

## Positionsbestimmung auf der Erde und im Raum

*Dieses Kapitel ist das beste Beispiel im Buch, wie verschieden die Anwendungen der Mathematik auf eine einfache technische Frage sein können: Wie kann man Menschen oder Ereignisse auf der Erde orten? Die Vielfalt der Anwendungen ist überraschend, und aus diesem Grund ist es vielleicht eine gute Idee, mehr als eine Woche für dieses Kapitel zu verwenden. Zwei Stunden reichen, um die Theorie zu erläutern, die sich hinter GPS verbirgt (Abschnitt 1.2) und kurz darauf einzugehen, wie man GPS auf das sogenannte Sturm-Tracking (Abschnitt 1.3) anwenden kann. Später muss eine Auswahl erfolgen. Falls Sie bereits endliche Körper in Kapitel 6 über fehlerkorrigierende Codes oder in Kapitel 8 über Zufallszahlengeneratoren eingeführt haben, dann lässt sich die Wirkungsweise des GPS-Signals in etwas mehr als einer Stunde behandeln, da Sie den Überblick über endliche Körper überspringen können. Ist die Zeit beschränkt und sind endliche Körper noch nicht eingeführt worden, dann besteht ein vernünftiger Kompromiss darin, einfach nur Satz 1.4 anzugeben und ihn anhand einiger Beispiele zu illustrieren, etwa durch Beispiel 1.5. Abschnitt 1.5 über Kartografie erfordert ein Minimum von zwei Stunden, sofern die Studenten den Begriff der konformen (also winkeltreuen) Abbildung noch nicht kennen. Abschnitt 1.2 erfordert nur euklidische Geometrie und Grundkenntnisse in linearer Algebra, während Abschnitt 1.3 elementare Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet. Abschnitt 1.4 ist schwieriger, falls endliche Körper noch nicht bekannt sind. Abschnitt 1.5 verwendet Funktionen in mehreren Variablen.*

### 1.1 Einführung

Seit jeher haben sich die Menschen dafür interessiert, ihre Position auf der Erde zu bestimmen. Sie begannen mit primitiven Instrumenten, navigierten mit Hilfe des Magnetkompasses, verwendeten das Astrolab und später den Sextanten. In der jüngsten Geschichte wurden bedeutend komplexere und genauere Navigationshilfen entwickelt,

zum Beispiel das Global Positioning System (GPS). In diesem Kapitel gehen wir zeitlich rückwärts vor: Wir beginnen mit der Erläuterung des neuzeitlichen GPS und daran schließt sich – zumeist in den Übungen – eine kurze Diskussion alter Techniken an.

Diese Navigationstechniken sind nur dann wirklich nützlich, wenn wir genaue Landkarten haben. Deswegen widmen wir der Kartografie einen Abschnitt. Da die Erde eine Kugel ist, erweist es sich als unmöglich, sie auf einem Blatt Papier so darzustellen, dass Winkel, Abstandsverhältnisse und Flächenverhältnisse erhalten bleiben. Der gewählte Kompromiss hängt größtenteils von der Anwendung ab. Der Peters-Atlas verwendet Projektionen, bei denen Flächenverhältnisse erhalten bleiben [2]. Bei Seekarten werden dagegen Projektionen verwendet, bei denen Winkel erhalten bleiben.

## 1.2 Global Positioning System

### 1.2.1 Einige Fakten über das GPS

Die GPS-Satellitenkonstellation wurde im Juli 1995 durch das Verteidigungsministerium der USA fertiggestellt, das auch den öffentlichen Gebrauch genehmigte. Bei der ersten Stationierung bestand das System aus 24 Satelliten, von denen mindestens 21 mehr als 98% der Zeit funktionstüchtig sein sollten. 2005 bestand das System aus 32 Satelliten, von denen mindestens 24 funktionstüchtig sein sollten, während die anderen für ihren Einsatz bereitstehen, falls einer der letztgenannten Satelliten versagt. Die Satelliten befinden sich in einer Entfernung von 20200 km von der Erdoberfläche. Sie sind über 6 Orbitalebenen verteilt, von denen jede in Bezug auf die Äquatorialebene um einen Winkel von 55 Grad geneigt ist (vgl. Abbildung 1.1). Es gibt pro Orbitalebene mindestens 4 Satelliten, die ungefähr gleich weit voneinander entfernt sind. Jeder Satellit umkreist die Erde in 11 Stunden und 58 Minuten. Die Satelliten sind so positioniert, dass wir zu jeder Zeit und an jedem Ort auf der Erde mindestens 4 Satelliten beobachten können.

Die 24 Satelliten senden ein Signal, das sich periodisch wiederholt und mit Hilfe eines speziellen Empfängers empfangen werden kann. Wenn wir ein Navi kaufen, dann kaufen wir in Wirklichkeit ein Gerät, das wir als Empfänger bezeichnen, weil es die GPS-Signale empfängt und die darin enthaltenen Informationen dazu verwendet, seinen Standort zu berechnen. Das Gerät enthält einen Almanach, der zu jedem gegebenen Zeitpunkt die absolute Position eines jeden Satelliten berechnen kann. Da jedoch geringfügige Fehler in den Umlaufbahnen unvermeidlich sind, wird für jeden Satelliten unmittelbar in dem gesendeten Signal eine Korrekturinformation codiert (diese Korrekturinformation wird stündlich aktualisiert). Jeder Satellit sendet sein Signal kontinuierlich. Die Signalperiode ist festgelegt und die Anfangszeit des Zyklus kann durch die Verwendung des Almanachs bestimmt werden. Zusätzlich ist jeder Satellit mit einer extrem genauen Atomuhr ausgestattet, die es ermöglicht, dass der Satellit zu den im Almanach enthaltenen Anfangszeiten synchronisiert bleibt. Zeichnet ein Empfänger ein Signal von einem Satelliten auf, dann werden sofort die Signale der verschiedenen Satelliten erzeugt und

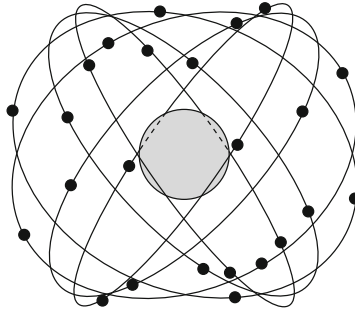


Abb. 1.1. Die 24 Satelliten auf 6 Orbitalebene.

mit den erhaltenen Signalen verglichen. Im Allgemeinen stimmen diese Signale nicht sofort überein. Folglich verschiebt der Empfänger die von ihm erzeugte Kopie, bis sie mit dem empfangenen Signal in Phase ist (das erfolgt durch Berechnung der Korrelation zwischen den beiden Signalen). Auf diese Weise ist das Gerät dazu in der Lage, die Laufzeit zu berechnen, die das Signal vom Satelliten aus benötigt. Wir werden dieses System in Abschnitt 1.4 viel ausführlicher besprechen.

Das oben beschriebene System ist das Standardpräzisions-GPS. Sind keine anspruchsvolleren Bodenkorrekturen vorhanden, dann ermöglicht dieses System die Berechnung der Empfängerposition bis zu einer Genauigkeit von ungefähr 20 Metern. Vor Mai 2000 führte das US-Verteidigungsministerium absichtlich Ungenauigkeiten in die Satellitensignale ein, um die Genauigkeit des Systems auf 100 Meter zu verringern.

### 1.2.2 Die Theorie hinter GPS

**Wie berechnet der Empfänger seine Position?** Wir beginnen mit der Annahme, dass die Uhren des Empfängers und sämtlicher Satelliten perfekt synchronisiert sind. Der Empfänger berechnet seine Position durch Triangulation. Das Grundprinzip der Triangulationsmethoden besteht in der Standortbestimmung einer Person (eines Objekts) durch die Verwendung von Informationen, welche die Position der Person (des Objekts) auf Referenzobjekte bezieht, deren Positionen bekannt sind. Im Falle des GPS-Empfängers wird die Entfernung zu den Satelliten berechnet, deren Positionen bekannt sind.

- Der Empfänger misst die Zeit  $t_1$ , die das vom Satelliten  $P_1$  gesendete Signal bis zum Empfänger benötigt. Da das Signal mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  übertragen wird, kann der Empfänger seine Entfernung vom Satelliten als  $r_1 = ct_1$  berechnen. Die Menge der Punkte, die den Abstand  $r_1$  vom Satelliten  $P_1$  haben, bildet eine Kugel  $S_1$  mit Mittelpunkt  $P_1$  und Radius  $r_1$ . Wir wissen also jetzt, dass sich der Empfänger auf  $S_1$  befindet. Wir denken uns diese Punkte als in einem kartesischen Koordinatensystem

definiert. Es sei  $(x, y, z)$  die unbekannte Position des Empfängers und  $(a_1, b_1, c_1)$  die bekannte Position des Satelliten  $P_1$ . Dann muss  $(x, y, z)$  die Gleichung erfüllen, die Punkte auf der Kugel  $S_1$  beschreibt, nämlich

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 = c^2 t_1^2. \quad (1.1)$$

- Diese Information reicht nicht aus, um die genaue Position des Empfängers zu bestimmen. Deswegen zeichnet der Empfänger das Signal eines zweiten Satelliten  $P_2$  auf, das heißt, er zeichnet die Laufzeit  $t_2$  des Signals auf und berechnet die Entfernung  $r_2 = ct_2$  zum Satelliten. Wie zuvor muss der Empfänger auf der Kugel  $S_2$  mit dem Radius  $r_2$  und dem Mittelpunkt  $(a_2, b_2, c_2)$  liegen:

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 = c^2 t_2^2. \quad (1.2)$$

Das engt unsere Suche ein, denn der Durchschnitt zweier überlappender Kugeln ist ein Kreis. Wir haben also jetzt die Position des Empfängers auf einen Kreis  $C_{1,2}$  eingengt, auf dem der Empfänger liegen muss. Jedoch wissen wir immer noch nicht genau, wo sich der Empfänger auf diesem Kreis befindet.

- Damit der Empfänger seine endgültige Position berechnen kann, muss er die Signale eines dritten Satelliten  $P_3$  erfassen und verarbeiten. Erneut misst der Empfänger die Laufzeit  $t_3$  des Signals und berechnet den Abstand  $r_3 = ct_3$  von diesem Satelliten. Wieder folgt, dass der Empfänger irgendwo auf der Kugel  $S_3$  mit Radius  $r_3$  und Mittelpunkt  $(a_3, b_3, c_3)$  liegt:

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 t_3^2. \quad (1.3)$$

Der Empfänger befindet sich deswegen auf dem Durchschnitt des Kreises  $C_{1,2}$  und der Kugel  $S_3$ . Da sich eine Kugel und ein (nicht auf ihr liegender) Kreis in zwei Punkten schneiden, hat es den Anschein, dass wir uns der Position des Empfängers immer noch nicht sicher sein können. Glücklicherweise ist das jedoch nicht der Fall. Tatsächlich sind die Satelliten so positioniert worden, dass eine der beiden Lösungen vollkommen unrealistisch ist, da der entsprechende Standort zu weit von der Erdoberfläche entfernt ist. Demnach kann der Empfänger seine genaue Position berechnen, indem er die beiden Lösungen des aus den Gleichungen (1.1), (1.2) und (1.3) bestehenden Gleichungssystems (\*) findet und anschließend die unzutreffende Lösung eliminiert.

**Lösung des Systems (\*).** Die Gleichungen des Systems (\*) sind nicht linear, sondern quadratisch, was die Lösung kompliziert. Vielleicht haben Sie aber Folgendes bemerkt: Subtrahieren wir eine der Gleichungen von einer anderen, dann erhalten wir eine lineare Gleichung, da sich die Terme  $x^2, y^2$  und  $z^2$  aufheben. Also ersetzen wir das System (\*) durch ein äquivalentes System, das wir erhalten, wenn wir die erste Gleichung durch (1.1)–(1.3) und die zweite Gleichung durch (1.2)–(1.3) ersetzen und die dritte Gleichung beibehalten. Das führt zum System

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z = A_1, \quad (1.4)$$

$$2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y + 2(c_3 - c_2)z = A_2, \quad (1.5)$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 t_3^2, \quad (1.6)$$

wobei

$$\begin{aligned} A_1 &= c^2(t_1^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_1^2) + (b_3^2 - b_1^2) + (c_3^2 - c_1^2), \\ A_2 &= c^2(t_2^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) + (c_3^2 - c_2^2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Die Satelliten sind so positioniert worden, dass niemals drei Satelliten auf einer Geraden liegen. Diese Eigenschaft garantiert, dass mindestens eine der  $2 \times 2$ -Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & c_3 - c_1 \\ a_3 - a_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist. Sind nämlich alle drei Determinanten gleich null, dann sind die Vektoren  $(a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$  und  $(a_3 - a_2, b_3 - b_2, c_3 - c_2)$  kollinear (ihr Kreuzprodukt ist null) und das impliziert, dass die drei Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  auf einer Geraden liegen.

Wir nehmen an, dass die erste Determinante von null verschieden ist. Unter Verwendung der Cramer'schen Regel liefern uns die ersten beiden Gleichungen von (1.6) Lösungen für  $x$  und  $y$  als Funktion von  $z$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 - 2(c_3 - c_1)z & 2(b_3 - b_1) \\ A_2 - 2(c_3 - c_2)z & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & A_1 - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & A_2 - 2(c_3 - c_2)z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Setzen wir diese Werte in die dritte Gleichung von (1.6) ein, dann erhalten wir eine quadratische Gleichung in  $z$ , die wir lösen können, um die beiden Lösungen  $z_1$  und  $z_2$  zu finden. Durch Rücksubstitution von  $z$  für die Werte  $z_1$  und  $z_2$  in den beiden obigen Gleichungen erhalten wir die entsprechenden Werte  $x_1, x_2, y_1$  und  $y_2$ . Wir könnten leicht auch geschlossene Ausdrücke für diese Lösungen finden, aber die dabei verwendeten Formeln werden rasch zu groß und unübersichtlich, so dass sie weder verständlicher werden noch praktischer zu handhaben sind.

**Auswahl der Achsen unseres Koordinatensystems.** In der obigen Diskussion haben wir an keiner Stelle irgendwelche Achsen für unser Koordinatensystem gewählt, und wir waren dazu auch nicht gezwungen. Um jedoch die Übersetzung von absoluten Koordinaten in Länge, Breite und Höhe zu erleichtern, treffen wir folgende Wahl:

- der Ursprung des Koordinatensystems ist der Erdmittelpunkt;
- die  $z$ -Achse geht durch die beiden Pole und ist zum Nordpol gerichtet;
- die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse liegen beide in der Äquatorialebene;
- die positive  $x$ -Achse geht durch den Nullmeridian;
- die positive  $y$ -Achse geht durch den Meridian von 90 Grad östlicher Länge.

Da der Erdradius  $R$  eine Länge von ca. 6365 km hat, wird eine Lösung  $(x_i, y_i, z_i)$  als akzeptabel betrachtet, wenn  $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \approx (6365 \pm 50)^2$ . Die Unsicherheit von 50 km gestattet ein Fenster für die Höhen von Gebirgen und Flughöhen von Flugzeugen. Ein natürlicheres Koordinatensystem für Punkte nahe der Erdoberfläche besteht aus der Länge  $L$ , der Breite  $l$  und dem Abstand  $h$  vom Erdmittelpunkt (die Höhe über dem Meeresspiegel ist deswegen durch  $h - R$  gegeben). Länge und Breite sind Winkel, die in Grad ausgedrückt werden. Liegt ein Punkt  $(x, y, z)$  genau auf einer Kugel mit Radius  $R$  (mit anderen Worten, liegt der Punkt auf der Höhe null), dann kann man seine Länge und Breite durch Lösen des folgenden Gleichungssystems finden:

$$\begin{aligned} x &= R \cos L \cos l, \\ y &= R \sin L \cos l, \\ z &= R \sin l. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Wegen  $l \in [-90^\circ, 90^\circ]$  erhalten wir

$$l = \arcsin \frac{z}{R}, \tag{1.10}$$

was uns die Berechnung von  $\cos l$  ermöglicht. Die Länge  $L$  folgt demnach eindeutig aus den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \cos L = \frac{x}{R \cos l}, \\ \sin L = \frac{y}{R \cos l}. \end{cases} \tag{1.11}$$

**Berechnung der Position des Empfängers.** Es sei  $(x, y, z)$  die Position des Empfängers. Wir berechnen zunächst den Abstand  $h$  des Empfängers vom Erdmittelpunkt; dieser Abstand ist durch

$$h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gegeben. Wir haben nun zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Breite und der Länge: Modifikation der Formeln (1.10) und (1.11), indem wir  $R$  überall durch  $h$  ersetzen, oder Projektion der Position  $(x, y, z)$  auf die Kugeloberfläche und Verwendung dieser Werte in den Gleichungen (1.10) und (1.11):

$$(x_0, y_0, z_0) = \left( x \frac{R}{h}, y \frac{R}{h}, z \frac{R}{h} \right).$$

Die Höhe des Empfängers ist durch  $h - R$  gegeben.

