1 Mathematik als Unterrichtsfach

Mathematik ist Unterrichtsfach an *allen* Schularten und in allen Schulstufen. In diesem Kapitel wird untersucht, wie es dazu gekommen ist und welche Erwartungen an den Mathematikunterricht gerichtet werden. Im Vordergrund stehen dabei drei zentrale Anforderungen:

- Mathematik als allgemeinbildendes Fach,
- Mathematik als qualifizierendes Fach,
- Mathematik als authentisches Fach.

1.1 Mathematik in der Schule

Mathematik ist ein Fach, das an allen allgemeinbildenden Schulen unterrichtet wird. Als ein „Hauptfach“ ist es durch seine Stundenzahl, durch den Umfang der Hausaufgaben, durch die Anzahl der zu erbringenden Leistungsnachweise und durch das Gewicht seiner Zeugnisnote gegenüber anderen Fächern hervorgehoben. Es stellt vergleichsweise hohe Anforderungen an Schülerinnen und Schüler und weist den Lehrenden eine wichtige Rolle im schulischen Leben der Lernenden zu.

1.1.1 Einschätzungen des Fachs

Aus der Sicht der Lehrkräfte gehört das zu den positiven Seiten des Berufs. Denn das Gewicht des Faches bewahrt sie vor manchen disziplinarischen Problemen, mit denen z.B. Lehrerinnen und Lehrer von sogenannten „Nebenfächern“ häufig zu kämpfen haben. Andererseits werden sie in Mathematik in stärkerem Maße mit dem Versagen von Schülerinnen und Schülern konfrontiert, was bei den Lernenden Aggressionen hervorrufen und die Beziehung zu ihnen belasten kann.

Angesichts der Anforderungen des Faches würde man erwarten, dass es nicht besonders beliebt ist. Es ist deshalb überraschend, dass bei allen Befragungen über die Beliebtheit der Fächer Mathematik ziemlich weit vorn rangiert. Die negativen Erfahrungen spiegeln sich jedoch bei der Frage nach dem unbeliebtesten Fach wider, denn auch hier rangiert Mathematik weit vorn. Das ist kein Widerspruch, sondern besagt, dass Mathematik ein *polarisierendes* Fach ist.

H.-J. Vollrath, J. Roth, *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*,
DOI 10.1007/978-3-8274-2855-4_1, © Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2012

In einer 1995 von Emnid durchgeführten repräsentativen Umfrage unter Bundesbürgern über 18 Jahren mit unterschiedlichsten Schulabschlüssen wurde z.B. auf die Frage „Was waren Ihre Lieblingsfächer?" Mathematik mit 46 % am häufigsten genannt. Es folgten Deutsch mit 38 %, Erdkunde mit 22 % und Sport mit 21 %. Die übrigen Fächer erhielten weniger als 15 % Nennungen (SPIEGEL special 9/1995, S. 139).

Auf die Frage „Welche Fächer haben Sie am meisten gehasst?" nannten in der Emnid-Umfrage 24 % Mathematik, je 14 % Chemie und Physik und 13 % Deutsch. Die übrigen Fächer wurden jeweils zu weniger als 10 % genannt (SPIEGEL special 9/1995, S. 139).

Dass Mathematik ein polarisierendes Fach ist, ist keine neue Beobachtung. Die *Methodik des Mathematikunterrichts* stellte das z.B. bereits 1961 fest und bezog sich dabei auf Erhebungen aus den Jahren 1923 und 1956 (Lietzmann 1961[3], S. 11).

Im öffentlichen Leben geben Verantwortungsträger häufig unumwunden zu, in der Schule eine „Matheniete" gewesen zu sein (Beutelspacher 2009[5]). Es ist daher erstaunlich, dass trotzdem das Fach Mathematik in der Schule weitgehend unangefochten ist.

Wie Elisabeth Moser Opitz in einer umfangreichen Untersuchung an Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I feststellen konnte, waren dort bei den positiven Beurteilungen das Interesse an der Sache und die Lebensrelevanz der Mathematik entscheidend, während für die negativen Beurteilungen in erster Linie negative Erlebnisse im Mathematikunterricht verantwortlich waren (Moser Opitz 2009).

Nun kann allerdings über die konkrete Frage, wie lange und in welchem Umfang Mathematik an einem bestimmten Schultyp unterrichtet werden soll, durchaus leidenschaftlich und kontrovers in der Öffentlichkeit diskutiert werden. Als Hans-Werner Heymann 1995 in seiner Habilitationsschrift (Heymann 1996, S. 153) zu dem Ergebnis gekommen war: „Erwachsene, die nicht in mathematikintensiven Berufen tätig sind, verwenden in ihrem privaten und beruflichen Alltag nur relativ wenig Mathematik – was über den Stoff hinausgeht, der üblicherweise bis Klasse 7 unterrichtet wird (Prozentrechnung, Zinsrechnung, Schlußrechnung), spielt später kaum noch eine Rolle.", zog die Presse daraus die Konsequenz: „Sieben Jahre Mathematik sind genug." Das löste eine lebhafte, kontroverse Diskussion in der Öffentlichkeit aus.

In einer offenen Gesellschaft werden scheinbar selbstverständliche Regelungen von Zeit zu Zeit in Frage gestellt. Das gilt auch für die Rolle des Mathematikunterrichts in der Schule. Derartige Diskussionen werden häufig sehr emotional geführt, was auf Grund der persönlichen Betroffenheit der meisten Menschen nicht verwunderlich ist. Mit Argumenten lassen sie sich aber versachlichen. Im Folgenden sollen einige grundlegende Fragen angesprochen und mögliche Argumente erörtert werden.

1.1.2 Schule für alle

In Deutschland besteht für alle Kinder eine allgemeine *Schulpflicht*. Nach dem Grundgesetz (Artikel 7, Absatz 1) steht das gesamte Schulwesen unter der Aufsicht des Staates. Damit soll sichergestellt sein, dass jedes Kind – unter Umständen auch gegen den Willen der Eltern – eine Schule besucht. Die allgemeine Schulpflicht billigt jedem Kind auch das *Recht* auf Schule zu. Das ist heute weltweit keineswegs selbstverständlich; und auch in Deutschland besteht erst seit 1919 die allgemeine Schulpflicht.

Da Mathematik in allen Schularten verbindlich ist, bedeutet dies, dass alle Kinder Mathematik lernen *müssen*, dass sie aber auch Mathematik lernen *dürfen*. Wenn für die Lernenden oft das „Müssen" im Vordergrund steht, so lassen sich doch in der kindlichen Entwicklung Phasen beobachten, in denen sie von Zahlen und Formen so fasziniert sind, dass sie Mathematik unbedingt lernen *wollen*.

Wohl alle Mathematiklehrer wünschen sich Kinder, die im Mathematikunterricht fragen: Wie macht man das? Warum macht man das so? Könnte man es auch anders machen? Resigniert müssen aber viele feststellen, dass sie es sind, die den Kindern derartige Fragen stellen müssen.

Ist eine Schule, in der die *Kinder* fragen, eine Illusion? Der Philosoph Karl Popper (1902–1994) wünschte sich als Mathematikstudent eine solche Schule:

> Wenn ich an die Zukunft dachte, träumte ich davon, eines Tages eine Schule zu gründen, in der junge Menschen lernen könnten, ohne sich zu langweilen; in der sie angeregt würden, Probleme aufzuwerfen und zu diskutieren; eine Schule, in der sie nicht gezwungen wären, unverlangte Antworten auf ungestellte Fragen zu hören; in der man nicht studierte, um Prüfungen zu bestehen, sondern um etwas zu lernen. (Popper 1984[3], S. 51)

Popper hat seine Traumschule nicht gegründet, aber es gibt heute doch viele engagierte Lehrkräfte, die sich darum bemühen, eine solche Schule Wirklichkeit werden zu lassen.

Wenn *alle Heranwachsenden* am Mathematikunterricht teilnehmen müssen, dann ergibt sich daraus eine Machtposition für die Lehrkräfte, die nur dann zu vertreten ist, wenn sie sich ihrer großen Verantwortung bewusst sind, die ihnen daraus erwächst, und wenn sie verantwortungsbewusst unterrichten. Ihr Handeln muss von der Überzeugung geleitet sein:

Verstehen des Verstehbaren ist ein Menschenrecht.

(Martin Wagenschein)

Diese Erklärung des Pädagogen Martin Wagenschein (1896–1988) ist die didaktische Überzeugung, die diesem Buch zugrunde liegt. Sie ist gepaart mit dem Optimismus, dass man selbst Menschen, die bisher keinen Zugang zur Mathematik gefunden haben, zu mathematischem Verstehen verhelfen kann.

Dass Mathematik *Pflichtfach* in allen Schulen ist, ergibt sich aus dem Bildungsauftrag der Schule. Traditionell wird dieser Auftrag in erster Linie in der Vermittlung von *Allgemeinbildung* gesehen, wobei die verschiedenen Schulfächer zusammenwirken sollen. Die einzelnen Fächer müssen sich deshalb durch ihren Beitrag zur Allgemeinbildung begründen und die Ergebnisse ihres Unterrichts müssen sich am eigenen Anspruch messen lassen. Für den Mathematikunterricht ist also zu klären, worin sein spezifischer Beitrag zur Allgemeinbildung besteht. Dazu wird im Folgenden zunächst der Begriff der Allgemeinbildung etwas näher betrachtet.

