$$

– dimetrisch

$$\alpha = \arctan(\sqrt{7}/-3) = -41,4096^\circ$$

$$\beta = \arctan(1/(3 \cdot \sqrt{7})) = 7,1808^\circ$$

8.2.2 Schiefe Parallelprojektionen

Bei der orthographischen Parallelprojektion ist die Projektionsebene bereits festgelegt durch die Projektionsrichtung, nämlich senkrecht zu dieser. Bei der schiefen Parallelprojektion wird diese starre Zuordnung von Projektionsrichtung und -ebene aufgegeben. Man ist also in der Wahl seiner Projektionsebene völlig frei, und naheliegend ist anfangs, auf eine der Koordinatenebenen des **Globalsystems** ($\mathbf{XYZ}$)_G zu projizieren.

Computergrafik für Ingenieure

Eine anwendungsorientierte Einführung

Schiele, H.-G.

2012, VIII, 360 S. 426 Abb., 32 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-642-23842-0