### 1.2.3 Die Behandlung praktischer Schwierigkeiten

Wir haben gerade die Theorie besprochen, die hinter der Positionsrechnung steht, wobei wir aber von einer perfekten Welt ausgegangen sind. Leider ist das wirkliche Leben sehr viel komplizierter, denn die gemessenen Zeiten sind extrem kurz und müssen mit hoher Präzision gemessen werden. Alle Satelliten sind mit einer hochpräzisen (und teuren!) Atomuhr ausgestattet, wodurch eine (nahezu) perfekte Synchronisation möglich ist. Inzwischen ist der durchschnittliche Empfänger typischerweise mit einer nur mittelmäßigen Uhr ausgestattet und deswegen fast für jeden erschwinglich. Unter der Voraussetzung, dass die Uhren der Satelliten synchron sind, kann der Empfänger mühelos die genauen Laufzeiten der von den Satelliten kommenden Signale berechnen. Da jedoch der Empfänger nicht vollkommen synchron ist, berechnet er in Wirklichkeit drei fiktive Laufzeiten  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$ . Wie gehen wir mit diesen ungenauen Messungen um? Als wir drei Unbekannte  $x, y, z$  hatten, brauchten wir drei Messzeiten  $t_1, t_2, t_3$ , um die Unbekannten zu finden. Jetzt ist die vom Empfänger gemessene fiktive Zeit durch

$$T_i = (\text{Eingangszeit des Signals auf der Empfängeruhr}) \\ - (\text{Ausgangszeit des Signals auf der Satellitenuhr})$$

gegeben. Die Lösung besteht darin, dass der Fehler zwischen der vom Empfänger berechneten fiktiven Zeit  $T_i$  und der tatsächlichen Zeit  $t_i$  für alle Satelliten der gleiche ist. Das heißt,  $T_i = \tau + t_i$  für  $i = 1, 2, 3$ , wobei

$$t_i = (\text{Eingangszeit des Signals auf der Satellitenuhr}) \\ - (\text{Ausgangszeit des Signals auf der Satellitenuhr})$$

und  $\tau$  durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\tau = (\text{Eingangszeit des Signals auf der Empfängeruhr}) \\ - (\text{Eingangszeit des Signals auf der Satellitenuhr}). \quad (1.12)$$

Die Konstante  $\tau$  ist der sogenannte Uhrenfehler (clock offset), das heißt, die Zeitdifferenz zwischen den Satellitenuhren und der Empfängeruhr. Das führt die vierte Unbekannte  $\tau$  in unser ursprüngliches System  $x, y, z$  von drei Unbekannten ein. Um für das Gleichungssystem eine endliche Lösungsmenge zu finden, müssen wir eine vierte Gleichung aufstellen. Das lässt sich in unserem Kontext mühelos bewerkstelligen: Der Empfänger misst einfach die fiktive Signallaufzeit  $T_4$  zwischen ihm und einem vierten Satelliten  $P_4$ . Wegen  $t_i = T_i - \tau$  für  $i = 1, \dots, 4$  wird unser System dann zu

$$\begin{aligned} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 &= c^2(T_1 - \tau)^2, \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 &= c^2(T_2 - \tau)^2, \\ (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 &= c^2(T_3 - \tau)^2, \\ (x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 &= c^2(T_4 - \tau)^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

In diesem System haben wir die vier Unbekannten  $x, y, z$  und  $\tau$ . Wie oben können wir mit Hilfe von elementaren Operationen drei dieser quadratischen Gleichungen durch

lineare Gleichungen ersetzen. Hierzu subtrahieren wir die vierte Gleichung von jeder der ersten drei Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned}
 2(a_4 - a_1)x + 2(b_4 - b_1)y + 2(c_4 - c_1)z &= 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1, \\
 2(a_4 - a_2)x + 2(b_4 - b_2)y + 2(c_4 - c_2)z &= 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2, \\
 2(a_4 - a_3)x + 2(b_4 - b_3)y + 2(c_4 - c_3)z &= 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3, \\
 (x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 &= c^2(T_4 - \tau)^2,
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 B_1 &= c^2(T_1^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_1^2) + (b_4^2 - b_1^2) + (c_4^2 - c_1^2), \\
 B_2 &= c^2(T_2^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_2^2) + (b_4^2 - b_2^2) + (c_4^2 - c_2^2), \\
 B_3 &= c^2(T_3^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_3^2) + (b_4^2 - b_3^2) + (c_4^2 - c_3^2).
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Im Gleichungssystem (1.14) wenden wir die Cramersche Regel auf die ersten drei Gleichungen an und können dadurch die Werte für  $x$ ,  $y$  und  $z$  als Funktion von  $\tau$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1 & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2 & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3 & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}}, \\
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1 & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2 & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3 & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}}, \\
 z &= \frac{\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2c^2\tau(T_4 - T_1) + B_1 \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2c^2\tau(T_4 - T_2) + B_2 \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2c^2\tau(T_4 - T_3) + B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Diese Ausdrücke haben nur dann einen Sinn, wenn der Nenner von null verschieden ist. Der Nenner ist aber dann und nur dann gleich null, wenn sich die vier Satelliten in der gleichen Ebene befinden (vgl. Übung 1). Wie schon bemerkt, werden die Satelliten so positioniert, dass keine vier von ihnen, die von einem gegebenen Punkt der Erde aus sichtbar sind, in der gleichen Ebene liegen. Wir setzen die Lösungen der ersten drei Gleichungen in die vierte ein, was zu einer letzten quadratischen Gleichung in  $\tau$  führt,



die zwei Lösungen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  hat. Die Rücksubstitution dieser Werte in (1.16) liefert zwei mögliche Positionen für den Empfänger, und wir wenden den gleichen Trick wie oben an, um die Nebenlösung zu eliminieren.

**Welche Satelliten sollte der Empfänger wählen, wenn er mehr als vier sehen kann?** In diesem Fall hat der Empfänger eine Wahlmöglichkeit, welche Daten bei den Berechnungen verwendet werden können. Es ist sinnvoll, diejenigen Daten zu verwenden, die zu einem Minimum an Fehlern führen. In der Realität sind alle Zeitmessungen approximativ. Grafisch könnten wir den Unsicherheitsbereich durch eine Verdickung der Kugelschalen darstellen. Der Durchschnitt der verdickten Kugeln wird dann eine Menge, deren Größe zur Unsicherheit der Lösung in Beziehung steht. Geometrisch betrachtet können wir uns leicht von folgender Tatsache überzeugen: Je größer der Winkel zwischen den Oberflächen zweier sich schneidender verdickter Kugeln ist, desto kleiner ist das Volumen dieses Durchschnitts. Umgekehrt gilt: Schneiden sich die Kugeln fast tangential, dann ist das Schnittvolumen (und somit die Unsicherheit) größer. Also wählen wir die Kugeln  $S_i$  so, dass sie einander in einem möglichst großen Winkel schneiden (vgl. Abbildung 1.2).



**Abb. 1.2.** Ein kleiner Schnittwinkel links (Genauigkeitsverlust) und ein großer Schnittwinkel rechts.

Das ist die geometrische Intuition, die hinter unserer Wahl steht. Algebraisch sehen wir, dass sich die Werte von  $x$ ,  $y$  und  $z$  (ausgedrückt durch  $\tau$ ) ergeben, wenn man durch

$$\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}$$

dividiert. Je kleiner der Nenner ist, desto größer ist der Fehler. Also wählen wir diejenigen vier Satelliten, die diesen Nenner maximieren.

Fortgeschrittenere Untersuchungen zu diesem Thema ließen sich leicht zu einem Kursprojekt ausbauen.

**Einige Verfeinerungen:**

- **Differential-GPS (DGPS):** Eine Quelle der Ungenauigkeit beim GPS ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass Entfernungen zu den Satelliten unter Verwendung der Konstanten  $c$  berechnet werden, welche die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. In Wirklichkeit breitet sich das Signal aber durch die Atmosphäre aus und wird dort gebrochen – ein Umstand, der sowohl die Bahn des Signals verlängert als auch dessen Geschwindigkeit verringert. Wir können ein Differential-GPS verwenden, um eine bessere Approximation an die tatsächliche Durchschnittsgeschwindigkeit des Signals auf dessen Weg vom Satelliten zum Empfänger zu erzielen. Die Idee besteht darin, den zu verwendenden Wert von  $c$  bei der Berechnung der Satellitenentfernung zu verfeinern. Wir tun das durch einen Vergleich der vom Empfänger gemessenen Laufzeit mit der Laufzeit, die von einem anderen nahe gelegenen Empfänger gemessen wird, dessen genaue Position bekannt ist. Das ermöglicht eine genaue Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit, die das Licht auf seinem Weg von einem gegebenen Satelliten zum Empfänger hat. Das wiederum ermöglicht seinerseits genaue Entfernungsberechnungen. Bei Unterstützung durch eine solche feste Bodenstation erreicht die GPS-Präzision eine Größenordnung von Zentimetern.
- Das von jedem Satelliten gesandte Signal ist ein zufälliges Signal, das sich in regelmäßigen bekannten Intervallen wiederholt. Die Periode des Signals ist relativ kurz, so dass die vom Signal in einer Periode überdeckte Distanz die Größenordnung von einigen hundert Kilometern hat. Sieht der Empfänger den Anfang einer Signalperiode, dann muss er exakt bestimmen, zu welchem Zeitpunkt diese Periode vom Satelliten ausgestrahlt wurde. A priori haben wir eine Unsicherheit von einigen ganzzahligen Periodenzahlen.
- Sich schnell bewegender GPS-Empfänger: Die Installation eines GPS-Empfängers auf einem sich schnell bewegenden Objekt (zum Beispiel auf einem Flugzeug) ist eine ganz natürliche Anwendung: Muss ein Flugzeug bei unfreundlichem Wetter landen, dann muss der Pilot zu jedem Zeitpunkt die genaue Position des Flugzeugs kennen und die Zeit zur Berechnung der Position muss auf ein absolutes Minimum reduziert werden.
- Die Erde ist nicht wirklich rund! Tatsächlich ist die Erde ein Ellipsoid, das an den Polen etwas abgeflacht und am Äquator etwas ausgebaucht ist (ein „an den Polen abgeplattetes Sphäroid“). Der Erdradius hat an den Polen eine Länge von ungefähr 6356 km und am Äquator eine Länge von 6378 km. Folglich müssen die Berechnungen zur Übersetzung der kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  in Breite, Länge und Höhe verfeinert werden, um diese Tatsache zu berücksichtigen.
- **Relativistische Korrekturen.** Die Geschwindigkeit der Satelliten ist hinreichend groß, so dass bei allen Berechnungen die Effekte der speziellen Relativität berücksichtigt werden müssen. Tatsächlich bewegen sich die Uhren auf den Satelliten sehr schnell im Vergleich zu den Uhren auf der Erde. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie gehen die Satellitenuhren langsamer als diejenigen auf der Erde. Außerdem sind die Satelliten der Erde relativ nahe, die eine signifikante Masse hat.

Laut allgemeiner Relativitätstheorie erfolgt bei den Uhren an Bord der Satelliten ein kleiner Geschwindigkeitszuwachs. In erster Annäherung können wir die Erde als eine große nicht rotierende kugelförmige Masse ohne elektrische Ladung modellieren. Der Effekt lässt sich unter Verwendung der Schwarzschild-Metrik relativ leicht berechnen, welche die Auswirkungen der allgemeinen Relativität unter diesen vereinfachten Bedingungen beschreibt. Es stellt sich heraus, dass diese Vereinfachung ausreicht, um den tatsächlichen Effekt mit hoher Präzision zu erfassen. Beide Effekte müssen berücksichtigt werden: Zwar finden sie in zueinander entgegengesetzten Richtungen statt, aber sie annullieren einander nur teilweise. Weitere Einzelheiten findet man in [4].

**Anwendungen des GPS.** Das GPS hat zahlreiche Anwendungen, von denen wir hier nur einige nennen:

- Ein GPS-Empfänger ermöglicht es einem Nutzer, der sich im Freien aufhält, mühelos seine Position zu finden. Der Empfänger ist also für Wanderer, Kajakfahrer, Jäger, Matrosen, Bootsführer usw. unmittelbar nützlich. Die meisten Empfänger gestatten die Markierung von Wegpunkten, die gespeichert werden können, wenn man sich physisch am betreffenden Standort befindet (in diesem Fall hat der Empfänger seine Position berechnet) oder wenn man Kartenkoordinaten manuell in den Empfänger eingibt. Verbinden wir die Wegpunkte durch Strecken, dann können wir eine Route darstellen. Der Empfänger kann uns dann unsere Position in Bezug auf einen gewählten Wegpunkt mitteilen oder uns sogar Anweisungen erteilen, wie wir unsere Route zurücklegen sollen. Anspruchsvollere Empfänger können sogar detaillierte Karteninformationen speichern. Der Empfänger kann dann unsere Position auf einem Teil der Karte anzeigen, der auf dem Display zusammen mit Kommentaren zu unseren Wegpunkten und Routen zu sehen ist.
- Immer mehr Fahrzeuge (insbesondere Taxis) sind mit GPS-Navigationssystemen ausgestattet, die es ihren Fahrern ermöglichen, den Weg zu einer speziellen Adresse zu finden. In Westeuropa und Nordamerika gibt es mehrere Produkte, welche die genauen Wege zu fast allen Adressen angeben.
- Stellen Sie sich vor, dass Sie eine alte Karte haben, auf der Sie eine von Ihnen zurückgelegte Route einzeichnen möchten. Die Route kann beim Zurücklegen in das GPS gespeichert werden und später mit einer geeigneten Software auf einen Computer hochgeladen werden. Diese Software kann dann den zurückgelegten Weg auf die digitalisierte Karte aufbringen. Falls Sie nicht bereits eine digitale Kartenversion haben, dann können Sie die Karte zuerst einscannen und (unter Verwendung einer geeigneten Software) mit einem Koordinatensystem belegen, indem Sie einfach die Position von drei bekannten Punkten angeben (s. Übung 5).
- Der allgegenwärtige Gebrauch des GPS in Flugzeugen ermöglicht eine Einengung der Luftkorridore, wobei auch weiterhin gewährleistet ist, dass die Flugzeuge einen sicheren Abstand voneinander haben.

- Eine Flotte von Lieferfahrzeugen kann mit GPS-Empfängern ausgerüstet werden, die ein gleichzeitiges Verfolgen sämtlicher Fahrzeuge gestatten. Ein solches System wird gegenwärtig verwendet, um die Taxis in Paris zu leiten. Bei dieser Anwendung muss das GPS mit einem Kommunikationssystem gekoppelt werden, das es ermöglicht, die Koordinaten eines jeden Fahrzeugs zu übertragen (ein Beispiel für ein solches System ist das Global System for Mobile Communications, kurz GSM). Ähnliche Systeme werden in Umweltstudien für das Nachverfolgen wild lebender Tiere verwendet. Man kann sich unschwer vorstellen, welchen Einfluss es auf unser Leben hat, wenn eine Autovermietungsfirma ihre Flotte mit einem GPS-GSM System ausrüsten würde, das es der Firma ermöglicht, die Kunden in Bezug auf die Einhaltung der Territorialgrenzen zu überwachen, die im Mietvertrag festgelegt sind!
- Das GPS kann als Blindenhilfe verwendet werden.
- Geografen verwenden das GPS, um das Wachstum des Mount Everest zu messen: Dieser Berg wächst langsam in dem Maße, wie sich sein Gletscher, der Khumbu senkt. Ebenso besteigt alle zwei Jahre eine Expedition den Mont Blanc, um auf dem Gipfel die amtliche Höhe des Berges zu aktualisieren. In den neunziger Jahren stellten die Geografen mal wieder die Frage, ob der K2 höher als der Mount Everest sei. Seit ihrer Expedition 1998, bei der sie das GPS verwendeten, ist die Sache eindeutig klar: Der Mount Everest ist mit 8830 m der höchste Berg der Erde. 1954 hat B. L. Gulatee die Höhe des Everest auf 8848 m geschätzt. Damals erfolgte die Schätzung unter Verwendung von Theodolit-Messungen, die in sechs Stationen auf den nordindischen Ebenen durchgeführt wurden (ein Theodolit ist ein optisches Winkelmessinstrument, das in der Geodäsie verwendet wird).
- Es gibt viele militärische Anwendungen – ursprünglich wurde das System ja für das amerikanische Militär entwickelt. Eine solche Anwendung ist der Präzisionsabwurf von Bomben.

**Die Zukunft: GPS und Galileo.** Bis jetzt hatten die Vereinigten Staaten ein Monopol auf diesem Markt. In Anbetracht dessen, dass die Amerikaner die ausschließliche Kontrolle über das GPS haben, kann die US-Regierung das GPS-Signal verschlüsseln und so den Zugang blockieren oder aus militärischen Gründen (im Rahmen des NAVWAR-Programms zur Navigationskriegsführung) die Signalgenauigkeit über einem bestimmten Gebiet verringern. Im März 2002 vereinbarte die Europäische Union mit der European Space Agency die Entwicklung und Stationierung von Galileo, einem System zur Positionsbestimmung, das als Alternative zu GPS entworfen wurde. Zwei Testsatelliten wurden 2005 gestartet und die 28 verbleibenden Satelliten sollen bis 2014 abheben. Die GPS-Satelliten übertragen keine Informationen zum Status des Satelliten bzw. zur Signalqualität. Deswegen kann es mehrere Stunden dauern, bevor ein funktionsgestörter Satellit entdeckt und abgeschossen wird; während dieser Zeit verschlechtert sich die Systemgenauigkeit. Das schränkt die Anwendungen des GPS für das Leiten von Flugzeugen bei schlechtem Wetter ein. Die Galileo-Satelliten sind so entworfen, dass sie ständig Signalqualitätsinformationen senden, die es den Empfängern ermöglichen, das Signal funktionsgestörter Satelliten zu ignorieren. Das erfolgt durch ein System

von Bodenstationen, welche die tatsächliche Position des Satelliten exakt messen und mit der berechneten Satellitenposition vergleichen. Diese Informationen werden an den funktionsgestörten Satelliten übermittelt, der sie zurück an die Empfänger leitet. Die US-Regierung plant für das GPS eine ähnliche Verbesserung.

