

Kapitel 1

Die komplexen Zahlen

- 1.1 Historisches
- 1.2 Definition und Modelle komplexer Zahlen
- 1.3 Elementare Operationen und Regeln
- 1.4 Argument, geometrische Veranschaulichung
- 1.5 Wurzeln
- 1.6 Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

1.1 Historisches

Ein wichtiger Ausgangspunkt für die Entwicklung der komplexen Zahlen war das Auftreten des Symbols

$$\boxed{\sqrt{-1}}$$

in dem Werk „*Ars Magna*“ (1545) von GERONIMO CARDANO (1501–1576). Das Problem war, zwei (reelle?) Zahlen x_1, x_2 mit $x_1 + x_2 = 10$, $x_1 \cdot x_2 = 40$ zu finden, d. h. die quadratische Gleichung $x^2 - 10x + 40 = 0$ zu lösen. Formales Ausrechnen ergab $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-1} \sqrt{15}$, wobei Cardano Schwierigkeiten hatte, dem Symbol $\sqrt{-1}$ eine konkrete Bedeutung zu geben.

Auch bei der Lösung kubischer Gleichungen, reduziert auf die spezielle Form $x^3 + px + q = 0$, trat $\sqrt{-1}$ auf. Die Substitution $x = u + v$ ergibt

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Diese Gleichung ist sicher erfüllt, wenn $u^3 + v^3 = -q$, $3uv = -p$ gilt. Wegen $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$ folgt dann

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

bzw.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Kennt man eine Lösung u bzw. v dieser beiden Gleichungen mit $uv = -p/3$, so erhält man mit Hilfe der dritten Einheitswurzel $\omega := \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-1}\sqrt{3})$ durch die sogenannten *Cardanischen Formeln*

$$x_1 = u + v, \quad x_2 = u\omega + v\omega^2, \quad x_3 = u\omega^2 + v\omega$$

die Lösungen x_1, x_2, x_3 der kubischen Gleichung.

RAFAEL BOMBELLI (1526–1572) fand so für die Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$ auf dem Umweg über die komplexen Zahlen

$$u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}, \quad v = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

die *reellen* Lösungen $x_1 = 4, x_2 = -2 - \sqrt{3}, x_3 = -2 + \sqrt{3}$.

LEONHARD EULER (1707–1783) führte für die *imaginäre Einheit* $\sqrt{-1}$ die heute übliche Schreibweise

$$\boxed{i}$$

ein und stellte im Jahre 1748 über die Beziehung

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

einen Zusammenhang zwischen den wichtigsten elementaren Funktionen her.

Dies alles förderte eine zunehmende Akzeptanz der komplexen Zahlen. Man rechnete mit ihnen, ohne dass die Rechenregeln begründet waren, wie mit den reellen Zahlen und begnügte sich damit, die Ergebnisse nachträglich zu verifizieren.

CASPAR WESSEL (1745–1818) und JEAN-ROBERT ARGAND (1768–1822) brachten im Jahre 1797 bzw. 1806 erste *Begründungen auf geometrischem Wege* für das Rechnen mit komplexen Zahlen. Unabhängig davon führte CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) im Jahre 1811 die nach ihm benannte Gaußsche Zahlenebene ein. Endgültige Anerkennung fanden die komplexen Zahlen durch die rein arithmetische Begründung als geordnete Paare reeller Zahlen durch WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) im Jahre 1835, wie man sie heute — als einfache konkrete mathematische Objekte — meist schon in den Grundvorlesungen im ersten Semester kennenlernt.

Die Schwierigkeiten, die die Mathematiker *früher* mit den komplexen Zahlen hatten, zeigen sich noch in den Bezeichnungen „komplex“ und „imaginär“. Man vergleiche hierzu etwa EULER, „Vollständige Anleitung zur Algebra“, Kapitel 13:

„Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0, oder etwa 0 selbst sind, so ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, daß dies unmögli-

che Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung vorhanden sind.“

Auch in die nicht-mathematische Literatur hat dies vielfältig Eingang gefunden. Ein Beispiel dazu aus ROBERT MUSIL, „Die Verwirrungen des Zöglings Törleß“:

„ ... Ja. Das ist doch gar nicht so schwer. Man muß nur festhalten, daß die Quadratwurzel aus negativ Eins die Rechnungseinheit ist.“

„Das ist es aber gerade. Die gibt es doch gar nicht. Jede Zahl, ob sie nun positiv ist oder negativ, gibt zum Quadrat erhoben etwas Positives. Es kann daher gar keine wirkliche Zahl geben, welche die Quadratwurzel von etwas Negativem wäre.“

„Ganz recht; aber warum sollte man nicht trotzdem versuchen, auch bei einer negativen Zahl die Operation des Quadratwurzelziehens anzuwenden? Natürlich kann dies dann keinen wirklichen Wert ergeben, und man nennt doch auch deswegen das Resultat nur ein imaginäres. Es ist so, wie wenn man sagen würde: hier saß sonst immer jemand, stellen wir ihm also auch heute einen Stuhl hin; und selbst wenn er inzwischen gestorben wäre, so tun wir doch, als ob er käme.“

.....

„Wie soll ich das ausdrücken? Denk doch nur einmal so daran: In solch einer Rechnung sind am Anfang ganz solide Zahlen, die Meter oder Gewichte oder irgend etwas anderes Greifbares darstellen können und wenigstens wirkliche Zahlen sind. Am Ende der Rechnung stehen ebensolche. Aber diese beiden hängen miteinander durch etwas zusammen, das es gar nicht gibt. Ist das nicht wie eine Brücke, von der nur Anfangs- und Endpfeiler vorhanden sind und die man dennoch so sicher überschreitet, als ob sie ganz dastünde? Für mich hat so eine Rechnung etwas Schwindliges: als ob es ein Stück des Weges weiß Gott wohin ginge. Das eigentlich Unheimliche ist mir aber die Kraft, die in solch einer Rechnung steckt und einen so festhält, daß man doch wieder richtig landet.“

Schnell stellte sich — nach dem zögernden Beginn — heraus, dass das Rechnen mit komplexen Zahlen sehr oft auch wertvolle *reelle* Ergebnisse lieferte, und zwar sowohl neue als auch schon bekannte, letztere oft auf eleganterem Weg; zudem wurde manche reelle Aussage erst durch die Einbeziehung komplexer Zahlen ‚wirklich‘ verstanden.

1.2 Definition und Modelle komplexer Zahlen

Im Folgenden werden wir verschiedene Modelle für komplexe Zahlen kennenlernen. Mithin ist es zunächst nicht korrekt, von *den* komplexen Zahlen zu

sprechen. Diese Modelle stimmen jedoch im wesentlichen überein. Genauer bedeutet dies:

Ein Körper der komplexen Zahlen ist ein kommutativer Körper, der die reellen Zahlen \mathbb{R} als Teilkörper enthält, in dem ein Element i mit $i^2 = -1$ existiert, und dessen Elemente sich alle in der Form $a + ib$ mit reellen Zahlen a, b schreiben lassen. Für Mathematiker: Ein (kommutativer) Körper $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt genau dann „Körper der komplexen Zahlen“, wenn:

- (1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, präziser ‚bis auf Isomorphie‘
- (2) Es existiert $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.
- (3) $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

‚Bis auf Isomorphie‘ bedeutet: Es existiert $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv mit:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{und} \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad (a, b \in \mathbb{R}). \quad (\text{„Einbettung“})$$

Es folgen offenbar $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$.

Elemente aus \mathbb{C} heißen „komplexe Zahlen“.

Mit dieser Definition ist natürlich noch *nichts* über die Existenz eines Körpers der komplexen Zahlen gesagt! Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, ‚die‘ komplexen Zahlen einzuführen und damit den Existenznachweis zu führen. Darum geht es im Folgenden:

Arithmetische Einführung der komplexen Zahlen

Wir erinnern an die übliche Einführung in der Analysis (man vergleiche dazu z. B. [Wa I, S. 166]):

In $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ betrachten wir die beiden Operationen

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v) && (\text{„Addition“}), \\ (x, y) \cdot (u, v) &:= (xu - yv, xv + yu) && (\text{„Multiplikation“}). \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein (kommutativer) Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$. Alle Regeln, die man in der Analysis für die reellen Zahlen allein mit Hilfe der Körperaxiome herleitet, gelten daher auch in \mathbb{C} . Definitionen und Bezeichnungen können so entsprechend übernommen werden.

Hier ist die Einbettung durch die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \ni a \longmapsto (a, 0) \in \mathbb{C}$ gegeben. Daher können wir die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $\varphi(a) = (a, 0)$ ‚identifizieren‘, d. h. $\varphi(a)$ und a werden nicht mehr unterschieden. In diesem Sinne ist \mathbb{R} Teilkörper von \mathbb{C} .

Mit $i := (0, 1)$ hat man dann $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Damit folgt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib.$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen lässt sich damit — im Gegensatz zu CARDANOS Zeiten jetzt wohlbegründet — zurückführen auf das Rechnen mit reellen Zahlen und i unter Beachtung von

$$i^2 = -1.$$

Die komplexen Zahlen als Unterring der 2×2 -Matrizen

In $\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ nehmen wir als $+$ und \cdot die Addition und Multiplikation von Matrizen (*linear-algebraische Einführung*). Aufgrund von

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

führen diese beiden Operationen nicht aus \mathbb{C} heraus; \mathbb{C} ist also zunächst ein *Unterring* der reellen 2×2 -Matrizen. Die Kommutativität der Multiplikation in \mathbb{C} bestätigt man durch ‚scharfes Hinsehen‘. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

ist für $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$ — also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ — $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar und

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gerade auch ‚Eins‘ in \mathbb{C} ist, hat man: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Hier liefert

$$\varphi : \mathbb{R} \ni a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

die Einbettung; identifiziert man wieder a mit $\varphi(a)$, dann gelten mit

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

und

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a + ib.$$

Die komplexen Zahlen als Restklassenring

Die skizzierten Überlegungen in diesem kurzen Teilabschnitt haben etwas den Charakter akademischer Spielerei. Diese sechs Zeilen können Sie getrost überschlagen.

