

1. Aufgabe

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\bullet \quad 0 + 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2 \cdot n + 1)}{6}$$

Induktionsanfang:

Der Satz ist wahr für $n = 0$: $0 = 0$.

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Sei } m \in \mathbb{N} \text{ gegeben und es gelte: } \sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2 \cdot m + 1)}{6}$$

Induktionsbehauptung:

$$\text{Dann gilt auch: } \sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2 \cdot m + 3)}{6}$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = (m+1)^2 + \sum_{k=0}^m k^2 = \text{nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$= (m+1)^2 + \frac{m(m+1)(2 \cdot m + 1)}{6} = \frac{(m+1)(6m + 6 + m(2m + 1))}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)(2 \cdot m^2 + 2 \cdot (2 \cdot 1,75) \cdot m + 2 \cdot (1,75)^2 - 0,125)}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)(2 \cdot (m+1,75)^2 - 2 \cdot (0,25)^2)}{6} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(m+1) \cdot 2 \cdot (m+2) \cdot (m+1,5)}{6} = \\
&= \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (2 \cdot m+3)}{6} \text{ wie behauptet.}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad 0 + 1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Induktionsanfang:

Der Satz ist wahr für $n = 0$: $0 = 0$.

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Sei } m \in \mathbb{N} \text{ gegeben und es gelte: } \sum_{k=0}^m k^3 = \left(\sum_{k=0}^m k \right)^2$$

Induktionsbehauptung:

$$\text{Dann gilt auch: } \sum_{k=0}^{m+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{m+1} k \right)^2$$

Beweis:

Zunächst erinnern wir uns (Satz 3.2): $\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{m+1} k \right)^2 &= \left(m+1 + \sum_{k=0}^m k \right)^2 = \\
&= (m+1)^2 + 2(m+1) \left(\sum_{k=0}^m k \right) + \left(\sum_{k=0}^m k \right)^2 = (\text{Satz 3.2}) = \\
&= (m+1)^2 + (m+1)m(m+1) + \left(\sum_{k=0}^m k \right)^2 = (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\
&= (m+1)^2(1+m) + \sum_{k=0}^m k^3 = \sum_{k=0}^{m+1} k^3
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

- $$0 + 1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Hier braucht man keine vollständige Induktion. Die Gleichung folgt sofort aus Satz 3.2 und Aufgabe 1 b)

2. Aufgabe

- Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$(x - 1) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = (x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i \right) = x^n - 1$$

Induktionsanfang:

Der Satz ist wahr für $n = 1$: $x - 1 = x - 1$.

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung:

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gegeben und es gelte: $(x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i \right) = x^m - 1$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch: $(x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^m x^i \right) = x^{m+1} - 1$

Beweis:

Es ist:

$$\begin{aligned} (x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^m x^i \right) &= \\ &= (x - 1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i \right) + (x - 1) \cdot x^m = (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= x^m - 1 + x^{m+1} - x^m = x^{m+1} - 1 \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

- Im Dualsystem (vgl. Kapitel 4) stellt man Zahlen mit den Ziffern 0 und 1 dar. Die obige Beziehung sagt Ihnen sofort, welche Zahl der Darstellung $1111\ 1111_2$ entspricht. Gegebenenfalls versuchen Sie diese Aufgabe noch einmal nach der Lektüre von Kapitel 4.

$$\begin{aligned}\text{Es ist } 1111\ 1111_2 &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = \\ &= (2^8 - 1)/(2 - 1) = 255.\end{aligned}$$

3. Aufgabe

Es ist:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Zeigen Sie allgemein mit vollständiger Induktion:

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a^{n-k} \cdot b^{k-1} \right)$$

Hinweis: Schreiben Sie $a^{n+1} - b^{n+1}$ als $a(a^n - b^n) + b^n(a - b)$

Induktionsanfang:

Der Satz ist wahr für $n = 1$: $a - b = (a - b) \cdot 1$.

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung:

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gegeben und es gelte:

$$a^m - b^m = (a - b) \cdot \left(\sum_{k=1}^m a^{m-k} \cdot b^{k-1} \right)$$

Induktionsbehauptung:

$$\text{Dann gilt auch: } a^{m+1} - b^{m+1} = (a - b) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m+1} a^{m+1-k} \cdot b^{k-1} \right)$$

Beweis:

Es ist:

$$\begin{aligned}a^{m+1} - b^{m+1} &= a \cdot (a^m - b^m) + b^m(a - b) = (\text{Ind.Voraussetzung}) \\&= (a - b) \left(a \cdot \left(\sum_{k=1}^m a^{m-k} \cdot b^{k-1} \right) + b^m \right) = \\&= (a - b) \left(b^m + \sum_{k=1}^m a^{m+1-k} \cdot b^{k-1} \right) = \\&= (a - b) \left(\sum_{k=1}^{m+1} a^{m+1-k} \cdot b^{k-1} \right)\end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

4. Aufgabe

Ein befreundeter Mathematiker sagt Ihnen: Der Beweis von Euklid über die unendliche Anzahl von Primzahlen ist falsch, denn für das Produkt der ersten 6 Primzahlen gilt:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$$

Das bedeutet: dieser Ausdruck ist keine Primzahl.