1.1.3 Allgemeinbildung als Auftrag der Schule

Von „allgemeiner Bildung“ wird seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts gesprochen. Man bezeichnete damit ein Ideal, mit dem Verengungen im damaligen Schulwesen überwunden werden sollten. Es war von der Überzeugung bestimmt, dass alle jungen Menschen in „Elementarschulen“ vor ihrer Ausbildung für einen bestimmten Stand oder Beruf *Allgemeinbildung* erwerben sollten. Das bezog sich auf „Allgemeinwissen“, schloss aber praktisches Können, Werthaltungen und soziale Tugenden ein. Allgemeinbildung war also auf den *ganzen* Menschen gerichtet und sollte deshalb zugleich *grundlegende* Bildung, *umfassende* Bildung und *gemeinsame* Bildung sein.

Bald wurde jedoch deutlich, dass sich Allgemeinbildung nicht auf Elementarschulen beschränken ließ. Auch die „Volksschulen“, die „Mittelschulen“ und die „Gymnasien“ hatten die Vermittlung von Allgemeinbildung zum Ziel. Und doch definierten sie sich durch unterschiedliche „Bildungsaufträge“. Dieses Spannungsverhältnis besteht bis heute. Grundschulen, Hauptschulen, Realschulen, Gymnasien und Gesamtschulen sollen Allgemeinbildung vermitteln. Offensichtlich kann dieses Ziel im jeweiligen Kontext Unterschiedliches bedeuten, so dass es doch recht verschwommen wirkt und deshalb auch von Pädagogen kritisch gesehen wird:

> In der Rückschau auf die letzten 200 Jahre deutscher Philosophie und Pädagogik lässt sich nachweisen, daß das „Bildungs“-Vokabular wegen seiner Ungenauigkeit mehr zur Vernebelung als zur Aufklärung anthropologisch-pädagogischer Sachverhalte beigetragen hat. Es ist ein spezifisch deutsches Vokabular, das unübersetzbar ist. (Brezinka 2000, S. 1)

Wenn man trotzdem an dem Begriff der Allgemeinbildung festhält, so hat dies eine Ursache darin, dass eine Grundlage benötigt wird, wenn pädagogisches Handeln „begründbar und verantwortbar“ sein soll (Klafki 1985, S. 13). Dazu ist es allerdings notwendig, diesen Begriff näher zu beschreiben. Heymann wählte dazu den Ansatz, ihn durch *Aufgaben der Schule* wie z.B. „Lebensvorbereitung“, „Weltorientierung“, „Anleitung zu kritischem Vernunftgebrauch“ und „Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft“ zu konkretisieren (Heymann 1996, S. 47).

Ein derartiger Aufgabenkatalog sollte einleuchtend und umfassend sein. Im Folgenden werden darunter die vier grundlegenden Aufgaben verstanden:

- Entfaltung der Persönlichkeit,
- Aneignung von Fähigkeiten und Kenntnissen zum Leben in der Umwelt,
- Befähigung zur Teilhabe am Leben in der Gesellschaft,
- Vermittlung von Normen und Werten.

In diesem Katalog wird der Blick zunächst auf den Menschen, dann auf seine Beziehung zur Umwelt, danach auf Beziehungen zu anderen Menschen und schließlich auf das diesen Beziehungen Übergeordnete gelenkt. Er bezieht sich damit auf die *Grundrelationen,* in denen Menschen leben.

Auch diese Aufgaben sind noch sehr allgemein formuliert. Immerhin machen die unterschiedlichen Aufgabenbereiche deutlich, dass Schule sich nicht nur auf die Vermittlung von *Wissen* und *Können* beschränken darf, sondern auf den ganzen Menschen ausgerichtet ist. Albert Einstein (1879–1955) drückte das 1936 in einem Vortrag „Über Erziehung“ wie folgt aus:

> Zuweilen hält man die Schule nur für ein Instrument zur Weitergabe einer Höchstmenge von Wissen an die heranwachsende Generation. Das ist nicht richtig. Wissen allein ist tot; die Schule aber dient dem Lebendigen. Sie soll in den jungen Menschen alle Eigenschaften und Fähigkeiten entwickeln, die für die Wohlfahrt der Allgemeinheit wertvoll sind. Das soll nicht heißen, daß die Individualität zerstört und der Einzelne zum bloßen Werkzeug der Gemeinschaft werden soll, wie eine Biene oder eine Ameise. Denn eine Gemeinschaft gleichgerichteter Individuen ohne persönliche Originalität und persönliches Streben wäre eine kümmerliche Gemeinschaft, die keine Möglichkeit zur Entwicklung hätte. Im Gegenteil, das Ziel ist die Heranbildung unabhängig handelnder und denkender Personen, die allerdings im Dienst einer Gemeinschaft ihr höchstes Lebensproblem erblicken. (Einstein 1952, S. 36 f.)

Trotzdem beschränkt sich die Bildungsdiskussion häufig auf Wissen und Können. In der Bildungstradition strebt man mit dem Können *formale* Bildung und mit dem Wissen *materiale* Bildung an. Die Diskussion um Bildungsziele wird dann leicht auf die Frage verengt, ob es in der Schule in erster Linie um die Vermittlung von formaler oder von materialer Bildung geht. Im Mathematikunterricht wurde z.B. immer wieder diskutiert, ob es eher auf die Kenntnis von Definitionen und Sätzen oder auf die Fähigkeit zum Lösen von Aufgaben ankommt. Im Schulalltag steht allerdings durch das Gewicht der Klassenarbeiten für den schulischen Erfolg das Lösen von Aufgaben im Vordergrund. Sachwissen ist nur insoweit von Bedeutung, als es zum Lösen der Aufgaben dienlich ist.

Derartige Polarisierungen führen zu Einseitigkeiten, die letztlich zu Lasten der Lernenden gehen. Ist einmal eine Einseitigkeit im Unterricht eingerissen, dann mag es sinnvoll sein, einen anderen Aspekt stärker zu betonen. Generell sollte man sich aber in Fragen der Erziehung vor einem „Entweder-oder“ hüten. So ist Wolfgang Klafki darum bemüht, mit seiner Theorie der *kategorialen* Bildung die Ideen der formalen und der materialen Bildung miteinander zu verbinden, indem er danach fragt, welche Inhalte lehrenswert sind (Klafki 1985).

Das lenkt den Blick zurück zur *Allgemeinbildung*. Die angegebenen Aufgaben sind so allgemein gehalten, dass es nicht schwerfällt, sie zu akzeptieren. Wenn man sie allerdings aus dem Blickwinkel der einzelnen Fächer betrachtet und fragt, welche substantiellen Beiträge das einzelne Fach zur Bewältigung dieser Aufgaben leisten kann, dann gerät man leicht in Schwierigkeiten. Dass Mathematik wesentliche Beiträge zur Vermittlung von nützlichem Wissen und Können leisten kann, lässt sich leicht begründen. Ob dieses Fach auch für die anderen Aufgabenbereiche ernst zu Nehmendes beitragen kann, ist dagegen nicht selbstverständlich. Darauf wird später näher einzugehen sein. Die im Begriff der Allgemeinbildung zusammengefassten Erziehungsaufgaben gelten für *alle* Heranwachsenden. Andererseits hat der Staat bei der Einrichtung von Schulen dafür Sorge zu tragen, dass diese den unterschiedlichen Fähigkeiten, Interessen und Bedürfnissen der Heranwachsenden gerecht werden. Es handelt sich dabei um das *Problem der angemessenen Bildungsangebote*. In der Geschichte des deutschen Bildungswesens wurde versucht, dieses Problem mit dem Angebot unterschiedlicher Schultypen zu lösen.

1.1.4 Schultypen

Unser reich gegliedertes Schulwesen hat eine lange Tradition, die im Wesentlichen zwei Wurzeln hat. In der „Volksbildung“ ging es in erster Linie um die *Vorbereitung auf das praktische Leben,* die von der *Volksschule* geleistet werden sollte. Diese Aufgabe spielt heute immer noch in der *Hauptschule* und in der *Berufsschule* eine wichtige Rolle. Die *Einführung in unsere Kultur* steht dagegen traditionell bei der „höheren Bildung“ im Vordergrund, die im *Gymnasium* vermittelt werden soll. Hier entsprechen die Fächer wichtigen Bereichen unserer Kultur. Mitte des 19. Jahrhunderts wurde jedoch deutlich, dass angesichts der gestiegenen beruflichen Anforderungen die in der Volksschule angestrebten Ziele nicht ausreichten. Es wurde deshalb als dritter Schultyp die *Mittelschule* entwickelt, die in ihren Lernzielen über die Volksschule hinausgehen sollte, ohne freilich die der höheren Schule zu erstreben. Dieser Schultyp wird heute als *Realschule* bezeichnet.