\mathbb{R} ist nicht ‚algebraisch abgeschlossen‘; zum Beispiel hat das Polynom $x^2 + 1$ keine Nullstelle in \mathbb{R} , es ist ‚irreduzibel‘. ‚Faktoriert‘ man den ‚Polynomring‘ $\mathbb{R}[x]$ nach dem von $x^2 + 1$ erzeugten ‚Ideal‘ $(x^2 + 1)$, dann erhält man mit

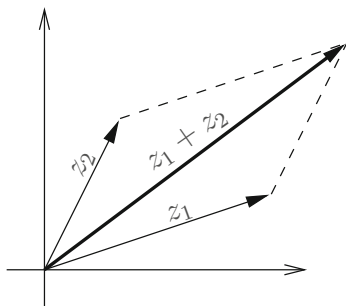
$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$$

einen komplexen Zahlkörper, wobei i als die zu x gehörige ‚Restklasse‘ gewählt werden kann (*algebraische Einführung*).

Geometrische Einführung der komplexen Zahlen

\mathbb{C} ist eine Ebene — auch *Gaußsche Zahlenebene* genannt —, in der 0 und 1 als zwei verschiedene Punkte festgelegt sind. Komplexe Zahlen sind Vektoren in der Ebene. Die *Addition* komplexer Zahlen wird definiert als gewöhnliche Vektoraddition.

Addition:



Wie die *Multiplikation* geometrisch eingeführt werden kann, wird im Kontext von Abschnitt 1.4 verständlich. Der Nachweis der Körperaxiome erfolgt dann durch elementargeometrische Überlegungen.

1.3 Elementare Operationen und Regeln

Man überlegt sich leicht:

Je zwei Körper der komplexen Zahlen sind (als Körper) isomorph.

Daher sprechen wir im Folgenden von *dem* Körper der komplexen Zahlen.

Es sei nun

$\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper der komplexen Zahlen

mit der imaginären Einheit i . Insbesondere gilt dann:

Bemerkung 1 a) $a + ib = c + id \iff a = c \wedge b = d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$
 b) Für $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = -1 \iff z \in \{i, -i\}$

Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir:

x „Realteil“ von z ($\operatorname{Re} z, \Re z$)

y „Imaginärteil“ von z ($\operatorname{Im} z, \Im z$)

z „rein imaginär“: $\iff \Re z = 0$

$\bar{z} := x - iy$ ($= x + i(-y)$) „konjugiert komplexe Zahl“ (zu z)

$|z| := (x^2 + y^2)^{1/2}$ „Betrag“ („Länge“) von z

Der Betrag komplexer Zahlen liefert so für reelle Zahlen den dort definierten Betrag.

Offenbar gelten $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Wir erinnern noch einmal an die — für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ — üblicherweise schon aus einer Analysis-Vorlesung bekannten

Regeln a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $\bar{\bar{z}} = z$, $|z| = |\bar{z}|$
 b) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 c) $\Re(z_1 \pm z_2) = \Re(z_1) \pm \Re(z_2)$
 d) $\Im(z_1 \pm z_2) = \Im(z_1) \pm \Im(z_2)$
 e) Für $z \neq 0$: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $(\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$
 f) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \iff \Im(z) = 0 \iff \Re(z) = z$
 g) $|\Re(z)|, |\Im(z)| \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$

Die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ ist also ein *Automorphismus (Involution)*.

Auch die folgenden **Eigenschaften des Betrages** auf \mathbb{C} sollten vertraut sein:

[B0] $|z| \geq 0$ („Positivität“)
 [B1] $|z| = 0 \iff z = 0$ („Definitheit“)
 [B2] $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ („Dreiecksungleichung“)
 [B3] $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
 [B4] $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ für $z_2 \neq 0$

$$[\text{B5}] \quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \quad (,\text{Symmetrie}')$$

$$[\text{B6}] \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$[\text{B7}] \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1 - z| + |z - z_2|$$

Bemerkung 2

Nicht-reelle Nullstellen von Polynomen $P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ mit reellen Koeffizienten a_ν ($\nu = 0, \dots, n$) treten paarweise (konjugiert komplex) auf, d. h. mit $P(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist auch $P(\bar{\alpha}) = 0$.

Achtung: Beim Übergang von \mathbb{R} zu \mathbb{C} geht die ‚Ordnungsstruktur‘ verloren:

Die Anordnung von \mathbb{R} lässt sich *nicht so* auf \mathbb{C} fortsetzen, dass \mathbb{C} ‚angeordneter Körper‘* ist (die Eigenschaften (A 10), (A 11) und (A 12) aus [Wa I, S. 7] gelten zusätzlich):

Wegen $i^2 = -1$ ist $i \neq 0$. Wäre $i > 0$, so folgte $-1 = i^2 > 0$; im Falle $i < 0$ hätte man $-i > 0$ und so $-1 = (-i)^2 > 0$: Widerspruch!

‚Stetigkeit‘ der Grundoperationen ($a, b, x, y \in \mathbb{C}$):

$$(1) \quad |(x + y) - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b|$$

$$(1') \quad |(x - y) - (a - b)| \leq |x - a| + |y - b|$$

$$(2) \quad |(x \cdot y) - (a \cdot b)| \leq |a| \cdot |y - b| + |b| \cdot |x - a| + |x - a| |y - b|$$

$$(3) \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| \leq \frac{2}{|a|^2} \cdot |x - a|, \quad \text{falls } a \neq 0 \text{ und } |x - a| \leq \frac{|a|}{2}$$

$$(4) \quad ||x| - |a|| \leq |x - a|$$

Diese Regeln dürften aus der Analysis bekannt sein (man vergleiche etwa [Ho, S. 52 ff]). Sie zeigen die Stetigkeit von Summen-, Differenz-, Produkt-, Betrags- und Quotientenbildung quantitativ. Aus ihnen folgen unmittelbar z. B. ganz einfach die Grundregeln für die Konvergenz von Folgen, Reihen, Funktionen und die für (lokale und globale) Stetigkeit.

1.4 Argument, geometrische Veranschaulichung

In der Analysis definiert man meist die Exponentialfunktion gleich für komplexes Argument durch die (überall absolut konvergente) Reihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

* Man kann zwar die ‚Ordnung‘ von \mathbb{R} auf \mathbb{C} erweitern (z. B. lexikographisch); jedoch geht die Verträglichkeit mit der Multiplikation dabei verloren!

Auch die trigonometrischen Funktionen \sin und \cos können (über die Reihendarstellung) gleich für komplexe Argumente definiert werden. Man erhält so ganz einfach u. a. die

EULER-Formel $\boxed{\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)} \quad (z \in \mathbb{C}).$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $z = \exp(i\varphi)$ mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $z^n = \exp(in\varphi)$; so hat man die

DE MOIVRE-FORMEL* $\boxed{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi}.$

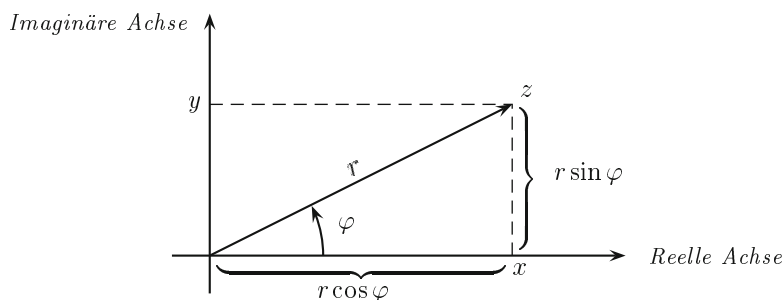
Aus der Analysis kennt man schon die

Polardarstellung: Ist $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$), dann existieren eindeutig $-\pi < \varphi \leq \pi$ und $0 < r < \infty$ mit

$$(*) \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \exp(i\varphi)$$

Dabei gelten:

$$r = |z|, \quad x = r \cos \varphi = \Re z \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi = \Im z.$$



Jedes $\varphi \in \mathbb{R}$, das $(*)$ erfüllt, nennen wir ein „Argument von z “ und notieren

$$\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi \text{ Argument von } z\}.$$

Das eindeutig bestimmte $\varphi \in \arg z \cap]-\pi, \pi]$ notieren wir als $\text{Arg } z$ („Hauptwert des Arguments von z “). Offenbar gilt dann

$$\arg z = \{\text{Arg } z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\};$$

$\arg z$ ist also eine ‚Restklasse‘ in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Häufig schreibt man (und das machen wir gelegentlich auch) lax

$$\varphi = \arg z \quad \text{statt} \quad \varphi \in \arg z.$$

* Abraham DE MOIVRE (1667–1754)

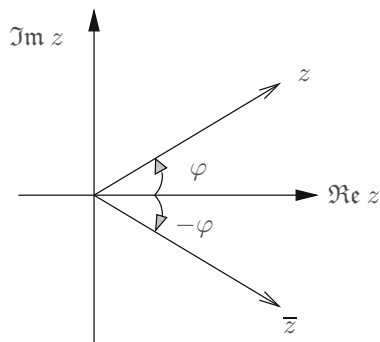
Für $A, B \subset \mathbb{C}$ notieren wir

$$A + B := \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$$

und entsprechend auch $-A$, $A - B$, $A \cdot B$.

Damit gelten für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

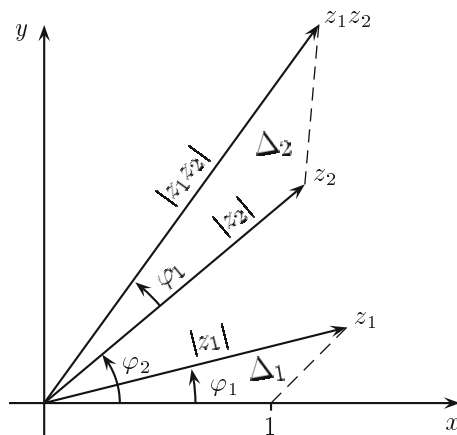
- a) $\arg(\frac{1}{z}) = \arg(\bar{z}) = -\arg z$
 b) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$



Denn offensichtlich gilt $\arg(\bar{z}) = -\arg z$, und mit $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ergibt sich die Gleichung $\arg(\frac{1}{z}) = \arg(\bar{z})$; damit ist a) gezeigt. Für b) überlegt man: Mit der Funktionalgleichung der exp-Funktion folgt, dass die r. S. Teilmenge der l. S. ist; mit a) erhält man dann die Gleichheit.

