
Vorwort

Welchen Nutzen hat die Mathematik? Ist in der Mathematik nicht alles schon entdeckt? Das sind ganz natürliche Fragen, die häufig von Studenten der unteren Studienjahre gestellt werden. Die Antworten der Professoren sind oft ziemlich kurz. Die meisten Universitätskurse sind fest strukturiert, und es besteht ein großer Zeitdruck. Deswegen bieten diese Kurse kaum Gelegenheit, echte Anwendungen zu bringen und Beispiele aus der realen Welt zu untersuchen.

Sogar noch mehr Oberschüler stellen die gleichen Fragen mit größerer Hartnäckigkeit. Die Lehrer in diesen Schulen arbeiten im Allgemeinen unter noch größerem Druck als Universitätsprofessoren. Wenn die betreffenden Schüler und Studenten dazu in der Lage sind, kompetent auf diese Fragen zu antworten, dann liegt das vermutlich daran, dass sie von ihren Lehrern und Professoren gute Antworten bekommen haben. Aber wessen Fehler ist es, wenn sie nicht antworten können?

Die Entstehung dieses Textes

Bevor wir eine Einführung in den Text geben, müssen wir zunächst über die Vorlesung sprechen, die zu diesem Buch geführt hat. Die Vorlesung „Mathematik und Technologie“ wurde an der Universität Montreal ins Leben gerufen und erstmalig im Wintersemester 2001 gehalten. Die Vorlesung entstand, weil die meisten Kurse im Mathematik-Department nicht auf die realen Anwendungen eingegangen sind. Unsere Vorlesung war von Anfang an sowohl für Studenten der unteren Studienjahre als auch für künftige Gymnasiallehrer konzipiert.

Da es für die Vorlesung, die wir anvisierten, kein geeignetes Lehrbuch gab, schrieben wir unsere eigenen Vorlesungstexte. Wir waren in diese Niederschriften so vertieft, dass sie bald den Umfang eines Lehrbuches annahmen und viel mehr Material enthielten, als in einem Semester geboten werden konnte. Obwohl wir beide Berufsmathematiker sind, müssen wir zugeben, dass wir von den meisten Anwendungen, die in den folgenden Kapiteln behandelt werden, wenig oder nichts wussten.

Das Ziel des Kurses „Mathematik und Technologie“

Das Hauptziel des Kurses besteht darin, den aktiven und lebendigen Charakter der Mathematik zu demonstrieren, ihre Allgegenwart bei der Entwicklung von Technologien aufzuzeigen und die Studenten und Oberschüler in Modellierungsprozesse einzuführen, die einen Weg zur Entwicklung verschiedener mathematischer Anwendungen darstellen.

Einige der behandelten Themen gehören nicht im engeren Sinne zum Gebiet der Technologie. Dennoch hoffen wir, dass wir die Nützlichkeit der Mathematik und insbesondere die Rolle deutlich gemacht haben, welche die Mathematik in den Alltagstechnologien spielt. Mehrere der in diesem Buch behandelten Themen befinden sich immer noch in einer aktiven Entwicklungsphase. Dieser Umstand ermöglicht den Studenten – häufig zum ersten Mal – zu erkennen, dass die Mathematik ein offenes und dynamisches Fachgebiet ist.

Zu den Studenten, die unsere Vorlesung besuchen, gehören auch zukünftige Ober- schullehrer. Deswegen ist es wichtig zu betonen, dass unser Ziel nicht nur darin besteht, ihnen Beispiele und Anwendungen zu vermitteln, die sie später an ihre eigenen Schüler weitergeben können. Vielmehr möchten wir unseren Studenten Werkzeuge in die Hand geben, mit deren Hilfe sie dann für ihre späteren Schüler geeignete Beispiele aus dem wirklichen Leben formulieren und entwickeln können. Wir möchten unseren Studenten das Gefühl vermitteln, dass sie ein Fach unterrichten, das nicht nur an sich elegant ist, sondern dass die Anwendungen der Mathematik dazu beigetragen haben, unsere physikalische Umgebung zu verstehen und zu gestalten.