Für den Mathematikunterricht bedeutete dies, dass unterschiedliche Inhalte in unterschiedlicher Weise zu unterrichten waren. Entsprechend wurden die Lehrkräfte unterschiedlich ausgebildet. Es entwickelten sich drei „didaktische Welten“, die wenig miteinander zu tun hatten.

In dem Begriff der Allgemeinbildung drückte sich der Wunsch nach einer allgemeinen Bildung *für alle* aus. Seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts wird deshalb von Zeit zu Zeit die Forderung nach einer *Einheitsschule* erhoben. Diese erhielt vor allem in nationalen und sozialen Krisen des Landes (1813, 1848, 1918, 1945) immer wieder neuen Schub. Während sich die DDR für die *Sozialistische Einheitsschule* entschied, hing in der Bundesrepublik die Gestaltung des Schulsystems von der politischen Mehrheit im jeweiligen Bundesland ab, denn die Bundesländer haben die Kulturhoheit. Während sozialdemokratisch regierte Länder die *Gesamtschule* propagierten, bauten konservativ regierte Länder das traditionelle *mehrgliedrige* Schulsystem aus. Nach der Wiedervereinigung übertrug sich diese Situation auch auf die neuen Bundesländer. Im Grunde wurde damit die Chance verpasst, die Wiedervereinigung als Anstoß zu einer grundlegend neuen Diskussion des deutschen Bildungssystems zu nutzen. Allerdings scheint das enttäuschende Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler bei den internationalen Leistungsvergleichen der letzten Jahre die Diskussion um das angemessene Schulsystem wieder anzufachen. Dabei beginnen sich die starren Fronten mit der Veränderung der Parteienlandschaft in der Bundesrepublik aufzulösen. Immerhin wurde in den letzten Jahrzehnten erreicht, dass inzwischen in allen Bundesländern Lehrerinnen und Lehrer an wissenschaftlichen Hochschulen ausgebildet werden. Gegenwärtig konkurrieren also in Deutschland zwei verschiedene Schulsysteme miteinander: das traditionelle *mehrgliedrige Schulsystem* und die *Gesamtschule*, die aus der Idee der Einheitsschule erwachsen ist. So unversöhnlich die Grundpositionen erscheinen, zwingt doch die Praxis dazu, die Schwächen des jeweiligen Systems auszugleichen. Ein dreigliedriges Schulsystem achtet darauf, dass kein Schultyp in eine „Sackgasse" führt, während in Gesamtschulen durch Differenzierungen den unterschiedlichen Begabungen und Neigungen Rechnung getragen wird.

In der Mathematikdidaktik besteht weitgehend die Tendenz, die gegebenen Rahmenbedingungen des jeweiligen Bundeslandes zu akzeptieren. Forschungsaktivitäten setzen allenfalls an Einzelproblemen des Schulsystems an. So gibt es umfangreiche empirische Studien zum Problem der Differenzierung in der Orientierungsstufe (z.B. Viet und Sommer 1980) sowie Grundsatzstudien zur Reform der gymnasialen Oberstufe (z.B. Steiner 1978).

Unterschiede in den *Grundpositionen* zu den Schulsystemen zeigen sich z.B. bei Alexander Wittenberg (1926–1965) und Hans Freudenthal (1905–1990). So schrieb Wittenberg in seinem Buch *Bildung und Mathematik:*

> Die Idee einer gymnasialen Bildung gehört zu den kostbarsten kulturellen Besitztümern Europas. Sie gehört auch zu den gefährdetsten. Unermeßlich ist, was die Menschen und die Kultur Europas dem Gymnasium verdanken; unschätzbar das Versprechen, welches die Idee des Gymnasiums für die Zukunft in sich birgt. Und doch besteht die dringende, nur allzu gegenwärtige Gefahr einer Entartung und Selbstaufgabe dieser Schulen, die von ihnen wohl fürs erste die Schale übrig ließe, sie aber in zunehmendem Maße ihres inneren Sinnes, und damit zugleich ihrer Daseinsberechtigung, beraubte. Eine Preisgabe der Aufgabe, der das Gymnasium zu genügen hat, stellte aber eine soziale und kulturelle Tragödie ersten Ranges dar und ließe eine unabsehbar bedrohliche Lage entstehen. (Wittenberg 1990[2], S. 3)

Wittenbergs Buch ist ein engagiertes Plädoyer für das Gymnasium, dem freilich seine *elitäre* Sicht zum Vorwurf gemacht wurde. Freudenthal dagegen war mit den „traditionellen Elite-Erziehungen unseres Europas" unzufrieden (Freudenthal 1978, S. 49). Er plädierte stattdessen für Gesamtschulen.

> Ich glaube an den sozialen Lernprozeß, und darum eifere ich für die heterogene Lerngruppe. ... Die heterogene Lerngruppe umfaßt Schüler verschiedener Niveaus, die an *einer* Aufgabe – jeder auf der ihm eigenen Stufe – zusammenarbeiten, so wie in den im allgemeinen heterogenen Arbeitsgruppen der Gesellschaft Menschen verschiedener Niveaus, jeder seiner Stufe entsprechend, eine gemeinsame Aufgabe erfüllen. (Freudenthal 1978, S. 63)

Wittenberg kämpfte für die *Idee des Gymnasiums*. In der Realität wird damit ein Schultyp bezeichnet, von dem es ganz unterschiedliche Ausprägungen gibt. Auch im Gymnasium stellte sich nämlich immer wieder *das Problem der angemessenen Bildungsangebote*. Denn bei den Schülerinnen und Schülern, die ein Gymnasium besuchen wollen, handelt es sich keineswegs um eine homogene Gruppe. Auf die unterschiedlichen Interessen- und Begabungsschwerpunkte reagierte der Staat mit der Errichtung unterschiedlicher Typen von Gymnasien, die sich vor allem durch ihr Fächerangebot unterscheiden.

1.1.5 Schultyp und Fächerkanon

Die Fächer, die an einer Schule unterrichtet werden, bilden den *Fächerkanon* (Gesamtheit der Fächer); *Stundentafeln* legen fest, in welchem Umfang die Fächer in den einzelnen Jahrgangsstufen unterrichtet werden. Vergleicht man die Jahrgangsstufen 5 bis 10 für Gymnasien, Realschulen, Hauptschulen und Gesamtschulen, dann zeigen sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Aber auch innerhalb einer Schulart gibt es meist unterschiedliche Zweige, für die das gilt. Man denke etwa an sprachliche, naturwissenschaftliche, technische, wirtschaftliche oder musische Zweige. Mit ihnen will man den unterschiedlichen Begabungen und Neigungen der Schülerinnen und Schüler entgegenkommen. Andererseits werden mit der Wahl eines Zweiges auch Weichen gestellt, die spätere Wahlmöglichkeiten einschränken. In der Praxis entscheiden die Eltern mit der Wahl einer bestimmten Schule auch über die Wahlmöglichkeiten bei den Zweigen.

Die historische Entwicklung der einzelnen Schularten ist stark bestimmt von der Frage, welche Fächer überhaupt unterrichtet werden sollen und welchen Anteil man ihnen zubilligen soll. Für das Gymnasium führte das zur Entwicklung immer neuer Typen mit eigenen Namen, die miteinander konkurrierten. Ursprünglich dominierten im *Gymnasium* zu Beginn des 19. Jahrhunderts die alten Sprachen. Eine stärkere Gewichtung von Mathematik und Naturwissenschaften zu Lasten der alten Sprachen führte gegen Ende des 19. Jahrhunderts zum *Realgymnasium* als alternativer Form des Gymnasiums. Um die Stärkung dieser Fächer hat sich vor allem der Mathematiker Felix Klein (1849–1925) besondere Verdienste erworben. Aus heutiger Sicht erstaunlich war z.B. das lange Zeit relativ geringe Gewicht des Faches Deutsch. Es erhielt erst in den 1920er Jahren mehr Gewicht in der *Deutschen Oberschule*. In ihr wurden übrigens auch Mathematik und Naturwissenschaften betont. Die Möglichkeit, sich für neue Sprachen als Fremdsprachen zu entscheiden, führte zum *neusprachlichen Realgymnasium*. An der *Oberrealschule* erhielten Mathematik und Naturwissenschaften das Hauptgewicht. Heute spricht man einheitlich vom *Gymnasium* und gibt eventuell noch den Schwerpunkt an.

1.1.6 Mathematik im Fächerkanon

Mathematik gehört heute zum Fächerkanon der allgemeinbildenden Schulen. Das war nicht immer so. Noch bis in die sechziger Jahre des vorigen Jahrhunderts wurden in der Grundschule und in der Volksschule, häufig sogar noch in der 5. und 6. Jahrgangsstufe des Gymnasiums, lediglich *Rechnen* und *Raumlehre* unterrichtet. Das ist mehr als eine Bezeichnungsfrage. Noch in den sechziger Jahren wurde z.B. für „die Eigenständigkeit des Volksschulrechnens“ plädiert (Glatfeld 1967). Rechnen gehört neben Lesen und Schreiben zu den grundlegenden *Kulturtechniken*, über die alle Menschen verfügen sollten, um den Anforderungen des täglichen Lebens gewachsen zu sein.