## 1.3 Wie Hydro-Québec mit Blitzschlägen umgeht

Neue Lösungen zu vorhandenen Problemen werden häufig offensichtlich, wenn neue Technologien bereitgestellt werden. Hydro-Québec<sup>1</sup> verwendet das GPS als Teil seines Ansatzes für den Umgang mit Blitzschlägen. Mathematik kommt an mehreren Stellen des betrieblichen Blitzschlagüberwachungssystems zum Einsatz. In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns nicht nur auf die Anwendung des GPS auf das Blitzschlagmanagement, sondern auch auf die Mathematik, die bei Hydro-Québec an anderen Stellen eingesetzt wird.

### 1.3.1 Die Ortung von Blitzschlägen

Hydro-Québec installierte 1992 in seinem Netz ein Blitzschlagortungssystem. Das Grundproblem ist die Bestimmung der Grenzen der Gebiete, die von Gewittern betroffen sind: Man möchte den Strom reduzieren, der durch die betroffenen Leitungen fließt, indem man ihn über Hochspannungsleitungen umleitet, die außerhalb des Gewittergebietes liegen. Dadurch werden die potentiellen Auswirkungen eines Blitzschlags auf eine Hochspannungsleitung minimiert: Der durch Blitzschlag verursachte Schaden wird lokal eingeschränkt, wodurch die Anzahl der betroffenen Kunden minimiert und gleichzeitig die Gesamtzuverlässigkeit des Stromversorgungsnetzes erhöht wird.

Um dieses Ziel zu erreichen, verwendet Hydro-Québec ein System von 13 Detektoren, die in den niedriger gelegenen zwei Dritteln der Provinz Québec (über das von Hochspannungsleitungen überdeckte Territorium) verteilt sind. Die Positionen der Detektoren sind genau bekannt, aber da das System auf exakten Zeitmessungen beruht, müssen die Uhren in den Detektoren perfekt synchronisiert sein. Hierzu hat jeder Detektor einen GPS-Empfänger.

**Verwendung eines GPS-Empfängers als Zeitreferenz.** Es mag etwas überraschend erscheinen, dass man einen GPS-Empfänger zur Zeitmessung verwenden kann. Wir haben gerade bemerkt, dass GPS-Empfänger typischerweise mit billigen und relativ ungenauen Uhren ausgestattet sind. Wir haben jedoch auch erwähnt, dass der Empfänger bei der Bestimmung seiner Position den Uhrenfehler, das heißt, die Zeitdifferenz  $\tau$  zwischen seiner Uhr und derjenigen an Bord der GPS-Satelliten berechnet. Folglich berechnet der Empfänger tatsächlich die genaue Zeit, wie sie von den Uhren an Bord der Satelliten

---

<sup>1</sup>Hydro-Québec ist der größte Erzeuger, Transporteur und Verteiler von Elektrizität in der Provinz Québec. Der Name ist darauf zurückzuführen, dass 95% seiner Stromerzeugung hydroelektrisch ist.

gemessen wird. Wird eine hohe Präzision gewünscht und ist der Empfänger stationär, dann ist es besser, die berechneten Werte von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $\tau$  durch den Durchschnitt von zu verschiedenen Zeiten berechneten Werten  $(x_i, y_i, z_i, \tau_i)_{i=1}^N$  zu ersetzen.

Tatsächlich tritt in jeder Berechnung  $(x_i, y_i, z_i, \tau_i)$  ein Fehler auf. Die Fehler in Bezug auf den Raum können in jeder beliebigen Richtung rund um die wahre Empfängerposition auftreten und diese Fehler gehorchen einem schönen statistischen Gesetz (sie sind gleichförmig verteilt und Gauß'sch). In ähnlicher Weise kann der Fehler bei der Berechnung der Zeitdifferenz positiv oder negativ sein. Somit werden die Position des Empfängers und die Zeitdifferenz durch  $(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i)$  besser approximiert.

Auf diese Weise ist ein GPS-Empfänger dazu in der Lage, seine Uhr in Bezug auf die Satelliten mit einer Präzision von ungefähr 100 Nanosekunden (eine Nanosekunde ist 1 Milliardstel einer Sekunde) zu synchronisieren. Eine solche Methode wird bei den Detektoren von Hydro-Québec verwendet. Tatsächlich ermöglicht das GPS, dass die 13 Detektoren ihre Uhren bis auf 100 Nanosekunden synchronisieren. Sobald der Empfänger mit den Satellitenuhren synchronisiert ist, kann er auch „die Sekunde schlagen“, das heißt, in jeder Sekunde einen Impuls senden. Das wird für andere Messungen verwendet.

**Ortung von Blitzschlägen.** Zusätzlich zur Aufrechterhaltung einer synchronisierten Uhr sind die 13 Detektoren auch dafür zuständig, alle ungewöhnlichen elektromagnetischen Aktivitäten zu überwachen und diejenigen Aktivitäten zu identifizieren, die durch Blitzschläge verursacht worden sind. Hydro-Québec hat die Detektoren ziemlich weit weg von den Hochspannungsleitungen aufgestellt, da die von Hochspannungsleitungen verursachten elektromagnetischen Felder eine exakte Signalentdeckung stören würden. Die Detektoren befinden sich typischerweise auf den Dächern von Hydro-Québec-Verwaltungsgebäuden und sind in dem zu überwachenden Gebiet so gleichmäßig wie möglich verteilt. Schlägt ein Blitz in dieses Gebiet mit einer Energie ein, die zur Gefährdung des Netzes ausreicht, dann wird er typischerweise von mindestens fünf Detektoren registriert. Tatsächlich sind die Detektoren hinreichend empfindlich, um bis zur Entfernung von Mexiko äußerst starke Blitzschläge zu orten, wenn auch mit geringerer Präzision.

Der Blitzschlag erzeugt eine elektromagnetische Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum ausbreitet. Jeder Detektor zeichnet die genaue Zeit auf, wenn er die Welle wahrnimmt. Hierzu verwenden die Detektoren einen schnellen Oszillator (zum Beispiel ein Quarzkristall), der mit der GPS-Zeitquelle synchronisiert ist. Die Frequenz dieser Oszillatoren variiert typischerweise von 4 bis 16 Megahertz (ein Megahertz, abgekürzt MHz, ist die Frequenz von einer Million Schwingungen pro Sekunde). Die Detektoren übermitteln diese Informationen an einen Zentralcomputer, sobald sie die Welle gemessen haben. Das System berechnet dann die Position des Blitzschlags durch Triangulation (mit anderen Worten unter Verwendung der Zeitdifferenzen, mit denen die einzelnen Detektoren die Welle registriert haben, vgl. Übung 2).

**Identifizierung von Blitzschlägen.** Es gibt drei Typen von Blitzschlägen:

- Blitzschläge zwischen den Wolken. Die Mehrzahl der Blitzschläge ist von diesem Typ. Sie werden nicht erfasst, aber sie wirken sich auch nicht auf das Netz aus, da sie nicht in den Boden einschlagen.
- Negative Blitzschläge. In diesem Fall ist die Wolke negativ geladen und der Blitzschlag besteht aus einem Fluss von Elektronen, die sich von der Wolke zum Boden bewegen.
- Positive Blitzschläge. In diesem Fall ist die Wolke positiv geladen und der Blitzschlag besteht aus einem Fluss von Elektronen, die sich vom Boden zur Wolke bewegen. Wie Sie vielleicht vermutet haben, ist die Welle eines positiven Schlages das Spiegelbild der Welle des negativen Schlages.

Beschränken wir uns auf Blitzschläge zwischen dem Boden und den Wolken, dann sind 90% dieser Schläge negativ. Bei einem starken Gewitter dreht sich dieser Prozentsatz aber um, und 90% der Bodenblitzschläge sind positiv. Die Detektoren können zwischen einem negativen und einem positiven Blitzschlag unterscheiden: der eine ist das Spiegelbild des anderen. Würde ein Detektor eine Welle mit einem positiven Blitzschlag registrieren und ein anderer Detektor einen negativen Blitzschlag, dann leuchtet es ein, dass die beiden Wellen nicht durch ein und denselben Schlag erzeugt werden konnten. Leider sind die Dinge etwas komplizierter. Eine Welle, die sich mehr als 300 km von ihrer Quelle ausgebreitet hat, kann durch die Ionosphäre reflektiert werden, wobei das Signal invertiert wird. Folglich ist es möglich, dass ein weit genug entfernter Detektor in Wirklichkeit ein reflektiertes Signal misst.

Um zwischen den Blitzschlägen und anderen elektromagnetischen Signalen zu unterscheiden, analysiert der Detektor die Form der Welle, indem er das Signal filtert und nach der spezifischen Signatur eines Blitzschlages sucht. Insbesondere registriert der Detektor den Signalanfang, die maximale Amplitude, die Anzahl der Spitzenamplituden sowie den Anstieg, und sendet diese Informationen an den Zentralcomputer. Die Signalverarbeitung ist ein schönes Thema der angewandten Mathematik, aber wir werden dieses Thema hier nicht diskutieren.

**Von der Theorie zur Praxis.** Es gibt mehrere zusätzliche Tricks, um empfangene Signale korrekt zu identifizieren.

- Es seien  $P$  und  $Q$  die zwei Detektoren, die am weitesten voneinander entfernt sind, und es sei  $T$  die Zeit, die das (sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitende) Signal benötigt, um den Weg zwischen  $P$  und  $Q$  zurückzulegen. Wir können sicher sein, dass die Zeitdifferenz zwischen den beiden entdeckten Signalen für ein und denselben Blitzschlag nicht größer als  $T$  ist. Wenn also zwei Detektoren einen Schlag zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  registrieren und  $|t_1 - t_2| > T$ , dann können diese Signale nicht von demselben Blitzschlag kommen.
- Die Amplitude der durch den Blitzschlag erzeugten Welle ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung zu ihrer Quelle. Damit also zwei entdeckte Signale dem

gleichen Blitz entsprechen, müssen die Amplituden der gemessenen Signale mit der berechneten Position kompatibel sein.

- Schlägt der Blitz innerhalb einer Entfernung von 20 km von einem Detektor ein, dann werden die Ablesungen des Detektors aus der Rechnung eliminiert. Der Grund dafür ist, dass die gemessene Amplitude zu groß und der Detektor nicht dazu in der Lage ist, den Unterschied zwischen dem Signal eines einzelnen Blitzschlags und dem überlagerten Signal zweier Blitzschläge zu erkennen.

Mit diesen Methoden ist Hydro-Québec imstande, Blitzschläge mit einer Genauigkeit von bis zu 500 m zu lokalisieren, wenn sie innerhalb des Gebietes niedergehen, das von den Detektoren überwacht wird.

**Lokalisierung von Störungen in Starkstromleitungen.** Eine ähnliche Methode wird bei der Lokalisierung von Störungen im Transportnetz verwendet: Hat zum Beispiel ein Blitzschlag eine Starkstromleitung beschädigt, dann müssen die Techniker wissen, wohin sie gehen sollen, um die Leitung zu reparieren. An beiden Enden jeder zu schützenden Starkstromleitung wird ein Oszillogerturbograph (Störschwingungsaufzeichnungsgerät) installiert und durch das GPS synchronisiert. Dieses Gerät misst die Form des 60-Hz-Signals, das sich durch die Leitung ausbreitet. In Abhängigkeit vom Fehler beobachtet man verschiedene Typen von Störungen. Eine Störung breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit durch die Leitung aus. Die beiden Detektoren messen die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ , bei denen die Störung beobachtet wird, und unter Verwendung der Differenz  $t_1 - t_2$  lässt sich die Position des Fehlers berechnen. Diese Techniken haben eine Präzision von nur einigen hundert Metern, aber das reicht im Allgemeinen aus. In Québec sind die Starkstromleitungen häufig sehr lang und verlaufen durch riesige unbewohnte Gebiete; somit ermöglicht das System einen schnellen Einsatz des Reparaturteams im Störungsgebiet.

**Umverteilung der Energieübertragung.** Die Blitzschlagerkennung kann dazu verwendet werden, die Größe und den Standort eines Gewitters zu bestimmen. Blitzschläge treten innerhalb eines Gebietes zufällig auf und deswegen kann man statistische Modelle verwenden. Hierzu teilt man das betreffende Gebiet in ein regelmäßiges Gitter auf und berechnet die raumzeitliche Dichte der Blitzschläge. Zum Beispiel ist ein Gewitter mit zwei Blitzschlägen pro  $\text{km}^2$  innerhalb von 10 Minuten sehr stark. Unter Verwendung der Modellinformationen wird das sogenannte Auge berechnet, das heißt, das Zentrum des Gewitters. Die Berechnung wird alle fünf Minuten wiederholt, und die Verschiebung des berechneten Zentrums wird zur Ermittlung der Geschwindigkeit und der Richtung des Gewitters verwendet (die Geschwindigkeit kann irgendwo zwischen 0 und 200 km/h liegen). Man kann diese Informationen ihrerseits verwenden, um vorherzusagen, welche Bereiche des Leitungsnetzes als nächstes betroffen sein werden. Eines der schwierigeren Probleme ergibt sich, wenn zwei Gewitter nahe beieinander sind: Das System muss entscheiden, ob es sich tatsächlich um zwei verschiedene Gewitter oder um ein einziges größeres Gewitter handelt. Das ist ein interessantes Problem für Ingenieure!

Ausgestattet mit diesen Informationen stützt sich der Großhändler auf seine Erfahrungen und entscheidet, ob die Strommenge, die über eine potentiell gefährdete Stark-



stromleitung übertragen wird, gesenkt werden muss. Es ist eine sehr heikle Angelegenheit, ein Starkstromnetz im Gleichgewicht zu halten. Es muss immer ein Gleichgewicht zwischen der erzeugten Strommenge, der übertragenen Strommenge und der genutzten Strommenge bestehen. Um die Strommenge zu verringern, die durch eine Leitung übertragen wird, muss es eine Überkapazität in einer oder mehreren anderen Leitungen geben. Um also solche Entscheidungen zu treffen, muss der Verteiler einen bestimmten Handlungsspielraum haben. Jede Leitung hat eine maximale Kapazität, aber in der Regel werden Starkstromnetze immer etwas unterhalb der Kapazität gefahren, so dass das System zu jedem beliebigen Zeitpunkt den Ausfall einer gesamten Leitung auffangen kann.

### 1.3.2 Detektionsschwelle und Detektionsqualität bei Blitzschlägen

Die Detektorausrüstung wird so eingerichtet, dass sie den Minimalstandards für die entsprechende Erkennung genügt, aber im Allgemeinen besser ist. Es lohnt sich also, die tatsächlichen Fähigkeiten der Ausrüstung genau zu beurteilen – ein Prozess, der sich hauptsächlich auf statistische Methoden stützt.

Zu diesem Zweck werden wir ein empirisches Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Zufallsvariable  $X$  heranziehen, die die Intensität eines Blitzschlags angibt. Anstelle der Dichtefunktion  $f(I)$  von Blitzschlägen verwenden wir die Verteilungsfunktion

$$P(I) = \text{Prob}(X > I) = \frac{1}{1 + \left(\frac{I}{M}\right)^K}. \quad (1.17)$$

Wir haben  $P(0) = \text{Prob}(X > 0) = 1$ . Die zu verwendenden Werte von  $M$  und  $K$  hängen von der geografischen Zone sowie von den Besonderheiten ihrer Umgebung ab und werden empirisch bestimmt. Der Wert von  $I$  ist in kA (Kiloampere) gegeben. Bestimmte Werte werden häufig verwendet und haben deswegen einen eigenen Namen. So wird beispielsweise die Funktion  $P$  von (1.17) als Popolansky-Funktion bezeichnet, wenn  $M = 25$  und  $K = 2$ . Sie heißt Anderson-Erikson-Funktion, wenn  $M = 31$  und  $K = 2,6$ . Abbildung 1.3 zeigt die Popolansky-Funktion und Abbildung 1.4 die Dichtefunktion  $f(I)$  der zugehörigen Variablen  $X$ . Man beachte, dass  $P(I) = \int_I^\infty f(J)dJ$  und deswegen  $f(I) = -P'(I)$ .

Wir zeigen, wie dieses empirische Gesetz in der Praxis verwendet werden kann.

#### Beispiel 1.1 DIE POPOLANSKY-FUNKTION

1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufälliger Blitzschlag eine Stromstärke von mehr als 50 kA hat, ist

$$P(50) = \frac{1}{1 + \left(\frac{50}{25}\right)^2} = \frac{1}{5} = 0,2. \quad (1.18)$$

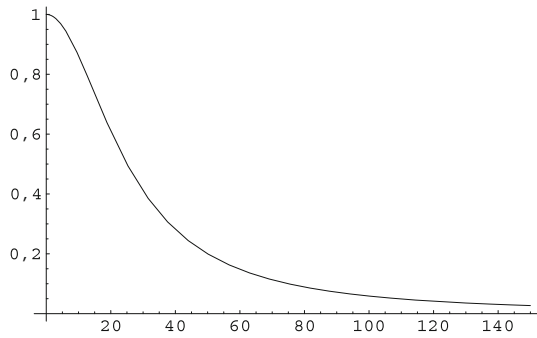


Abb. 1.3. Die Popolansky-Funktion.