Die Auswahl der Themen

Bei der Auswahl der Themen haben wir folgenden Punkten eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet:

- Die Anwendungen sollten neueren Ursprungs sein oder das Alltagsleben der Studenten beeinflussen. Außerdem sollten – im Gegensatz zu anderen Vorlesungen für Fortgeschrittene – einige der von uns betrachteten Teilgebiete der Mathematik modern sein oder sich sogar noch im Stadium der Entwicklung befinden.
- Die Mathematik sollte relativ elementar sein, und falls sie dennoch über den typischen Lehrplan (Differential- und Integralrechnung, Lineare Algebra, Wahrscheinlichkeitstheorie) eines Studenten des ersten Studienjahres hinausgeht, dann müssen die fehlenden Teile im Rahmen des betreffenden Kapitels behandelt werden. Wir haben uns bemüht, umfassenden Gebrauch von der Oberschulmathematik zu machen – insbesondere von der euklidischen Geometrie. Die Mathematik der Oberschule und der unteren Studienjahre stellt beachtliche Werkzeuge bereit, die den Studenten den Zugang zu einem großen Anwendungsbereich ermöglichen und häufig zum ersten Mal das Zusammenspiel unterschiedlicher Teilgebiete vor Augen führen.
- Das Niveau der erforderlichen mathematischen Bildung sollte ein gewisses Minimum nicht überschreiten: Ideen sind das wertvollste Gut eines Wissenschaftlers, und hinter den meisten technologischen Erfolgen liegt eine geistreiche und dennoch mitunter elementare Beobachtung.

In diesem Sinne umfasst die im vorliegenden Buch verwendete Mathematik ein sehr breites Spektrum:

- Geraden und Ebenen treten in allen ihren Formen auf (Normalformen, Parametergleichungen, Unterräume), häufig auf unerwartete Weise (etwa bei der Verwendung des Schnittes mehrerer Ebenen zur Entschlüsselung von Nachrichten, die mit einem Reed-Solomon-Code verschlüsselt wurden).
- Eine große Anzahl von Themen macht von grundlegenden geometrischen Objekten Gebrauch: von Kreisen, Kugeln und Kegelschnitten. Der Begriff des *geometrischen Ortes* von Punkten in der euklidischen Geometrie tritt häufig auf, zum Beispiel bei Aufgaben, in denen wir die Position eines Objekts durch Triangulation berechnen (Kapitel 1 über GPS und Kapitel 15 über *Science Flashes*).
- Die verschiedenen Typen von affinen Transformationen in der Ebene oder im Raum (insbesondere Drehungen und Symmetrien) kommen mehrere Male vor: in Kapitel 11 über Bildkompression unter Verwendung von Fraktalen, in Kapitel 2 über Mosaik und Friese und in Kapitel 3 über Roboterbewegungen.
- Endliche Gruppen erscheinen als Symmetriegruppen (Kapitel 2 über Mosaik und Friese) und auch bei der Entwicklung von Primalitätstests in der Kryptografie (Kapitel 7).
- Endliche Körper treten in Kapitel 6 über fehlerkorrigierende Codes, in Kapitel 1 über das GPS und in Kapitel 8 über die Erzeugung von Zufallszahlen auf.
- Sowohl Kapitel 7 über Kryptografie als auch Kapitel 8 über die Erzeugung von Zufallszahlen verwendet die Arithmetik modulo n , während Kapitel 6 über fehlerkorrigierende Codes die Arithmetik modulo 2 verwendet.
- Wahrscheinlichkeitstheorie tritt an mehreren unerwarteten Stellen in Erscheinung: in Kapitel 9 über den *PageRank*-Algorithmus von *Google* und bei der Konstruktion von großen Primzahlen in Kapitel 7. Die Wahrscheinlichkeitstheorie wird in klassischer Ausrichtung in Kapitel 8 zur Erzeugung von Zufallszahlen verwendet.
- Lineare Algebra ist allgegenwärtig: in Kapitel 6 über Hamming- und Reed-Solomon-Codes, in Kapitel 9 über den *PageRank*-Algorithmus, in Kapitel 3 über Roboterbewegungen, in Kapitel 2 über Mosaik und Friese, in Kapitel 1 über das GPS, in Kapitel 12 über den JPEG-Standard und so weiter.