Anmerkung: Die b) entsprechende Aussage gilt *nicht* für die Hauptwerte!

Die geometrische Einführung der *Addition* — als Vektoraddition — hatten wir schon in Abschnitt 1.2 erwähnt. Die *Multiplikation* kann über ähnliche Dreiecke eingeführt werden. Man beachte dazu die Graphik:



Es seien $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \exp(i\varphi_2)$. Wegen $\frac{|z_1 z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}$ sind die beiden Dreiecke Δ_1 und Δ_2 ähnlich. Durch eine ‚Drehstreckung‘ ergibt sich $z_1 z_2$.

1.5 Wurzeln

Definition: Für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ eine „ n -te Wurzel aus a “; speziell für $a = 1$ auch „ n -te Einheitswurzel“, für $n = 2$ (und beliebigem a) auch „Wurzel aus a “.

Es seien $a, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $a = \varrho \exp(i\psi)$ und $z = r \exp(i\varphi)$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } z^n = a &\iff r^n \exp(i(n\varphi)) = \varrho \exp(i\psi) \\ &\iff r^n = \varrho \wedge n\varphi = \psi + 2k\pi \quad (\text{für ein } k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff z = \varrho^{1/n} \exp\left(i \frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) =: z_k \quad (\text{für ein } k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Unter diesen z_k sind die für $k = 0, \dots, n-1$ paarweise verschieden. Da die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it) \in \mathbb{C}$ die Periode 2π hat, erhalten wir so schon alle Werte, also:

Bemerkung 3 Durch $\varrho^{1/n} \exp\left(i \frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1)$

sind gerade alle n -ten Wurzeln aus a gegeben.

Die n -ten Wurzeln liefern die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks.

Speziell gilt somit:

Bemerkung 4 Durch $\exp\left(i \frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \dots, n-1)$

sind alle n -ten Einheitswurzeln gegeben.

Wir notieren

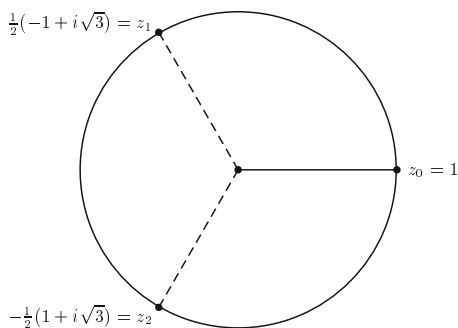
$$\sqrt[n]{a} := \{z \in \mathbb{C} : z^n = a\}, \quad \sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$$

und schreiben gelegentlich lax

$$z = \sqrt[n]{a} \quad \text{statt} \quad z \in \sqrt[n]{a} \quad \text{bzw.} \quad z = \sqrt{a} \quad \text{statt} \quad z \in \sqrt{a}.$$

Die Gleichung $z^n = 1$ heißt „Kreisteilungsgleichung“. Dies wird durch Beispiele der folgenden Art plausibel:

Beispiel $n = 3$:



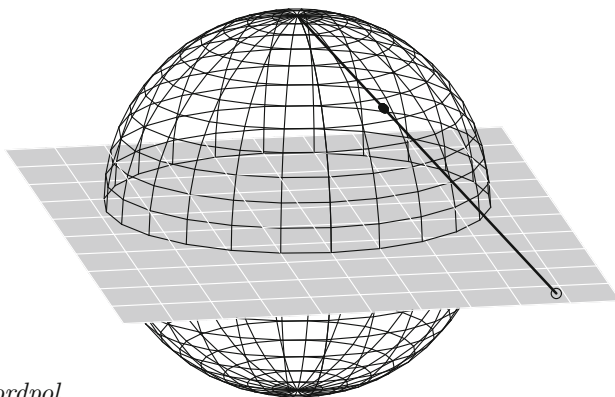
1.6 Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

Dem berühmten Mathematiker Bernhard RIEMANN (1826–1866) verdanken wir — neben epochemachenden Leistungen — u. a. auch ein Modell der komplexen Zahlen, welches sehr leicht eine *Veranschaulichung des Punktes* ∞ erlaubt:

Die komplexen Zahlen \mathbb{C} werden dabei mit den Punkten der ‚Äquatorebene‘ ($\xi_3 = 0$) des \mathbb{R}^3 identifiziert. Punkte $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ werden auf die Einheitskugel*

$$S := \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{\nu=1}^3 \xi_\nu^2 = 1 \right\}$$

im \mathbb{R}^3 abgebildet, indem man den Schnittpunkt Z von S mit der Geraden



durch den *Nordpol*

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnet.

* genauer: *Einheitssphäre* oder *Rand* der Einheitskugel

Einsetzen von

$$Z = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R} \ni \lambda > 0)$$

in die Gleichung $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ der Einheitssphäre ergibt

$$\lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Wir erhalten so durch

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, & \xi_2 &= \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{i(\bar{z} - z)}{z\bar{z} + 1}, \\ \xi_3 &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \end{aligned}$$

die *stereographische Projektion* τ von \mathbb{C} auf $S \setminus \{N\}$ und durch

$$x = \frac{\xi_1}{1 - \xi_3}, \quad y = \frac{\xi_2}{1 - \xi_3}, \quad \text{also} \quad z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3},$$

deren Umkehrabbildung.

Nach Konstruktion wird bei der stereographischen Projektion das Innere des Einheitskreises von \mathbb{C} auf die ‚Süd-Halbkugel‘ und entsprechend das Äußere auf die ‚Nord-Halbkugel‘ abgebildet. Die Punkte auf dem Rand des Einheitskreises werden auf sich selbst abgebildet (Fixpunkte von τ).

Ferner strebt der Bildpunkt $Z = \tau(z)$ gegen den Nordpol N für $|z| \rightarrow \infty$. Erweitert man \mathbb{C} durch den ‚unendlich fernen Punkt‘ ∞ zur erweiterten (abgeschlossenen) komplexen Zahlenebene (*Ein-Punkt-Kompaktifizierung*)

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

so lässt sich die stereographische Projektion durch die Zuordnung $\infty \mapsto N$ fortsetzen zu einer bijektiven Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ auf die Riemannsche Zahlenkugel S . Diese fortgesetzte Abbildung notieren wir wieder mit dem gleichen Symbol τ .

Mit Hilfe der Riemannschen Zahlenkugel lassen sich Aussagen über das Verhalten komplexer Funktionen in der Umgebung von ∞ besser verstehen, da auf ihr der Punkt $\infty (= N)$ keine Ausnahmestellung hat.

‚Rechenregeln‘ in $\overline{\mathbb{C}}$

An vielen Stellen, so zum Beispiel für den Abschnitt 8.1 über MÖBIUS-Transformationen, ist es zweckmäßig, die ‚Rechenregeln‘ in \mathbb{C} wie folgt auf $\overline{\mathbb{C}}$ auszudehnen:

Für $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ seien:

$$a + \infty := \infty + a := \infty$$

$$\infty + \infty := \infty$$

$$\infty \cdot b := b \cdot \infty := \infty$$

$$a/\infty := 0$$

$$b/0 := \infty$$

Diese Festlegungen führen zu keinem Widerspruch zu den Gesetzen in \mathbb{C} . Hingegen sind Terme wie $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ und ∞/∞ allgemein nicht sinnvoll zu definieren. Sie können — wie im Reellen — in Spezialfällen durch Stetigkeits- bzw. Konvergenzbetrachtungen ausgewertet werden.

MWS zu Kapitel 1

Die komplexen Zahlen

Wichtige MAPLE-Befehle dieses Kapitels:

```
interface, z. B. interface(imaginaryunit=i)
alias, macro
LinearAlgebra-Paket: Matrix, Add, Equal, Multiply, MatrixInverse
Re, Im, abs, conjugate, polar, argument
pointplot, textplot, complexplot, coordplot, conformal, display
plottools-Paket: arc, arrow, disk, line, transform
radnormal
frontend, op, map, cat
```

1.1 Historisches

Von der ‚Erfindung‘ der komplexen Zahlen

```
> restart: with(plots):
  interface(imaginaryunit=i):
```

Durch die interface-Anweisung `imaginaryunit = i` wird das standardmäßig vordefinierte Symbol I für die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ deaktiviert und durch i ersetzt.

Folgendes Beispiel stammt aus Geronimo CARDANOS *Ars Magna*. Gesucht sind (reelle?) Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 + x_2 = 10$ und $x_1 \cdot x_2 = 40$. Nach dem VIETASchen Wurzelsatz lassen sich x_1 und x_2 als die Lösungen einer quadratischen Gleichung auffassen. Die dazu nötigen Umformungs- und Lösungsschritte führen wir — zur Einübung — mit einfachen Maple-Anweisungen durch:

```
> eq1 := x[1]+x[2]=10; eq2 := x[1]*x[2]=40;
```

```
eq1 := x1 + x2 = 10, eq2 := x1 x2 = 40
```

Wir lösen die erste Gleichung nach x_2 auf und setzen das Ergebnis in die zweite Gleichung ein:

```
> solve(eq1,{x[2]});
```

$$\{x_2 = 10 - x_1\}$$

```
> eq3 := subs(%,eq2);
```

$$eq3 := x_1(10 - x_1) = 40$$

Substituieren wir x_1 durch z , so ist folgende quadratische Gleichung zu lösen:

```
> eq4 := subs(x[1]=z,eq3);
```

$$eq4 := z(10 - z) = 40$$

```
> expand(-eq4);
```

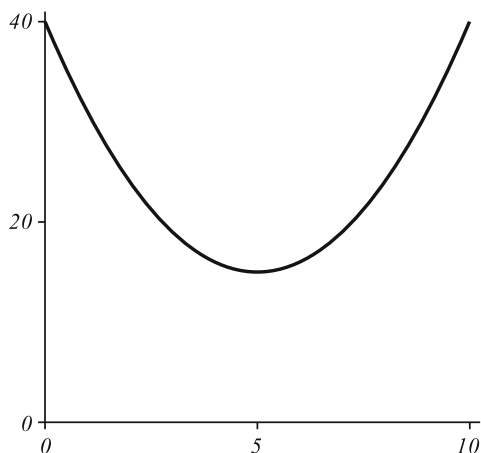
$$z^2 - 10z = -40$$

```
> eq5 := lhs(%) - rhs(%) = 0;
```

$$eq5 := z^2 - 10z + 40 = 0$$

Durch die linke Seite dieser Gleichung ist — für reelle z — eine Parabel definiert, deren Nullstellen gesucht sind. Wir veranschaulichen den Funktionsverlauf:

```
> plot(lhs(eq5),z=0..10,color=black,view=[0..10,0..40],thickness=2);
```