In der höheren Bildung waren allerdings seit dem Mittelalter *Arithmetik* und *Geometrie* als zwei der sieben „freien Künste“ (*septem artes liberales*) verbindlich. Dieser Fächerkanon lässt sich bis zu den Anfängen des abendländischen Bildungswesens bei den Griechen zurückverfolgen. Noch heute verweisen der Grad des Magisters und der im englischen Sprachraum übliche M.A. (Master of Arts) auf die Tradition des *magister artium*. Durch den *Bologna-Prozess* (1999) ist diese Tradition wiederbelebt worden, um einheitliche Bildungsabschlüsse für das europäische Hochschulwesen zu schaffen.

In der Realschule ist Mathematik im Fächerkanon fest verankert, allerdings mit unterschiedlichem Gewicht in den verschiedenen Zweigen. Grob betrachtet entsprechen die Inhalte weitgehend den in der Sekundarstufe I am Gymnasium behandelten Inhalten, allerdings mit stärkerem Praxisbezug, häufig eher anschaulich und weniger begrifflich orientiert. Dabei steht die Vermittlung prozeduralen Wissens und Könnens im Vordergrund.

In der Gesamtschule ist Mathematik eines der Fächer, in denen früh nach unterschiedlichen Leistungsgruppen differenziert wird. Im Grunde begegnen einem hier wieder die unterschiedlichen Ausprägungen des Mathematikunterrichts eines gegliederten Schulsystems.

Zwar ist Mathematik als Fach im Kanon fest etabliert. Welcher Umfang ihm allerdings im Fächerkanon zugesprochen wird, hängt einmal von der Einschätzung des Faches ab, aber auch von Strömungen, die auf Veränderung des Kanons zielen. Auch heute gibt es Bestrebungen, neue Fächer einzurichten. Man denke etwa an Pädagogik, Wirtschaftslehre oder Informatik. Da die gesamte Unterrichtszeit verplant ist, muss das zu Lasten etablierter Fächer gehen. Stundenkürzungen, das Zusammenlegen verschiedener Fächer oder gar der Wegfall eines Faches sind Mittel, um Spielraum zu gewinnen. Dabei sind allerdings in der Regel erhebliche Widerstände von Interessenverbänden zu überwinden. Wenn es um Kürzungen geht, steht auch Mathematik zur Disposition. Letztlich geht es bei derartigen Entscheidungen immer um die grundlegende Frage nach den Zielen der Schule und um die Bedeutung des einzelnen Faches für das Erreichen dieser Ziele.

1.2 Mathematik als allgemeinbildendes Fach

Schule soll Allgemeinbildung vermitteln. Es ist also zu fragen, welche Beiträge der Mathematikunterricht zu den einzelnen Aufgaben leisten kann, deren Erfüllung Allgemeinbildung gewährleisten soll. Dabei geht es um:

- Entfaltung der Persönlichkeit,
- Umwelterschließung,
- Teilhabe an der Gesellschaft,
- Vermittlung von Normen und Werten.

1.2.1 Beiträge zur Entfaltung der Persönlichkeit

In allen Kulturen haben Menschen Zahlen und Formen entdeckt. Sie sind Ausdrucksmöglichkeiten für Gedanken, Empfindungen, Probleme und Lösungen und entsprechen offensichtlich Bedürfnissen und Fähigkeiten, die im Menschen angelegt sind. Bereits vor der Schulzeit lernen Kinder Zählen und Zeichnen. Diese Fähigkeiten entwickeln sich; und diese Entwicklung folgt bestimmten Gesetzmäßigkeiten, auf die in Abschnitt 2.5.1 noch einzugehen ist. Zählen, Rechnen und Zeichnen gehören zu den Kulturtechniken, deren Wert für die Allgemeinbildung unterschätzt wird, wenn man lediglich ihre Nützlichkeit sieht. Ihren Wert sieht Hartmut von Hentig umfassender:

> ...; was die Kulturtechniken pädagogisch so wichtig macht: ihre Wirkungen auf die Person mehr als ihr Nutzen oder ihre Notwendigkeit in unserem Leben, das wissen meist auch die Lehrer nicht. Mit Rechnen, Schreiben, Lesen (wenn man sie richtig lehrt) erwirbt das Kind Selbstvertrauen, genießt es die Beherrschung und Ausübung vielseitiger Zauberkünste, übt es sich in elementaren Methoden des Verstehens, lernt es die Unterscheidung von Wichtigem und Unwichtigem, die Bemühung um Sinn, die Gestaltung von Eigenart, die Entmystifizierung von »Zeichen und Wundern«, ein Stück verläßlicher, nämlich gelingender Selbstdisziplin. (von Hentig 1993, S. 38)

Zahlen und Rechnen, Figuren und Konstruieren gehören zwar zur Mathematik, das eigentlich Mathematische an ihnen wird jedoch in der Regelhaftigkeit und in der Möglichkeit gesehen, diese Regeln zu begründen. Entsprechend beginnt Mathematik als Wissenschaft historisch bei den Griechen mit dem Entdecken von Zusammenhängen zwischen Zahlen und zwischen Figuren und mit dem Bedürfnis, beobachtete Zusammenhänge zu begründen (z.B. Artmann 1999). Euklid stellt in seinem Buch *Elemente* um 300 v. Chr. das mathematische Grundwissen seiner Zeit systematisch dar (Euklid 1962[2]). Hier werden Begriffe definiert und Sätze bewiesen. Die griechische Auffassung prägte die Mathematik der abendländischen Kultur. In anderer Weise entwickelte sich Mathematik z.B. in Indien oder in China. Dort waren Anschauung und Intuition entscheidend für das Gewinnen von Erkenntnis (Gericke 1984).

Beim Treiben von Mathematik erfahren die Menschen etwas von der Kraft ihres eigenen Denkens, denn sie können selbst mathematische Objekte schaffen und erforschen. Sie erleben dabei einerseits die Freiheit, andererseits aber auch die Grenzen des Denkens. Der Mathematikunterricht soll die Heranwachsenden in diese Gedankenwelt einführen. Sie sollen *lernen zu denken*. Zugleich werden sie angeleitet, ihr Denken kritisch zu reflektieren. Dabei sollen sie etwas *über* das Denken lernen. Wittenberg drückt das folgendermaßen aus:

> Die Mathematik trägt so zu unserem Erleben des eigenen Daseins die doppelte Erfahrung jener eigenartigen mathematischen Wirklichkeit und zugleich der inneren Notwendigkeiten unseres Denkens, welche uns zur Entdeckung und Durchforschung jener Wirklichkeit führen, bei. (Wittenberg 1990[2], S. 47)

Im Mathematikunterricht kann sich die im Menschen angelegte Fähigkeit, mathematisch zu denken, entfalten, so dass sich die jungen Menschen dieser Fähigkeit bewusst werden und aus ihrem mathematischen Können Selbstbewusstsein gewinnen können. Das klingt vielleicht etwas zu optimistisch, doch man bedenke, dass es manche berühmte „Matheniete“ im täglichen Leben durchaus verstanden hat, durch einen geschickten Umgang mit Zahlen und Größen ihr Vermögen zu mehren und sich Einfluss zu sichern. Indem der Mathematikunterricht die mathematischen Fähigkeiten der jungen Menschen fördert, leistet er einen wichtigen Beitrag zur Entfaltung ihrer Persönlichkeit und damit zu ihrer Allgemeinbildung.

1.2.2 Beiträge zur Umwelterschließung

Mit den Zahlen können Menschen zählen und rechnen; in der Vielfalt der sie umgebenden Welt erkennen sie bestimmte Grundformen, die immer wieder auftreten, die sich als Bestandteile komplexerer Formen erkennen lassen und mit denen sie selbst gestalten können. Im Umgang mit Formen entsteht das Bedürfnis, Größen zu messen und von bestimmten Größen abhängige Größen zu berechnen. Der rationale Umgang mit Zahlen und Formen hilft den Menschen, praktische Probleme ihres Alltags zu lösen.

Beispiele: (1) In der „Einkaufswelt" wird bei Geldwerten mit Dezimalbrüchen gerechnet. Bei der Angabe der Warenmengen treten Anzahlen, Gewichte, Rauminhalte sowie Längen und Zeiten auf. Bei Kalkulationen wird Prozentrechnung benötigt.

(2) In der Welt der „Geldgeschäfte" verwendet man auch negative Zahlen. Außerdem werden Zins- und Zinseszinsrechnung gebraucht.

(3) Bei der Beschreibung von Formen in der Umwelt treten geometrische Grundformen wie Quadrat, Rechteck, Vieleck und Kreis sowie Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel auf. Dabei werden auch elementare Beziehungen wie senkrecht und parallel verwendet. Schließlich sind Flächen- und Rauminhalte zu berechnen.

(4) In den Printmedien sind Diagramme zu lesen und zu deuten.

(5) In technischen Berufen ist häufig das Verstehen, Umformen und Aufstellen von Formeln erforderlich.

Die Mathematik hat ihre historischen Wurzeln in der Lösung praktischer Probleme des täglichen Lebens: Es waren Preise und Löhne zu berechnen, Längen, Flächeninhalte und Rauminhalte zu bestimmen sowie Muster und Bauten zu planen.

