

Übungsaufgaben

1

1. Aufgabe

Welcher der folgenden Sätze ist eine Aussage, welcher eine Aussageform, welcher ist keines von beiden:

- a. x ist eine gerade Zahl.
Aussageform
- b. 10 ist Element der Menge A.
Aussageform
- c. $\sqrt{2}$ ist ungefähr 1,4
Keines von beiden
- d. Morgen regnet es.
Aussage
- e. Morgen regnet es wahrscheinlich.
Keines von beiden

2. Aufgabe

Verneinen Sie die folgenden Aussagen, Aussageformen oder Implikationen: (Mit dem Wort "oder" ist bei allen Beispielen stets das aussagenlogische, einschließende "oder" gemeint)

- a. 10 ist eine gerade Zahl.
10 ist keine gerade Zahl
- b. 10 ist eine gerade Zahl oder 10 ist nicht durch 4 teilbar
10 ist keine gerade Zahl und 10 ist durch 4 teilbar

-
- c. x ist eine Primzahl oder x ist durch 5 teilbar
 x ist keine Primzahl und x ist nicht durch 5 teilbar
- d. y löst die Gleichung $x^2 = 27$ und y ist eine rationale Zahl
 $y^2 \neq 27$ oder y ist nicht rational
- e. Wenn z eine gerade Zahl ist, ist z durch 3 teilbar
Die Zahl z ist gerade und z ist nicht durch 3 teilbar.
- f. Wenn z gerade ist und b Primzahl ist, dann ist $z + b$ ungerade
Die Zahl z ist gerade und b ist Primzahl und $z + b$ ist gerade.
- g. Wenn a eine natürliche Zahl ist, dann ist a^2 durch 4 teilbar oder beim Teilen von a^2 durch 4 bleibt der Rest 1
Die Zahl a ist eine natürliche Zahl und a^2 ist nicht durch 4 teilbar und beim Teilen von a^2 durch 4 bleibt nicht der Rest 1.
- h. Für alle reellen Zahlen z gilt: $z^2 > 0$ oder $z^2 = 0$
Es gibt eine reelle Zahl z , für die gilt: $z^2 \leq 0$ und $z^2 \neq 0$
- i. Es gibt eine Zahl x , für die gilt: $x^2 = -5$
Für alle Zahlen x gilt: $x^2 \neq -5$
- j. Für alle positiven Zahlen $q \in \mathbf{Q}$ gibt es eine Zahl $w \in \mathbf{Q}$ so, dass $w^2 = q$ ist
Es gibt eine positive Zahl $q \in \mathbf{Q}$ so, dass für alle Zahlen $w \in \mathbf{Q}$ gilt: $w^2 \neq q$.

3. Aufgabe

Die Definition des Grenzwerts einer Funktion lautet: (vergleiche Anhang 1)

Definition:

Die Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ hat bei a den **Grenzwert** b , wenn gilt :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbf{R}} 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Wie lautet die logische Formulierung der folgenden Behauptungen:

a. $f(x) = x^2$ hat bei 2 den Grenzwert 4

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbf{R}} 0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

b. $f(x) = x^2$ hat bei 3 **nicht** den Grenzwert 10

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{x \in \mathbf{R}} 0 < |x - 3| < \delta \wedge |x^2 - 10| \geq \varepsilon$$

c. $f(x) = 1/x$ hat bei 0 keinen Grenzwert

$$\forall_{g \in \mathbf{R}} \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{x \in \mathbf{R}} 0 < |x| < \delta \wedge |1/x - g| \geq \varepsilon$$

- d. Für alle a gilt: $f(x) = x^4$ hat bei a und bei $-a$ denselben Grenzwert

$$\left[\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbf{R}} 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |x^4 - g_1| < \varepsilon \right.$$

$$\wedge$$

$$\left. \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbf{R}} 0 < |x + a| < \delta \rightarrow |x^4 - g_2| < \varepsilon \right]$$

$$\rightarrow g_1 = g_2$$

4. Aufgabe

Es gibt zwei verschiedene Darstellungen des Entweder ... Oder – Operators \oplus :

A	B	A \oplus B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- a. Als Und-Verknüpfung von Oder-Aussagen

$$A \oplus B = (A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$$

- b. Als Oder-Verknüpfung von Und-Aussagen

$$A \oplus B = (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

Finden Sie beide.