Verwendung des Buches als Vorlesungstext

Das Buch ist für Studenten geschrieben, die mit der euklidischen Geometrie ebenso vertraut sind wie mit Funktionen mehrerer Variabler, linearer Algebra und elementarer Wahrscheinlichkeitstheorie. Wir hoffen, dass wir implizit kein anderes Hintergrundwissen vorausgesetzt haben. Das Durcharbeiten des Textes erfordert dennoch eine gewisse wissenschaftliche Reife: Es kommt auf das Zusammenwirken einer Vielfalt von mathematischen Werkzeugen an, die ursprünglich in einem anderen Zusammenhang gelehrt wurden. Aus diesem Grund sind Studenten der unteren Studienjahre die ideale Hörschaft für den Kurs.

Der Text präsentiert die Anwendungen in zwei Formen: Die Kapitel (mit Ausnahme von Kapitel 15) sind lang und detailliert, während die *Science Flashes* (die Abschnitte von Kapitel 15) knapp gehalten sind. Die Leser werden eine bestimmte Einheitlichkeit in der Form der längeren Kapitel feststellen: Die ersten Abschnitte beschreiben die Anwendung und das ihr zugrundeliegende mathematische Problem; danach folgt eine Untersuchung einfacher Fallbeispiele und, falls notwendig, eine Entwicklung der erforderlichen Mathematik. Wir bezeichnen diese Abschnitte als den *grundlegenden Teil* des betreffenden Kapitels. Danach können Abschnitte folgen, in denen wir kompliziertere Beispiele untersuchen, mehr zu den bereits diskutierten mathematischen Werkzeugen sagen oder einfach darauf aufmerksam machen, dass die Mathematik allein nicht immer ausreicht! Diese Abschnitte eines Kapitels bezeichnen wir als *fortgeschrittenen Teil*. Jede Anwendung wird typischerweise in fünf bis sechs Vorlesungsstunden behandelt: Zwei Stunden für die grundlegende Theorie, zwei Stunden für Beispiele und Übungen, und – wenn es die Zeit erlaubt – ein oder zwei Stunden für fortgeschrittene Themen. Häufig können wir das fortgeschrittene Material nur kurz behandeln, es sei denn, eine zweite Woche wird für das Kapitel zur Verfügung gestellt. Jeder *Science Flash* kann in einer Vorlesungsstunde behandelt werden, lässt sich aber auch als Übung stellen, ohne vorher die Theorie zu entwickeln. Es ist unser Ziel, im Laufe eines Semesters den Großteil von acht bis zwölf Kapiteln und eine Handvoll *Science Flashes* abzuarbeiten. Eine andere Option besteht darin, die Anzahl der zu behandelnden Kapitel signifikant zu senken, sich aber dafür mehr in die fortgeschrittenen Abschnitte der entsprechenden Kapitel zu vertiefen.

Wir sind demnach gezwungen, die Themen in Abhängigkeit von ihrem spezifischen Interesse oder von den mathematischen Kenntnissen der Studenten auszuwählen. Die nicht ausgewählten Kapitel oder die fortgeschrittenen Teile von behandelten Kapiteln sind natürliche Ausgangspunkte für Kursprojekte. Studenten, die diesen Text im Selbststudium lesen, können nach Belieben von einem Kapitel zu einem anderen springen. Jedes Kapitel ist von den anderen (mathematisch) unabhängig oder nahezu unabhängig, und wir weisen auf mögliche Verbindungen explizit hin.