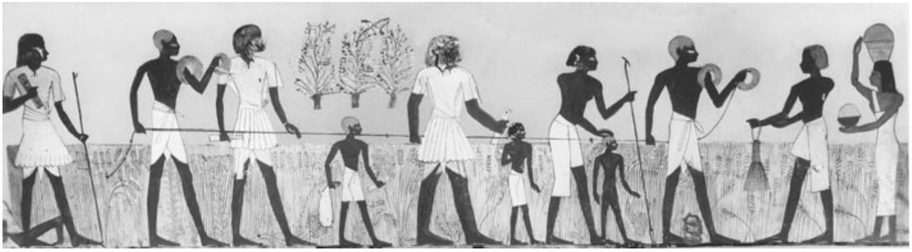

Abbildung 1.1 Feldvermesser in Ägypten, Grabmalerei, Theben um 1400 v. Chr. (© bpk – Bildagentur für Kunst und Geschichte)

Wie Geometrie aus praktischen Problemen erwachsen ist, beschreibt Heron von Alexandrien (um 60 n. Chr.) in seiner *Geometrica:*

> Wie der alte Bericht uns lehrt, haben die meisten Menschen sich mit Vermessung und Verteilung von Land abgegeben, woraus der Name Geometrie (Landmessung) entstanden ist. Die Erfindung aber der Vermessung ist von den Ägyptern gemacht; denn wegen des Steigens des Nils wurden viele Grundstücke, die deutlich zu erkennen waren, unkenntlich durch das Steigen, viele auch noch nach dem Fallen, und es war dem einzelnen nicht mehr möglich sein Eigentum zu unterscheiden; daher haben die Ägypter diese Vermessung erfunden, bald mit dem sogenannten Meßband, bald mit der Rute, bald auch mit anderen Maßen. Da nun die Vermessung notwen-

> dig war, verbreitete sich der Gebrauch zu allen lernbegierigen Menschen. (Heron 1976, S. 177)

Der Mensch benötigt also zu seiner Lebensbewältigung mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten. Aber wie viel ist davon wirklich lebensnotwendig?

> Andererseits ist immer wieder ernüchternd festzustellen, wie wenig von dem, was seit vielen Jahrzehnten zum eisernen Bestand der Schulmathematik an allgemeinbildenden Schulen gehört, tatsächlich im privaten und beruflichen Alltag von einer Mehrheit der Erwachsenen verwendet wird. Unabhängig von Schulformen und Landesgrenzen (innerhalb wie außerhalb Deutschlands) scheint zu gelten: Fast alles, was über den Standardstoff der ersten sieben Schuljahre hinausgeht, darf, ohne daß sich die Betroffenen merkliche Nachteile einhandelten, vergessen werden. Ein Großteil der üblichen Schulmathematik, und zwar gerade der mathematisch anspruchsvolleren Gebiete, wäre demnach ... nicht lebensnotwendig. (Heymann 1996, S. 134)

Über die Anforderungen des täglichen Lebens hinaus hilft die Mathematik den Menschen, Erkenntnis über die sie umgebende Natur zu gewinnen und diese Erkenntnis zur Lösung praktischer Probleme zu nutzen.

Das Zusammenspiel zwischen Mathematik und Naturbeobachtung beginnt bereits im Altertum in der Astronomie und in der Physik. Als der Mensch im Abendland am Ende des Mittelalters anfing, sich von religiösen Dogmen zu lösen, begann die große Zeit der *mathematischen Wissenschaften*. Mathematik erwies sich als Hilfsmittel zum Gewinnen von Erkenntnis und zur Anwendung der Erkenntnis bei der Lösung praktischer Probleme durch die Technik.

Diese Entwicklung befruchtete auch die Mathematik selbst. Die Erfindung der Infinitesimalrechnung durch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1643–1727) eröffnete eine Flut neuer mathematischer und physikalischer Erkenntnis. Im 19. Jahrhundert „explodierte“ bereits das mathematische Wissen. Zugleich wurden die Grundlagen immer sorgfältiger gelegt. Als besonders fruchtbar erwies sich die Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Physik. So entwickelte Newton über das Problem der „Momentangeschwindigkeit“ die Grundgedanken der Differentialrechnung. Häufig können Physiker allerdings in der Forschung auf mathematische Werkzeuge zurückgreifen, die bereits in der Mathematik entwickelt worden sind.

Dass man mit der Mathematik die Natur beschreiben kann und dass sich die gefundenen Gesetze mit Hilfe der Mathematik in der Technik nutzbar machen lassen, soll und kann im Unterricht als Erkenntnis vermittelt werden. In welchem Maße die jungen Menschen zu dieser Erkenntnis gelangen, hängt von der Dauer und der Intensität ihrer Beschäftigung mit Mathematik ab. Auch das Maß der Fähigkeiten, aus der Mathematik Nutzen für das eigene Leben zu ziehen, ist davon abhängig. Und doch gilt unabhängig vom gewählten Schultyp und der Dauer der Schulzeit, dass der Mathematikunterricht für alle Heranwachsenden einen wesentlichen Beitrag zur Erschließung ihrer Umwelt und damit zur Allgemeinbildung leisten kann. Die seit der Diskussion um Heymanns Thesen berüchtigten sieben Jahre sind dafür allerdings zu knapp bemessen.

1.2.3 Beiträge zur Teilhabe an der Gesellschaft

Zahlen und Formen spielen im Zusammenleben der Menschen eine wichtige Rolle. Mit ihnen und über sie wird in unterschiedlicher Weise *kommuniziert:* in Worten, in Handzeichen, in Schriftzeichen, in Formeln, in Modellen, in Zeichnungen und in Bildern.

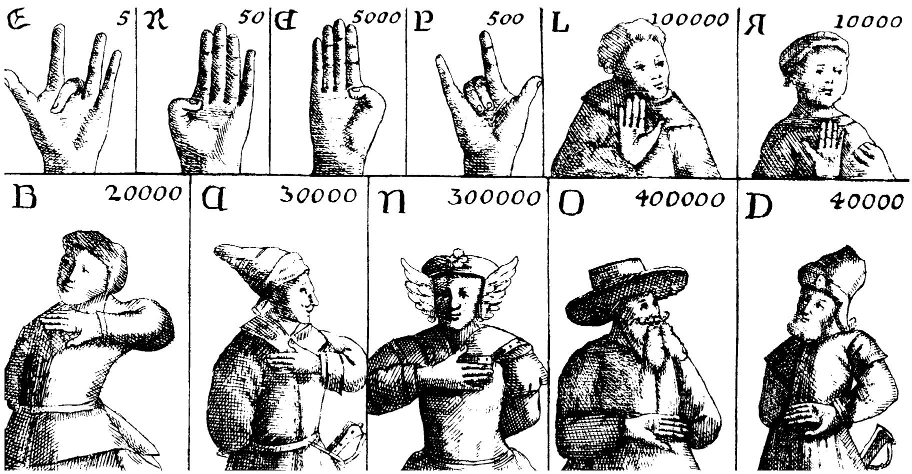

Abbildung 1.2 Zahlen in Zeichensprache (aus: Jacob Leupold, *Theatrum arithmetico-geometricum,* Leipzig (Gleditsch) 1727, Tab.I)

Dabei ist es erstaunlich, dass Zahlen und Formen offensichtlich gemeinsame Vorstellungen zugrunde liegen: Menschen können sich über Mathematik und mit Mathematik verständigen.

In der Geschichte lässt sich allerdings feststellen, dass in vielen Gruppen Geheimwissen vorhanden ist, das nur Eingeweihten zugänglich gemacht wird. Auch hierbei werden oft Zahlen und Figuren benötigt (Pickover 1999).

Beispiele: Die Daten bestimmter Feiertage, die Maßangaben für bestimmte Rezepte, die Positionen von Grenzmarken, Hinweise und Techniken zur Orientierung in unübersichtlichem Gelände, „Glückszahlen" oder „Unglückszahlen" wurden in Familien, Stämmen und Völkern oft geheim gehalten.

Auch in unserer Zeit unterliegen durchaus noch Zahlen, Formeln und Pläne, die einer Firma, einem Berufsstand, einem Volk oder einer bestimmten Gruppe Vorteile sichern sollen, der Geheimhaltung.

Derartiges Geheimwissen kann identitätsstiftend sein. Als „Herrschaftswissen“ kann es jedoch auch Menschen, die davon ausgeschlossen sind, zum Nachteil gereichen. Allerdings ist heute leider immer noch für viele Menschen mathematisches Wissen „Geheimwissen“, das ihnen verschlossen bleibt, weil sie die mathematische *Fachsprache* nicht verstehen, denn viele mathematische Sachverhalte werden mit Formeln ausgedrückt. Das Nichtverstehen der Formelsprache schließt bis heute die Mehrheit der Menschen von dieser Art von Erkenntnis aus. Die Heranwachsenden sollen im Mathematikunterricht die Grundlagen der mathematischen Sprache lernen, damit sie mit anderen *mathematisch kommunizieren* können.

