

Kapitel 2

Die Schrödinger-Gleichung

2.1 Die Grundgleichungen der Quantentheorie

Der photoelektrische Effekt und die Comptonstreuung (siehe Abb. 1.5) sind Belege dafür, dass Licht nicht nur eine Wellenerscheinung ist, sondern auch eine Teilchennatur besitzt. Die Energie eines Lichtquants (Photons) ist über die Planck'sche Beziehung

$$E = \hbar\omega \quad (2.1)$$

mit seiner Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ verknüpft. Die Planck'sche Konstante¹, auch Wirkungsquantum genannt, hat den Wert

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6,582 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}. \quad (2.2)$$

Andererseits können mit Elementarteilchen oder gebundenen Systemen von Teilchen (Elektronen, Neutronen, Atomen, Molekülen) Interferenzexperimente durchgeführt werden, die den Interferenzen mit Licht gleichen (Abb. 1.2, 1.6, 1.9). Diese Erscheinungen lassen sich nur im Wellenbild deuten. Die einem Teilchen zugeordnete Wellenlänge ist durch die *de Broglie*-Beziehung gegeben:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}, \quad (2.3)$$

wobei $p = mv$ der Impuls des Teilchens ist. Wenn man die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ einführt, lässt sich die *de Broglie*-Gleichung auch in der Form $p = \hbar k$ oder als Vektorgleichung $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ schreiben. Die beiden Beziehungen

$E = \hbar\omega \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$

(2.4)

¹ Ich verwende in diesem Buch immer $\hbar = h/(2\pi)$ (gesprochen *h-quer*) und nenne dies die Planck'sche Konstante. Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ wird zur Vereinfachung oft „Frequenz“ genannt.

sind die Grundgleichungen der Quantentheorie. Sie gelten in der nichtrelativistischen Quantenmechanik und auch in der relativistischen Quantenelektrodynamik und den anderen relativistischen Quantenfeldtheorien (Standard-Modell der vereinheitlichten elektro-schwachen Wechselwirkung und der Quantenchromodynamik, für eine Einführung siehe Ref. [4]). Man kann diese Relationen sowohl für Teilchen mit Masse $m > 0$ (Elektronen, Neutronen, Atome) als auch für die masselosen Photonen anwenden, bei denen allerdings der Impuls in der Form $p = E/c$ geschrieben werden muss, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Wir werden uns im Weiteren vorwiegend mit Elektronen und anderen massiven Teilchen beschäftigen und voraussetzen, dass die Geschwindigkeiten viel kleiner als c sind, so dass die nichtrelativistischen Beziehungen zwischen Energie und Impuls verwendet werden dürfen. Zur korrekten Beschreibung von Photonen und ihrer Wechselwirkung mit geladenen Teilchen benötigt man eine relativistische Quantenfeldtheorie.

2.2 Energie- und Impulsoperator

Teilchen mit wohldefiniertem Impuls haben alle dieselbe Wellenlänge und können, was Interferenzmuster angeht, durch harmonische Wellen repräsentiert werden. Es erweist sich in der Quantenmechanik als notwendig, nicht mit Sinus- oder Cosinuswellen zu rechnen, sondern die komplexe Exponentialfunktion zu benutzen. Die Welleneigenschaften von Elektronen, die sich in einem kräftefreien Bereich bewegen, beschreiben wir durch eine Wellenfunktion Ψ , die die Form einer ebenen Welle hat²

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.5)$$

Die Konstante A ist ein Normierungsfaktor. Ein Grundprinzip der Quantentheorie ist, dass die physikalischen Messgrößen eines Teilchens wie Energie und Impuls durch Operatoren beschrieben werden. Anwendung eines Operators auf die Wellenfunktion ergibt den Messwert der entsprechenden physikalischen Größe. Dies Prinzip soll nun angewandt werden, um die Form des Energieoperators $\hat{E}$ und des Impulsoperators $\hat{p}_x$ plausibel zu machen.

$$\hat{E}\Psi(x, t) = E\Psi(x, t), \quad \hat{p}_x\Psi(x, t) = p_x\Psi(x, t). \quad (2.6)$$

Benutzen wir $E = \hbar\omega$ und $p_x = \hbar k$ so ergibt sich die folgende Form der Operatoren

$$\boxed{\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.} \quad (2.7)$$

Zur Illustration wenden wir den Energieoperator auf eine ebene Welle an

$$\hat{E}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar(-i\omega)\Psi(x, t) = \hbar\omega\Psi(x, t).$$

² Eine bessere Beschreibung wird durch ein Wellenpaket geliefert, s. Kap. 3.4.