Eine letzte Bemerkung für Hochschullehrer, die dieses Buch als Vorlesungstext verwenden. Diese Vorlesung hat uns gezwungen, unsere üblichen pädagogischen Methoden zu revidieren: Keines der Themen ist Vorbedingung für weitere Kurse, die Definitionen und Sätze sind nicht die letztlichen Vorlesungsziele, und die Aufgaben sind nicht zum Eindrillen gedacht. Diese Faktoren können den Studenten Sorgen bereiten. Darüber hinaus sind wir keine Spezialisten für die von uns diskutierten Technologien. Also mussten wir unsere Lehrmethoden revidieren. Wir versuchen, die Studenten zur aktiven Teilnahme zu ermutigen. Das ermöglicht es uns, ihr Hintergrundwissen in Bezug auf die verwendeten mathematischen Werkzeuge zu überprüfen. Bezüglich der Prüfungen teilen wir den Studenten gleich am Anfang mit, dass die Prüfungen nicht kumulativ sind und sich auf die grundlegenden Abschnitte beschränken. Die Betonung liegt auf dem einfachen mathematischen Modellieren und dem Problemlösen. Unsere Übungen konzentrieren sich auf diese Fertigkeiten.

Verwendung des Buches zum Selbststudium

Als wir diesen Text schrieben, waren wir immer sehr bestrebt, die der Technologie zugrundeliegende Mathematik darzulegen und sowohl ihre Schönheit als auch ihre Leistungsfähigkeit zu demonstrieren. Wir meinen, dass dieser Text für jeden Leser – vom jungen Wissenschaftler bis zum erfahrenen Mathematiker – von Interesse sein wird, der die Mathematik verstehen möchte, die sich hinter technologischen Neuerungen verbirgt. Da die Kapitel größtenteils unabhängig voneinander sind, kann man nach Belieben von einem Thema zum anderen springen. Wir hoffen, dass auch die vielen historischen Anmerkungen auf Interesse stoßen, die überall im Text eingestreut sind, und dass der Leser vielleicht sogar die Zeit findet, einige Übungen durchzuarbeiten.

Die Beiträge von H     Antaya und Isabelle Ascah-Coallier

Der erste Entwurf von Kapitel 14 über Variationsrechnung wurde von H     Antaya geschrieben, als sie im Sommer nach dem Abschluss des zweiten Studienjahres ein Praktikum absolvierte. Kapitel 13 über DNA-Computing wurde im nachfolgenden Sommer von H     Antaya und Isabelle Ascah-Coallier verfasst, wobei sie vom kanadischen National Sciences and Engineering Research Council (NSERC) durch einen Undergraduate Student Research Award unterstützt wurden.

Zur Lektüre der Kapitel

Die Kapitel sind größtenteils unabhängig voneinander. Zu Beginn eines jeden Kapitels steht eine kurze Zusammenfassung, die auf die erforderlichen Grundkenntnisse eingeht, die Beziehung zwischen den einzelnen Abschnitten und gegebenenfalls deren relative Schwierigkeit beschreibt.

Christiane Rousseau
Yvan Saint-Aubin

Département de mathématiques et de statistique
Universit   de Montréal
September 2006

Danksagungen

Die Entstehung der Vorlesung „Mathematik und Technologie“ und des Begleittextes gehen bis zum Winter 2001 zurück. Wir mussten eine Vielfalt von Themen lernen, die wir nur beiläufig oder überhaupt nicht kannten; ebenso mussten wir auch Übungen und Projekte für die Studenten zusammenstellen. Im Laufe der vielen Jahre der Ausarbeitung dieses Textes haben wir zahlreiche Fragen aufgeworfen, die ausführliche Erklärungen erforderten. Wir möchten uns bei allen bedanken, die uns mit ihren Erläuterungen unterstützt haben. Das hat dazu beigetragen, unvermeidliche Zweideutigkeiten und Fehler

zu reduzieren. Für verbleibende Mängel sind wir allein verantwortlich. Wir bitten die Leser, uns auf alle noch vorhandenen Fehler aufmerksam zu machen.