Mathematische Entdeckungen sind Ausdruck und Bestandteil von *Kulturen*, die bewahrt und weiter entwickelt werden. Bei aller Verschiedenheit der Kulturen kann man doch gerade in der Mathematik Gemeinsamkeiten entdecken.

Beispiele: (1) In den meisten Kulturen finden sich die gleichen Zahlentypen: natürliche Zahlen zum Zählen, Messen und Rechnen, Brüche zum Messen und Rechnen.

(2) Früh sind in allen Kulturen Symmetrien entdeckt worden, Achsensymmetrie, Drehsymmetrie und Verschiebungssymmetrie.

(3) Ein besonders prominentes Beispiel eines in vielen Kulturen entdeckten geometrischen Sachverhalts ist der Satz des Pythagoras.

Mathematik ist ein wesentlicher Bestandteil unserer Kultur, auch wenn das heute im öffentlichen Bewusstsein vielleicht nicht besonders stark verankert ist (Snow 1967). Offensichtlich ist es den Mathematikern nicht gelungen, einen Eindruck davon zu vermitteln, dass heute ein immenses – ständig wachsendes – mathematisches Wissen vorhanden ist und dass Mathematik in immer mehr Bereiche der Wissenschaft und Technik als Werkzeug der Erkenntnis und der Gestaltung vordringt. Mathematik als blühende Wissenschaft und als leistungsfähiges Werkzeug ist eine Errungenschaft, an der möglichst viele Menschen teilhaben sollten. Die *Teilhabe an der Mathematik* den Heranwachsenden zu ermöglichen, ist eine wesentliche Aufgabe des Mathematikunterrichts.

Mathematisches Wissen und Können sind in unserer Gesellschaft nicht gleichmäßig ausgeprägt, so dass sich Könner Vorteile verschaffen können. Das wird bereits in der Schule deutlich, denn einigen fällt die Mathematik zu, während sich andere mit ihr quälen. Der Unterricht kann soziales Verhalten fördern, wenn er die Leistungsstärkeren ermuntert, den Schwächeren zu helfen. Wenn allerdings in Mitschülern Konkurrenten um Studienplätze oder Lehrstellen gesehen werden, fällt es eher schwer, Schwächeren zu helfen.

Das Kommunizieren über und mit Hilfe von Mathematik, das Lernen und Weitergeben von Gelerntem sind geeignet, *soziales Verhalten* zu fördern. Es ist von Anfang an mit den Schülerinnen und Schülern zu pflegen, wobei das allerdings nur gelingen kann, wenn der Mathematikunterricht den Heranwachsenden zugleich Handlungsnormen und Wertvorstellungen vermittelt.

1.2.4 Beiträge zur Vermittlung von Normen und Werten

Mathematik ist unter den Fächern dadurch ausgezeichnet, dass es hier im Grunde für „richtig" oder „falsch" keinen Ermessensspielraum gibt. Lehrende und Lernende sind den gleichen Regeln verpflichtet. Beide stehen in der Pflicht, Behauptungen zu begründen. Aber auch in der Mathematik stößt man dabei auf Grenzen. Beim Beweisen stützt man sich auf bereits Bewiesenes, das sind *Sätze*, oder als wahr Angenommenes, das sind *Axiome*. Unter Umständen lassen sich auch noch als Axiome gewählte Aussagen auf andere zurückführen. Aber prinzipiell ist mit dem Rückgriff auf Bewiesenes irgendwann einmal Schluss. Im Grunde genommen kommt man hinter Axiome nicht zurück. Für Blaise Pascal (1623–1662) lag das in der Natur des Menschen:

> Es hat den Anschein, dass die Natur der Menschen es ihnen für immer unmöglich macht, irgendeine Wissenschaft in einer ganz lückenlosen Beweisfolge durchzuführen. (zitiert nach: Bornhausen 1920, S. 106 f.)

Wenn man trotzdem Sicherheit aus dieser Methode bezog, dann deshalb, weil man nur „vollständig klare und selbstverständliche Dinge" voraussetzte. Den Verzicht auf Definition der Grundbegriffe forderte Pascal mit der Regel:

> Keine Definition einer Sache versuchen, die so selbstverständlich ist, dass es zu ihrer Erklärung keinen noch klareren Ausdruck gibt. (zitiert nach: Bornhausen 1920, S. 133)

Für die Wahl der Axiome gab er als Regel:

> Zu Axiomen nur Erfahrungen verwenden, die sich völlig von selbst verstehen. (zitiert nach: Bornhausen 1920, S. 133)

Dieses Bewusstsein von der Sicherheit der Mathematik auf der Grundlage der Evidenz ihrer Axiome trägt bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. Erst unter dem Eindruck der *Grundlagen der Geometrie* (1899) von David Hilbert (1862–1943) wird dieser Anspruch aufgegeben. Er macht deutlich, dass „vollständige Klarheit" und „Selbstverständlichkeit" als Garanten der Wahrheit nicht geeignet sind, weil es sich bei ihnen um subjektive und letztlich nicht fassbare Maßstäbe handelt. Von den Axiomen wird nur noch ihre *Widerspruchsfreiheit* gefordert, d.h., es soll nicht möglich sein, aus den Axiomen eine Aussage und ihre Negation herzuleiten.

Der Verzicht auf die „Wahrheit" der Axiome relativiert nun auch die Wahrheit der aus ihnen hergeleiteten Sätze. Sie sind eben nur noch „relativ" zu den gewählten Axiomen wahr. Das hat deutlich gemacht, dass bei aller wissenschaftlichen Strenge in der Mathematik lediglich *relative* Wahrheit zu haben ist. Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass auch heute noch Mathematiker mit Axiomen bestimmte Vorstellungen verbinden. Herbert Meschkowski (1909–1990) hatte angesichts dieser Entwicklungen in den Grundlagen der Mathematik Schwierigkeiten, wenn in Fragen der Bildung unreflektiert von „Wahrheit" gesprochen wird (Meschkowski 1965, S. 1–3). Im Bewusstsein dieser Problematik können wir sagen: Der Mathematikunterricht hat die Aufgabe, den Lernenden eine Haltung der „Wahrheitssuche" zu vermitteln, in der sie über die Dinge nachdenken, sie in Frage stellen, selbstständig nach Gründen suchen und sich dabei auf das eigene Denken verlassen. Dabei sollen sie sich freilich auch der Grenzen dieses Denkens bewusst werden.

Bertrand Russell (1872–1970) wünschte sich in seinem Buch *Ewige Ziele der Erziehung* (1928) eine Schule, die sich der Wahrheitssuche verschrieben hat. Er schrieb:

> Wir wollen die Wahrheit wissen, wie sie auch immer beschaffen sein mag, damit wir vernunftgemäß handeln können. ... In meiner Schule sollte nicht ein einziges Hindernis den Weg zum Wissen versperren. Ich würde die Tugend nicht durch Lügen und Täuschungen, sondern durch die richtige Ausbildung der Leidenschaften und Instinkte erstreben. Ein grenzenloser Wissensdrang, der keine Furcht kennt, ist für mich untrennbar mit dem Begriff der Tugend verbunden, die ohne dieses Element wenig Wert hat.
>
> Die Anschauung, die ich hier vertrete, bedeutet nur, daß ich den *Forschergeist* pflegen würde. ... Ich würde ihn so zu verwurzeln suchen, daß er die ganze Betrachtungsweise durchdringt. Der Forschergeist setzt in erster Linie den Wunsch voraus, die Wahrheit zu finden; je glühender der Wunsch ist, um so besser. Außerdem bedingt er einige geistige Eigenschaften. Die unvoreingenommene Haltung darf nicht eher aufgegeben werden, bis das Beweismaterial eine Entscheidung zuläßt. Wir dürfen uns nicht im Voraus einbilden, daß wir das kommende Resultat schon wissen, noch dürfen wir uns mit einem trägen Skeptizismus zufrieden geben, der eine objektive Wahrheit für unerreichbar und unbeweisbar hält. Wir sollten zugeben, daß selbst unsere bestbegründeten Anschauungen wahrscheinlich irgendeiner Berichtigung bedürfen; aber der Wahrheit, die innerhalb des menschlichen Begriffsvermögens liegt, kommen wir nur schrittweise näher. (Russell 1928, S. 219 f.)

Traditionell wird in der Bildung Wahrheit als ein *Wert* (eine „Tugend") gesehen. Insofern leistet der Mathematikunterricht mit seiner Wahrheitssuche einen Beitrag zur Vermittlung von Normen und Werten.

Andererseits wird häufig betont, dass mathematische Erkenntnis *wertfrei* sei. Damit soll ausgedrückt werden, dass die Frage, ob ein mathematisches Ergebnis für den Menschen nützlich oder schädlich wird, nicht von der Mathematik her entschieden werden kann. Nun sind aber in konkreten Situationen durchaus verantwortungsbewusste Entscheidungen zu treffen. Selbst so harmlos anmutende Tätigkeiten wie das Zählen können tödlich sein. So werden Fälle berichtet, in denen Forscher eine Population töteten, um zählen zu können, aus wie vielen Tieren sie bestand (Gleich et al. 2000). Das liegt natürlich nicht an der Mathematik, sondern am Umgang der Menschen mit ihr. Aber bei der Vermittlung von Normen und Werten geht es ja gerade darum. Mit zwar harmloseren, aber doch im Prinzip ähnlichen Situationen können durchaus schon Grundschulkinder konfrontiert sein: Ein Kind entdeckt, dass eine Kirschblüte aus vielen kleinen Blütenblättern besteht. Es möchte wissen, wie viele es sind. Zum Zählen reißt es die einzelnen Blätter ab und weiß zum Schluss, wie viele Blütenblätter vorhanden waren. Aber die Blüte ist zerstört.