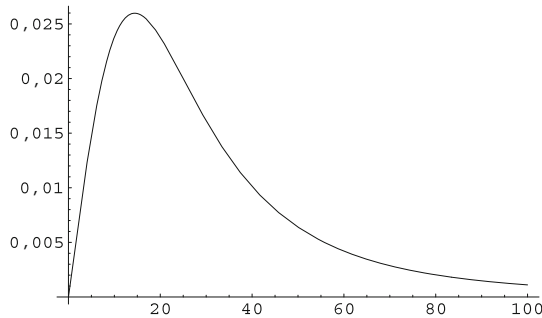


Abb. 1.4. Die zur Popolansky-Funktion gehörende Dichtefunktion.

2. Der Median dieser Verteilung ist derjenige Wert  $I_m$  von  $I$ , für den

$$\text{Prob}(X > I_m) = P(I_m) = \frac{1}{2}. \quad (1.19)$$

Das liefert uns die Gleichung  $\frac{1}{1 + (\frac{I_m}{25})^2} = \frac{1}{2}$ . Demnach ist  $1 + (\frac{I_m}{25})^2 = 2$ , oder mit anderen Worten  $(\frac{I_m}{25})^2 = 1$ . Hieraus ergibt sich  $I_m = 25$ .

**Berechnung der Blitzschlagerkennungsrate.** In der Praxis entdecken wir nicht alle Blitzschläge, sondern nur diejenigen, deren Energie eine bestimmte Schwelle überschreitet. Diese Schwelle hängt ab von der Position des Blitzschlags in Bezug auf die Detektoren sowie von verschiedenen Interferenzquellen, welche die Empfangsqualität der Detektoren zu jedem gegebenen Zeitpunkt verringern kann. Wir untersuchen jetzt, wie man den Prozentsatz der Blitzschläge bestimmt, die entdeckt werden. In unserem Beispiel

haben wir festgelegt, dass 50% der Blitzschläge eine Stromstärke von mehr als 25 kA haben. Nehmen wir nun für den Moment an, dass wir in einer Stichprobe von entdeckten Blitzschlägen beobachtet haben, dass 60% eine Stromstärke von mehr als 25 kA hatten. Es sei  $E$  das Ereignis „der Blitzschlag wird entdeckt“. Dann möchten wir  $\text{Prob}(E)$  berechnen. Wir kennen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein *entdeckter* Blitzschlag (also das stattgefunden Ereignis  $E$ ) eine Stromstärke von mehr als 25 kA hatte. Das ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit, weil wir angenommen haben, dass der Blitzschlag entdeckt wurde, und wir können das in folgender Form schreiben:

$$\text{Prob}(X > 25|E) = 0,6. \quad (1.20)$$

Andererseits wissen wir, dass sich die Wahrscheinlichkeit von  $X > 25$  (unter der Bedingung, dass  $E$  eingetreten ist) durch

$$\text{Prob}(X > 25|E) = \frac{\text{Prob}(X > 25 \text{ und } E)}{\text{Prob}(E)} \quad (1.21)$$

ausdrücken lässt. In dieser Form können wir nicht viel mit diesem Ausdruck anfangen, da sowohl der Zähler als auch der Nenner unbekannt sind. Wir wollen aber nun annehmen, dass alle Blitzschläge entdeckt werden, die eine Stromstärke von mehr als 25 kA haben. Dann wird das Ereignis „ $X > 25$  und  $E$ “ einfach zu  $X > 25$ , dessen Wahrscheinlichkeit bekannt ist. Somit liefert (1.21) das Ergebnis

$$\text{Prob}(E) = \frac{\text{Prob}(X > 25)}{\text{Prob}(X > 25|E)} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6} = 0,83. \quad (1.22)$$

Wir setzen nun für ein beschränktes geografisches Gebiet voraus, dass die einzigen nicht entdeckten Blitzschläge (mit einer akzeptablen Fehlertoleranzgrenze) diejenigen sind, die eine geringere Stromstärke haben. Wir wollen die Schwellenstromstärke  $I_0$  bestimmen, unterhalb der keine Blitzschläge entdeckt werden. Bei dieser Berechnung wird das Ereignis  $E$  zu  $X > I_0$ . Wir haben gesehen, dass  $\text{Prob}(E) = \frac{5}{6} = 0,83$ . Wegen  $\text{Prob}(E) = \text{Prob}(X > I_0) = P(I_0)$  liefert das die Gleichung

$$P(I_0) = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}, \quad (1.23)$$

die darauf hinausläuft,  $\frac{1}{1+(\frac{I_0}{25})^2} = \frac{5}{6}$  oder äquivalent  $1 + (\frac{I_0}{25})^2 = \frac{6}{5}$  zu lösen. Daher ist  $I_0$  der Wert, der  $(\frac{I_0}{25})^2 = \frac{1}{5} = 0,2$  erfüllt, und hieraus folgt

$$I_0 = 25\sqrt{0,2} = 11,18. \quad (1.24)$$

Wir können demnach für das gegebene Gebiet schließen, dass die Detektionsschwelle den Wert  $I_0 = 11,18$  kA hat und dass Blitzschläge mit Stromstärken, die unter diesem Wert liegen, nicht entdeckt werden.

### 1.3.3 Langfristiges Risikomanagement

Die Verwaltung von Blitzschlägen ist nicht darauf beschränkt, Gewitter zu ermitteln und zu lokalisieren. Hydro-Québec verfügt über detaillierte langfristige statistische Daten, die zum Erstellen isokeraunischer Karten verwendet werden, welche die Dichte von Blitzschlägen über einen Zeitraum von fünf Jahren enthalten. Diese Karten können ihrerseits dazu verwendet werden, gefährdetere Zonen zu identifizieren. Im Falle von Starkstromleitungen, die bereits errichtet worden sind, kann man diese Informationen verwenden um zu entscheiden, welche Abschnitte besser geschützt werden sollten. Auf ähnliche Weise kann man diese Karten auch zur Identifizierung von Wegen nutzen, um die Errichtung neuer Starkstromleitungen zu planen. Diese Auswahlmöglichkeiten lassen sich unter dem Stichwort Risikomanagement formulieren.

Gefahren aufgrund von heftigen Unwettern sind nur eines der vielen Risiken für Firmen, die Elektrizität erzeugen, transportieren und verteilen. Folglich lassen sich alle Aufgaben der Lokalisierung von Blitzschlägen, der Verfolgung von Stürmen und Gewittern sowie der Identifizierung von Risikozonen unter dem Stichwort des allgemeinen Risikomanagements einordnen. Das Problem besteht darin, das Verteilungsnetz so zuverlässig wie möglich zu machen. Die einzelnen Investitionen in das Netz müssen also in Bezug auf ihre Rentabilität bewertet werden. Je gefährlicher ein gegebenes Ereignis ist und je größer seine finanziellen Auswirkungen sind, desto eher sind wir geneigt, das System vor dem Ereignis zu schützen oder dessen Auswirkungen zu begrenzen. Natürlich gilt all das immer unter der Bedingung, dass die Kosten für den Schutz nicht zu hoch sind! Zur Formalisierung eines solchen Systems führen wir drei Variablen ein:

- die Wahrscheinlichkeit  $p$  des Ereignisses, das dem Risiko unterliegt;
- die für die Auswirkungen veranschlagten Kosten  $C_i$ , das heißt, der Betrag, den man zahlen muss, falls das Ereignis eintritt und man keine Schutzvorkehrungen getroffen hat;
- die Dämpfungskosten  $C_a$ , die gezahlt werden müssen, um die Ausrüstung zu schützen und die Auswirkungen des eintretenden Ereignisses zu begrenzen.

Wir führen den Index

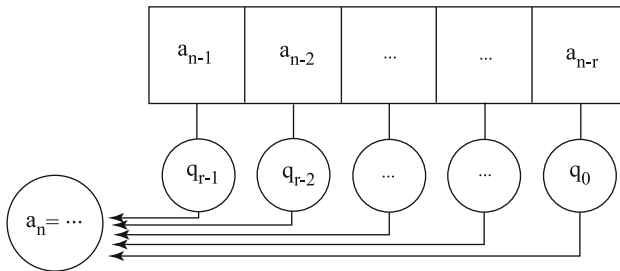
$$\frac{pC_i}{C_a} \quad (1.25)$$

ein. Wir sehen, dass der Zähler die erwarteten Reparaturkosten und der Nenner die Kosten für den Schutz darstellt. Dieses Verhältnis muss mindestens 1 sein, damit sich die Investition in den Schutz rentiert. Jedoch gibt es mehrere andere Faktoren, die in der Praxis ins Spiel kommen. Wir werden eher einen Schutz kaufen, wenn er bei mehreren Ereignissen anwendbar ist. In ähnlicher Weise ändert sich die Situation, falls es sich nur um einen teilweisen Schutz handelt, das heißt, wir tragen nicht die Gesamtkosten, sondern niedrigere Reparaturkosten, falls das Ereignis eintritt.

## 1.4 Lineare Schieberegister und das GPS-Signal

Lineare Schieberegister ermöglichen die Erzeugung von Folgen, mit denen sich ein Empfänger ausgezeichnet synchronisieren kann. Diese einfach herzustellenden Geräte (man kann ein lineares Schieberegister aus einigen elementaren elektrischen Komponenten zusammenbauen) erzeugen Pseudozufallssignale. Das heißt, sie erzeugen Signale, die weitgehend zufällig zu sein scheinen, obwohl sie durch deterministische Algorithmen erzeugt werden.

Wir werden ein lineares Schieberegister konstruieren, das ein periodisches Signal mit einer Periode  $2^r - 1$  erzeugt. Dieses Register hat die Eigenschaft, dass es extrem schlecht mit allen Verschiebungen von sich selbst sowie mit anderen Signalen korreliert, die von dem gleichen Register unter Verwendung verschiedener Koeffizienten erzeugt werden. Die Eigenschaft, ein Signal zu haben, das schlecht mit seinen Verschiebungen und mit anderen ähnlichen Signalen korreliert, ermöglicht es den GPS-Empfängern, mühelos die Signale von einzelnen GPS-Satelliten zu identifizieren und mit diesen Signalen synchron zu laufen. Man kann sich das von einem linearen Schieberegister erzeugte Signal als eine Folge von Nullen und Einsen vorstellen. Das Register selbst kann man sich als ein Band von  $r$  Boxen vorstellen, welche die Einträge  $a_{n-1}, \dots, a_{n-r}$  enthalten, von denen jeder den Wert 0 oder 1 hat (vgl. Abbildung 1.5).



**Abb. 1.5.** Ein lineares Schieberegister.

Jeder Box wird eine Zahl  $q_i \in \{0, 1\}$  zugeordnet. Die  $r$  Werte  $q_i$  sind fest und für alle Satelliten voneinander verschieden. Wir erzeugen folgendermaßen eine Pseudozufallsfolge:

- Wir geben uns eine Menge von Anfangsbedingungen  $a_0, \dots, a_{r-1} \in \{0, 1\}$  vor, die nicht alle gleich null sind.
- Für gegebene  $a_{n-r}, \dots, a_{n-1}$  berechnet das Register das nächste Element in der Folge als

$$a_n \equiv a_{n-r}q_0 + a_{n-r+1}q_1 + \cdots + a_{n-1}q_{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} a_{n-r+i}q_i \pmod{2}. \quad (1.26)$$

(Zur Berechnung modulo 2 führen wir die normale Rechnung durch. Das Endergebnis ist 0, falls die Zahl gerade ist; andernfalls ist das Endergebnis 1. Dementsprechend schreiben wir  $a \equiv 0 \pmod{2}$ , falls  $a$  gerade ist, und  $a \equiv 1 \pmod{2}$ , falls  $a$  ungerade ist.)

- Wir verschieben jeden Eintrag nach rechts und vergessen  $a_{n-r}$ . Der berechnete Wert  $a_n$  wird in die ganz links stehende Box eingetragen.
- Wir iterieren das oben beschriebene Verfahren.

Da das oben beschriebene Verfahren vollkommen deterministisch ist und die Anzahl der Anfangsbedingungen endlich ist, erzeugen wir eine Folge, die periodisch werden muss. Auf ähnliche Weise können wir sehen, dass die Periode der Folge höchstens  $2^r$  sein kann, da es nur  $2^r$  verschiedene Folgen der Länge  $r$  gibt. Tatsächlich können wir uns von folgender Tatsache überzeugen: Haben wir in einem bestimmten Moment  $a_{n-r} = \cdots = a_{n-1} = 0$ , dann gilt für alle  $m \geq n$  die Gleichheit  $a_m = 0$ . Folglich darf eine „interessante“ periodische Folge nie eine Folge von  $r$  Nullen enthalten, weswegen ihre maximale Periode die Länge  $2^r - 1$  hat. Zur Erzeugung einer Folge mit interessanten Eigenschaften müssen wir nur sorgfältig die Koeffizienten  $q_0, \dots, q_{r-1} \in \{0, 1\}$  und die Anfangsbedingungen  $a_0, \dots, a_{r-1} \in \{0, 1\}$  auswählen.

Wir sehen nie die ganze Folge, sondern immer nur ein Fenster  $M = 2^r - 1$  von aufeinanderfolgenden Einträgen  $\{a_n\}_{n=m}^{n=m+M-1}$ , die wir mit  $B = \{b_1, \dots, b_M\}$  etikettieren. Wir möchten das mit einem anderen Fenster  $C = \{c_1, \dots, c_M\}$  der Form  $\{a_n\}_{n=p}^{n=p+M-1}$  vergleichen. Zum Beispiel wird die Folge  $B$  vom Satelliten gesendet und die Folge  $C$  ist eine vom GPS-Empfänger erzeugte zyklische Verschiebung derselben Folge. Zur Bestimmung der Verschiebung zwischen den zwei Folgen verschiebt der Empfänger seine Folge wiederholt um eine Einheit (durch Bilden von  $p \mapsto p + 1$ ), bis die Folge mit  $B$  identisch ist.

**Definition 1.2** Die Korrelation zwischen zwei Folgen  $B$  und  $C$  der Länge  $M$  ist die Anzahl der Einträge  $i$ , für welche  $b_i = c_i$ , minus der Anzahl der Einträge  $i$ , für welche  $b_i \neq c_i$ . Wir bezeichnen die Korrelation (zwischen den beiden Folgen  $B$  und  $C$ ) mit  $\text{Cor}(B, C)$ .

**Bemerkung:** Besteht das Register aus  $r$  Einträgen, dann muss die Korrelation zwischen einem beliebigen Paar von Folgen  $B$  und  $C$  der Bedingung  $-M \leq \text{Cor}(B, C) \leq +M$  genügen, wobei  $M = 2^r - 1$ . Wir sagen, dass die Folgen schlecht korreliert sind, wenn  $\text{Cor}(B, C)$  nahe null liegt.

**Proposition 1.3** Die Korrelation zwischen zwei Folgen  $B$  und  $C$  beträgt

$$\text{Cor}(B, C) = \sum_{i=1}^M (-1)^{b_i} (-1)^{c_i}. \quad (1.27)$$

BEWEIS. Die Zahl  $\text{Cor}(B, C)$  wird folgendermaßen berechnet: jedesmal, wenn  $b_i = c_i$ , müssen wir 1 addieren. Analog müssen wir jedesmal, wenn  $b_i \neq c_i$ , eine 1 subtrahieren. Man beachte, dass  $b_i$  und  $c_i$  nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Ist also  $b_i = c_i$ , dann haben wir entweder  $(-1)^{b_i} = (-1)^{c_i} = 1$  oder  $(-1)^{b_i} = (-1)^{c_i} = -1$ . In beiden Fällen sehen wir, dass  $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = 1$ . Ähnlich folgt: Ist  $b_i \neq c_i$ , dann nimmt genau einer der Ausdrücke  $(-1)^{b_i}$  und  $(-1)^{c_i}$  den Wert 1 an, während der andere Ausdruck den Wert  $-1$  annimmt. Daher gilt  $(-1)^{b_i}(-1)^{c_i} = -1$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass wir ein lineares Schieberegister so initialisieren können, dass es eine Folge erzeugt, die mit jeder Verschiebung von sich selbst schlecht korreliert.

**Satz 1.4** *Ist ein lineares Schieberegister so wie in Abbildung 1.5 gegeben, dann existieren Koeffizienten  $q_0, \dots, q_{r-1} \in \{0, 1\}$  und Anfangsbedingungen  $a_0, \dots, a_{r-1} \in \{0, 1\}$  derart, dass die vom Register erzeugte Folge eine Periode der Länge  $2^r - 1$  hat. Wir betrachten in dieser Folge zwei Fenster  $B$  und  $C$  der Länge  $M = 2^r - 1$ , wobei  $B = \{a_n\}_{n=m}^{n=m+M-1}$  und  $C = \{a_n\}_{n=p}^{n=p+M-1}$  mit  $p > m$ . Ist  $M$  kein Teiler von  $p - m$ , dann gilt*

$$\text{Cor}(B, C) = -1. \quad (1.28)$$

*Mit anderen Worten: Die Anzahl der nicht übereinstimmenden Bits ist immer um eins größer als die Anzahl der übereinstimmenden Bits.*

Beim Beweis dieses Satzes verwenden wir endliche Körper. Wir beginnen mit der Diskussion eines Beispiels, das den Satz illustriert. Der Beweis folgt in Abschnitt 1.4.2.

**Beispiel 1.5** *In diesem Beispiel nehmen wir  $r = 4$ ,  $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 0, 0)$  und  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 1)$ . Wir überlassen dem Leser die Überprüfung dessen, dass diese Werte eine Folge der Periode  $2^4 - 1 = 15$  erzeugen, wobei der folgende Block von Symbolen wiederholt wird:*

0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 .

*Verschieben wir die Folge um ein Symbol nach links, dann schicken wir die erste 0 an das Ende und erhalten*

0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 .