Spätestens damit ist klar, dass die Parabel keine reelle Nullstelle besitzt. Mit Hilfe des Maple-Kommandos `completesquare` aus dem `student`-Paket lässt sich dies natürlich auch durch ganz einfache algebraische Umformung einsehen:


```
> with(student): eq6 := completesquare(eq5,z);
```

$$eq6 := (z - 5)^2 + 15 = 0$$

Maple kennt die komplexen Zahlen und kann uns somit die Lösungen explizit angeben:

```
> solve(eq6,z);
```

$$5 + i\sqrt{15}, \quad 5 - i\sqrt{15}$$

Auf genau diese Form ist CARDANO durch formales Lösen der quadratischen Gleichung gekommen, wobei er Schwierigkeiten hatte, dem Symbol $i := \sqrt{-1}$ eine konkrete Bedeutung zu geben. In der Bezeichnung *imaginäre Einheit* lebt dies fort.

Durchs Imaginäre zurück ins Reelle

```
> restart:
```

```
interface(imaginaryunit=i): macro(I=i):
```

Wie oben vereinbaren wir mittels der interface-Anweisung für $\sqrt{-1}$ die von EULER eingeführte Bezeichnung i . Die Neudefinition von I durch den macro-Befehl $I=i$ bewirkt dann, dass ein eingegebenes I als imaginäre Einheit interpretiert und stets als i ausgegeben wird.

Beachten: i kann dann z. B. *nicht als Laufvariable* benutzt werden! (Das gilt natürlich auch schon auf Seite 15.)

Das folgende Beispiel einer kubischen Gleichung geht auf Rafael BOMBELLI zurück.

```
> eq := z^3+p*z+q;
p := -15; q := -4;
```

$$eq := z^3 + pz + q, \quad p := -15, \quad q := -4$$

Die folgenden Rechenschritte orientieren sich an unseren Überlegungen aus Abschnitt 1.1 des Textes. Zur Vereinfachung eines Ausdrucks mit Wurzeltermen muss dabei statt *simplify* oder *normal* das Maple-Kommando `radnormal` verwendet werden.

```
> A := -q/2+sqrt((q/2)^2+(p/3)^3):
u := radnormal(A^(1/3));
v := -p/3/u;
omega := (-1+I*sqrt(3))/2;
```

$$u := 2 + i, \quad v := 2 - i, \quad \omega := -1/2 + 1/2 i \sqrt{3}$$

Mit den *Cardanischen Formeln* ergibt sich:

```
> z1 = u+v;
    u*omega+v*omega^2: z2 = simplify(%);
    u*omega^2+v*omega: z3 = simplify(%);
```

$$z1 = 4, \quad z2 = -2 - \sqrt{3}, \quad z3 = -2 + \sqrt{3}$$

Maple findet natürlich die gleichen Lösungen auch direkt:

```
> solve(eq,z);
```

$$4, \quad -2 + \sqrt{3}, \quad -2 - \sqrt{3}$$

1.2 Definition und Modelle komplexer Zahlen

Arithmetische Einführung der komplexen Zahlen

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Die komplexen Zahlen als Zahlenpaare

Für das Rechnen mit Zahlenpaaren benutzen wir als *Addition* die standardmäßig vorhandene komponentenweise Addition (Vektoraddition).

```
> [x[1],y[1]] + [x[2],y[2]];
```

$$[x_2 + x_1, y_2 + y_1]$$

Die *Multiplikation* definieren wir mittels eines „neutralen Operators“, d. h. einer *Prozedur* folgenden Typs:

```
> '&.' := proc(u,v)                                # Multiplikation
    eval([u[1]*v[1]-u[2]*v[2],u[1]*v[2]+u[2]*v[1]])
end proc;
```

Mit dieser Prozedur kann die Multiplikation auf zwei verschiedene Arten ausgeführt werden:

```
> &. ([x[1],y[1]],[x[2],y[2]] );
```

$$[x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2]$$

```
> [x[1],y[1]] &. [x[2],y[2]];
```

$$[x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2]$$

Aufgrund der *Regeln für neutrale Operatoren* bindet die Operation „&.“ stärker als die Addition. Im Zweifelsfalle setze man passende Klammern!

```
> alias(i=[0,1]):      # i = imaginäre Einheit
```

Wir bestätigen die Beziehung $i^2 = -1$:

```
> i &. i;                [-1, 0]
```

Maple kennt natürlich die üblichen Rechenregeln. Wir verzichten jedoch darauf, diese alle zu verifizieren. Beispielhaft überprüfen wir nur die *Existenz eines inversen Elementes* für $[x, y] \neq 0$:

```
> [x,y] &. [u,v] = [1,0];
```

$$[xu - yv, xv + yu] = [1, 0]$$

```
> lhs(%)-rhs(%): eq := convert(%,set);
```

$$eq := \{-1 + xu - yv, xv + yu\}$$

In der folgenden Maple-Anweisung interpretiert „solve“ die beiden Terme aus „eq“ als homogene Gleichungen und löst diese nach den Unbekannten u, v auf.

```
> solve(eq,{u,v});
```

$$\left\{ u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2} \right\}$$

Die komplexen Zahlen als Unterring der 2×2 -Matrizen

Jetzt benutzen wir als Operationen $+$ und $*$ die übliche Matrixaddition bzw. -multiplikation. Mittels folgender Zuordnung bilden wir geordnete Paare reeller Zahlen in 2×2 -Matrizen ab:

```
> Phi := z -> Matrix(2,2,[z[1],-z[2],z[2],z[1]]);
```

$$\Phi := z \rightarrow \text{Matrix}(2, 2, [z_1, -z_2, z_2, z_1])$$

```
> 'Phi([x,y])' = Phi([x,y]);
```

$$\Phi([x, y]) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Φ ist verträglich mit der Addition und der Multiplikation. Wir überprüfen dies mittels Verwendung des Maple-Befehls `frontend(p,x)`, wobei p eine Prozedur und x eine Argumentliste für p bedeuten. Die Prozedur wird angewendet auf die „eingefrorenen“ Argumente, welche im Ergebnis durch ihre ursprünglichen Werte ersetzt werden.

```
> A := Phi([x[1],y[1]]): B := Phi([x[2],y[2]]):
eq := Phi([x[1],y[1]] + [x[2],y[2]]) = A + B:
if Equal(lhs(eq),rhs(eq)) then
  A + B = frontend(Add,[A,B]) end if:
```

$$\begin{bmatrix} x_2 + x_1 - y_2 - y_1 \\ y_2 + y_1 \quad x_2 + x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ y_1 \quad x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ y_2 \quad x_2 \end{bmatrix}$$

```
> eq := Phi([x[1],y[1]] &. [x[2],y[2]]) = A . B:
if Equal(lhs(eq),rhs(eq)) then
  A . B = frontend(Multiply,[A,B]) end if:
```

$$\begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 - x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 \quad x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ y_1 \quad x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ y_2 \quad x_2 \end{bmatrix}$$

Die Abbildung Φ ist zudem injektiv und somit ein Isomorphismus auf die Bildmenge der geordneten Paare. Dies ist eine Teilmenge der 2×2 -Matrizen, die bezüglich $+$ und $*$ die Körperaxiome erfüllt. Nullelement ist in diesem Falle die Nullmatrix, Einselement die Einheitsmatrix. Das inverse Element zu $[x, y] \neq 0$ liest man aus den folgenden Überlegungen ab:

```
> A := Phi([x,y]): B := MatrixInverse(A):
frontend(Multiply,[A,B]) = simplify(A . B);
```

$$\begin{bmatrix} x - y \\ y \quad x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{bmatrix} = \text{MATRIX}([[1, 0], i])$$

Maple liefert hier als Ergebnis die Einheitsmatrix in einer sehr verschlüsselten Form. Diese wird dargestellt als Liste der beiden Zeilenvektoren $[1, 0]$ und $i = [0, 1]$.

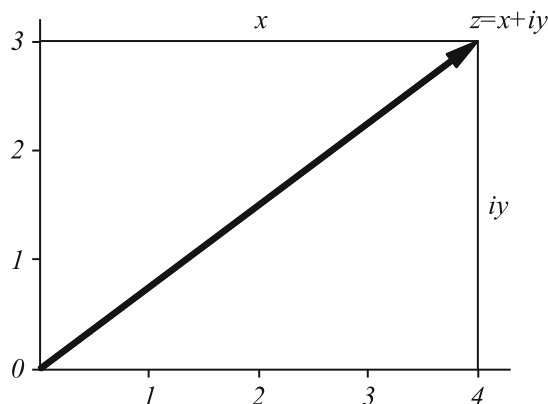
```
> alias(j=Phi([0,1])):      # j = imaginäre Einheit im Unterring
j, j . j;                  # j^2 = -1
```

$$j, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Geometrische Einführung der komplexen Zahlen

```
> restart: with(plots): with(plottools):
x := 4: y := 3: z := [x,y]:
Pfeil := arrow([0,0],z,0.04,0.15,0.06,color=black):
hLinie := line([0,y],z,color=black): # horizontale Linie
vLinie := line([x,0],z,color=black): # vertikale Linie
5 Texte := [x+0.3,y+0.2,"z=x+iy"],[x+0.2,y/2,"iy"],[x/2,y+0.2," x"]:
tplot := textplot([Texte]):          # Beschriftung
display({Pfeil,hLinie,vLinie,tplot},tickmarks=[4,3],
        scaling=constrained, title="Die GAUSSsche Zahlenebene");
```