Im Zusammenhang mit der Vermittlung von Handlungsnormen und Werthaltungen wird häufig die Erziehung zu Sorgfalt, Genauigkeit, Gründlichkeit und Ordnung als Ziel genannt. Im Mathematikunterricht sollen diese „Tugenden" traditionell bei Rechnungen und Konstruktionen vermittelt werden, die nach bestimmten Regeln auszuführen sind. Russell gibt aber zu bedenken:

> Das gegebene Hilfsmittel für die Erziehung zum genauen Denken ist die Mathematik, aber man wird keinen großen Erfolg damit erzielen, wenn man sie als eine Reihe willkürlicher Regeln erscheinen läßt. Die Erlernung von Regeln ist unerläßlich, aber von einem bestimmten Zeitpunkt an müssen die Gründe für diese Regeln erläutert werden. Ohne entsprechende Erläuterung hat die Mathematik nur einen geringen erzieherischen Wert. (Russell 1928, S. 193)

1.3 Mathematik als qualifizierendes Fach

Im vorangegangenen Abschnitt wurde Mathematik als allgemeinbildendes Fach betrachtet. Entsprechend dem allgemein formulierten Ziel der Allgemeinbildung waren auch die von diesem Fach zu erwartenden Beiträge recht allgemein gehalten. In der Gesellschaft sieht sich jedoch die Schule konkreten Forderungen gegenüber, die in erster Linie die *Qualifikation* der Schulabgängerinnen und Schulabgänger betreffen. Die angestrebte Qualifikation spielt im Schulalltag als Ziel eine wichtige Rolle. Mathematik ist damit zugleich ein qualifizierendes Fach.

1.3.1 Qualifikation als Ziel

In einem dreigliedrigen Schulsystem qualifiziert das *Gymnasium* mit dem „Reifezeugnis" für ein Hochschulstudium. Die *Realschule* führt zur „Mittleren Reife", die für das Berufsleben und weiterführende Schulen qualifiziert, und die *Hauptschule* kann einen „qualifizierenden Hauptschulabschluss" erteilen, der den Berufsanfängern bessere Chancen bietet, zugleich aber auch für weiterführende Schulen qualifiziert. Die *Gesamtschule* ermöglicht unter einem Dach Abschlüsse, die für eine Berufsausbildung und für ein Hochschulstudium qualifizieren. Allerdings beginnen auch zahlreiche Abiturientinnen und Abiturienten nach ihrer Schulzeit eine Berufsausbildung. Heute hat also jede Schule sowohl Qualifikationen für das *Berufsleben* als auch für *weiterführende Bildungsgänge* zu ermöglichen. Im Grunde wird von unserem Schulsystem erwartet, dass alle Schulabgängerinnen und Schulabgänger *Berufsreife* erwerben.

Qualifikationen beziehen sich auf *Fähigkeiten* und *Kenntnisse,* die für den anschließenden Lebensabschnitt vorausgesetzt werden. Daraus ergeben sich Forderungen an die einzelnen Fächer. Im Folgenden sollen für das Fach Mathematik die Anforderungen betrachtet werden, die am Ende der Sekundarstufe I für das Berufsleben und am Ende der Sekundarstufe II für ein Hochschulstudium qualifizieren sollen.

1.3.2 Die Bedeutung der Mathematik für die Berufsreife

Das Ziel der Allgemeinbildung schließt ein, dass der Mathematikunterricht Kenntnisse und Fähigkeiten vermittelt, die den jungen Menschen helfen, Probleme ihrer Umwelt und ihres Lebens mit Hilfe von Mathematik zu lösen. Prinzipiell sollen dazu auch Qualifikationen für das Berufsleben gehören. Dass diese doch recht allgemeinen Zielangaben die erwartete Qualifikation gewährleisten, wird von den Abnehmern immer wieder in Frage gestellt.

Ein pragmatischer Ansatz wird versuchen herauszufinden, welche Kenntnisse und Fähigkeiten von Berufsanfängern benötigt werden. Einen solchen Ansatz vertrat Saul B. Robinsohn (1916–1972) in (1973[4]). Auch eine Reihe mathematikdidaktischer Forschungsarbeiten setzte ähnlich an. Man wird zunächst eine Bestandsaufnahme vornehmen, welche mathematischen Anforderungen die wichtigsten Berufszweige stellen und welche mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten bei den Berufsanfängern benötigt werden. Bei den Expertenbefragungen und den Arbeitsplatzanalysen lassen sich erhebliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Berufen feststellen. Nach welchen Anforderungen soll sich die Schule richten? Für die verschiedenen Berufe, die z.B. von Hauptschülern gewählt werden, nehmen die mathematischen Anforderungen etwa in folgender Reihenfolge ab: Elektriker-, Metallerzeugungs- und Metallverarbeitungsberufe, Bauberufe, kaufmännische Berufe, Friseurberufe, Nahrungs- und Genussmittel herstellende Berufe und Hilfsberufe. Alle benötigen sie einen Grundstock, der aus einer Sicherheit im Rechnen mit Zahlen und Größen, Schlussrechnung, Prozent-, Zins- und Mischungsrechnung besteht. Die technischen Berufe erfordern außerdem Fähigkeiten im Umgang mit Formeln (Vollrath 1975).

Expertenbefragungen können einerseits die derzeit erforderlichen Anforderungen recht zuverlässig angeben, andererseits sind aber ihre Aussagen durch ihre eigenen Erfahrungen begrenzt. Das bedeutet, dass sie unter Umständen die in der Mathematik vorhandenen Möglichkeiten gar nicht kennen und auch die mathematischen Anforderungen der Zukunft nur schwer abschätzen können.

Unter dem Einfluss neuer Technologien zeichnen sich in vielen Berufen tief greifende Änderungen ab: Erworbenes und bewährtes Wissen veraltet. Für den beruflichen Erfolg wird daher die *Fähigkeit zu lernen* immer wichtiger. In vielen Berufen werden einfache Tätigkeiten von Maschinen übernommen. Den Menschen fallen damit zunehmend Aufgaben zu, die selbstständiges, verantwortungsbewusstes und *problemlösendes Handeln* an komplexen Systemen erfordern. Zunehmend wird Zusammenarbeit mit anderen nötig. Deshalb wird *Teamfähigkeit* gefordert. Derartige Fähigkeiten werden als *Schlüsselqualifikationen* (Mertens 1974) gesehen, bei denen es sich um *allgemeine* Fähigkeiten handelt. Diese Betrachtungen machen deutlich, dass es nicht Aufgabe einer allgemeinbildenden Schule sein kann, spezielle Kenntnisse und Fähigkeiten zu vermitteln, die im späteren Beruf benötigt werden. Auch das Problem der Berufsreife mündet also letztlich wieder in allgemeine Forderungen für den Mathematikunterricht:

- Die Schülerinnen und Schüler sollen *lernen*, *wie man Mathematik lernt*. Dazu ist im Unterricht das Lernen immer wieder zu reflektieren, es sind aber auch konkrete Hilfen zu geben, wie man sich mathematisches Wissen und Können selbstständig aneignen kann. Eine Chance ist hier vor allem mit den neuen Medien gegeben, durch die Fachinformation leicht zugänglich ist.
- Im Mathematikunterricht sollte das *Problemlösen* ein stärkeres Gewicht gegenüber dem algorithmischen Lösen von Aufgaben erhalten. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass das Lösen eines Problems häufig neue Probleme erzeugt. Sie sollten also auch lernen, sich selbstständig Probleme zu stellen.
- Auch im Mathematikunterricht sollte *Teamarbeit* in offenen Unterrichtsformen ermöglicht und gefördert werden. Hier bietet sich die Arbeit an Projekten an, bei denen zwangsläufig verschiedene Aufgabenstellungen zur Bearbeitung des ganzen Projekts erforderlich sind und in Teamarbeit geleistet werden können. Man sollte aber auch an komplexere Aufgabenstellungen denken, die in Teilaufgaben aufgelöst und von den Einzelnen bearbeitet werden. Auch das kann durch das Arbeiten mit Computern gefördert werden.

1.3.3 Mathematik und Hochschulreife

Über Platons (427–347) Akademie soll gestanden haben:

Es trete kein der Geometrie Unkundiger ein.

Für das Studium der Philosophie setzten die alten Griechen die Geometrie voraus. Heute eröffnet das Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife den Zugang zum Studium an einer Universität. In der Reifeprüfung (Abitur) müssen auch Kenntnisse und Fähigkeiten in Mathematik nachgewiesen werden. Inhaltlich geht es um die drei Sachgebiete:

Analysis – Lineare Algebra – Stochastik.