*Wir sehen, dass sich die beiden Blöcke von Symbolen an den Positionen 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11 und 15 voneinander unterscheiden. Sie unterscheiden sich demnach an acht Positionen und stimmen an sieben Positionen überein, was eine Korrelation von  $-1$  ergibt.*

*Um die Korrelation mit den anderen 14 Verschiebungen der Folge zu berechnen, schreiben wir explizit alle möglichen Verschiebungen auf. Eine Inspektion zeigt, dass zwei beliebige der nachstehenden Folgen an genau sieben Stellen übereinstimmen und sich an den acht verbleibenden Stellen voneinander unterscheiden. Wir überlassen es dem Leser, diesen Sachverhalt nachzuprüfen:*

0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1

Im vorhergehenden Beispiel haben wir nicht explizit erläutert, warum wir die speziellen Werte für  $q_0, \dots, q_3$  und  $a_0, \dots, a_3$  gewählt haben. Um das zu zeigen und um Satz 1.4 zu beweisen, werden wir die Theorie der endlichen Körper verwenden. Insbesondere werden wir den Körper  $\mathbb{F}_{2^r}$  verwenden, der  $2^r$  Elemente enthält. Im Fall  $r = 1$  ist der Körper  $\mathbb{F}_2$  der aus 2 Elementen bestehende Körper  $\{0, 1\}$  mit der Addition und Multiplikation modulo 2.

#### 1.4.1 Die Struktur des Körpers $\mathbb{F}_2^r$

*Die Struktur und die Konstruktion endlicher Körper der Ordnung  $p^n$  (mit einer Primzahl  $p$ ) werden in den Abschnitten 6.2 und 6.5 von Kapitel 6 untersucht. Diese Abschnitte sind in sich geschlossen und können gelesen werden, ohne den Rest von Kapitel 6 zu kennen. Im jetzt folgenden Teil des vorliegenden Kapitels setzen wir voraus, dass der Leser das Material der beiden genannten Abschnitte kennt.*

Die Elemente von  $\mathbb{F}_2^r$  sind die  $r$ -Tupel  $(b_0, \dots, b_{r-1})$ , bei denen  $b_i \in \{0, 1\}$ . Die Addition zweier solcher  $r$ -Tupel ist einfach die Addition modulo 2, die Eintrag für Eintrag durchgeführt wird, das heißt,

$$(b_0, \dots, b_{r-1}) + (c_0, \dots, c_{r-1}) = (d_0, \dots, d_{r-1}), \quad (1.29)$$

wobei  $d_i \equiv b_i + c_i \pmod{2}$ . Zur Definition eines Multiplikationsoperators beginnen wir mit der Wahl eines Polynoms

$$P(x) = x^r + p_{r-1}x^{r-1} + \dots + p_1x + p_0, \quad (1.30)$$

das über dem Körper  $\mathbb{F}_2$  irreduzibel ist. Wir interpretieren jedes  $r$ -Tupel  $(b_0, \dots, b_{r-1})$  als ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $r - 1$ :

$$b_{r-1}x^{r-1} + \dots + b_1x + b_0. \quad (1.31)$$



Um die beiden  $r$ -Tupel zu multiplizieren, multiplizieren wir die beiden dazugehörigen Polynome. Das Produkt ist ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $2(r-1)$ . Dieses Polynom wird dann zu einem Polynom in  $x$  vom Grad  $r-1$  reduziert, indem man seinen Rest nach Division durch  $P$  nimmt (ein Verfahren analog zur schriftlichen Division von ganzen Zahlen). Das ist äquivalent zur Regel  $P(x) = 0$ , das heißt,  $x^r = p_{r-1}x^{r-1} + \dots + p_1x + p_0$  (wegen der in  $\mathbb{F}_2$  geltenden Beziehung  $-p_i = p_i$ ) und anschließender Iteration. Danach interpretieren wir die Koeffizienten des resultierenden Polynoms vom Grad  $(r-1)$  als die Einträge eines  $r$ -Tupels. Das folgende Ergebnis ist ein klassischer Satz aus der Theorie der endlichen Körper. Wir geben nur einen Überblick über den Beweis, ohne zu sehr auf die zugrundeliegende Algebra einzugehen. Falls Sie mit dem Material der nachstehenden Diskussion nicht vertraut sind, dann können Sie es ohne weiteres überspringen. Die obige Diskussion hat explizit gezeigt, dass die Vektorelemente  $\mathbb{F}_2^r$  als Polynome interpretiert werden können.

**Satz 1.6** 1. Die Menge  $\mathbb{F}_{2^r}$  ist in Bezug auf die oben definierte Addition und Multiplikation ein Körper.

2. Es existiert ein Element  $\alpha$  derart, dass die von null verschiedenen Elemente von  $\mathbb{F}_{2^r}$  genau die Elemente  $\alpha^i$  für  $i = 0, \dots, 2^r - 2$  sind. Mit anderen Worten:

$$\mathbb{F}_{2^r} \setminus \{0\} = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{2^r-2}\}. \quad (1.32)$$

Ein Element  $\alpha$ , das diese Eigenschaft hat, wird primitive Wurzel genannt und erfüllt die Relation  $\alpha^{2^r-1} = 1$ .

3. Die Elemente  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{r-1}\}$  sind linear unabhängig, wenn man sie als Elemente des Vektorraumes  $\mathbb{F}_2^r$  über  $\mathbb{F}_2$  interpretiert (der isomorph zum Körper  $\mathbb{F}_{2^r}$  ist).
4. Ist  $\alpha$  eine primitive Wurzel des Körpers  $\mathbb{F}_{2^r}$ , der mit Hilfe eines irreduziblen Polynoms  $P$  über  $\mathbb{F}_2$  konstruiert wurde, dann ist  $\alpha$  eine Nullstelle eines Polynoms

$$Q(x) = x^r + q_{r-1}x^{r-1} + \dots + q_1x + q_0$$

vom Grad  $r$ , das über  $\mathbb{F}_2$  irreduzibel ist. Der Körper, der unter Verwendung des Polynoms  $Q$  in der Definition der Multiplikation konstruiert wurde, ist isomorph zum Körper, der unter Verwendung des Polynoms  $P$  konstruiert wurde.

**Definition 1.7** Ein Polynom  $Q(x)$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$  heißt primitiv, wenn es irreduzibel ist und wenn das Polynom  $x$  eine primitive Wurzel des Körpers  $\mathbb{F}_{2^r}$  ist, der mit Hilfe des Polynoms  $Q(x)$  konstruiert wurde.

#### BEWEISSKIZZE VON SATZ 1.6

1. Der Beweis ist identisch mit dem Beweis, dass  $\mathbb{F}_p$  (auch mit  $\mathbb{Z}_p$  bezeichnet) ein Körper ist, falls  $p$  eine Primzahl ist (s. Übung 24 von Kapitel 6). Der Beweis verwendet den euklidischen Algorithmus für Polynome, mit dem man den größten gemeinsamen Teiler zweier gegebener Polynome findet.

2. Die von null verschiedenen Elemente von  $\mathbb{F}_{2^r}$  bilden eine multiplikative Gruppe  $G$  mit  $2^r - 1$  Elementen. Jedes von null verschiedene Element  $y$  erzeugt eine endliche Untergruppe  $H = \{y^i, i \in \mathbb{N}\}$ . Der Satz von Lagrange (Satz 7.18) besagt, dass die Anzahl der Elemente von  $H$  ein Teiler der Anzahl der Elemente von  $G$  sein muss. Da  $H$  endlich ist, muss es darüber hinaus ein minimales  $s$  mit der Eigenschaft  $y^s = 1$  geben. Dieses  $s$ , das die Ordnung des Elements  $y$  genannt wird, ist gleich der Anzahl der Elemente von  $H$ . Demnach ist  $y$  eine Wurzel des Polynoms  $x^s + 1 = 0$ . Wegen  $s \mid 2^r - 1$  ist  $y$  eine Nullstelle von  $R(x) = x^{2^r-1} + 1$ . (Übung: warum?) Wir haben also gezeigt, dass alle Elemente von  $G$  Nullstellen des Polynoms  $R(x) = x^{2^r-1} + 1$  sind. Angenommen es gibt einen echten Teiler  $m$  von  $2^r - 1$ , so dass die Ordnung aller Elemente von  $G$  ein Teiler von  $m$  ist. Dann müssen alle Elemente von  $G$  Nullstellen des Polynoms  $x^m + 1$  sein. Das ist ein Widerspruch, da dieses Polynom nur  $m < 2^r - 1$  Nullstellen hat. Es existieren also Elemente  $y_i$  mit Ordnungen  $m_i$  (für  $i = 1, \dots, n$ ) derart, dass das kleinste gemeinsame Vielfache der  $m_i$  gleich  $2^r - 1$  ist. Demnach ist die Ordnung des Produktes  $y_1 \cdots y_n = \alpha$  gleich  $2^r - 1$ .
3. Wir setzen einfach voraus, dass die Elemente  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{r-1}\}$  linear unabhängig sind, wenn man sie als Vektoren im Raum  $\mathbb{F}_2^r$  interpretiert.
4. Die Vektoren  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^r\}$  sind linear abhängig, da in einem Vektorraum der Dimension  $r$  beliebige  $r + 1$  Vektoren linear abhängig sind. Da die Vektoren  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{r-1}\}$  linear unabhängig sind, gibt es Koeffizienten  $q_i$  derart, dass  $\alpha^r = q_0 + q_1\alpha + \dots + q_{r-1}\alpha^{r-1}$ . Demnach ist  $\alpha$  eine Wurzel des Polynoms  $Q(x) = x^r + q_{r-1}x^{r-1} + \dots + q_1x + q_0$ . Dieses Polynom muss irreduzibel über  $\mathbb{F}_2$  sein, denn andernfalls wäre  $\alpha$  die Wurzel eines Polynoms mit einem Grad, der kleiner als  $r$  ist – im Widerspruch zu der Tatsache, dass die Elemente von  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{r-1}\}$  linear unabhängig in  $\mathbb{F}_2^r$  sind.  $\square$

**Bemerkung:** Wir hätten  $\mathbb{F}_{2^r}$  mit dem Polynom  $Q(x)$  anstelle des Polynoms  $P(x)$  schreiben können. Der Vorteil der letztgenannten Beschreibung besteht darin, dass wir dann immer  $\alpha = x$  als primitive Wurzel nehmen können. Achtung: Die Folge der  $\alpha^i$  ist bei der Berechnung modulo  $Q(x)$  nicht dieselbe wie bei der Berechnung modulo  $P(x)$ !

**Definition 1.8** Die Spurfunktion ist die Funktion  $T: \mathbb{F}_{2^r} \rightarrow \mathbb{F}_2$ , die durch  $T(b_{r-1}x^{r-1} + \dots + b_1x + b_0) = b_{r-1}$  gegeben ist.

**Proposition 1.9** Die Funktion  $T$  ist linear und surjektiv. Sie hat den Wert 0 auf genau der Hälfte der Elemente von  $\mathbb{F}_{2^r}$  und 1 auf der verbleibenden Hälfte.

BEWEIS: Übung!

#### 1.4.2 Beweis von Satz 1.4

Wir wählen ein primitives Polynom  $P(x)$  über  $\mathbb{F}_2$ ,

$$P(x) = x^r + q_{r-1}x^{r-1} + \cdots + q_1x + q_0,$$

das es uns ermöglicht, den Körper  $\mathbb{F}_{2^r}$  zu konstruieren.

Die  $q_i$  des linearen Schieberegisters sind die Koeffizienten des Polynoms  $P(x)$ . Um gute Anfangsbedingungen zu haben, wählen wir irgendein von null verschiedenes Polynom  $b = b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + b_1x + b_0$  aus  $\mathbb{F}_{2^r}$ . Wir definieren die Anfangsbedingungen als

$$\begin{aligned} a_0 &= T(b) &= b_{r-1}, \\ a_1 &= T(xb), \\ &\vdots \\ a_{r-1} &= T(x^{r-1}b). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Wir sehen uns nun an, wie der Wert von  $a_1$  berechnet wird:

$$\begin{aligned} a_1 = T(bx) &= T(b_{r-1}x^r + b_{r-2}x^{r-1} + \cdots + b_0x) \\ &= T(b_{r-1}(q_{r-1}x^{r-1} + \cdots + q_1x + q_0) + b_{r-2}x^{r-1} + \cdots + b_0x) \\ &= T((b_{r-1}q_{r-1} + b_{r-2})x^{r-1} + \cdots) \\ &= b_{r-1}q_{r-1} + b_{r-2}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Eine ähnliche Rechnung ermöglicht die Bestimmung der Werte  $a_2, \dots, a_{r-1}$ . Die Formeln werden schnell groß, aber die Rechnungen lassen sich in der Praxis sehr schnell durchführen, wenn die  $q_i$  und  $b_i$  durch Nullen und Einsen ersetzt werden.

**Beispiel 1.10** In Beispiel 1.5 hatten wir das Polynom  $P(x) = x^4 + x + 1$  verwendet. (Übung: Verifizieren Sie, dass das Polynom irreduzibel und primitiv ist.) Das gewählte Polynom  $b$  war einfach  $b = 1$ . Das führt zu den Anfangsbedingungen  $a_0 = T(1) = 0$ ,  $a_1 = T(x) = 0$ ,  $a_2 = T(x^2) = 0$  und  $a_3 = T(x^3) = 1$ .

**Proposition 1.11** Wir wählen die Koeffizienten  $q_0, \dots, q_{r-1}$  eines Schieberegisters als diejenigen eines primitiven Polynoms

$$P(x) = x^r + q_{r-1}x^{r-1} + \cdots + q_1x + q_0.$$

Es sei  $b = b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + b_1x + b_0$ . Wir wählen die Anfangselemente  $a_0, \dots, a_{r-1}$  so wie in (1.33). Dann ist die durch das Schieberegister erzeugte Folge  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  durch  $a_n = T(x^n b)$  gegeben und sie wiederholt sich mit einer Periode, die  $2^r - 1$  teilt.

**BEWEIS.** Wir verwenden die Tatsache, dass  $P(x) = 0$ , das heißt,  $x^r = q_{r-1}x^{r-1} + \cdots + q_1x + q_0$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} T(x^r b) &= T((q_{r-1}x^{r-1} + \cdots + q_1x + q_0)b) \\ &= q_{r-1}T(x^{r-1}b) + \cdots + q_1T(xb) + q_0T(b) \\ &= q_{r-1}a_{r-1} + \cdots + q_1a_1 + q_0a_0 \\ &= a_r. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Wir wenden vollständige Induktion an. Wir nehmen an, dass die Elemente der Folge die Bedingung  $a_i = T(x^i b)$  für  $i \leq n-1$  erfüllen. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
 T(x^n b) &= T(x^r x^{n-r} b) = T((q_{r-1} x^{r-1} + \dots + q_1 x + q_0) x^{n-r} b) \\
 &= q_{r-1} T(x^{n-1} b) + \dots + q_1 T(x^{n-r+1} b) + q_0 T(x^{n-r} b) \\
 &= q_{r-1} a_{n-1} + \dots + q_1 a_{n-r+1} + q_0 a_{n-r} \\
 &= a_n.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Folglich entspricht die Multiplikation mit  $x$  genau der mit dem Schieberegister durchgeführten Rechnung und deswegen gilt  $a_n = T(x^n b)$  für alle  $n$ . Wir sehen sofort, dass die minimale Periode eine Länge von höchstens  $2^r - 1$  hat, denn  $x^{2^r-1} = 1$ .  $\square$

Wir können uns fragen, was die minimale Periode dieser Folge ist. Zunächst einmal muss sie ein Teiler von  $2^r - 1$  sein (s. Übung 11). Wir zeigen, dass die minimale Periode genau  $2^r - 1$  ist, wenn  $P$  primitiv ist. Der Beweis wird indirekt geführt. Wäre die Periode durch  $s \in \mathbb{N}$  so gegeben, dass  $2^r - 1 = sm$  und  $1 < s < 2^r - 1$ , dann müsste die unendliche Folge  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  mit der Folge  $\{a_{n+s}\}_{n \geq 0}$  identisch sein. Wir zeigen, dass das nicht sein kann. Vergessen Sie nicht unsere ursprüngliche Absicht, Folgen zu erzeugen, die mit Verschiebungen von sich selbst schlecht korrelieren. Wir berechnen gleichzeitig die Korrelation zwischen zwei beliebigen Fenstern  $B$  und  $C$  der Länge  $M = 2^r - 1$ , wobei  $B = \{a_n\}_{n=m}^{n=m+M-1}$  und  $C = \{a_n\}_{n=p}^{n=p+M-1}$ .