Partielle Ableitungen werden in Anhang A erklärt. Dreidimensional gilt

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla \equiv -i\hbar \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Die Gestalt der Energie- und Impulsoperatoren ist mit Hilfe der ebenen Wellen plausibel gemacht worden. In der Quantentheorie wird postuliert, dass diese Operatoren ganz generell die Form (2.7, 2.8) haben.

2.3 Die Form der Schrödinger-Gleichung

In der klassischen Physik werden ebene elektromagnetische Wellen in der Form

$$f(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad \text{oder} \quad f(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

dargestellt. Die Beziehung zwischen Wellenzahl und Kreisfrequenz lautet

$$\omega = ck \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2. \quad (2.9)$$

Genau diese Relation ergibt sich, wenn man die harmonischen Wellen in die folgende Differentialgleichung einsetzt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (2.10)$$

Dies ist die Wellengleichung für eine der Komponenten des elektrischen oder magnetischen Feldes. Im Vakuum und bei Abwesenheit von Ladungen und Strömen sind ebene harmonische Wellen spezielle Lösungen dieser Gleichung. Man darf allerdings nicht behaupten, durch diese Betrachtungen die Wellengleichung aus der Gestalt der ebenen Wellen und der Gleichung (2.9) hergeleitet zu haben. Die Wellengleichung elektromagnetischer Felder kann aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden (siehe Band 2), und sie gilt sehr allgemein, z. B. auch in inhomogenen Medien mit räumlich veränderlichem Brechungsindex, wobei die Lösungen dann allerdings keine ebenen harmonischen Wellen mehr sind.

2.3.1 Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

Wir sind jetzt in der Lage, uns die Form der Schrödinger-Gleichung plausibel zu machen. Für ein freies Teilchen lautet die Beziehung zwischen Energie und Impuls

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (2.11)$$

Durch Einsetzen von (2.4) folgt

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (2.12)$$

Eine Differentialgleichung, die bei Anwendung auf eine harmonische ebene Welle diese Relation wiedergibt, lautet

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (2.13)$$

Dies ist die eindimensionale Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens. Alternativ kommt man zu dieser Gleichung durch Einsetzen der Energie- und Impulsoperatoren in (2.11). Wie schon bei der Wellengleichung betont wurde, handelt es sich hier nicht um eine Herleitung der Schrödinger-Gleichung im mathematischen Sinn, sondern es geht nur darum, die Gestalt dieser Differentialgleichung verständlich zu machen. „Beweisen“ kann man die Schrödinger-Gleichung nicht, denn sie geht eindeutig über den Rahmen der klassischen Physik hinaus.

Die Schrödinger-Gleichung unterscheidet sich ganz erheblich von der klassischen Wellengleichung:

- sie ist von der ersten Ordnung in der Zeit,
- es tritt der Faktor $i = \sqrt{-1}$ auf,
- die Wellenfunktion Ψ ist eine komplexwertige Funktion.

In der klassischen Physik und der Elektrotechnik sind die komplexen Zahlen sehr nützlich, um die Rechnungen einfacher und eleganter zu machen, wirklich notwendig sind sie nicht. In der Quantentheorie ist das anders: die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion ist grundsätzlich von der Art $\exp(-i\omega t)$ und keineswegs $\cos(\omega t)$ oder $\sin(\omega t)$.

In den meisten Fällen von praktischem Belang befindet sich das Teilchen in einem Kraftfeld, von dem wir voraussetzen, dass es konservativ ist und durch ein Potential $V(x, t)$ beschrieben werden kann. Die allgemeine Form der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung lautet

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t). \quad (2.14)$$

In Analogie zur Hamilton-Funktion der analytischen Mechanik, die die Summe der kinetischen und potentiellen Energie ist, führt man den *Hamilton-Operator* ein

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t). \quad (2.15)$$

Damit kann man die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung in kompakter Form schreiben

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(x, t). \quad (2.16)$$

Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ergibt

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mit dem Hamilton-Operator lautet die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t) \quad \text{mit} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Diese Gleichung wird als Grundgleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik postuliert.