Die Gaußsche Zahlenebene



Hier tritt zum ersten Mal eine etwas komplexere Abbildung auf. Diese setzt sich zusammen aus vier sogenannten *Graphikobjekten*, bei deren Benennung wir uns um möglichst suggestive Namen bemüht haben. Sie heißen *Pfeil*, *hLinie*, *vLinie* sowie *tplot*. Wir werden uns diese gleich im einzelnen etwas genauer anschauen. Zuvor sollten Sie jedoch den Maple-Befehl

```
> with(plottools);
```

```
[arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutin, cutout, cylinder, disk, ...]
```

ausführen. Dieses Programm-Paket wurde oben (vor der Erzeugung der Abbildung) geladen. Man kann damit einfache Graphikobjekte, wie z. B. *arc* (Kreisbogen), *arrow* (Pfeil), *disk* (Kreisscheibe), *line* (Strecke), erzeugen. Mit Befehlen wie z. B. *translate* (Verschieben), *scale* (Skalieren), *rotate* (Drehen) und *transform* können Graphikstrukturen transformiert werden. Nach Anklicken eines Befehls aus dem Plottools-Paket kann man sich mit *Help* darüber genauer informieren. Mit `arrow([x1, y1], [x2, y2], B1, B2, V)` erzeugt man einen Pfeil der Länge L von $[x1, y1]$ nach $[x2, y2]$. $B1$ ist die Pfeilbreite, $B2$ die Breite der Pfeilspitze und V das Verhältnis der Länge der Pfeilspitze zur Gesamtlänge L . `line([x1, y1], [x2, y2])` ergibt die Strecke von $[x1, y1]$ nach $[x2, y2]$. Mit der Option *color* lassen sich die einzelnen Graphikobjekte wie üblich färben. Die Beschriftung innerhalb der Graphik erfolgt mit dem Kommando *textplot* aus dem plots-Paket. An drei Stellen soll hier ein Text ausgegeben werden. Die Textangabe erfolgt jeweils in der Form `[x, y, "text"]`, wobei *text* sowohl horizontal als auch vertikal bezüglich des Punktes $[x, y]$ zentriert wird. Die Folge *Texte* oben enthält drei solcher Textangaben, die in der Form `[Texte]` als Textliste durch *textplot* ausgegeben werden. Die Gesamtausgabe unserer Graphikbausteine erfolgt mittels *display*. Auf einfache Art kann man dabei die Graphik durch die Option *title* noch mit einer Überschrift versehen.

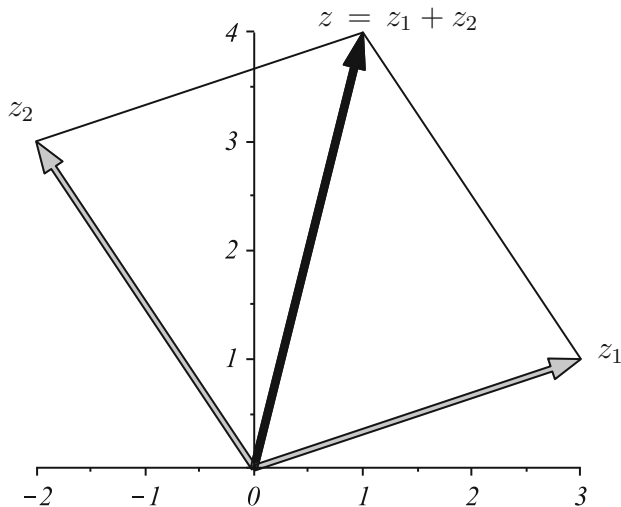
Die Addition komplexer Zahlen wird definiert als Vektoraddition:

```

> x1 := 3: y1 := 1: x2 := -2: y2 := 3:
  z1 := [x1,y1]: z2 := [x2,y2]: z := z1+z2:
  Pfeil1 := arrow([0,0],z1,0.05,0.2,0.09,color=gray):
  Pfeil2 := arrow([0,0],z2,0.05,0.2,0.08,color=gray):
5  Pfeil3 := arrow([0,0],z,0.06,0.2,0.08,color=black):
  Linien := plot([[z1,z],[z2,z]],color=black):
  Texte := [x1+0.2,y1,typeset(' z'[1])],[x2,y2+0.2,typeset(' z'[2])],
           [op(z+[0.2,0.2]),typeset(' z'=' z'[1]+' z'[2])]:
  tplot := textplot([Texte]):
10 display({Pfeil1,Pfeil2,Pfeil3,Linien,tplot},scaling=constrained,
           title="Addition komplexer Zahlen");

```

Addition komplexer Zahlen



Der Text dieser Graphik ist mittels der Option `typeset` gestaltet worden. Näheres hierüber liefert die Maple-Hilfe nach Eingabe von `?plot, typesetting`.

Wie die Multiplikation geometrisch eingeführt werden kann, wird im Kontext von Abschnitt 1.4 verständlich. Der Nachweis der Körperaxiome erfolgt dann durch elementargeometrische Überlegungen.

1.3 Elementare Operationen und Regeln

Symbolisches Rechnen mit komplexen Zahlen

```

> restart: interface(imaginaryunit=i): macro(I=i):
  I; I^2;

```

$i, -1$

```

> for k from 1 to 2 do z[k] := x[k]+I*y[k] end do:

```

Summe, Produkt, Quotient (Inverse) komplexer Zahlen

```
> 'z[1]+z[2]' = evalc(z[1]+z[2]);
```

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

```
> 'z[1]*z[2]' = evalc(z[1]*z[2]);
```

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

```
> 'z[1]/z[2]' = evalc(z[1]/z[2]);
```

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \left(\frac{y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

```
> z := x + I*y: '1/z' = evalc(1/z);
```

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-i y}{x^2 + y^2}$$

Real- und Imaginärteil

```
> 'Re(z)' = evalc(Re(z)); 'Im(z)' = evalc(Im(z));
```

$$\Re(z) = x, \quad \Im(z) = y$$

Durch Auswerten mittels der logischen Funktion `evalb` erhalten wir:

```
> eq := 'Re(z)' = '(z+conjugate(z))/2': evalc(%):
  if evalb(%) then eval(eq,1) end if;
```

$$\Re(z) = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \bar{z}$$

```
> eq := 'Im(z)' = '(1/(2*I))*'(z-conjugate(z))': evalc(%):
  if evalb(%) then eval(eq,1) end if;
```

$$\Im(z) = \frac{-1}{2} i (z - \bar{z})$$

Konjugation und Betrag

```
> 'conjugate(z)' = evalc(conjugate(z));
```

$$\bar{z} = x - i y$$

```
> 'abs(z)' = evalc(abs(z)); z := 'z':
```

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Überprüfen einiger Rechenregeln

```
> eq := 'conjugate(z[1]+z[2])' = 'conjugate(z[1])+conjugate(z[2])':
evalc(%): if evalb(%) then eval(eq,1) end if;
```

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

```
> eq := 'conjugate(z[1]*z[2])' = 'conjugate(z[1])*conjugate(z[2])':
evalc(%): if evalb(%) then eval(eq,1) end if;
```

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

```
> eq := 'z*conjugate(z)' = 'abs(z)^2': evalc(%):
if evalb(%) then eval(eq,1) end if;
```

$$z \overline{z} = |z|^2$$

Beispiele

```
> restart: interface(imaginaryunit=i): macro(I=i):
u := 2-5*I; v := 4+I;
```

$$u := 2 - 5i, \quad v := 4 + i$$

Summe, Differenz, Produkt und Quotient komplexer Zahlen

```
> u+v; u-v; u*v; u/v;
```

$$6 - 4i, \quad -2 - 6i, \quad 13 - 18i, \quad \frac{3}{17} - \frac{22}{17}i$$

Eine 4-stellige Näherung für das vorangehende Resultat ergibt sich dann so:

```
> evalf(u/v,4);
```

$$0.1765 - 1.294i$$

Real- und Imaginärteil, Konjugation und Betrag

```
> Re(u); Im(v); conjugate(u); abs(u);
```

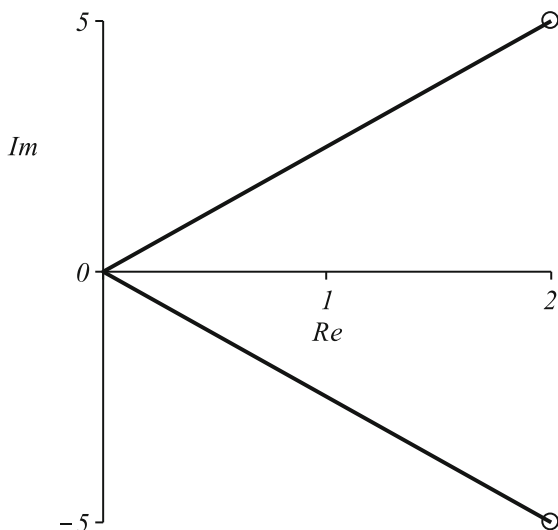
$$2, \quad 1, \quad 2 + 5i, \quad \sqrt{29}$$

Komplexe Zahlen zeichnen

```

> with(plots):
  Linien := complexplot([u,0,conjugate(u)],thickness=2,color=black):
  Punkte := complexplot([u,conjugate(u)],style=point,symbol=circle,
                        symbolsize=20,color=black):
5  display(Linien,Punkte,labels=["Re","Im"],thickness=2);

```



Wir lernen hier den Maple-Befehl `complexplot` kennen. Analog zu `plot` kann man durch `complexplot([z1,z2,z3])` eine Liste $[z1, z2, z3]$ komplexer Zahlen in der angegebenen Reihenfolge geradlinig verbinden. Durch die Option `style=point` werden die aufgelisteten Zahlen nur als Punkte ausgegeben. Mit der Option `symbolsize` kann deren Größe verändert werden.