Wer irrt sich hier?

Der befreundete Mathematiker irrt sich, denn Euklid sagt nicht: 30031 muss eine Primzahl sein. Euklid sagt (nur): 30031 muss Primteiler haben, die sowohl von 2 als auch von 3 als auch von 5 als auch von 7 als auch von 11 als auch von 13 verschieden sind. Und das stimmt ja auch.

5. Aufgabe

- An einer Universität studieren 600 Studentinnen und Studenten. Der Rektor behauptet, dass es mindestens zwei Studierende geben muss, deren Vornamen und deren Nachnamen mit jeweils demselben Buchstaben anfangen. Hat er recht?

Die Anzahl der verschiedenen Anfangsbuchstabenpaarungen bei Vor- und Nachname ist: $26^2 = 676$. Damit ist die Behauptung des Rektors nicht zwingend.

- Gegeben eine Gruppe von 12 Personen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Team aus 5 Personen zu bilden?

$$\text{Genau } \binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792 \text{ Möglichkeiten}$$

- Wie viele Passwörter gibt es, die aus höchstens 8 und mindestens vier Kleinbuchstaben bestehen?

$$26^4 + 26^5 + 26^6 + 26^7 + 26^8 =$$

$$(26^0 + 26^1 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 26^5 + 26^6 + 26^7 + 26^8) - (26^0 + 26^1 + 26^2 + 26^3)$$

$$= (\text{vgl. Aufgabe 2}) =$$

$$\frac{26^9 - 1 - 26^4 + 1}{25} = \frac{5429503678976 - 456976}{25} =$$

$$= \frac{5429503222000}{25} = 217.180.128.880 \text{ Möglichkeiten}$$

Das sind über 217 Milliarden Möglichkeiten

6. Aufgabe

Es sei M eine endliche Menge. Zeigen Sie:

Die Anzahl der Teilmengen mit gerader Mächtigkeit ist gleich der Anzahl der Teilmengen mit ungerader Mächtigkeit.

Hinweis: Sie brauchen keine Induktion, es reicht, Satz 3.5 einmal anzuwenden.

Satz 3.5 lautete:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Wir brauchen auch noch Satz 3.4:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Sei nun G die Anzahl der Teilmengen mit gerader Mächtigkeit, U die Anzahl der Teilmengen mit ungerader Mächtigkeit. Falls n ungerade ist, gilt:

$$\begin{aligned} G &= \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k} = (\text{Satz 3.4}) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{n-2k} = \\ &= \binom{n}{n} + \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{3} + \binom{n}{1} = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k+1} = U \end{aligned}$$

Falls n gerade ist, gilt: (Man setze in den Formeln stets $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$)

$$\begin{aligned}
 G &= \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} = (\text{Satz 3.5}) = \sum_{k=0}^{n/2} \left(\binom{n-1}{2k-1} + \binom{n-1}{2k} \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^{n/2} \binom{n-1}{2k-1} + \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n-1}{2k} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n-1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n-1}{2k} = \\
 &= \sum_{k=0}^{n/2-1} \left(\binom{n-1}{2k} + \binom{n-1}{2k+1} \right) = (\text{Satz 3.5}) = \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{2k+1} = U
 \end{aligned}$$

7. Aufgabe

Eine Münze wird 7 Mal geworfen. Man erhält eine Ergebnisfolge $X X X X X X X$, wobei $X = K$ (für Kopf) oder Z (für Zahl) möglich ist.

- Wie viele verschiedene Ergebnisfolgen gibt es?

$$2^7 = 128 \text{ Ereignisfolgen}$$

- Wie viele Ergebnisfolgen haben genau 4 Mal das Ergebnis Kopf?

Es gibt $\binom{7}{4} = 35$ Teilmengen mit 4 Elementen aus einer 7-elementigen

Menge. Also können die Ereignisse „genau 4 mal Kopf“ auf genau 35 verschiedene Weisen auftreten.

- Wie viele Ergebnisfolgen haben mindestens 3 Mal das Ergebnis Kopf?

Das sind

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 99$$

560 Möglichkeiten, mindestens 3 Mal Kopf zu erzielen.

- Wie viele Ergebnisfolgen haben höchstens 5 Mal das Ergebnis Kopf?
Das sind

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 =$$
$$= 120$$

Möglichkeiten, höchstens 5 Mal Kopf zu erzielen.