2.3.2 Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Sehr wichtig sind die Spezialfälle, bei denen das Potential nicht von der Zeit abhängt. Man kann dann die Wellenfunktion als Produkt einer orts- und einer zeitabhängigen Funktion ansetzen:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot f(t). \quad (2.19)$$

Wenn wir dies in (2.14) einsetzen, so folgt

$$i\hbar \frac{df}{dt} \cdot \psi(x) = f(t) \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi(x) \right).$$

Nun dividieren wir diese Gleichung durch $f(t) \cdot \psi(x)$ und erhalten³

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \frac{df}{dt} = \frac{1}{\psi(x)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi(x) \right).$$

Links steht eine Funktion, die nur von der Zeit abhängt und nicht vom Ort, rechts ist es umgekehrt. Die Gleichheit kann nur dann für alle Werte von x und t gelten, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten sind. Diese Konstante nennen wir E . Daraus ergeben sich getrennte Differentialgleichungen für $f(t)$ und $\psi(x)$. Die erste lautet

$$i\hbar \frac{df}{dt} = E f(t) \quad (2.20)$$

³ Diese Division ist zulässig, da die Wellenfunktion eines Teilchens nicht identisch null sein darf. Die Funktion $f(t)$ ist immer ungleich null, die Funktion $\psi(x)$ ist in weiten Bereichen ungleich null. Da $f(t)$ und $\psi(x)$ jeweils von nur einer Variablen abhängen, werden die partiellen Ableitungen durch normale Ableitungen ersetzt.

und hat die Lösung

$$f(t) = e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = E/\hbar. \quad (2.21)$$

Offensichtlich hat E die Dimension einer Energie, es handelt sich in der Tat hier um die Gesamtenergie des Teilchens, die Summe aus der kinetischen und der potentiellen Energie. Die zweite Gleichung ist die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (2.22)$$

Die dreidimensionale zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung lautet entsprechend

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}).} \quad (2.23)$$

2.3.3 Eigenfunktionen und Eigenwerte

Die Differentialgleichungen (2.22) und (2.23) sind *Eigenwertgleichungen* der Form

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (2.24)$$

wobei die Randbedingungen zu berücksichtigen sind, die eine sehr wichtige Rolle spielen, s. die Beispiele in Kap. 3. Die Lösungen der Gl. (2.24), die die Randbedingungen erfüllen, nennt man die *Eigenfunktionen*, sie existieren in vielen Fällen nur für gewisse diskrete Werte der Energie E , die dann *Eigenwerte* heißen. Für den Eigenwert E_n hat die Gesamtwellenfunktion die Gestalt

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i\omega_n t} \quad \text{mit} \quad \omega_n = E_n/\hbar. \quad (2.25)$$

2.4 Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Die Wellenfunktion ψ soll die Welleneigenschaften eines Elektrons oder eines anderen Teilchens mathematisch erfassen. Wir werden später sehen, dass ψ sämtliche messbaren Eigenschaften des Teilchens beschreibt. Auch wenn es bei quantenmechanischen Rechnungen oft gewisse formale Analogien zur Theorie der mechanischen oder elektromagnetischen Wellen gibt, so muss man sich doch vor Augen führen, dass ganz gravierende Unterschiede bestehen. Die Amplitude einer klassischen Welle ist kontinuierlich veränderbar, und die Intensität wächst quadratisch mit der Amplitude an. Die Amplitude einer Einteilchen-Wellenfunktion hingegen hat nichts mit der Stärke dieser „Materiewelle“ zu tun, sie ist vielmehr durch eine Normierungsbedingung festgelegt (s. unten) und kann in keiner Weise variiert werden.

Seit der Begründung der Quantentheorie hat es kontroverse Diskussionen über die physikalische Bedeutung der Wellenfunktion gegeben. In Einklang mit den meisten Physikern bevorzuge ich die Wahrscheinlichkeitsinterpretation, die von Max Born vorgeschlagen und besonders von Niels Bohr propagiert wurde. Auch die neuesten experimentellen Tests der Quantenmechanik sind fast alle mit dieser *Kopenhagener Deutung* der Quantentheorie in Einklang, während andere Deutungen dadurch in große Schwierigkeiten kommen. Viele Jahre lang wurde die Frage diskutiert, ob es „verborgene Variable“ (*hidden variables*) geben könnte, die weitere, nicht bereits von der Wellenfunktion abgedeckte Informationen enthalten. Die modernen Experimente ergaben die eindeutige Antwort, dass solche verborgenen Variablen nicht existieren (siehe Kap. 9) und dass alles, was man über ein Quantensystem aussagen kann, bereits in der Wellenfunktion enthalten ist.