1.4 Argument, geometrische Veranschaulichung**Eulersche Formel**

```

> restart:
  interface(imaginaryunit=i): macro(I=i):
  exp(x+I*y) = evalc(exp(x+I*y));

```

$$e^{x+iy} = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y)$$

```

> exp(I*x) = evalc(exp(I*x));
  Re(exp(I*x)) = evalc(Re(exp(I*x)));
  Im(exp(I*x)) = evalc(Im(exp(I*x)));

```

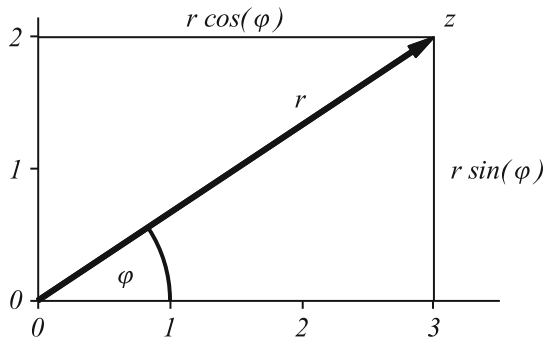
$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad \Re(e^{ix}) = \cos(x), \quad \Im(e^{ix}) = \sin(x)$$

Polardarstellung komplexer Zahlen

Wie bei Vektoren im \mathbb{R}^2 kann man komplexe Zahlen mittels der Polardarstellung durch ihren Betrag r und ihr Argument φ beschreiben.

```
> restart: interface(imaginaryunit=i): macro(I=i):
  with(plots): with(plottools):
  x := 3: y := 2: z := x+y*I: phi := argument(z):
  Pfeil := arrow([0,0],[x,y],0.03,0.1,0.055,color=black):
5  hLinie := line([0,y],[x,y],color=black):
  vLinie := line([x,0],[x,y],color=black):
  Arcus := arc([0,0],1,0..phi,color=black,thickness=2): # Kreisbogen
  Texte := [2/3*x,2/3*y+0.2,"r"],[x+0.1,y+0.15," z"],
          [0.7*cos(phi/2),0.7*sin(phi/2),typeset('&varphi;')],
10  [x/2,y+0.15,typeset("r cos(", '&varphi;', ")")],
          [x+0.5,y/2, typeset("r sin(", '&varphi;', ")")]:
  tplot := textplot([Texte]):
  display({Pfeil,hLinie,vLinie,Arcus,tplot},scaling=constrained,
          tickmarks=[3,3],title="Polardarstellung komplexer Zahlen");
```

Polardarstellung komplexer Zahlen



r und φ lassen sich so berechnen:

```
> 'z' = z; phi := argument(z); r := abs(z);
```

$$z = 3 + 2i, \quad \varphi := \arctan\left(\frac{2}{3}\right), \quad r := \sqrt{13}$$

```
> 'phi' = evalf(%%,6);
```

$$\varphi = 0.588003$$

Wir überprüfen, dass dies wirklich die Polardarstellung von z liefert:

```
> 'r'*exp(I*'phi') = radnormal(evalc(r*exp(I*phi)));
```

$$r e^{i\varphi} = 3 + 2i$$

r und φ erhält man auch so:

```
> convert(z,polar);
```

$$\text{polar}\left(\sqrt{13}, \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

...oder so:

```
> polar(z);
```

$$\text{polar}\left(\sqrt{13}, \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

```
> r := op(1,%); phi := op(2,%);
```

$$r := \sqrt{13}, \quad \varphi := \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

Rechnen mit der Polardarstellung

```
> r := 'r': phi := 'phi': polar(r,phi): % = evalc(%);
  polar(r,phi)*polar(s,psi): % = simplify(%);
  1/polar(r,phi): % = simplify(%);
  polar(r,phi)^3: % = simplify(%);
```

$$\begin{aligned} \text{polar}(r, \varphi) &= r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi), \\ \text{polar}(r, \varphi) \text{polar}(s, \psi) &= \text{polar}(rs, \varphi + \psi), \\ \frac{1}{\text{polar}(r, \varphi)} &= \text{polar}\left(\frac{1}{r}, -\varphi\right), \\ \text{polar}(r, \varphi)^3 &= \text{polar}(r^3, 3\varphi) \end{aligned}$$

Wir machen uns zum Schluss klar, dass $\text{argument}(z)$ der Hauptwert des Argumentes von z ist:

```
> 'argument(-1)' = argument(-1);
```

$$\text{argument}(-1) = \pi$$

```
> Limit(argument(-1+I*t),t=0,left): % = value(%);
  Limit(argument(-1+I*t),t=0,right): % = value(%);
```

$$\lim_{t \rightarrow 0-} \text{argument}(-1 + it) = -\pi, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \text{argument}(-1 + it) = \pi$$

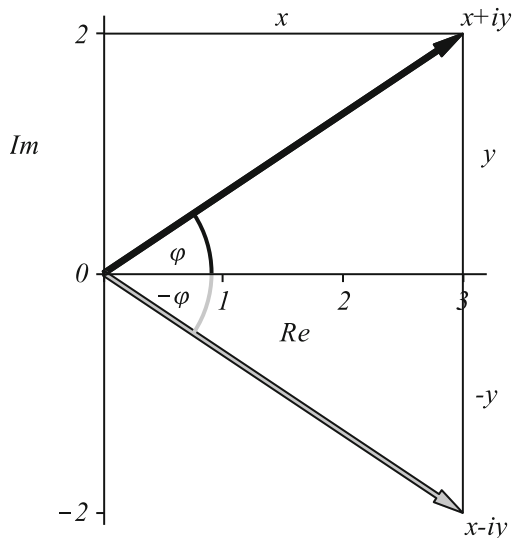
Veranschaulichung der Konjugation

```

> restart: with(plots): with(plottools):
x := 3: y := 2: z := x+I*y: phi := argument(z):
Pfeil1 := arrow([0,0],[x,y], 0.04,0.12,0.07,color=black):
Pfeil2 := arrow([0,0],[x,-y],0.04,0.12,0.07,color=gray):
5 Arcus1 := arc([0,0],0.9,0..phi,color=black,thickness=2):
Arcus2 := arc([0,0],0.9,-phi..0,color=gray,thickness=2):
hLinie := line([0,y],[x,y],color=black):
vLinie := line([x,-y],[x,y],color=black):
Texte := [x+0.2,y+0.15,"x+iy"],[x+0.2,-y-0.1,"x-iy"],
10 [x/2,y+0.15," x"],[x+0.2,y/2," y"],[x+0.2,-y/2,"-y"],
[0.65*cos(phi/2),0.6*sin(phi/2),typeset('&varphi;'),''],
[0.6*cos(phi/2),-0.6*sin(phi/2),typeset('&varphi;'),'']:
tplot := textplot([Texte]):
display({Pfeil1,Pfeil2,Arcus1,Arcus2,hLinie,vLinie,tplot},
15 tickmarks=[3,3],scaling=constrained,labels=["Re","Im"],
title="Konjugation komplexer Zahlen");

```

Konjugation komplexer Zahlen



Veranschaulichung der Multiplikation

```

> restart: with(plots): with(plottools):
x1 := 3/2: y1 := 1/2: z1 := x1+I*y1: phi1 := argument(z1):
x2 := 1: y2 := 3/2: z2 := x2+I*y2: phi2 := argument(z2):
z := z1*z2: x := Re(z): y := Im(z):
5 Pfeil1 := arrow([0,0],[x1,y1],0.03,0.10,0.10,color=gray):

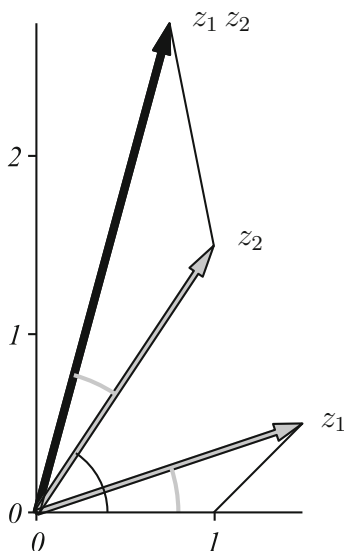
```

```

Pfeil2 := arrow([0,0],[x2,y2],0.03,0.09,0.10,color=gray):
Pfeil3 := arrow([0,0],[x,y], 0.035,0.10,0.06,color=black):
Arcus1 := arc([0,0],0.8,0..phi1,color=gray,thickness=2):
Arcus2 := arc([0,0],0.8,phi2..phi2+phi1,color=gray,thickness=2):
10 Arcus3 := arc([0,0],0.4,0..phi2,color=black,thickness=1):
Linien := plot([[1,0],[x1,y1]],[[x2,y2],[x,y]],color=black):
Texte := [x1+0.1,y1,typeset(' z'[1])],[x2+0.1,y2,typeset(' z'[2])],
          [x+0.2,y,typeset(' z'[1]',' z'[2])]:
tplot := textplot([Texte]):
15 display(Pfeil1,Pfeil2,Pfeil3,Arcus1,Arcus2,Arcus3,Linien,tplot,
          tickmarks=[3,3], scaling=constrained,
          title="Multiplikation komplexer Zahlen");

```

Multiplikation komplexer Zahlen



1.5 Wurzeln

Beispiel

```
> restart: interface(imaginaryunit=i): macro(I=i):
```

Es sollen die dritten Wurzeln von $w = 2 + 11i$ berechnet werden, d.h. wir suchen komplexe Zahlen z mit $z^3 = w$, die im Beispiel von Rafael BOMBELLI (siehe Seite 2) auftraten.

```
> w := 2+11*I;
```

```
w := 2 + 11 i
```

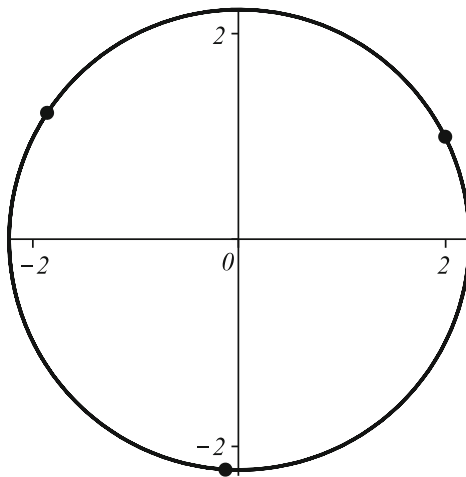
```
> solve(z^3=w); Loesungen := map(evalc,%);
```

$$(2+i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3} \right), \quad (2+i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3} \right), \quad 2+i$$

$$\text{Loesungen} := \left[-1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} + i \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3} \right), -1 + \frac{1}{2} \sqrt{3} + i \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3} \right), 2+i \right]$$