Das gilt inzwischen für alle Zweige des Gymnasiums und auch für die Gesamtschule. Angesichts der wechselvollen Entwicklung der Sekundarstufe II seit dem Beginn der 1970er Jahre ist das bemerkenswert und aus der Sicht des Faches Mathematik auch erfreulich. Immerhin galt es für das Fach, sich bei den Wahlmöglichkeiten der Kollegstufe und bei den notwendigen Einschränkungen beim Übergang vom neunjährigen zum achtjährigen Gymnasium zu behaupten. Mit der Vereinheitlichung der Prüfungsanforderungen im Abitur (auf Bundesebene) und der allgemeinen Einführung des Zentralabiturs (auf Länderebene) sollen nun auch gleiche Anforderungen durchgesetzt werden (KMK 2006).

Bei der Begründung dieser Anforderungen geht es um das Erreichen der Allgemeinen Hochschulreife. Da sie die Möglichkeit eröffnet, jedes Fach zu studieren, geht es also um die *Studierfähigkeit*. Nun können die Studierenden an den Hochschulen zwischen einer großen Vielfalt von Fächern mit ganz unterschiedlichen mathematischen Anforderungen wählen. Zwar unterschätzen viele Studienanfänger die mathematischen Anforderungen des gewählten Studienfaches, doch wird sich Studierfähigkeit auf *grundlegende* mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten beschränken müssen. Wichtiger sind *allgemeine* Fähigkeiten, die beim wissenschaftlichen Arbeiten erforderlich sind und die vom Mathematikunterricht gefördert werden können. Man denke etwa an Objektivität, präzises Sprechen, das Begründen von Aussagen, das selbstständige Aneignen von Information, Ausdauer, das Lösen von Problemen und Kreativität beim Entwickeln von Ideen. Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe soll auf wissenschaftliches Arbeiten vorbereiten, er soll *wissenschaftspropädeutisch* sein (KMK 2006). Was das konkret bedeutet, lässt sich nicht ein für alle Mal festlegen, denn die Wissenschaften entwickeln sich und damit auch die Anforderungen an die Studierenden. Das findet seinen Niederschlag in den Entwicklungen der Lehrpläne (Steiner 1978).

Das angestrebte Ziel der Hochschulreife hat natürlich auch Auswirkungen auf die Sekundarstufe I. Denn sie legt den Grund für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe. Zusätzlich fordert das achtjährige Gymnasium von der 10. Jahrgangsstufe, dass sie neben ihrer Rolle als letzter Jahrgangsstufe der Sekundarstufe I zugleich die Rolle als Einführungsphase für die gymnasiale Oberstufe übernimmt (KMK 2006).

Angesichts der Tatsache, dass viele Abiturientinnen und Abiturienten gar nicht studieren wollen (im Jahre 2006 immerhin etwa ein Drittel), wäre es natürlich problematisch, die gymnasiale Oberstufe und damit das Abitur ausschließlich an der Hochschulreife zu orientieren. Es ist daher sinnvoll, auch das Ziel der Hochschulreife dem der Allgemeinbildung unterzuordnen.

1.3.4 Die Qualifikationsproblematik der Primarstufe

Am Ende der Primarstufe werden in einem dreigliedrigen Schulsystem die Weichen für die weitere schulische Zukunft der Schülerinnen und Schüler, im Grunde sogar für das Leben gestellt. Entsprechend ihrer Begabung sind sie dem Gymnasium, der Realschule oder der Hauptschule zuzuweisen. In einigen Bundesländern wird diese Entscheidung durch die Orientierungsstufe um zwei Jahre hinausgeschoben. Begabung ist jedoch einer der schillerndsten Begriffe im Bereich der Bildung. Zunächst drückt er den Sachverhalt aus, dass es Menschen mit besonderen *geistigen* Fähigkeiten gibt, über die nicht alle anderen Menschen in gleicher Weise verfügen. Sie genießen in unserer Gesellschaft ein besonderes Ansehen. Dabei stellt sich ein Unbehagen ein, denn es gibt auch Menschen mit besonderen praktischen oder auch künstlerischen Fähigkeiten.

Ein weiteres grundlegendes Problem beim Begabungsbegriff wird in der Frage deutlich, ob Begabung erblich bedingt oder durch Umwelteinflüsse hervorgerufen ist. Praktisch gefragt: *Ist* der Mensch begabt oder *wird* er begabt? Darüber ist lange und verbissen gestritten und intensiv geforscht worden. Untersuchungen an eineiigen Zwillingen, die getrennt aufgewachsen sind, liefern deutliche Belege dafür „dass es eine starke angeborene Komponente beim Intelligenzquotienten gibt“ (Anderson 2001[3], S. 443). Der Intelligenzquotient misst die „Fähigkeit zum schlussfolgernden Denken“, die „verbale Fähigkeit“ und die „räumliche Fähigkeit“. Das sind zwar Fähigkeiten, die für den Schulerfolg wichtig sind, ihn jedoch nicht garantieren. Zudem stellen auch sie nur einen relativ engen Ausschnitt menschlicher Fähigkeiten dar.

Diesem Buch liegt die Überzeugung zugrunde: Was immer Begabung ist, sie ist auf jeden Fall entwicklungsfähig. Das schließt die „mathematische Begabung“ mit ein. Der Schule bietet das eine Chance; ihr wird aber damit auch eine Verantwortung auferlegt.

Bei der Empfehlung für einen bestimmten weiterführenden Schultyp spielen die *Noten* in den Hauptfächern – also auch in Mathematik – die entscheidende Rolle. Damit ergibt sich natürlich die Frage nach dem prognostischen Wert von Noten. Das ist eins der schwierigsten Probleme in dieser Situation, mit dem allerdings die verschiedenen Schulsysteme in unterschiedlicher Weise konfrontiert sind.

Wenn z.B. am Ende der 4. Jahrgangsstufe in Bayern entsprechend der Begabung der Kinder eine Empfehlung für das Gymnasium, die Realschule oder die Hauptschule ausgesprochen werden soll, dann wird im Grunde eine Prognose darüber abgegeben, welchen Abschluss man der Schülerin oder dem Schüler zutraut. Diese Prognose stützt sich dabei wesentlich auf die Noten in Mathematik und Deutsch. Den prognostischen Wert der Mathematiknote am Ende der 4. Jahrgangsstufe kann man jedoch durchaus bezweifeln. Dem Mathematikunterricht wird damit eine Verantwortung zugewiesen, der er eigentlich gar nicht gerecht werden kann. Das Gewicht der Mathematiknote in dieser Situation kann deshalb durchaus Unbehagen auslösen.

Das Problem wird gemildert in Systemen mit einer Übergangsphase wie z.B. der Orientierungsstufe, in denen zwar in den Kernfächern eine Zuordnung zu unterschiedlichen Leistungsgruppen erfolgt, die jedoch im Prinzip revidierbar ist. Auch in Orientierungsstufen spielt Mathematik als Fach, das in verschiedenen Leistungsgruppen angeboten wird, eine besondere Rolle.

Für die Primarstufe führen die Qualifikationserwartungen zu erheblichen Spannungen mit dem spezifischen Bildungsauftrag dieser Schule. Sie belasten den Unterricht, können Ängste auslösen und zu Überforderungen führen, so dass auch das Verhältnis zwischen Schule und Eltern beeinträchtigt werden kann. Im Vordergrund des Unterrichts sollte deshalb der Bildungsauftrag der Grundschule stehen (z.B. Krauthausen und Scherer 2007[3]). Für den Mathematikunterricht bedeutet dies:

- Der Mathematikunterricht hat die *geistige* und *seelische* Entwicklung des Kindes zu fördern.
- Er soll bei den Kindern *angemessene Vorstellungen* über Zahlen, Größen und Formen wecken.
- Die Kinder sollen die mathematischen *Kulturtechniken* lernen, also mit Zahlen und Größen rechnen, Grundformen erkennen und gestalten lernen.
- Der Mathematikunterricht soll die Fähigkeiten der Kinder fördern, *Zusammenhänge zwischen Zahlen und Formen* zu erfassen, sachgerecht zu begründen und angemessen darzustellen.
- Die Kinder sollen im Mathematikunterricht lernen, mit Mathematik *Probleme zu lösen.*
- Der Mathematikunterricht soll die Kinder anregen, mit Zahlen und Formen *schöpferisch* umzugehen.
- Die Kinder sollen schließlich lernen, mit anderen mathematisch zu *kommunizieren* und zu *kooperieren.*

In einem solchen Unterricht werden die Lehrenden Stärken und Schwächen der ihnen anvertrauten Kinder erkennen. Im Vordergrund ihres pädagogischen Bemühens steht dabei das Bemühen, Hilfen für die Überwindung von Schwierigkeiten zu geben und besondere Begabungen zu fördern. Bei der Empfehlung für einen bestimmten Schultyp wird dann die Lehrkraft in erster Linie das Wohl des anvertrauten Kindes sehen.

http://www.springer.com/978-3-8274-2854-7

Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe
Vollrath, H.-J.; Roth, J. - Padberg, F. (Hrsg.)
2012, XI, 307 S., Softcover
ISBN: 978-3-8274-2854-7