5. Aufgabe

Formulieren Sie a) die Kontraposition und b) die Verneinung zu folgenden Implikationen:

- Wenn $a = b$ ist, dann ist auch $a^2 = b^2$

Kontraposition	Verneinung
Wenn $a^2 \neq b^2$ ist, dann ist auch $a \neq b$	Es ist $a = b$ und $a^2 \neq b^2$

- Wenn $\log_{10}(x) = 3$ ist, dann ist $x = 1000$.

Kontraposition	Verneinung
Wenn $x \neq 1000$ ist, dann ist auch $\log_{10}(x) \neq 3$	Es ist $\log_{10}(x) = 3$ und $x \neq 1000$

6. Aufgabe

Welche der drei folgenden Aussagen sind äquivalent zu der Implikation:

Wenn $x^2 < 1$ ist, dann ist x keine ganze Zahl

- Wenn $x^2 \geq 1$ ist, ist x eine ganze Zahl oder
 $(\neg A) \rightarrow (\neg B)$: nicht äquivalent
- Wenn x eine ganze Zahl ist, so ist $x^2 \geq 1$ oder
 $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$: äquivalent
- Wenn x keine ganze Zahl ist, so ist $x^2 < 1$.
 $B \rightarrow A$: nicht äquivalent

Symbolisieren Sie die beiden Teilaussagen der Implikation durch die Buchstaben A und B und notieren Sie die Bedeutung der anderen Aussagen mit Hilfe von A, B, \neg und \rightarrow .

Die folgende schöne Aufgabe habe ich in dem Buch „Mathematik für Informatiker“ von Gerald und Susanne Teschl [Teschl1] gefunden:

7. Aufgabe

Angenommen, das Wetter würde sich an die Regel „Ist es an einem Tag sonnig, so auch am nächsten“ halten. Wenn es heute sonnig ist, was folgt dann:

- a. Es ist immer sonnig
Falsch, wir wissen nicht, was gestern war
- b. Gestern war es sonnig
Falsch, wir wissen nicht, was gestern war
- c. Morgen ist es sonnig
Richtig
- d. Es wird nie mehr sonnig sein
Falsch
- e. Ab heute wird es immer sonnig sein
Richtig

8. Aufgabe

Zeigen Sie: Die Aussageform

$$((A \rightarrow B) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$$

ist stets wahr, gleichgültig, welche Wahrheitswerte A und B besitzen.

(Sie können das natürlich mit einer Wahrheitstabelle zeigen, es sollte aber Ihr Ziel sein, den Nachweis mit Hilfe einer kurzen inhaltlichen Argumentation zu erbringen)

$((A \rightarrow B) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$ ist falsch genau dann, wenn

$((A \rightarrow B) \wedge (\neg B))$ wahr ist und A wahr ist.

Wenn A wahr ist, ist $(A \rightarrow B)$ wahr genau dann, wenn B wahr ist. Dann ist aber $(\neg B)$ falsch und damit auch $((A \rightarrow B) \wedge (\neg B))$.

Daher ist $((A \rightarrow B) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$ stets wahr

Solche stets wahren Aussageformen nennt man **Tautologien**.

9. Aufgabe

Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Tautologie, welcher nicht?

a. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \wedge B)$

Dieser Ausdruck ist keine Tautologie, wie beispielsweise die Belegung A = wahr und B = wahr zeigt. Hier erhält man: $1 \leftrightarrow 0$

b. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Dieser Ausdruck ist per definitionem eine Tautologie

c. $((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \leftrightarrow B$

Dieser Ausdruck ist eine Tautologie, wie Sie am schnellsten durch eine Wahrheitstafel feststellen können.