Wir erhalten drei Lösungen, die in der folgenden Abbildung veranschaulicht sind:

```
> with(plots):
  dots := complexplot(Loesungen, style=point, color=black,
                      symbol=solidcircle, symbolsize=16):
  Kreis:= plot(abs(Loesungen[1]), coords=polar, color=black, thickness=2):
5 display(dots, Kreis, scaling=constrained);
```



Symbolische Berechnung n -ter Wurzeln

```
> restart: interface(imaginaryunit=i): macro(I=i):
  assume(r > 0): a := r*exp(I*psi);
```

$$a := r e^{i \psi}$$

Für eine komplexe Zahl a mit der Polardarstellung $a = r e^{i \psi}$ berechnen wir die n -ten Wurzeln:

```
> solve(z^n=a,z): evalc(%): simplify(%);
```

$$r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\psi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\psi}{n}\right) \right)$$

Maple liefert symbolisch rechnend zunächst nur *eine* Lösung, obwohl es n Lösungen gibt. Wenn wir *alle Lösungen* haben wollen, müssen wir zuvor eine *Umgebungsvariable* geeignet setzen:

```
> _EnvAllSolutions := true:
  solve(z^n=a,z): evalc(%): simplify(%);
```

$$z := r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\psi + 2\pi _Z1}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\psi + 2\pi _Z1}{n}\right) \right)$$

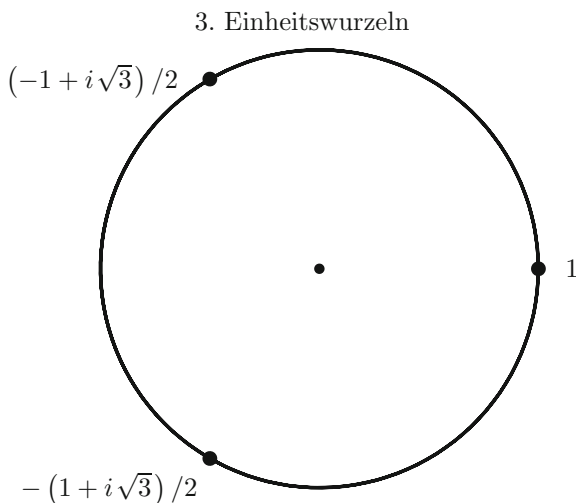
Wir wissen schon: Das sind nur scheinbar unendlich viele Lösungen. Unter diesen sind die für die Parameterwerte $_Z1 = 0, 1, \dots, n-1$ paarweise verschieden. Im Falle $a = 1$ bezeichnet man die n -ten Wurzeln als *Einheitswurzeln*. Sie sind die Lösungen der *Kreisteilungsgleichung* $z^n = 1$ und liefern die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks.

Beispiel

```
> n := readstat("Geben Sie eine natürliche Zahl ein: "):
```

Geben Sie eine natürliche Zahl ein: 3;

```
> W := [seq(2*Pi/n*k,k=0..n-1)]: # Winkel
P := [seq(exp(I*phi),phi=W)]: # komplexe Punkte
Q := map(z -> [Re(z),Im(z)],P): # kartesische Darstellungen von P
with(plots): with(plottools):
5 Kreis := plot(1,coords=polar,color=black,thickness=2):
  dots := seq(disk(z,0.03,color=black),z=Q),
            disk([0,0],0.02,color=black):
  Text := textplot([seq([op(evalf(1.2*z,3)),z[1]+I*z[2]],z=Q))]:
  display(Kreis,dots,Text,axes=none,scaling=constrained,
10 title=cat(n,". Einheitswurzeln"));
```



Nach der Eingabe einer *beliebigen* natürlichen Zahl und deren Übergabe an die Variable n wird obige Abbildung erzeugt, welche die n -ten Einheitswurzeln veranschaulicht. Die hierzu ausgeführte Anweisungsgruppe wollen

wir ein wenig erläutern und zugleich daran deutlich machen, dass Maple-Code recht kompakt und dennoch übersichtlich sein kann. Die Liste P enthält alle n -ten Einheitswurzeln; deren Winkel (im Bogenmaß) sind in der Liste W aufgezählt. Wir weisen an dieser Stelle auf die Anweisung `seq(exp(I*phi), phi=W)` hin, die gewiss eleganter ist als die Formulierung `seq(exp(I*W[k]), k=1..n)` in der herkömmlichen Art. Die sehr wichtige Maple-Funktion `map` bildet mittels $z \rightarrow [\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)]$ die komplexen Zahlen der Liste P auf die entsprechenden reellen Zahlenpaare der Liste Q ab. Natürlich hätten wir ebenso gut

```
P := map(phi -> exp(I*phi), W): Q := [seq([Re(z), Im(z)], z=P)]:
```

schreiben können; welche Formulierung man bevorzugt, ist reine Geschmacksache.

Nach diesen Vorbereitungen werden die Graphikstrukturen *Kreis*, *dots* und *Text* definiert. *Kreis* ist offensichtlich der Einheitskreis, und *dots* stellt mit Hilfe des Kommandos *disk* aus dem *Plottools*-Paket die Einheitswurzeln sowie den Ursprung als ‚fette‘ Punkte dar. Alternativ kann man auch einfacher z. B. `dots:=plot(Q, style=point, symbol=circle, symbolsize=18);` schreiben. *Text* schließlich liefert mit Hilfe von *textplot* die Beschriftung durch eine Liste von Textangaben. Auf den ersten Blick wirkt der entsprechende Teil der Maple-Anweisung etwas kryptisch; wir empfehlen deshalb, folgende Anweisung separat auszuführen:

```
> seq([op(evalf(1.2*z, 3)), z[1]+I*z[2]], z=Q);
```

```
[1.2, 0., 1], [-0.600, 1.04, -1/2 + 1/2 i sqrt(3)], [-0.600, -1.04, -1/2 - 1/2 i sqrt(3)]
```

Dann dürfte klar werden, was im einzelnen passiert. Der Faktor 1.2 soll übrigens bewirken, dass die Beschriftung vom Einheitskreis etwas abgesetzt wird. Und noch etwas sei an einem Beispiel erläutert:

```
> Q[2]; evalf(1.2*Q[2], 3); op(%):
```

```
[ -1/2, 1/2 sqrt(3) ], [-0.600, 1.04]
```

Hier wird also das geordnete Paar $Q[2]$ mit dem Faktor 1.2 multipliziert und anschließend mittels `evalf(·, 3)` auf drei Stellen gerundet, was im Rahmen der Zeichengenauigkeit ausreicht. Mit `op(%)` schließlich greift man auf die beiden Komponenten des geordneten Paares zu; dies sind genau die Koordinaten, welche in die zweite Textangabe oben eingesetzt worden sind. Die Ausgabe dieser drei Plotstrukturen erfolgt — wie so oft — mit *display*. Die Überschrift der Abbildung wird mittels der Option *title* erzeugt. Hier lernen wir erstmals die Maple-Funktion `cat` kennen, die n und „ \cdot “ Einheitswurzel“ zu einem String verknüpft.

1.6 Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

Bernhard RIEMANN verdanken wir ein Modell der komplexen Zahlen, welches sehr leicht eine Veranschaulichung des Punktes ∞ erlaubt. Die komplexen Zahlen werden dabei mit der (x_1, x_2) -Ebene des dreidimensionalen Raumes identifiziert. Punkte $z = x + iy$ der komplexen Zahlenebene werden auf die Einheitssphäre

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

abgebildet, indem man den Schnittpunkt $Z = (x_1, x_2, x_3)$ von S mit der Geraden durch den Nordpol $N = (0, 0, 1)$ und $P = (x, y, 0)$ berechnet. Man erhält so die folgende Abbildung:

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

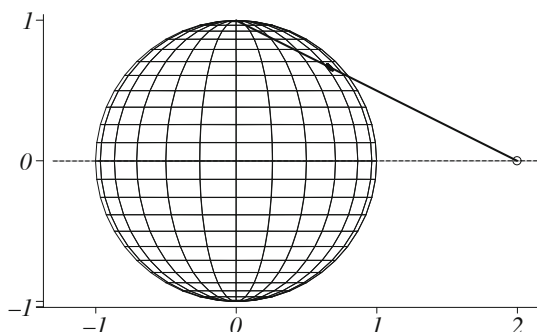
Für $z = 2 + i$ wird die stereographische Projektion durch die Abbildung auf Seite 12 veranschaulicht. Diese wurde folgendermaßen mit Maple erzeugt:

```
> restart: with(plots): with(plottools):
f := transform((x,y) -> [2*x,2*y,x^2+y^2-1]/(1+x^2+y^2)):
g := transform((x,y) -> [x,y,0]):
Punkt := pointplot([2,1],symbol=circle,symbolsize=16,color=black):
5 Ebene := plot3d(0,x=-1.3..2.2,y=-1.3..1.3,style=patchnogrid,
               color=gray):
Gitter:= plot3d(0,x=-1.3..2.2,y=-1.3..1.3,style=wireframe,
               color=white,numpoints=100):
Kugel := plot3d(1,theta=0..2*Pi,phi=0..Pi,coords=spherical,
10 style=wireframe,color=black):
Gerade:= line([2,1,0],[0,0,1],color=black,thickness=3):
p := display(f(Punkt),g(Punkt),Kugel,Ebene,Gerade):
display(p,Gitter,title="stereographische Projektion",
       scaling=constrained,orientation=[-10,75]);
```

Auf Einzelheiten der Graphikbausteine *Punkt*, *Ebene*, *Gitter*, *Kugel* und *Gerade* gehen wir nicht mehr näher ein; wir empfehlen jedoch, diese zum besseren Verständnis einzeln auszugeben und eventuell Optionen zur Oberflächengestaltung wie z. B. `style = patchnogrid` oder `style = wireframe` zu ändern oder gar wegzulassen. Besondere Beachtung verdient der Befehl `transform` aus dem Plottools-Paket. Die damit definierten Graphiktransformationen f und g wandeln hier 2D- in 3D-Graphikstrukturen. Näheres hierzu ist im Anhang zu finden.