**Proposition 1.12** *Ist  $B = \{a_n\}_{n=m}^{n=m+M-1}$  und  $C = \{a_n\}_{n=p}^{n=p+M-1}$ , dann gilt  $\text{Cor}(B, C) = -1$ , falls  $M$  kein Teiler von  $p - m$  ist.*

**BEWEIS.** Wir können  $m \leq p$  voraussetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Cor}(B, C) &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^{a_{m+i}} (-1)^{a_{p+i}} \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^{T(x^{m+i} b)} (-1)^{T(x^{p+i} b)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^{T(x^{m+i} b) + T(x^{p+i} b)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^{T(x^{m+i} b + x^{p+i} b)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^{T(b x^{i+m} (1 + x^{p-m}))} \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} (-1)^{T(x^{i+m} \beta)},
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

wobei  $\beta = b(1 + x^{p-m})$ . Aufgrund unserer Wahl von  $P$  wissen wir, dass  $x$  eine primitive Wurzel unseres Körpers ist. Deswegen gilt  $x^M = 1$  und  $x^N \neq 1$ , falls  $1 \leq N < M$ . Wir schließen, dass  $x^N = 1$  dann und nur dann gilt, wenn  $M$  ein Teiler von  $N$  ist. Ist  $M$  ein Teiler von  $p - m$ , dann haben wir  $x^{p-m} = 1$  und  $\beta = b(1 + 1) = b \cdot 0 = 0$ , und in diesem Fall ist  $\text{Cor}(B, C) = M$ . Ist  $M$  kein Teiler von  $p - m$ , dann ist das Polynom  $(1 + x^{p-m})$  nicht das Nullpolynom; also ist  $\beta = b(1 + x^{p-m})$  ebenfalls von null verschieden, denn es ist das Produkt zweier von null verschiedener Elemente. Somit hat  $\beta$  die Form  $x^k$ , wobei  $k \in \{0, \dots, 2^r - 2\}$ . Das impliziert, dass die Menge  $\{\beta x^{i+m}, 0 \leq i \leq M-1\}$  eine Permutation der Elemente von  $\mathbb{F}_{2^r} \setminus \{0\} = \{1, x, \dots, x^{2^r-2}\}$  ist. Die Spurfunktion  $T$

nimmt den Wert 1 auf der Hälfte der Elemente von  $\mathbb{F}_{2^r}$  an und den Wert 0 auf den verbleibenden Elementen. Da sie den Wert 0 auf dem Nullelement annimmt, nimmt sie den Wert 1 auf  $2^{r-1}$  der Elemente von  $\mathbb{F}_{2^r} \setminus \{0\}$  und den Wert 0 auf den verbleibenden  $2^{r-1} - 1$  Elementen an. Demnach gilt  $\text{Cor}(B, C) = -1$ .  $\square$

**Korollar 1.13** *Die Periode der vom linearen Schieberegister erzeugten Pseudozufallsfolge ist genau  $M = 2^r - 1$ .*

BEWEIS. Wäre die Periode gleich  $K < M$ , dann würde die Folge mit ihrer Verschiebung um  $K$  Elemente übereinstimmen, und die beiden Folgen hätten eine Korrelation gleich  $M$ . Das ist ein Widerspruch zu Proposition 1.12.  $\square$

Möchten wir jetzt andere Pseudozufallsfolgen derselben Länge erzeugen, dann können wir das gleiche Prinzip anwenden, dabei aber das Polynom  $P(x)$  ändern. (Wir wollen für jeden Satelliten eine andere Folge haben.) Mit Hilfe der Galoistheorie können wir (in bestimmten Fällen) die Korrelation dieser neuen Folge mit der ersten Folge und deren Verschiebungen berechnen. Die Ingenieure begnügen sich jedoch damit, diese Korrelationswerte in vorberechneten Tabellen nachzusehen.

## 1.5 Kartografie

Wie in der Einführung erwähnt, begegnet man auf dem Gebiet der Kartografie gewissen nichttrivialen Problemen, wenn man versucht, eine treue Darstellung der Erdoberfläche zu geben. Karten werden allgemein verwendet, damit wir uns orientieren können. In Abhängigkeit von der Anwendung kann für uns wichtig sein, dass auf der Karte die Abstände erhalten bleiben, zum Beispiel wenn wir wollen, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Karte dem kürzesten Weg zwischen zwei realen Punkten entspricht. Diese Bedingung ist im Allgemeinen nicht wichtig für Landkarten, denn wenn wir mit dem Auto fahren, dann fahren wir gezwungenermaßen auf öffentlichen Straßen, und wenn wir zu Fuß gehen, dann sind die auftretenden Entfernungen so klein, dass jede Abweichung vom tatsächlichen kürzesten Weg vernachlässigt werden kann. Im Gegensatz hierzu wird das Problem wahrnehmbar bei der Wahl einer Flugzeugroute oder einer Schiffsroute. Außerdem reicht es für jemanden, der ein Segelboot oder ein kleines Flugzeug mit relativ rudimentärer Ausrüstung steuert, bei weitem nicht aus, die Route auf einer Karte einzuzeichnen. Es muss auch möglich sein, dass der Pilot den Kurs einhalten kann. Vor der Erfindung des GPS benutzte man in den meisten Fällen einen Magnetkompass als wichtigstes Navigationsgerät. Mit einem Magnetkompass können wir uns davon überzeugen, dass wir eine Flugbahn einhalten, die einen konstanten Winkel in Bezug auf das Magnetfeld der Erde aufrecht erhält. Eine solche Flugbahn ist nicht notwendigerweise der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten; aber es ist ein leicht einzuhaltender Weg und deswegen wären Karten zweckmäßig, auf denen diese Wege durch Geraden dargestellt sind. Seekarten und einige aeronautische Karten haben diese Eigenschaft. Jedoch werden auf diesen Karten einander entsprechende

Flächen nicht treu abgebildet: Zwei flächengleiche Gebiete der Erdkugel werden auf der Karte im Allgemeinen nicht durch flächengleiche Gebiete dargestellt.

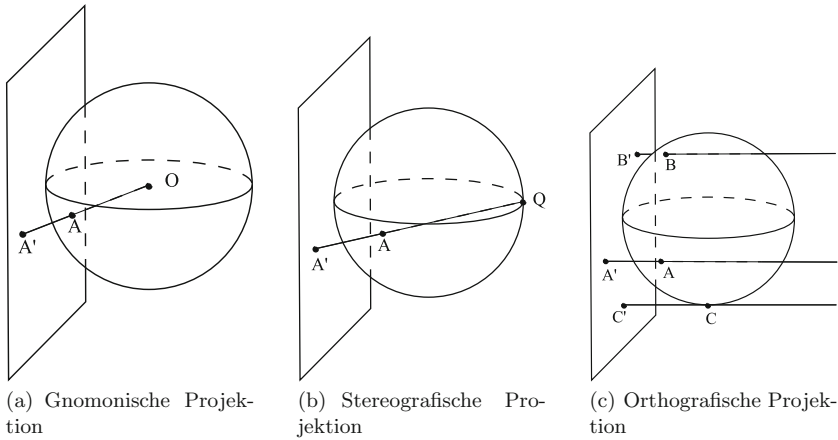
Wir beginnen mit einer Erklärung der Spielregeln. Ein Satz der Differentialgeometrie besagt, dass es unmöglich ist, einen Teil einer Kugeloberfläche so auf die Ebene abzubilden, dass sowohl Abstände als auch Winkel erhalten bleiben. (Für diejenigen, die mit der Terminologie vertraut sind: Eine solche Transformation heißt „Isometrie“ und diese erhält die „Gauß'sche Krümmung“ der Oberfläche. Die Gauß'sche Krümmung einer Kugel mit dem Radius  $R$  ist  $1/R^2$ , während die Gauß'sche Krümmung einer Ebene und eines Zylinders null ist.) Wir müssen also einen Kompromiss schließen. Der jeweilige Kompromiss hängt von der Anwendung ab.

Kartografie hat hauptsächlich mit Projektionen zu tun und davon gibt es viele verschiedene Typen.

**Projektion auf eine Tangentialebene einer Kugel.** Das ist der elementarste Typ von Projektionen. Es gibt mehrere Variationen dieses Projektionstyps: Die Projektion geht durch den Kugelmittelpunkt (*gnomonische Projektion*); die Projektion geht durch den Punkt, der diametral entgegengesetzt zum Tangentialpunkt liegt (*stereografische Projektion*); die Projektion verläuft längs der Geraden, die orthogonal zur Projektionsebene sind (*orthografische Projektion*). (Vgl. Abbildung 1.6.) Diese Familie von Projektionen liefert akzeptable Ergebnisse, wenn wir nur einen kleinen Teil der Kugel kartografisch darstellen möchten, der sich „in der Umgebung“ des Berührungspunktes befindet. Die Verzerrungen werden umso größer, je weiter wir uns von diesem Berührungspunkt entfernen. Vom mathematischen Standpunkt sind diese Projektionen (mit Ausnahme der stereografischen Projektion, die wir in Übung 24 diskutieren) nicht besonders interessant und wir werden sie nicht weiter behandeln.

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts beschränken wir unsere Diskussion auf Zylinderprojektionen. Nach der Projektion kann der Zylinder abgerollt werden, so dass sich eine Ebene ergibt. Wir erkennen sofort die Vorzüge: Anstelle eines Berührungspunktes (an dem die Karte am genauesten ist) haben wir einen ganzen Berührungskreis rund um die Kugel. Es gibt jedoch umso stärkere Verzerrungen, je weiter wir uns in Richtung der Kugelpole bewegen. Es gibt wieder mehrere Variationen dieser Projektion: In Abhängigkeit von der gewählten Methode hat die resultierende Karte unterschiedliche Eigenschaften. Im Allgemeinen überwiegt der Wunsch, Breitenkreise (Breitenparallele) auf horizontale Geraden und Längengrade (Meridiane) auf vertikale Geraden abzubilden. Eine solche Projektion bedeutet, dass es eine einfache Abbildung zwischen den kartesischen Koordinaten auf der Karte und Länge und Breite auf Erdkugel gibt (wobei es aber Abstandsverzerrungen zwischen unterschiedlichen Parallelen gibt).

**Projektion auf den Zylinder vom Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum.** Bei dieser Projektion wird die Kugeloberfläche auf einen unendlichen Zylinder abgebildet, wobei die Pole auf die unendlich ferne Grund- und Deckfläche des Zylinders abgebildet werden. Diese Projektion ist von geringem Nutzen bzw. Interesse – außer der Tatsache, dass sie eine einfache Formel hat.



**Abb. 1.6.** Drei Typen von Projektionen auf eine Tangentialebene.

**Horizontale Zylinderprojektion.** Diese Projektion ist den Geografen als Lambert'sche Zylinderprojektion bekannt, aber sie wurde bereits von Archimedes ausführlich untersucht. Es sei  $S$  eine Kugel mit Radius  $R$ , deren Oberfläche die Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  erfüllt. Wir möchten die Kugeloberfläche auf den Zylinder  $C$  projizieren, der die Gleichung  $x^2 + y^2 = R^2$  erfüllt. Die Projektion  $P: S \rightarrow C$  ist durch die Formel

$$P(x, y, z) = \left( \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \quad (1.38)$$

(s. Abbildung 1.7) gegeben. Der Punkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  ist also der Schnittpunkt des Zylinders und der horizontalen Halbgeraden, die vom Punkt  $(0, 0, z_0)$  (auf der vertikalen Achse) ausgeht und durch den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  geht.

Zwar hat Lamberts Zylinderprojektion weniger Verzerrungen als die Zylinderprojektion mit dem Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum, aber sie verzerrt die Abstände, wenn wir uns vom Äquator entfernen. Jedoch hat Lamberts Projektion eine bemerkenswerte Eigenschaft: sie ist flächentreu. Diese Eigenschaft wurde erstmalig von Archimedes entdeckt. Diese Projektion wurde deswegen bei der Herstellung des Peters-Atlases gewählt (s. Abbildung 1.8). Bei Atlanten mit anderen Projektionen sind die im Norden liegenden Staaten übertrieben groß. Auf dem Peters-Atlas [2] sind die Größen dieser Länder flächentreu abgebildet, obwohl sie weniger groß und breiter erscheinen. Wir beweisen jetzt diese bemerkenswerte Eigenschaft der Lambert'schen Zylinderprojektion.

**Satz 1.14** *Die durch die Gleichung (1.38) gegebene Projektion  $P: S \rightarrow C$  ist flächentreu. (In der Geografie und in der Kartografie sagt man, dass die Projektion äquivalent ist.)*

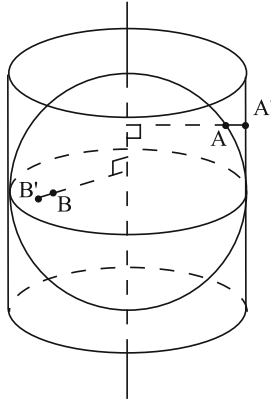


Abb. 1.7. Horizontale Zylinderprojektion.

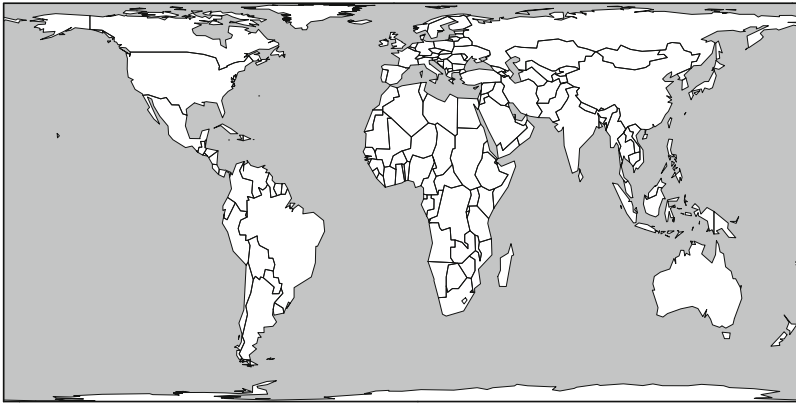


Abb. 1.8. Die Weltkarte entsprechend Lamberts Zylinderprojektion.

BEWEIS. Zur Vereinfachung des Beweises ändern wir zuerst unser Koordinatensystem. Wir parametrisieren die Kugel mit Hilfe zweier Winkelkoordinaten  $\theta$  und  $\phi$ , die unter Verwendung der folgenden Abbildungen zurück in kartesische Koordinaten abgebildet werden können:

$$F: (-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow S, \quad (\theta, \phi) \mapsto F(\theta, \phi) = (x, y, z) = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, R \sin \phi). \quad (1.39)$$



Das sind die sphärischen Koordinaten. Wir können  $\theta$  als Länge interpretieren, die nicht in Grad, sondern in Bogenmaß ausgedrückt wird, wobei  $\theta = 0$  dem Nullmeridian,  $\theta > 0$  den östlichen Längen und  $\theta < 0$  den westlichen Längen entspricht. Analog ist  $\phi$  die Breite, und positive Werte von  $\phi$  entsprechen den nördlichen Breiten. Auf ähnliche Weise und unter Verwendung der gleichen Parameter können wir den Zylinder folgendermaßen parametrisieren:

$$\begin{aligned} G: (-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow C, \\ (\theta, \phi) &\mapsto G(\theta, \phi) = (x, y, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, R \sin \phi). \end{aligned} \quad (1.40)$$

In diesen Koordinatensystemen lässt sich die Projektion  $P$  als Abbildung  $(\theta, \phi) \mapsto (\theta, \phi)$  schreiben. Es sei  $A$  ein Gebiet auf der Kugel und  $P(A)$  das zugehörige projizierte Gebiet auf dem Zylinder. Beide Gebiete sind Bilder ein und derselben Menge  $B$  mit

$$B \subset (-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Die Fläche von  $A$  auf der Kugel ist durch die folgende Formel gegeben (die wir in Kürze begründen werden):

$$\text{Area}(A) = \iint_B \left| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \phi} \right| d\theta d\phi, \quad (1.41)$$

wobei  $v \wedge w$  das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) von  $v$  und  $w$  bezeichnet und  $|v \wedge w|$  dessen Länge darstellt (s. [1] oder ein anderes Lehrbuch über Funktionen mehrerer Veränderlicher). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta} &= (-R \sin \theta \cos \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} &= (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi), \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \phi} &= (R^2 \cos \theta \cos^2 \phi, R^2 \sin \theta \cos^2 \phi, R^2 \sin \phi \cos \phi), \\ \left| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \phi} \right| &= R^2 |\cos \phi|. \end{aligned}$$

Analog ist für den Zylinder die Fläche von  $P(A)$  durch

$$\text{Area}(P(A)) = \iint_B \left| \frac{\partial G}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial G}{\partial \phi} \right| d\theta d\phi \quad (1.42)$$

gegeben. Hier sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \theta} &= (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0), \\ \frac{\partial G}{\partial \phi} &= (0, 0, R \cos \phi), \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial G}{\partial \phi} &= (R^2 \cos \theta \cos \phi, R^2 \sin \theta \cos \phi, 0), \\ \left| \frac{\partial G}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial G}{\partial \phi} \right| &= R^2 |\cos \phi|. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die Integrale für die Flächen von  $A$  und  $P(A)$  über dem gleichen Definitionsbereich  $B$  berechnet werden müssen. Da die beiden Integranden identisch

sind, zeigen die obigen Ausführungen, dass die beiden betrachteten Flächen tatsächlich gleich sind.  $\square$

**Begründung der Gleichungen (1.41) und (1.42).** Wir frischen hier kurz auf, wie man die entsprechenden Flächen berechnet. Wir zerschneiden  $B$  in infinitesimal kleine Rechtecke mit den Seitenlängen  $d\theta$  und  $d\phi$ . Die Fläche von  $A$  (beziehungsweise  $P(A)$ ) ist gegeben durch die Summe der Flächen der Bilder der Rechtecke unter der Abbildung  $F$  (beziehungsweise  $G$ ). Wir betrachten die Fläche von  $A$ . Wir können uns  $d\theta$  und  $d\phi$  als kleine Strecken denken, die tangential an den Kurven  $\phi = \text{constant}$  und  $\theta = \text{constant}$  liegen. Demnach sind die entsprechenden Bilder kleine Strecken, die tangential an den Bildern der beiden Kurven liegen: es handelt sich um die Vektoren  $\frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta$  und  $\frac{\partial F}{\partial \phi} d\phi$ . Diese Vektoren erzeugen im Allgemeinen ein Parallelogramm, dessen Fläche durch  $\left| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \phi} \right| d\theta d\phi$  gegeben ist (das Produkt der Längen der Vektoren multipliziert mit dem Sinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren).