Wir lernten eine Menge von Jean-Claude Rizzi, Martin Vachon und Annie Boily (alle von Hydro-Québec) über Sturm-Tracking; von Stéphane Durand und Anne Bourlioux über die Feinheiten des GPS; von Andrew Granville über neuere Faktorisierungsalgorithmen für ganze Zahlen; von Mehran Sahami über die Interna von Google; von Pierre L'Ecuyer über Zufallszahlengeneratoren; von Valérie Poulin und Isabelle Ascah-Coallier über die Wirkungsweise der Quantencomputer; von Serge Robert, Jean LeTourneux und Anik Soulière über die Beziehung zwischen Mathematik und Musik; von Paul Rousseau und Pierre Beaudry über die Grundlagen der Computerarchitektur; von Mark Goresky über lineare Schieberegister und die Eigenschaften der von ihnen erzeugten Folgen. David Austin, Robert Calderbank, Brigitte Jaumard, Jean LeTourneux, Robert Moody, Pierre Poulin, Robert Rousarie, Kaleem Siddiqi und Loïc Teyssier stellten uns Literatur zur Verfügung und gaben uns wertvolle Kommentare.

Viele unserer Freunde und Kollegen lasen Teile des Manuskriptes und versorgten uns mit dem entsprechenden Feedback – insbesondere danken wir Pierre Bouchard, Michel Boyer, Raymond Elmahdaoui, Alexandre Girouard, Martin Goldstein, Jean Le-Tourneux, Francis Loranger, Marie Luquette, Robert Owens, Serge Robert und Olivier Rousseau. Nicolas Beauchemin und André Montpetit halfen uns bei mehr als einer Gelegenheit mit Grafiken und mit den Feinheiten von \LaTeX . Unsere Kollegen Richard Duncan, Martin Goldstein und Robert Owens halfen in Bezug auf die englische Terminologie.

Seit dem ersten Entwurf haben wir unser Manuskript unter Kollegen und Freunden verteilt, von denen uns viele begleitet und ermutigt haben, darunter John Ball, Jonathan Borwein, Bill Casselman, Carmen Chicone, Karl Dilcher, Freddy Dumortier, Stéphane Durand, Ivar Ekeland, Bernard Hodgson, Nassif Ghoussoub, Frédéric Gourdeau, Jacques Hurtubise, Louis Marchildon, Odile Marcotte und Pierre Mathieu.

Wir danken Manfred Stern, der viele Monate an der ausgezeichneten deutschen Übersetzung unseres Manuskripts gearbeitet hat. Es war ein großes Vergnügen, mit ihm zusammenzuarbeiten. Wir schätzen seine umsichtigen Kommentare und Vorschläge.¹

Wir bedanken uns bei Ann Kostant und dem Springer-Verlag für das große Interesse an unserem Buch – von der ersten Version bis zur Endfassung.

Ebenso danken wir denjenigen, die uns am nächsten standen: Manuel Giménez, Serge Robert, Olivier Rousseau, Valérie Poulin, Anaïgue Robert und Chi-Thanh Quach. Sie haben uns immer unterstützt und uns zugehört, wenn wir im Laufe der Jahre über dieses Projekt gesprochen haben.

¹ Der Übersetzer bedankt sich bei Rüdiger Achilles (Fachbereich Mathematik der Universität Bologna) für die sorgfältige Korrektur des deutschen Textes. Dank für vielfältige \LaTeX -Hinweise und weitere technische Hilfestellungen geht an Frank Holzwarth (Springer-Verlag) und an Gerd Richter (Fachbereich Mathematik der Universität Halle). Ebenso danke ich Ruth Allewelt und Agnes Herrmann (beide Springer-Verlag) für ihre Begleitung beim Anfertigen der Übersetzung.

Mathematik und Technologie

Rousseau, C.; SAINT-AUBIN, Y.

2012, XV, 609 S. 214 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-30091-2