Mittels der Option `orientation = [-90, 90]` erhalten wir folgende *Seitenansicht*:

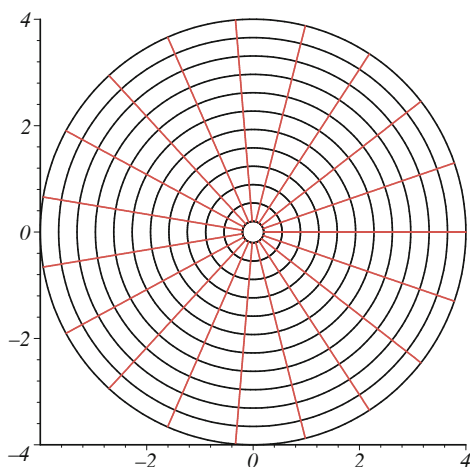
```
> display(p,axes=framed,orientation=[-90,90],tickmarks=[3$3],
        scaling=constrained,labels=[" "$3]);
```



Jetzt soll das *Abbildungsverhalten der stereographischen Projektion* an komplexeren Graphikstrukturen verdeutlicht werden. Wir wählen ein *Polargitter*, das sehr einfach mit dem Kommando `coordplot` erzeugt werden kann.

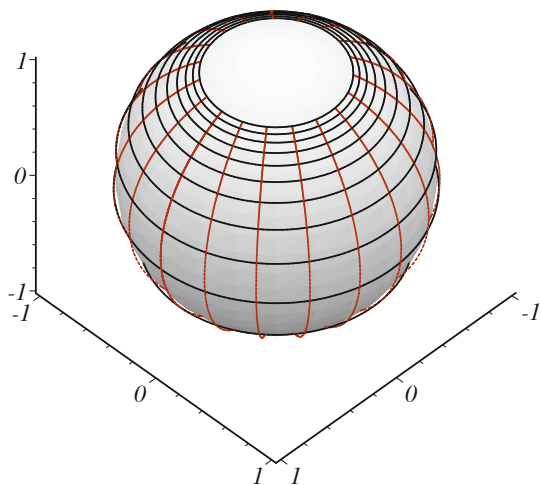
Wir erläutern die vier wichtigsten Parameter: `polar` ist der Name des gewünschten Koordinatensystems. Es folgt eine Liste von zwei Bereichen, die in der Parameterebene das Rechteck $[0.2, 4] \times [0, 2\pi]$ beschreiben; wegen `grid = [12, 20]` muss man sich dieses durch ein rechteckiges Gitter von 12 (schwarzen) vertikalen bzw. 20 (roten) horizontalen Linien überzogen denken. Durch `view` schließlich wird im kartesischen Koordinatensystem des Bildbereiches ein Fenster für das Bildgitter festgelegt.

```
> p := coordplot(polar,[0.2..4,0..2*Pi],view=[-4..4,-4..4],
        grid=[12,20],linestyle=1,color=[red,black]):
        display(p,axes=framed,scaling=constrained);
```



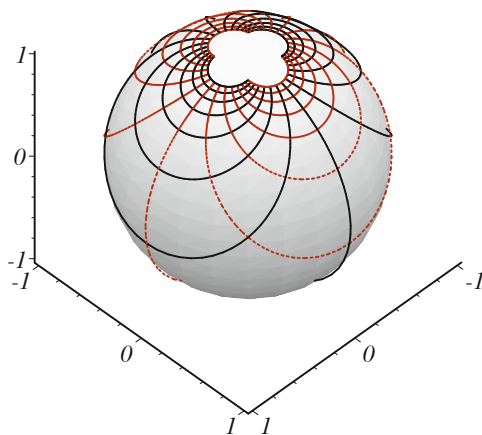
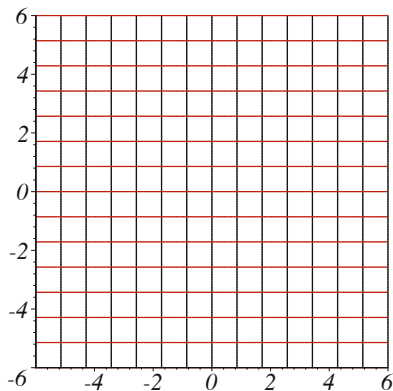
Zur besseren Visualisierung unterlegen wir die Plots durch die grau schattierte Riemannsche Zahlenkugel:

```
> Kugel1 := plot3d(1,theta=0..2*Pi,phi=0..Pi,shading=zgrayscale,
    style=patchnogrid,coords=spherical,scaling=constrained):
display(Kugel1,f(p),axes=framed,tickmarks=[3$3]);
```



Als zweites Beispiel wählen wir ein *Rechteckgitter* (kartesisches Gitter) und gehen analog vor:

```
> c := coordplot(cartesian,[-6..6,-6..6],view=[-6..6,-6..6],
    grid=[15,15],linestyle=1,color=[red,black]):
display(c,axes=framed,scaling=constrained);
display(Kugel1,f(c),axes=framed,tickmarks=[3$3]);
```



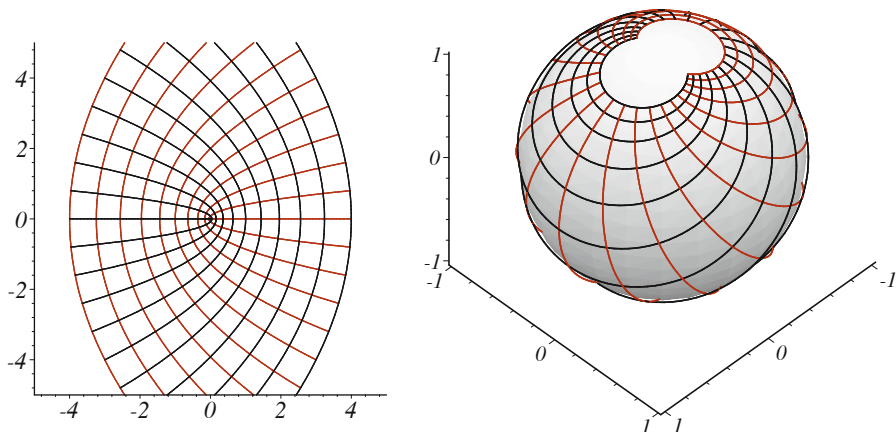
Und weil's so schön ist, noch zwei weitere Beispiele:

```
> sq := conformal(z^2, z=-2-2*I..2+2*I, grid=[21,21], numxy=[150,150],
    color=[black,red]):
    display(sq, view=[-5..5, -5..5], axes=framed, scaling=constrained);
```

Wir erläutern die Bedeutung der drei wichtigsten Parameter:

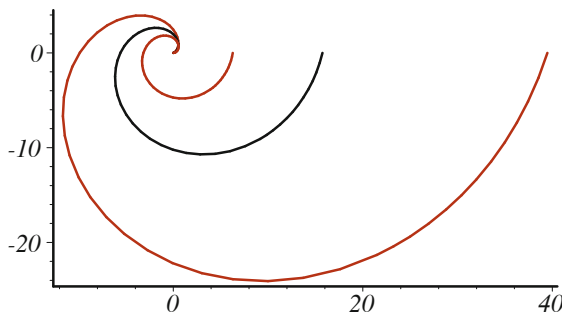
Durch $z = -2 - 2i \dots 2 + 2i$ wird in der komplexen Zahlenebene das (quadratische) Rechteck $[-2, 2] \times [-2, 2]$ beschrieben. Dieses wird wegen $\text{grid} = [21, 21]$ — ähnlich wie bei `coordplot` — durch ein Raster von je 21 (roten) horizontalen bzw. (schwarzen) vertikalen Gitterlinien überzogen. Durch die komplexe Abbildung $z \mapsto z^2$ — aufgefasst als reelle Abbildung $(x, y) \mapsto [x^2 - y^2, 2xy]$ des \mathbb{R}^2 in sich — entsteht dann das Bildgitter. Es folgt die stereographische Projektion dieser 2D-Grafik:

```
> display(Kugel1, f(sq), axes=framed, tickmarks=[3,3,3]);
```



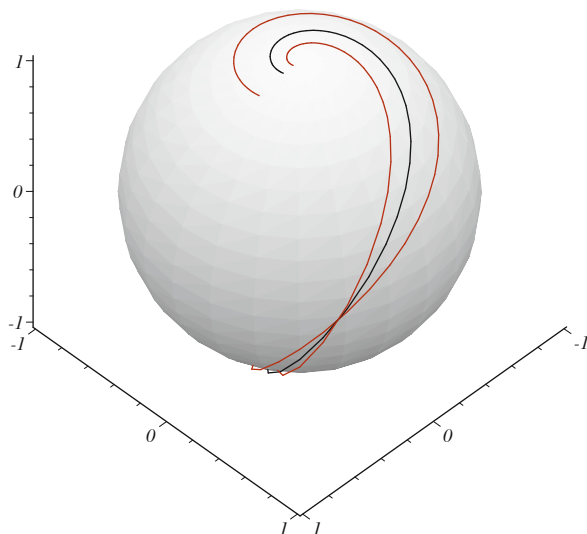
Wir beschließen den Reigen schöner Maple-Graphiken:

```
> s := plot([t, t^1.5, t^2], t=0..2*Pi, coords=polar, tickmarks=[3,3],
    color=[red,black], thickness=2):
    display(s, axes=framed, scaling=constrained);
```



```
> display(Kugel1, f(s), axes=framed, title="Gusti, Lili und Modche ...",
    tickmarks=[3$3]);
```

Gusti, Lili und Modche ...



Das Bild dieser drei Kurven auf der Riemannschen Zahlenkugel assoziiert Erinnerungen an *Gusti, Lili und Modche* aus Ephraim Kishons Satire *Tagebuch eines Haarspalters*.

Leser, die sich über den nur auf der Kugel sichtbaren Kurvenschnittpunkt wundern, sollten in der Anweisung für die 2D-Graphikstruktur *s* den Bereich $t = 0 \dots 2\pi$ etwa durch $t = 0 \dots 1.1$ ersetzen.

<http://www.springer.com/978-3-642-29411-2>

Funktionentheorie erkunden mit Maple

Forst, W.; Hoffmann, D.

2012, XVIII, 328 S. 259 Abb., 30 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-642-29411-2