In unserem Beweis ähnelt unter der Abbildung  $F$  dieser Teil von  $B$  einem kleinen Rechteck mit den Seitenlängen  $R d\theta |\cos \phi|$  und  $R d\phi$ . Analog ist das Bild dieses Teils unter der Abbildung  $G$  ein kleines Rechteck mit den Seitenlängen  $R d\theta$  und  $R |\cos \phi| d\phi$ . In beiden Fällen haben die Bilder eine Fläche von  $R^2 |\cos \phi| d\theta d\phi$ .

**Mercatorprojektion.** Lamberts Projektion ist flächentreu, aber nicht winkeltreu. Bei der Herstellung von Seekarten bevorzugt man winkeltreue Projektionen, denn diese ermöglichen ein leichtes Verfolgen des Kurses mit Hilfe eines Magnetkompasses. Die Mercatorprojektion  $M: S \rightarrow C$  leistet genau das. Diese Projektion überdeckt den ganzen unendlich langen Zylinder. Wir verwenden hier wieder die sphärischen Koordinaten (1.39) zur Darstellung eines auf der Kugel liegenden Punktes  $Q$ , der durch  $F(\theta, \phi)$  gegeben ist. Sein Bild unter  $M$  ist

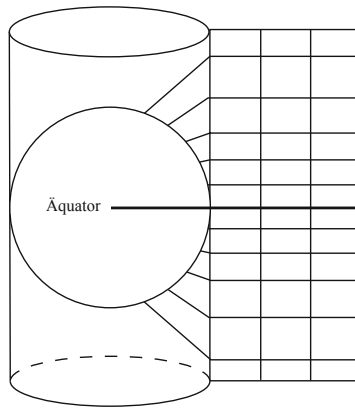
$$M(Q) = M(F(\theta, \phi)) = (R \cos \theta, R \sin \theta, R \log(\tan \frac{1}{2}(\phi + \frac{\pi}{2}))). \quad (1.43)$$

Wie zuvor ergibt sich die Projektion dann durch Abrollen des Zylinders. Es bezeichne  $\theta$  die horizontale Koordinate (Abszisse) auf dem abgewickelten Zylinder und  $z$  die vertikale Koordinate (Ordinate). Damit erhalten wir eine Abbildung  $N: S \rightarrow \mathbb{R}^2$  der Kugel auf die Ebene. Sind  $(\theta, \phi)$  die sphärischen Koordinaten eines Punktes  $Q$ , dann bilden wir diesen Punkt auf

$$N(F(\theta, \phi)) = (\theta, \log(\tan \frac{1}{2}(\phi + \frac{\pi}{2}))) \quad (1.44)$$

ab (s. Abbildungen 1.9 und 1.10).

**Definition 1.15** Eine Abbildung  $N: S_1 \rightarrow S_2$  von einer Oberfläche  $S_1$  auf eine Oberfläche  $S_2$  heißt konform, wenn sie winkeltreu ist. Das bedeutet: Schneiden sich zwei Kurven auf  $S_1$  im Punkt  $Q$  unter einem Winkel  $\alpha$ , dann schneiden sich die Bilder dieser beiden Kurven auf  $S_2$  im Punkt  $N(Q)$  unter dem gleichen Winkel  $\alpha$ .



**Abb. 1.9.** Mercatorprojektion: Man projiziert auf einen Zylinder und rollt diesen ab. Eine längs eines Meridians gegebene Entfernung erscheint um so länger, je weiter sie vom Äquator weg ist.



**Abb. 1.10.** Eine Weltkarte unter Verwendung der Mercatorprojektion. Da die gesamte Karte eine unendliche Höhe hat, zeigen wir hier nur den Teil zwischen 85°S und 85°N.

**Satz 1.16** *Die in den Gleichungen (1.43) und (1.44) definierten Abbildungen  $M$  und  $N$  sind konform.*

BEWEIS. Wir begnügen uns damit, den Beweis für die Abbildung  $N$  zu geben. Hieraus folgt die Konformität von  $M$ , wenn wir uns davon überzeugen, dass das Aufrollen oder Abrollen eines Zylinders den Schnittwinkel von Kurven, die sich auf der Zylinderfläche befinden, nicht ändern kann. Zwei einander berührende Kurven werden auf zwei einander berührende Kurven abgebildet; deswegen genügt es, sehr kleine Strecken zu betrachten, die tangential zum Schnittpunkt der ursprünglichen Kurven verlaufen. Man betrachte einen Punkt  $(\theta_0, \phi_0)$  und zwei durch diesen Punkt gehende kleine Strecken, die folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} v(t) &= (\theta_0 + t \cos \alpha, \phi_0 + t \sin \alpha), \\ w(t) &= (\theta_0 + t \cos \beta, \phi_0 + t \sin \beta). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Tangentenvektoren  $F \circ v = v_1$  und  $F \circ w = w_1$  in  $Q = F(\theta_0, \phi_0)$  und zeigen, dass sie den gleichen Winkel einschließen wie die Vektoren  $N \circ F \circ v = v_2$  und  $N \circ F \circ w = w_2$  in  $N(Q)$ . Die Tangentenvektoren können mit Hilfe der Kettenregel berechnet werden und sind durch

$$\begin{aligned} v'_1(0) &= R(-\sin \theta_0 \cos \phi_0 \cos \alpha - \cos \theta_0 \sin \phi_0 \sin \alpha, \\ &\quad \cos \theta_0 \cos \phi_0 \cos \alpha - \sin \theta_0 \sin \phi_0 \sin \alpha, \cos \phi_0 \sin \alpha), \\ w'_1(0) &= R(-\sin \theta_0 \cos \phi_0 \cos \beta - \cos \theta_0 \sin \phi_0 \sin \beta, \\ &\quad \cos \theta_0 \cos \phi_0 \cos \beta - \sin \theta_0 \sin \phi_0 \sin \beta, \cos \phi_0 \sin \beta), \\ v'_2(0) &= (\cos \alpha, \frac{\sin \alpha}{\cos \phi_0}), \\ w'_2(0) &= (\cos \beta, \frac{\sin \beta}{\cos \phi_0}) \end{aligned}$$

gegeben. Um zu zeigen, dass die Abbildung konform ist, verwenden wir die folgenden Kriterien:

**Lemma 1.17** *Die Abbildung ist konform, wenn es für alle  $\theta_0, \phi_0$  eine positive Konstante  $\lambda(\theta_0, \phi_0)$  derart gibt, dass für alle  $\alpha$  und  $\beta$  die folgende Relation für das Skalarprodukt von  $v'_i(0)$  und  $w'_i(0)$  gilt:*

$$\langle v'_1(0), w'_1(0) \rangle = \lambda(\theta_0, \phi_0) \langle v'_2(0), w'_2(0) \rangle. \quad (1.45)$$

BEWEIS. Es sei  $\psi_i$  der Winkel zwischen  $v'_i(0)$  und  $w'_i(0)$  für  $i = 1, 2$ . Wir möchten zeigen, dass  $\cos \psi_1 = \cos \psi_2$ . Ist (1.45) erfüllt, dann sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \cos \psi_1 &= \frac{\langle v'_1(0), w'_1(0) \rangle}{|v'_1(0)| |w'_1(0)|} \\ &= \frac{\langle w'_1(0), w'_1(0) \rangle}{\langle v'_1(0), v'_1(0) \rangle^{1/2} \langle w'_1(0), w'_1(0) \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda(\theta_0, \phi_0) \langle v'_2(0), w'_2(0) \rangle}{(\lambda(\theta_0, \phi_0) \langle v'_2(0), v'_2(0) \rangle)^{1/2} (\lambda(\theta_0, \phi_0) \langle w'_2(0), w'_2(0) \rangle)^{1/2}} \\ &= \frac{\langle v'_2(0), w'_2(0) \rangle}{\langle v'_2(0), v'_2(0) \rangle^{1/2} \langle w'_2(0), w'_2(0) \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{\langle v'_2(0), w'_2(0) \rangle}{|v'_2(0)| |w'_2(0)|} \\ &= \cos \psi_2. \end{aligned}$$

(Die Forderung, dass  $\lambda(\theta_0, \phi_0)$  positiv ist, gewährleistet, dass keine Division durch null auftritt und dass die Quadratwurzeln reell sind.)  $\square$

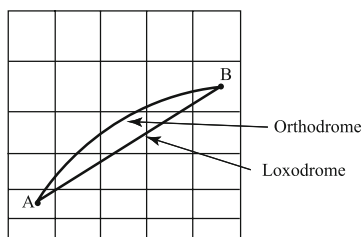
Die Verifizierung von (1.45) für die Mercatorprojektion ist etwas langwierig, vereinfacht sich aber schnell. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle v'_1(0), w'_1(0) \rangle &= R^2(\cos^2 \phi_0 \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta), \\ \langle v'_2(0), w'_2(0) \rangle &= \cos \alpha \cos \beta + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \phi_0}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass  $\lambda(\theta_0, \phi_0) = R^2 \cos^2 \phi_0$ .  $\square$

**Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf einer Kugel.** Wir betrachten zwei Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  auf der Oberfläche einer Kugel. Sind die Punkte nicht diametral entgegengesetzt, dann können sie nicht kollinear mit dem Kugelmittelpunkt sein. Die beiden Punkte bestimmen also zusammen mit dem Kugelmittelpunkt eine Ebene. Die Schnittfigur der Ebene und der Kugel ist ein Großkreis, auf dem die beiden Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  liegen. Die Punkte teilen den Kreis in zwei Kreisbögen, deren kürzerer auf der Kugeloberfläche der kürzeste Weg zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  ist. Es sei  $O$  der Kugelmittelpunkt. Dann ist die Länge dieses Weges gleich  $R\alpha$ , wobei  $\alpha \in [0, \pi)$  den Winkel zwischen  $OQ_1$  und  $OQ_2$  bezeichnet und  $R$  der Radius der Kugel ist. In der Seenavigation wird der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten als *Orthodrome* bezeichnet. In der Mathematik heißt der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf einer Oberfläche üblicherweise *Geodätische*. Die Geodätischen einer Kugel sind die Großkreise. Betrachten wir eine Karte in Mercatorprojektion, dann entspricht die Orthodrome zwischen zwei Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$  keiner geraden Linie auf der Karte – es sei denn, die Punkte liegen auf dem gleichen Längengrad. Im Vokabular der Seenavigation ist die *Loxodrome* zwischen zwei Punkten die Kurve, welche die beiden Punkte verbindet und sämtliche Meridianlinien unter dem gleichen Winkel schneidet (deswegen wird diese Kurve auch *Winkelgleiche* genannt). Bei der Mercatorprojektion entspricht diese Route einer geraden Strecke, die beide Punkte verbindet, und das beweist, dass ein solcher Weg immer existiert. Eine Loxodrome ist üblicherweise länger und jedenfalls nie kürzer als eine Orthodrome. Bei einer Mercatorprojektion der Kugel wird diese Beziehung jedoch umgekehrt (s. Abbildung 1.11).

**Wie man einer Trajektorie folgt.** Wenn wir nur mit Hilfe der traditionellen Navigationstechniken (mit anderen Worten: ohne GPS) von Punkt  $A$  zu Punkt  $B$  gelangen wollen, dann ist es leichter, der loxodromischen Route zu folgen (die bei einer Mercatorprojektion als Strecke erscheint). Diese Trajektorie schneidet jede Meridianlinie unter einem konstanten Winkel. Das traditionelle Navigationswerkzeug ist ein einfacher Magnetkompass, der die Richtung zum magnetischen Norden anzeigt. Die Linien des Magnetfeldes, das die Erde umgibt, ähneln den Meridianlinien. Die Feldlinien gehen vom magnetischen Nordpol aus und enden am magnetischen Südpol. Der magnetische Nordpol bzw. der magnetische Südpol stimmt jedoch nicht vollständig mit dem Nordpol bzw. Südpol der Erde überein. Außerdem sind die magnetischen Pole nicht statisch, sondern wandern langsam. Somit schneiden in der Praxis die Magnetfeldlinien die Meridianlinien in einem Winkel, und dieser Winkel ist nicht an jeder Stelle auf der Erde gleich;



**Abb. 1.11.** Orthodromischer und loxodromischer Weg zwischen zwei Punkten *A* und *B*.

darüber hinaus ändert sich der Winkel an einem gegebenen Ort von einem Jahr zum nächsten. Der exakte Wert der Schwankung zwischen dem Nordpol und dem magnetischen Nordpol kann mühelos in Tabellen nachgesehen werden und wird üblicherweise auf Seekarten und aeronautischen Karten angegeben. Alternativ können wir den Winkel auch berechnen, wenn wir unseren Standort und den Standort eines oder mehrerer nahe gelegener Orientierungspunkte kennen. Navigieren wir in einer hinreichend großen Entfernung von den Polen, dann können wir voraussetzen, dass die Schwankung nahezu konstant ist. Um also einer loxodromischen Route zu folgen, reicht es aus, einen Kompass auf den gewünschten Winkel gerichtet zu halten, der sich aus dem Winkel zwischen den Magnetfeldlinien und den Meridianlinien an der aktuellen Position errechnet.

**Kartografie in der Nähe der Pole.** Möchten wir Karten von den Polargebieten machen, dann erweisen sich die oben diskutierten Projektionen als nicht sehr praktisch. An deren Stelle betrachten wir Projektionen auf schiefe Zylinder oder Kegel. Wollen wir eine winkeltreue Projektion haben, dann können wir die Mercatorprojektion auf einen schiefen Zylinder verwenden. In diesem Fall geht jedoch die Eigenschaft verloren, dass Längen- und Breitenkreise auf Geraden abgebildet werden. Wir können auch winkeltreue Projektionen auf die Oberfläche eines Kegels betrachten. Diese Projektionen heißen *Lambert'sche Projektionen* (s. zum Beispiel Übung 26).

**Das UTM-Koordinatensystem.** Möchten wir einen Wegpunkt in einen GPS-Empfänger eingeben, dann müssen wir die Koordinaten des Punktes auf einer Karte berechnen. Viele Karten benutzen das UTM-Koordinatensystem (UTM = Universal Transverse Mercator), bei dem 60 Projektionen vom gleichen Typ wie die Mercatorprojektion verwendet werden: Der Unterschied besteht darin, dass der Zylinder nicht mehr vertikal, sondern horizontal ist, und daher die Erde längs eines Meridians tangential berührt. Die entsprechende Projektion heißt transversale Mercatorprojektion. Eine Längenzonzone überdeckt ein 6 Grad breites Längenintervall. Jede der 60 Längenzonen im UTM-System beruht auf einer transversalen Mercatorprojektion. Das ermöglicht es uns, ein Gebiet von einer großen Nord-Süd-Ausdehnung mit einer geringfügigen Verzerrung abzubilden. Dieses System wurde ursprünglich von der North Atlantic Treaty Organization (NATO) im Jahr 1947 entworfen.

## 1.6 Übungen

### *GPS (Global Positioning System)*

1. Zeigen Sie, dass der Nenner von Gleichung (1.16) dann und nur dann gleich null ist, wenn die vier Satelliten in ein und derselben Ebene liegen.
2. Das Navigationssystem *Loran* (für „LOnge RANge“) wurde viele Jahre lang für die Meeresnavigation verwendet, insbesondere an den nordamerikanischen Küsten. Viele Schiffe sind immer noch mit Loran-Empfängern ausgestattet, weswegen das System nicht außer Dienst gestellt worden ist, obwohl sich das GPS zunehmender Beliebtheit erfreut. Loran-Sender sind in Ketten von drei bis fünf Sendern angeordnet, von denen einer als Master-Station  $M$  und die anderen als Slave-Stationen  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  fungieren.
  - Die Master-Station sendet ein Signal.
  - Die Slave-Station  $W$  empfängt das Signal, führt eine Zeitverzögerung von vorher festgelegter Länge durch und sendet dann das gleiche Signal weiter.
  - Die Slave-Station  $X$  empfängt das Signal, führt eine Zeitverzögerung von vorher festgelegter Länge durch und sendet dann das gleiche Signal weiter.
  - usw.

Die von jeder Slave-Station durchgeführten Verzögerungen werden so gewählt, dass keinerlei Zweifel in Bezug auf den Ursprung eines Signals aufkommen können, das irgendwo im Dienstbereich der Senderkette empfangen wird. Die Idee hinter dem System ist, dass der Loran-Empfänger (auf dem Schiff) die Phasenverschiebung zwischen den empfangenen Signalen misst. Da zwischen drei und fünf Signale empfangen werden, gibt es mindestens zwei Phasenverschiebungen, die unabhängig sind.

(a) Erklären Sie, wie wir unsere Position bestimmen können, wenn wir zwei Phasenverschiebungen kennen.

(b) In der Praxis ermöglicht die Phasenverschiebung zwischen der ersten Antenne und der zweiten Antenne, dass sich der Empfänger auf einem Hyperbelast lokalisieren kann. Warum?

*Kommentar:* Diese hyperbolischen Positionierungskurven werden auf den Seekarten eingezeichnet. Eine Position auf einer Seekarte lässt sich also als Schnittpunkt zweier hyperbolischer Kartenkurven identifizieren.