Wir wollen die Wahrscheinlichkeitsinterpretation zuerst für eine Raumdimension betrachten. Sei $\psi(x)$ die Wellenfunktion eines Teilchens. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[x, x+dx]$ zu finden, gegeben durch den Ausdruck

$$|\psi(x)|^2 dx .$$

Wir nennen

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 \quad (2.26)$$

die *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Da die Funktion $\psi(x)$ genau ein Teilchen repräsentieren soll, muss man bei der Aufsummation der differentiellen Wahrscheinlichkeiten den Wert 1 erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 . \quad (2.27)$$

Man nennt diese Gleichung die Normierungsbedingung.

Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ist naheliegend: die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Bereich $[x, x + dx], [y, y + dy], [z, z + dz]$ zu finden, ist gegeben durch den Ausdruck

$$|\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz .$$

Das Normierungsintegral lautet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 . \quad (2.28)$$

Man kann in der Quantenmechanik eine Kontinuitätsgleichung herleiten, die der Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik entspricht, siehe Anhang B.

2.5 Das Unschärfeprinzip

Die Wellennatur des Elektrons (oder anderer Teilchen) hat eine wichtige Konsequenz: man kann den Ort und den Impuls des Teilchens nicht gleichzeitig exakt festlegen. Es gilt die berühmte Unschärferelation von Werner Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2. \quad (2.29)$$

Die genaue Definition der Unschärfen wird in Kap. 4 gebracht. Will man den Impuls eines Teilchens sehr präzise festlegen, so muss wegen $p = 2\pi\hbar/\lambda$ auch die *de Broglie*-Wellenlänge λ entsprechend präzise sein. Damit dies gewährleistet ist, muss die Wellenfunktion die Form eines langen harmonischen Wellenzuges haben, siehe Abb. 2.1 (linkes Bild). Ein langer Wellenzug bestimmt den Ort des Teilchens aber nur mit einer großen Unsicherheit. Im umgekehrten Fall, dass man den Ort genau definieren möchte, muss man als Wellenfunktion einen sehr schmalen Wellenpuls wählen (Abb. 2.1 rechtes Bild). Die Fourieranalyse (Anhang A.4) zeigt, dass die Wellenzahl-Verteilung umso breiter wird, je schmäler der Puls ist. Quantenmechanisch bedeutet dies: die Impuls-Unsicherheit des Teilchens wird umso größer, je besser man seinen Ort festlegt. Eine quantitative Betrachtung unter Benutzung von Wellenpaketen bringen wir in Kap. 3.

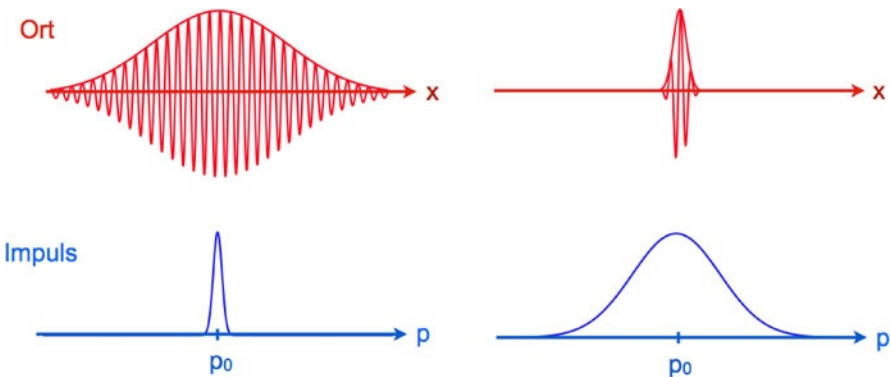


Abb. 2.1 Im oberen Teil sind zwei mögliche Wellenfunktionen $\psi(x)$ eines freien Teilchens sowie $|\psi(x)|$ aufgetragen (rote Kurven). Darunter werden die zugehörigen Impulsverteilungen gezeigt (blaue Kurven). Ein langer harmonischer Wellenzug impliziert eine große Ortsunsicherheit, aber der Impuls des Teilchens ist recht genau festgelegt. Ein kurzer Wellenpuls legt den Ort des Teilchens genau fest, während der Impuls sehr unscharf wird

2.6 Didaktische Anmerkungen

Die klassische Mechanik ist im Prinzip eine deterministische Theorie. Wenn ich einen Puck über eine spiegelglatte, reibungsfreie Eisfläche schieße und die Anfangsbedingungen (Ort und Impuls zum Zeitpunkt $t = 0$) genau kenne, kann ich exakt berechnen, welche Entfernung der Puck in 2 Sekunden zurücklegen wird⁴. In der Quantentheorie wird das sofort kompliziert: wegen der Unschärferelation ist es prinzipiell unmöglich, die Anfangsbedingungen exakt zu definieren. Die unvermeidliche Unsicherheit im Impuls bedeutet, dass die Anfangsgeschwindigkeit nicht genau bekannt ist. Deshalb kann man auch nicht exakt voraussagen, welche Strecke das Objekt in 2 Sekunden zurücklegen wird.