8. Aufgabe

Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass für beliebige ganze Zahlen x und y gilt:

$$(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

Vergleichen Sie bitte dazu Satz 8.1 und Satz 8.2 im Kapitel 8 im Abschnitt 8.1. Die (sehr kurzen) Beweise sind mit Ihrem jetzigen Wissen vollständig zu verstehen.

9. Aufgabe

Welche der beiden folgenden Aussagen ist richtig? (Keine, genau eine oder beide?)

- Alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 1 000 000 sind, enthalten in ihrer Primfaktorzerlegung eine Primzahl, die kleiner als 1000 ist.

Dieser Satz ist falsch. Beispielsweise für die Primzahl 1009 oder für die Primzahl 999983

- Alle zusammengesetzten natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 000 sind, enthalten in ihrer Primfaktorzerlegung eine Primzahl, die kleiner als 100 ist.

Dieser Satz ist richtig. Sei $10000 > z = x \cdot y$. Dann muss entweder x oder y kleiner als $\sqrt{z} < 100$ sein.

10. Aufgabe

- Zerlegen Sie 297 und 63 in ihre Primfaktoren. Bestimmen Sie daraus den ggT und das kgV dieser beiden Zahlen.

$$297 = 3^3 \cdot 11$$

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$\text{ggT}(297, 63) = 3^2 = 9$$

$$\text{kgV}(297, 63) = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 = 2079$$

- Bestimmen Sie $\text{ggT}(297, 63)$ und $\text{kgV}(297, 63)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\text{ggT}(297, 63) = a \cdot 297 + b \cdot 63$$

$$297 = 4 \cdot 63 + 45$$

$$63 = 1 \cdot 45 + 18$$

$$45 = 2 \cdot 18 + 9$$

$$18 = 2 \cdot 9, \quad \text{Also ist 9 der ggT}$$

$$\text{Es ist } 9 = 45 - 2 \cdot 18 = 45 - 2 \cdot (63 - 45) = 3 \cdot 45 - 2 \cdot 63 =$$

$$= 3 \cdot (297 - 4 \cdot 63) - 2 \cdot 63 = 3 \cdot 297 - 14 \cdot 63, \text{ also}$$

$$9 = 3 \cdot 297 - 14 \cdot 63$$

- Zerlegen Sie 143 und 93 in ihre Primfaktoren. Bestimmen Sie daraus den ggT und das kgV dieser beiden Zahlen.

$$143 = 11 \cdot 13$$

$$93 = 3 \cdot 31$$

$$\text{ggT}(143, 93) = 1$$

$$\text{kgV}(143, 93) = 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 = 13299$$

- Bestimmen Sie $\text{ggT}(143, 93)$ und $\text{kgV}(143, 93)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\text{ggT}(143, 93) = a \cdot 143 + b \cdot 93$$

Analog dem obigen Vorgehen folgt:

$$1 = (-13) \cdot 143 + 20 \cdot 93$$

11. Aufgabe

Wir untersuchen jetzt **diophantische** Gleichungen, das sind Gleichungen bei denen man nur ganzzahlige Lösungen betrachtet. Zwei Beispiele:

$$17x + 20y = 3$$

hat ganzzahlige Lösungen, da der $\text{ggT}(17, 20) = 1$ ist und Ihnen der euklidische Algorithmus Zahlen x und y liefert, sodass $17x + 20y = 1$ ist. Tatsächlich ist:

$$(-7) \cdot 17 + 6 \cdot 20y = 1 \text{ und daher:}$$

$$(-21) \cdot 17 + 18 \cdot 20y = 3$$

Andererseits hat:

$$15x + 20y = 7$$

sicher keine ganzzahligen Lösungen, da das bedeuten würde, dass der $\text{ggT}(15, 20) = 5$ – die Zahl 7 teilt.

Entscheiden Sie nun, ob die folgenden Gleichungen ganzzahlige Lösungen haben und geben Sie sie gegebenenfalls auch an:

- $32x + 16y = 4$

Es ist:

$$\text{ggT}(32, 16) = 16,$$

$$16 = 32 - 16$$

Damit hat die obige Gleichung keine ganzzahlige Lösung, sonst wäre 16 ein Teiler von 4

- $32x + 16y = 40$

Auch diese Gleichung hat keine ganzzahlige Lösung, sonst wäre 16 ein Teiler von 40

- $32x + 16y = 9$

Diese Gleichung hat ebenfalls keine ganzzahlige Lösung, sonst wäre 16 ein Teiler von 9

- $97x + 101y = 17$

Es ist:

$$\text{ggT}(97, 101) = 1,$$

$$1 = (-24) \cdot 101 + 25 \cdot 97$$

Damit hat die obige Gleichung eine ganzzahlige Lösung, es ist:

$$17 = (-408) \cdot 101 + 425 \cdot 97.$$

Ich habe einfach beide Seiten der obigen Gleichung mit 17 multipliziert.