3. Um seine Position zu berechnen, muss ein GPS-Empfänger die Signallaufzeit für vier Satelliten kennen. Wir schränken das Problem ein, indem wir voraussetzen, dass sich der Empfänger auf der Höhe null befindet (also in Meereshöhe). Zeigen Sie, dass in diesem Fall nur drei Satelliten erforderlich sind, um die Position des Empfängers zu berechnen. Erläutern Sie die Details der durchzuführenden Rechnungen.
4. Meteoriten dringen regelmäßig in die Atmosphäre ein, erhitzen sich schnell, zerfallen und explodieren schließlich, bevor sie auf der Erdoberfläche einschlagen. Diese Explosion erzeugt eine Schockwelle, die sich mit Schallgeschwindigkeit in alle Richtungen

ausbreitet. Die Schockwelle wird von Seismographen registriert, die an verschiedenen Standorten auf der Erdoberfläche installiert worden sind.

Wir setzen voraus, dass vier Stationen (die mit perfekt synchronisierten Uhren ausgestattet sind) den Zeitpunkt registrieren, an dem die Schockwelle ankommt. Erklären Sie, wie man sowohl den Ort als auch die Zeit der Explosion berechnet.

5. Man betrachte eine Karte, auf der weder die Längen, noch die Breiten, noch die Richtung Norden angegeben sind. Erklären Sie, wie man aus der Kenntnis dreier Orientierungspunkte auf der Karte, die nicht auf einer Geraden liegen, die Position eines beliebigen Kartenpunktes berechnen kann. Was muss vorausgesetzt werden, damit diese Erklärung funktioniert?

### *Blitzschläge und Gewitter*

6. Welches ist die Minimalzahl von Detektoren, die einen Blitzschlag registrieren müssen, damit dieser lokalisiert werden kann? Geben Sie das Gleichungssystem an, das der Zentralrechner lösen muss, um diese Position zu berechnen.
7. Gegeben seien die zwei Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ , die von den Oszillogerturbographen an beiden Enden einer Starkstromleitung der Länge  $L$  gemessen wurden. Berechnen Sie die Position der Leitungsstörung.
8. Eine Nanosekunde ist ein Milliardstel einer Sekunde:  $10^{-9}$  s. Berechnen Sie die Entfernung, die das Licht in 100 Nanosekunden zurücklegt. Leiten Sie hieraus die Genauigkeit der Position ab, die von einem System berechnet wird, das die Lichtdurchgangszeiten mit einer Genauigkeit von 100 Nanosekunden misst.
9. Es sei  $P(I)$  die Popolansky-Funktion, und die Zufallsvariable  $X$ , welche die Stromstärke von Blitzschlägen misst, sei gemäß  $P(I)$  verteilt. Berechnen Sie die Dichtefunktion  $f(I)$  von  $X$ . Was ist der Modus (der Wert von  $I$ , für den die Dichte ihr Maximum annimmt) dieser Verteilung?
10. In anderen Gegenden wird typischerweise die in (1.17) gegebene Anderson-Erikson-Funktion  $P$  verwendet, wobei  $M = 31$  und  $K = 2,6$ . Im Gegensatz zur Popolansky-Funktion muss man hier numerische Methoden anwenden.
  - (a) Berechnen Sie den Median dieser Verteilung.
  - (b) Berechnen Sie das 90. Perzentil dieser Verteilung. Mit anderen Worten, finden Sie den Wert  $I$ , für den  $\text{Prob}(X \leq I) = 0,9$ .
  - (c) Es sei vorausgesetzt, dass 58% der entdeckten Blitzschläge eine Stromstärke haben, die höher als der Median ist. Berechnen Sie den Prozentsatz der Blitzschläge, die nicht entdeckt werden. Es sei weiterhin vorausgesetzt, dass nur die schwächsten Blitzschläge nicht entdeckt werden. Berechnen Sie den Schwellenwert der Stromstärke  $I_0$ , unter dem die Blitzschläge nicht entdeckt werden.
  - (d) Berechnen Sie den Modus dieser Verteilung.



**Lineare Schieberegister**

11. Man betrachte eine Folge  $\{a_n\}$ , die eine Periode der Länge  $N$  hat, das heißt,  $a_{n+N} = a_n$  für alle  $n$ . Zeigen Sie, dass die minimale Periode dieser Folge (also die kleinste ganze Zahl  $M$  mit  $a_{n+M} = a_n$  für alle  $n$ ) ein Teiler von  $N$  sein muss.
12. (a) Zeigen Sie, dass das Polynom  $x^4 + x^3 + 1$  primitiv über  $\mathbb{F}_2$  ist.  
 (b) Berechnen Sie die Folge, die durch das lineare Schieberegister erzeugt wird, bei dem  $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 0, 0, 1)$  und die Anfangsbedingungen durch  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (T(b), T(xb), T(x^2b), T(x^3b))$  mit  $b = 1$  gegeben sind. Beweisen Sie, dass diese Folge eine minimale Periode der Länge 15 hat.  
 (c) Zeigen Sie, dass diese Folge nicht dieselbe ist wie in Beispiel 1.5.  
 (d) Berechnen Sie die Korrelation zwischen dieser Folge und den verschiedenen Verschiebungen der Folge von Beispiel 1.5.
13. Zeigen Sie, dass das Polynom  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  nicht primitiv über  $\mathbb{F}_2$  ist. Berechnen Sie die Folge, die durch das lineare Schieberegister mit  $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1, 1)$  und den Anfangsbedingungen  $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (T(b), T(xb), T(x^2b), T(x^3b))$  mit  $b = 1$  erzeugt wird. Beweisen Sie, dass diese Folge eine minimale Periode mit einer Länge hat, die kleiner als 15 ist.

**Einige elementare Methoden der Positionsberechnung**

*Vor der Erfindung des GPS verwendete die Menschheit mehrere andere (mathematische!) Methoden und geniale Instrumente zur Positionsberechnung: die Position des Polarsterns, die Position der Sonne zur Mittagszeit, den Sextanten usw. Einige dieser Techniken sind auch heute noch in Gebrauch. Auch wenn das GPS viel genauer und einfach zu bedienen ist, können wir nicht garantieren, dass das System niemals versagt, oder dass wir immer einen Satz von neuen Batterien zur Hand haben. Daher sind diese einfacheren Techniken auch weiterhin wichtig und werden eingesetzt.*

14. Der Polarstern befindet sich ziemlich nahe an der Rotationsachse der Erde und ist nur von der nördlichen Halbkugel aus sichtbar.  
 (a) Unter welchem Winkel über dem Horizont sehen wir den Polarstern, wenn wir uns auf dem 45. Breitenkreis befinden? Und was ist, wenn wir uns auf dem 60. Breitenkreis befinden?  
 (b) Angenommen, Sie sehen den Polarstern unter dem Winkel  $\theta$  über dem Horizont. Auf welcher Breite befinden Sie sich?
15. Die Rotationsachse der Erde bildet einen Winkel von 23,5 Grad mit der Normalen zur ekliptischen Ebene (also der Ebene, in der sich die Erde um die Sonne bewegt).  
 (a) Der nördliche Polarkreis liegt bei 66,5 Grad nördlicher Breite. Unter welchem Winkel über dem Horizont sehen Sie mittags die Sonne während der Tagundnachtgleiche, wenn Sie sich auf dem nördlichen Polarkreis befinden. Und wie groß ist der Winkel

während der Sommersonnenwende? Während der Wintersonnenwende? (Die letztere Eigenschaft führte zum Namen dieses speziellen Breitenkreises.)

(b) Beantworten Sie die gleiche Frage unter der Annahme, dass Sie sich auf dem Äquator befinden.

(c) Beantworten Sie die gleiche Frage unter der Annahme, dass Sie sich auf 45 Grad nördlicher Breite befinden.

(d) Der Wendekreis des Krebses befindet sich auf 23,5 Grad nördlicher Breite. Zeigen Sie, dass die Sonne während der Sommersonnenwende mittags senkrecht über dem Wendekreis des Krebses steht.

(e) Über welchen Punkten der Erdoberfläche steht die Sonne mittags an mindestens einem Tag des Jahres senkrecht?

16. Wir können auch die Mittagshöhe der Sonne verwenden, um die Breite zu berechnen. Berechnen Sie die Breite Ihres Standorts, wenn die Sonne während der Sommersonnenwende mittags unter einem Winkel  $\theta$  über dem Horizont steht. Beantworten Sie dieselbe Frage, wenn es sich um die Tagundnachtgleiche und um die Wintersonnenwende handelt.

17. Zur Bestimmung der ungefähren Länge Ihres Standorts können Sie folgende Technik anwenden. Stellen Sie Ihre Uhr auf die Ortszeit des Greenwich-Meridians (also des Nullmeridians). Registrieren Sie die angezeigte Zeit, wenn die Sonne im Zenit steht. Wie können Sie diese Information nutzen, um die Länge Ihres Standorts zu berechnen? Diese Methode ist nicht übertrieben genau, da es ziemlich schwierig ist festzustellen, dass die Sonne im Zenit steht. Deswegen interpolieren Navigatoren zur See typischerweise die Ergebnisse zweier Messungen, von denen die eine vor dem Zenit und die andere danach durchgeführt worden ist.

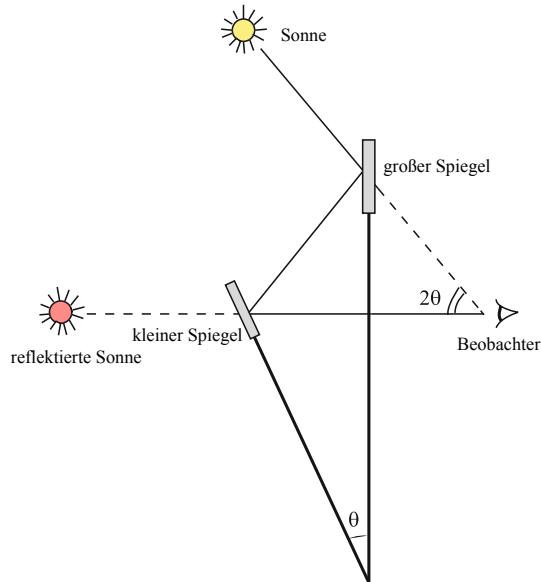
18. **Die Funktionsweise eines Sextanten:** Wie in den Übungen 14 und 17 gezeigt, können wir Länge und Breite dadurch bestimmen, dass wir den Winkel der Sonne oder des Polarsterns über dem Horizont messen. Das ist in der Theorie gut und schön, aber wie führen wir in der Praxis eine genaue Messung durch, wenn wir auf einem schaukelnden Boot stehen? Das ist der Augenblick, in dem sich der Sextant als nützlich erweist. Sextanten benutzen ein System von zwei Spiegeln. Der Navigator reguliert den Winkel zwischen den zwei Spiegeln so lange, bis er das Spiegelbild der Sonne oder des Polarsterns auf der Horizontlinie sieht, wie in Abbildung 1.12 gezeigt wird.

(a) Zeigen Sie: Ist  $\theta$  der Winkel zwischen den zwei Spiegeln, dann ist  $2\theta$  der Winkel, den die Sonne oder der Polarstern über dem Horizont bildet.

(b) Erklären Sie, warum die Messung durch das Schaukeln des Bootes nicht übermäßig beeinflusst wird.

### *Kartografie*

19. Man betrachte zwei Punkte  $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$  und  $Q_2 = (x_2, y_2, z_2)$  auf der Oberfläche einer idealisierten kugelförmigen Erde mit Radius  $R$ . Die Längen dieser beiden Punkte



**Abb. 1.12.** Die Funktionsweise eines Sextanten (Übung 18).

seien  $\theta_1$  und  $\theta_2$  und die Breiten seien  $\phi_1$  bzw.  $\phi_2$ . Berechnen Sie die minimale Entfernung, die diese beiden Punkte längs der Erdoberfläche haben.

20. Gegeben sei eine Karte, die mit Hilfe der standardmäßigen Mercatorprojektion hergestellt wurde. Berechnen Sie die Gleichung der Orthodrome zwischen dem Punkt der Länge  $0^\circ$  und der Breite  $0^\circ$  sowie dem Punkt der Länge  $90^\circ\text{W}$  und der Breite  $60^\circ\text{N}$ .
21. Gegeben sei eine Karte, die mit Hilfe der horizontalen Zylinderprojektion hergestellt wurde. Berechnen Sie die Gleichung der Orthodrome zwischen dem Punkt der Länge  $0^\circ$  und der Breite  $0^\circ$  sowie dem Punkt der Länge  $90^\circ\text{W}$  und der Breite  $60^\circ\text{N}$ .
22. Man betrachte die Projektion einer Kugel auf einen senkrechten Zylinder, wobei der Kugelmittelpunkt das Projektionszentrum sei.
  - (a) Geben Sie die Formel an, mit der die Projektion beschrieben wird.
  - (b) Worauf werden die Meridiane abgebildet? Worauf die Breitenkreise?
  - (c) Was ist das Bild eines Großkreises?
23. Kegelprojektionen verwenden Kegel, die eine Kugel berühren oder schneiden, wobei der Kugelmittelpunkt das Projektionszentrum ist. Stellen Sie sich eine Kegelprojektion vor

und zeichnen Sie das Gitter der Meridiane und der Breitenkreise auf den abgewickelten Kegel.

- 24. Stereografische Projektion:** Man betrachte die Projektion einer Kugel auf eine Ebene, welche die Kugel tangential in einem Punkt  $P$  berührt. Es sei  $P'$  derjenige Punkt auf der Kugel, der diametral entgegengesetzt zum Punkt  $P$  liegt. Die Projektion wird wie folgt durchgeführt: Ist  $Q$  ein Punkt auf der Kugel, dann ist seine Projektion der Schnittpunkt der Geraden  $P'Q$  mit der Ebene, welche die Kugel in  $P$  berührt.
- (a) Geben Sie die Formel dieser Projektion für den Fall an, dass  $P$  der Südpol ist und die Kugel den Radius 1 hat. (In diesem Fall ist der Punkt  $P'$  der Nordpol und die Tangentialebene wird durch die Gleichung  $z = -1$  beschrieben.)
- (b) Zeigen Sie, dass diese Projektion winkeltreu ist.

- 25.** Zur genauen Darstellung der Erde müssen wir als Modell ein Rotationsellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  nehmen. Die sphärischen Koordinaten eines Ellipsoids lassen sich in der Form

$$(x, y, z) = (a \cos \theta \cos \phi, a \sin \theta \cos \phi, b \sin \phi)$$

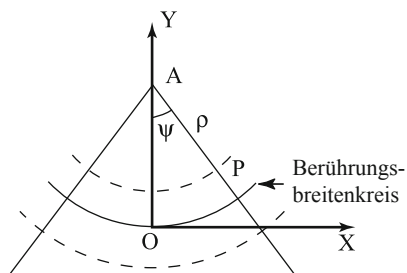
schreiben. Der Längenbegriff ist der gleiche wie im Fall einer Kugel, aber die meisten Geografen tendieren zur Verwendung der geodätischen Breite, die folgendermaßen definiert ist: Die geodätische Breite eines Punktes  $P$  auf einem Ellipsoid ist der Winkel zwischen dem Normalvektor im Punkt  $P$  und der Äquatorebene (d. h. der Ebene  $z = 0$ ). Berechnen Sie die geodätische Breite als Funktion von  $\phi$ .

- 26. Lamberts winkeltreue Kegelpjektion:** Man betrachte die Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  und einen Kegel mit Spitze über dem Nordpol in einem Punkt der  $z$ -Achse.
- (a) Welches sind die Koordinaten der Kegelspitze, wenn der Kegel die Kugel längs des Breitenkreises  $\phi_0$  berührt?
- (b) Zerschneiden wir den Kegel entlang dem Meridian  $\theta = \pi$  und wickeln wir den Kegel anschließend ab, dann erhalten wir einen Kreissektor. Zeigen Sie, dass der Winkel an der Spitze dieses Sektors gleich  $2\pi \sin \phi_0$  ist.
- (c) Zeigen Sie, dass der Abstand  $\rho_0$  zwischen der Kegelspitze und sämtlichen Punkten, an denen sich der Kegel und die Kugel berühren, gleich  $\rho_0 = \cot \phi_0$  ist.
- (d) **Schwieriger!** Wir nehmen an, dass der Sektor so abgewickelt und ausgerichtet ist, wie in Abbildung 1.13 dargestellt.

Die Lambert'sche Projektion der Kugel auf diesen abgewickelten Sektor ist folgendermaßen definiert. Es sei  $(x, y, z) = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi)$  ein Punkt auf der Kugel. Man bilde diesen Punkt auf den Punkt

$$\begin{cases} X = \rho \sin \psi, \\ Y = \rho_0 - \rho \cos \psi \end{cases}$$

ab, wobei



**Abb. 1.13.** Abwickeln des Kegels für Übung 26: Ist  $P$  ein Punkt, dann bilden  $\rho = |AP|$  und  $\psi$  den Winkel  $\widehat{OAP}$ .

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \left( \frac{\tan \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi)}{\tan \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi_0)} \right)^{\sin \phi_0}, \\ \psi = \theta \sin \phi_0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die durch  $(x, y, z) \mapsto (X, Y)$  gegebene Projektion der Kugel auf den Kegel winkeltreu ist.

## Literaturverzeichnis

- [1] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [2] A. Peters (Herausgeber), *Peters World Atlas*. Turnaround Distribution, 2002.
- [3] P. Richardus und R. K. Adler, *Map Projections*. North-Holland, 1972.
- [4] E. F. Taylor und J. A. Wheeler, *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. Addison Wesley Longman, New York, 2000. (Kapitel 1 und 2 sowie Projekt über GPS.)

Mathematik und Technologie

Rousseau, C.; SAINT-AUBIN, Y.

2012, XV, 609 S. 214 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-30091-2