Die Quantentheorie ist präzise bei der Berechnung von statischen Eigenschaften; dies sind z. B. die Energieniveaus in einem Atom, das magnetische Moment des Elektrons etc. Bei zeitabhängigen Prozessen, etwa atomaren Übergängen, radioaktiven Zerfällen oder Streuung von Teilchen an Atomkernen, erlaubt die Theorie die präzise Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten (oder Wirkungsquerschnitte). Sobald es aber darum geht, den Zeitpunkt eines atomaren Übergangs oder eines radioaktiven Zerfalls vorherzusagen, versagt die Quantentheorie. Dies wird bei radioaktiven Zerfällen besonders deutlich. Niemand kann vorausberechnen, zu welchem Zeitpunkt sich ein Poloniumkern durch α -Zerfall in einen Bleikern umwandeln wird. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ gibt an, wann von sehr vielen Po-Kernen die Hälfte zerfallen ist. Bei einer großen Anzahl kann man recht genaue Vorhersagen machen, wobei allerdings statistische Schwankungen auftreten. Haben wir am Anfang 20 000 Kerne, so wissen wir, dass nach Ablauf einer Halbwertszeit $10\,000 \pm 100$ zerfallen sind.

Bei individuellen Poloniumkernen ist unsere Vorhersagekraft praktisch null, und man kommt zu absurd scheinenden Aussagen. Vergleichen wir zwei Po-Kerne, von denen der erste sehr „alt“ ist und bereits 10 Halbwertszeiten überlebt hat (was unwahrscheinlich aber nicht unmöglich ist), während der zweite gerade frisch „erzeugt“ wurde. Gemäß der Quantentheorie haben beide Kerne exakt die gleiche Wahrscheinlichkeit von 50 %, in der folgenden Halbwertszeit zu zerfallen. Die „Sterblichkeit“ ist also unabhängig vom Alter des individuellen Kerns. Das ist offenbar nicht auf Menschen übertragbar, Lebensversicherungen würden sich schwer damit tun.

Die Erkenntnis, dass exakte Vorhersagen bei Quantenübergängen unmöglich sind, hat vielen Physikern des 20. Jahrhunderts großes Unbehagen bereitet, der berühmteste war Albert Einstein. Die Quantenmechanik in der hier diskutierten Form und die Wahrscheinlichkeitsinterpretation haben sich jedoch als äußerst erfolgreich erwiesen und alle bisherigen experimentellen Tests bestanden. Daher ist es angebracht, die unanschaulichen Aspekte dieser Theorie (Teilchen-Welle-Dualismus) und den Indeterminismus zu akzeptieren. Es gibt keine bessere Theorie! Der pragmatische Ansatz besteht darin, die Schrödinger-Gleichung zu lösen und mit

⁴ In komplexen Systemen kann es zu chaotischem Verhalten kommen, da die Anfangsbedingungen infolge der unvermeidlichen Messfehler stets mit Unsicherheiten behaftet sind.

Hilfe der Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu berechnen, und dann im zweiten Schritt diese Verteilung sukzessive mit Teilchen zu füllen (vgl. Abb. 1.3 und 1.4).

Zusammenfassung

1. Die Grundgleichungen der Quantentheorie sind die Beziehungen von Max Planck und Louis de Broglie

$$E = \hbar\omega \quad \text{und} \quad p = \hbar k .$$

2. Die Wellennatur der Teilchen wird durch ihre Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ beschrieben, die eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ist

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t) .$$

(Wir betrachten hier nur den eindimensionalen Fall).

3. Bei einem zeitunabhängigen Potential kann man die Wellenfunktion in der Form

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = E/\hbar$$

schreiben. Die Wellenfunktion $\psi(x)$ erfüllt die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) .$$

Die Lösungen dieser Gleichung, die den Randbedingungen gehorchen, nennt man Eigenfunktionen, die zugehörigen Energiewerte heißen Eigenwerte.

4. Die Wellenfunktion $\psi(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, und $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden, ist gegeben durch den Ausdruck $|\psi(x)|^2 dx$. Die Normierungsbedingung lautet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 .$$

5. Es gilt die Unschärferelation von Werner Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 .$$

Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 1

Quantenmechanik

Schmüser, P.

2012, XIII, 255 S. 108 Abb., 74 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-642-25396-6